CHUYÊN ĐỀ 19	TÍCH PHÂN, PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

MỤC LỤC

Phần A. CÂU HỎI

Dạng 1. Tích phân cơ bản

Dạng 1.1 Áp dụng TÍNH CHẤT để giải

Câu 1. (Mã 103 - BGD - 2019) Biết $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = 6$, khi đó $\int_1^2 \left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. B. -4. C. 4. D. -8.

Câu 2. (Mã 102 - BGD - 2019) Biết tích phân $\int_0^1 f(x)dx = 3$ và $\int_0^1 g(x)dx = -4$. Khi đó $\int_0^1 \left[f(x) + g(x)\right]dx$ bằng

A. -7. B. 7. C. -1. D. 1.

Câu 3. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Biết $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = -4$, khi đó $\int_0^1 \left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. B. -6. C. -2. D. 2.

Câu 4. (Mã đề 101 - BGD - 2019) Biết $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -2$ và $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 3$, khi đó $\int_0^1 \left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. B. 1. C. -5. D. 5.

Câu 5. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 5$, khi $\int_0^1 \left[f(x) - 2g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -8 B. 1 C. -3 D. 12

Câu 6. (THPT BA ĐÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Khẳng định nào trong các khẳng định sau đúng với mọi hàm f, g liên tục trên K và a, b là các số bất kỳ thuộc K?

A. $\int_a^b [f(x)+2g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + 2\int_a^b g(x)dx$. B. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

C. $\int_a^b [f(x).g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx . \int_a^b g(x)dx$. D. $\int_a^b f^2(x)dx = \left[\int_a^b f(x)dx\right]^2$.

Câu 7. (THPT CẨM GIÀNG 2 NĂM 2018-2019) Cho $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 1$, $\int_{-2}^{4} f(t)dt = -4$. Tính $\int_2^4 f(y)dy$.

A. $I=5$. B. $I=-3$. C. $I=3$. D. $I=-5$.

Câu 8. (THPT CÙ HUY CẬN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $\int_0^2 f(x)dx = 3$ và $\int_0^2 g(x)dx = 7$, khi đó $\int_0^2 [f(x)+3g(x)]dx$ bằng

A. 16. B. -18. C. 24. D. 10.

Câu 9. (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2) Cho $\int_0^1 f(x)\,dx = -1$; $\int_0^3 f(x)\,dx = 5$. Tính $\int_1^3 f(x)\,dx$

A. 1. B. 4. C. 6. D. 5.

Câu 10. (THPT QUỲNH LƯU 3 NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Cho $\int_1^2 f(x)dx = -3$ và $\int_2^3 f(x)dx = 4$. Khi đó $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. 12. B. 7. C. 1. D. -12.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1;2]$, $f(-1)=8; f(2)=-1$. Tích phân $\int_{-1}^{2} f'(x)dx$ bằng

A. 1. B. 7. C. -9. D. 9.

Câu 12. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có $\int_0^2 f(x)dx = 9$; $\int_2^4 f(x)dx = 4$. Tính $I = \int_0^4 f(x)dx$.

A. $I=5$. B. $I=36$. C. $I=\frac{9}{4}$. D. $I=13$.

Câu 13. (ĐỀ THI THỬ VTED 02 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho $\int_{-1}^{0} f(x)dx = 3\int_0^3 f(x)dx = 3$. Tích phân $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. 6 B. 4 C. 2 D. 0

Câu 14. (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=10$, $\int_3^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Tích phân $\int_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. B. 7. C. 3. D. 6.

Câu 15. (TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM HƯNG YÊN NĂM 2018-2019) Nếu $F'\left(x\right)=\dfrac{1}{2x-1}$ và $F\left(1\right)=1$ thì giá trị của $F\left(4\right)$ bằng

A. $\ln 7$. B. $1+\dfrac{1}{2}\ln 7$. C. $\ln 3$. D. $1+\ln 7$.

Câu 16. (THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $\int_1^8 f\left(x\right)\mathrm{d}x=9$, $\int_4^{12} f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$, $\int_4^8 f\left(x\right)\mathrm{d}x=5$.

Tính $I=\int_1^{12} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=17$. B. $I=1$. C. $I=11$. D. $I=7$.

Câu 17. (THPT QUANG TRUNG ĐỐNG ĐA HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;10\right]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f\left(x\right)dx=7$, $\int_2^6 f\left(x\right)dx=3$. Tính $P=\int_0^2 f\left(x\right)dx+\int_6^{10} f\left(x\right)dx$.

A. $P=10$. B. $P=4$. C. $P=7$. D. $P=-6$.

Câu 18. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN LẦN 3 NĂM 2018-2019) Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $\left[1;3\right]$ thoả:

$\int_1^3\left[f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=10$, $\int_1^3\left[2f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_1^3\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$.

A. 7. B. 6. C. 8. D. 9.

Câu 19. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;10\right]$ và $\int_0^{10} f\left(x\right)dx=7$; $\int_2^6 f\left(x\right)dx=3$. Tính $P=\int_0^2 f\left(x\right)dx+\int_6^{10} f\left(x\right)dx$.

A. $P=4$ B. $P=10$ C. $P=7$ D. $P=-4$

Câu 20. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) Cho f,g là hai hàm số liên tục trên $\left[1;3\right]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3\left[f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=10$ đồng thời $\int_1^3\left[2f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_1^3\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$.

A. 9. B. 6. C. 7. D. 8.

Câu 21. (THPT ĐÔNG SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho f, g là hai hàm liên tục trên $\left[1;3\right]$ thỏa: $\int_1^3\left[f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=10$ và $\int_1^3\left[2f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_1^3\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$.

A. 8. B. 7. C. 9. D. 6.

Dạng 1.2 Áp dụng bảng công thức cơ bản

Câu 22. (MĐ 104 BGD&DT NĂM 2017) Cho $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 5$. Tính $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) + 2\sin x\right]\mathrm{d}x = 5$.

A. $I = 7$ B. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$ C. $I = 3$ D. $I = 5 + \pi$

Câu 23. (MÃ ĐỀ 110 BGD&DT NĂM 2017) Cho $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int_{-1}^{2} \left[x + 2f(x) - 3g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{17}{2}$ B. $I = \frac{5}{2}$ C. $I = \frac{7}{2}$ D. $I = \frac{11}{2}$

Câu 24. (THPT HÀM RỒNG THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 1) Cho hai tích phân $\int_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 8$ và $\int_{5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int_{-2}^{5} \left[f(x) - 4g(x) - 1\right]\mathrm{d}x$

A. 13. B. 27. C. -11. D. 3.

Câu 25. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)dx = -1$, khi đó $\int_{-1}^{2} [x + 2f(x) + 3g(x)]dx$ bằng

A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{7}{2}$ C. $\frac{17}{2}$ D. $\frac{11}{2}$

Câu 26. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 3$, $\int_{0}^{2} g(x)\mathrm{d}x = -1$ thì $\int_{0}^{2} \left[f(x) - 5g(x) + x\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 12. B. 0. C. 8. D. 10

Câu 27. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH LẦN 1 NĂM 2018-2019) Cho $\int_{0}^{5} f(x)\mathrm{d}x = -2$. Tích phân $\int_{0}^{5} \left[4f(x) - 3x^2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -140. B. -130. C. -120. D. -133.

Câu 28. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $\int_{1}^{2} \left[4f(x) - 2x\right]dx = 1$. Khi đó $\int_{1}^{2} f(x)dx$ bằng:

A. 1. B. -3. C. 3. D. -1.

Câu 29. (ĐỀ THI THỬ VTED 03 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho $\int_0^1 f(x)dx = 1$ tích phân $\int_0^1 \left(2f(x) - 3x^2\right)dx$ bằng

A. 1. B. 0. C. 3. D. -1.

Câu 30. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Tính tích phân $I = \int_{-1}^{0} (2x+1)dx$.

A. $I = 0$. B. $I = 1$. C. $I = 2$. D. $I = -\frac{1}{2}$.

Câu 31. (Mã 103 - BGD - 2019) Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\sin^2 x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi^2 + 16\pi - 4}{16}$. B. $\frac{\pi^2 - 4}{16}$. C. $\frac{\pi^2 + 15\pi}{16}$. D. $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$.

Câu 32. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\sin^2 x + 3$, $\forall x \in R$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi^2 - 2}{8}$. B. $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8}{8}$. C. $\frac{\pi^2 + 8\pi - 2}{8}$. D. $\frac{3\pi^2 + 2\pi - 3}{8}$.

Câu 33. (Mã 102 - BGD - 2019) Cho hàm số $f(x)$.Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\cos^2 x + 3,\ \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{\pi^2 + 8\pi + 8}{8}$. B. $\frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}$. C. $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}$. D. $\frac{\pi^2 + 2}{8}$.

Câu 34. Tích phân $\int_0^1 (3x+1)(x+3)\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. B. 9. C. 5. D. 6.

Câu 35. (KTNL GV THPT LÝ THÁI TỔ NĂM 2018-2019) Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

A. 0. B. 1. C. -1. D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 36. (KTNL GV BẮC GIANG NĂM 2018-2019) Tính tích phân $I = \int_0^2 (2x+1)dx$

A. $I = 5$. B. $I = 6$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.

Câu 37. Với a,b là các tham số thực. Giá trị tích phân $\int_0^b \left(3x^2-2ax-1\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. b^3-b^2a-b. B. b^3+b^2a+b. C. b^3-ba^2-b. D. $3b^2-2ab-1$.

Câu 38. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) 1 Biết rằng hàm số $f\left(x\right)=mx+n$ thỏa mãn $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$, $\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=8$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $m+n=4$. B. $m+n=-4$. C. $m+n=2$. D. $m+n=-2$.

Câu 39. (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Giả sử $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx=a+b\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(a,b\in\mathbb{Q}\right)$. Khi đó giá trị của $a-b$ là

A. $-\frac{1}{6}$ B. $-\frac{1}{6}$ C. $-\frac{3}{10}$ D. $\frac{1}{5}$

Câu 40. (CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH YÊN BÁI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 \left(f\left(x\right)+3x^2\right)\mathrm{d}x=10$. Tính $\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. 2. B. -2. C. 18. D. -18.

Câu 41. (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $\int_0^m \left(3x^2-2x+1\right)dx=6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(-1;2\right)$. B. $\left(-\infty;0\right)$. C. $\left(0;4\right)$. D. $\left(-3;1\right)$.

Câu 42. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) Biết rằng hàm số $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-2$ và

A. $-\frac{3}{4}$. B. $-\frac{4}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{3}{4}$.

Dạng 2. Tích phân HÀM HỮU TỶ

Câu 43. (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

A. $\frac{1}{2}\ln 35$ B. $\ln\frac{7}{5}$ C. $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$ D. $2\ln\frac{7}{5}$

Câu 44. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$ bằng

A. $2\ln 2$ B. $\frac{1}{3}\ln 2$ C. $\frac{2}{3}\ln 2$ D. $\ln 2$

Câu 45. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\frac{2}{15}$ B. $\frac{16}{225}$ C. $\log\frac{5}{3}$ D. $\ln\frac{5}{3}$

Câu 46. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx = a\ln 2 + b\ln 3$ với a,b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+2b=0$ B. $a+b=2$ C. $a-2b=0$ D. $a+b=-2$

Câu 47. (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tính tích phân $I=\int_1^e \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$

A. $I=\frac{1}{e}$ B. $I=\frac{1}{e}+1$ C. $I=1$ D. $I=e$

Câu 48. (THPT HÙNG VƯƠNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tính tích phân $I=\int_0^3 \frac{dx}{x+2}$.

A. $I=-\frac{21}{100}$. B. $I=\ln\frac{5}{2}$. C. $I=\log\frac{5}{2}$. D. $I=\frac{4581}{5000}$.

Câu 49. (THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019) $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$ bằng

A. $2\ln 2$. B. $\frac{2}{3}\ln 2$. C. $\ln 2$. D. $\frac{1}{3}\ln 2$.

Câu 50. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{x-1}{x}dx$.

A. $I=1-\ln 2$. B. $I=\frac{7}{4}$. C. $I=1+\ln 2$. D. $I=2\ln 2$.

Câu 51. (THPT QUỲNH LƯU 3 NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$. Khi đó giá trị $a+b+c$ bằng

A. -3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 52. Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x}dx = a+b\ln c$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}, c<9$. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=7$. B. $S=5$. C. $S=8$. D. $S=6$.

Câu 53. (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Biết $I=\int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2}dx = a\ln\frac{2}{3}+b, (a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó giá trị của $a+4b$ bằng

A. 50 B. 60 C. 59 D. 40

Câu 54. (PEN I - THẦY LÊ ANH TUẤN - ĐỀ 3 - NĂM 2019) Biết $\int_0^1 \frac{x^2-2}{x+1}dx = \frac{-1}{m}+n\ln 2$, với m,n là các số nguyên. Tính $m+n$.

A. $S=1$. B. $S=4$. C. $S=-5$. D. $S=-1$.

Câu 55. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tích phân $I=\int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x = a-\ln b$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b$.

A. 1. B. 0. C. -1. D. 3.

Câu 56. (CHUYÊN TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Biết $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}\mathrm{d}x = a+\ln\frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S=a-2b$.

A. $S=2$. B. $S=-2$. C. $S=5$. D. $S=10$.

Câu 57. (THPT GANG THÉP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019) Cho $\int_1^2 \left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{10}{b}+\ln\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $P=a+b$?

A. $P=1$. B. $P=5$. C. $P=7$. D. $P=2$.

Câu 58. (THPT CHUYÊN SƠN LA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx = a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 59. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $\int_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x = a\ln 3+b\ln 2+c\ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của 2^{a-3b+c} bằng

A. 12 B. 6 C. 1 D. 64

Câu 60. Biết $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}\mathrm{d}x = a+\ln\frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S=a-2b$.

A. $S=2$. B. $S=-2$. C. $S=5$. D. $S=10$.

Câu 61. Biết rằng $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi\sqrt{a}}{b}$ $(a,b\in\mathbb{Z}, a<10)$. Khi đó $a+b$ có giá trị bằng

A. 14. B. 15. C. 13. D. 12.

Câu 62. (ĐỀ THI CÔNG BẰNG KHTN LẦN 02 NĂM 2018-2019) Biết $\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x = a+b\ln 3+c\ln 5$, $(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Giá trị của abc bằng

A. -8. B. -10. C. -12. D. 16.

Câu 63. (THPT NGUYỄN TRÃI - ĐÀ NẴNG - 2018) Giả sử rằng $\int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2}dx = a\ln\frac{2}{3}+b$. Khi đó, giá trị của $a+2b$ là

A. 30. B. 60. C. 50. D. 40.

Câu 64. (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx = \frac{-11}{3}\ln 2+b\ln 3+c\ (b,c\in Q)$. Tính $\frac{b}{c}$?

A. $\frac{22}{3}$. B. $\frac{22\pi}{3}$. C. $\frac{22}{3\pi}$. D. $\frac{22\pi}{13}$.

Câu 65. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH LẦN 1 NĂM 2018-2019) Biết $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3}\mathrm{d}x = \frac{a}{b}+c\ln 5$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P=a-b^2-c^3$.

A. -5. B. -4. C. 5. D. 0.

Câu 66. (TT THANH TƯỜNG NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho $\int_0^1 \frac{4x^2+15x+11}{2x^2+5x+2}\mathrm{d}x = a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Biểu thức $T=a.c-b$ bằng

A. 4. B. 6. C. $\frac{-1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Dạng 3. Giải tích phân bằng phương pháp VI PHÂN

Câu 67. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Tính: $I=F(e)-F(1)$?

A. $I=\frac{1}{2}$ B. $I=\frac{1}{e}$ C. $I=1$ D. $I=e$

Câu 68. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) $\int_0^1 e^{3x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^4+e)$ B. e^3-e C. $\frac{1}{3}(e^4-e)$ D. e^4-e

Câu 69. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) $\int_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^5+\mathrm{e}^2\right)$ B. $\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2\right)$ C. $\frac{1}{3}\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2$ D. $\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2$

Câu 70. (MÃ ĐỀ 123 BGD&DT NĂM 2017) Cho $\int_0^6 f(x)dx=12$. Tính $I=\int_0^2 f(3x)dx$.

A. $I=5$ B. $I=36$ C. $I=4$ D. $I=6$

Câu 71. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $\int_1^2 e^{3x-1}\mathrm{d}x = m\left(e^p-e^q\right)$ với m, p, $q\in\mathbb{Q}$ và là các phân số tối giản. Giá trị $m+p+q$ bằng

A. 10. B. 6. C. $\frac{22}{3}$. D. 8.

Câu 72. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tích phân $I=\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. $\ln 2-1$. B. $-\ln 2$. C. $\ln 2$. D. $1-\ln 2$.

Câu 73. (TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM HƯNG YÊN NĂM 2018-2019) Tính $K=\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

A. $K=\ln 2$. B. $K=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$. C. $K=2\ln 2$. D. $K=\ln\frac{8}{3}$.

Câu 74. Biết rằng $\int_0^1 xe^{x^2+2}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\left(e^b-e^c\right)$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 4. B. 7. C. 5. D. 6.

Câu 75. (KTNL GV THPT LÝ THÁI TỔ NĂM 2018-2019) Biết $\int_1^e \frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx=\ln\left(ae+b\right)$ với a,b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2-ab+b^2$.

A. 3. B. 1. C. 0. D. 8.

Câu 76. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Biết $\int_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}}dx=me^{\frac{p}{q}}-n$, trong đó m,n,p,q là các số nguyên dương và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính $T=m+n+p+q$.

A. $T=11$. B. $T=10$. C. $T=7$. D. $T=8$.

Câu 77. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(x\right)=\int_{2x}^{x^2}\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t^2}$ là

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 78. (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn $f\left(0\right)=f\left(1\right)=5$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f'\left(x\right)e^{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=10$ B. $I=-5$ C. $I=0$ D. $I=5$

Dạng 4. Giải tích phân bằng phương pháp ĐỔI BIẾN SỐ

Dạng 4.1 Hàm số tường minh

Dạng 4.1.1 Hàm số chứa căn thức

Câu 79. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho $\int_5^{21}\frac{dx}{x\sqrt{x+4}}=a\ln 3+b\ln 5+c\ln 7$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a-b=-2c$ B. $a+b=-2c$ C. $a+b=c$ D. $a-b=-c$

Câu 80. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho $\int_{16}^{55}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 11$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=3c$ B. $a-b=-3c$ C. $a-b=-c$ D. $a+b=c$

Câu 81. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Tính tích phân $I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ bằng cách đặt $u=x^2-1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\int\limits_0^3 \sqrt{u}du$ B. $I=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \sqrt{u}du$ C. $I=2\int\limits_0^3 \sqrt{u}du$ D. $I=\int\limits_1^2 \sqrt{u}du$

Câu 82. (SGD - NAM ĐỊNH - LẦN 1 - 2018) Biết tích phân $\int\limits_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}}dx = a+b\ln 2+c\ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=-1$. B. $T=0$. C. $T=2$. D. $T=1$.

Câu 83. (CHUYÊN VINH - LẦN 1 - 2018) Tích phân $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ bằng

A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 84. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Biết $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx = \sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$

A. $P=18$ B. $P=46$ C. $P=24$ D. $P=12$

Câu 85. (CHUYÊN TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Biết $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx = a+b\sqrt{2}$ với a,b là các số hữu tỷ. Tính $S=a+b$.

A. $S=1$. B. $S=\frac{1}{2}$. C. $S=\frac{3}{4}$. D. $S=\frac{2}{3}$.

Câu 86. (THPT GANG THÉP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019) Cho tích phân $I=\int\limits_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16-x^2}dx$ và $x=4\sin t$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt$. B. $I=16\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t dt$.

C. $I=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2t)dt$. D. $I=-16\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t dt$.

Câu 87. (ĐỀ THI CÔNG BẰNG KHTN LẦN 02 NĂM 2018-2019) Biết $\int\limits_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}dx = a+b\ln 3+c\ln 5$ $(a,b,c\in Q)$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $\frac{7}{3}$. B. $\frac{5}{3}$. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 88. (ĐỀ THI THỬ VTED 03 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}dx = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{b}{c}+\sqrt{d}\right)$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 12 B. 10 C. 18 D. 15

Câu 89. (LÊ QUÝ ĐÔN - QUẢNG TRỊ - LẦN 1 - 2018) Cho biết $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}\mathrm{d}x = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản. Tính $m-7n$

A. 0. B. 1. C. 2. D. 91.

Câu 90. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Biết rằng $\int_0^1 \frac{dx}{3x+5\sqrt{3x+1}+7} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $-\frac{10}{3}$ B. $-\frac{5}{3}$ C. $\frac{10}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

Câu 91. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx = a+b\sqrt{2}$ với a,b là các số hữu tỷ. Tính $S=a+b$.

A. $S=1$. B. $S=\frac{1}{2}$. C. $S=\frac{3}{4}$. D. $S=\frac{2}{3}$.

Câu 92. (THPT NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx = \frac{a}{3} + b\ln 2 + c\ln 3$ với a,b,c là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$ bằng:

A. 9 B. 2 C. 1 D. 7

Câu 93. (THPT BA ĐÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho $I = \int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \frac{a}{d} + b\ln 2 + c\ln d$, với a,b,c,d là các số nguyên và $\frac{a}{d}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 16. B. 4. C. 28. D. -2.

Câu 94. Tính $I = \int_0^a \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

A. $I = \left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1} - 1$. B. $I = \frac{1}{3}\left[\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1} - 1\right]$.

C. $I = \frac{1}{3}\left[\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1} + 1\right]$. D. $I = \left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1} + 1$.

Câu 95. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN - 2018) Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$ bằng tích phân nào dưới đây?

A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 y\mathrm{d}y$. B. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x$. C. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 y}{\cos y}\mathrm{d}y$. D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 y\mathrm{d}y$.

Câu 96. (THPT CHUYÊN THĂNG LONG - ĐÀ LẠT - 2018) Biết $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{b}{a}\ln 5 - c\ln 2$ với a,b,c là các số nguyên và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản. Tính $P=3a+2b+c$.

A. 11. B. 12. C. 14. D. 13.

Câu 97. (THPT BÌNH GIANG - HẢI DƯƠNG - 2018) Cho tích phân $\int_1^4 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx = a+b\sqrt{6}+c\ln\left(\frac{5\sqrt{6}+12}{5\sqrt{6}-12}\right)+d\ \ln 2$ với a,b,c,d là các số hữu tỉ. Tính tổng $a+b+c+d$.

A. $-\frac{1}{3}$. B. $-\frac{3}{25}$. C. $-\frac{3}{2}$. D. $-\frac{3}{20}$.

Câu 98. (SỞ GD&ĐT HƯNG YÊN - 2018) Cho tích phân $I=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$ nếu đổi biến số $x=2\sin t, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì ta được.

A. $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}t$. B. $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}t$. C. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\mathrm{d}t$. D. $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Câu 99. (THPT PHÚ LƯƠNG - THÁI NGUYÊN - 2018) Biết $\int_0^1 \frac{x^3}{x+\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{a\sqrt{b}+c}{15}$ với a, b, c là các số nguyên và $b\ge 0$. Tính $P=a+b^2-c$.

A. $P=3$. B. $P=7$. C. $P=-7$. D. $P=5$.

Câu 100. Cho n là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân $I=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n x\mathrm{d}x$ theo n.

A. $I=\frac{1}{2n+2}$. B. $I=\frac{1}{2n}$. C. $I=\frac{1}{2n-1}$. D. $I=\frac{1}{2n+1}$.

Câu 101. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN LẦN 3 NĂM 2018-2019) Giả sử $I=\int_1^{64}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=a\ln\frac{2}{3}+b$ với a, b là số nguyên. Khi đó giá trị $a-b$ là

A. -17. B. 5. C. -5. D. 17.

Câu 102. (CHUYÊN TRẦN PHÚ - HẢI PHÒNG - LẦN 2 - 2018) Biết $\int_1^2\frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\mathrm{d}x=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{35}$ với a, b, c là các số hữu tỷ, tính $P=a+2b+c-7$.

A. $-\frac{1}{9}$. B. $\frac{86}{27}$. C. -2. D. $\frac{67}{27}$.

Câu 103. (THPT PHAN CHU TRINH - ĐẮC LẮC - 2018) Biết $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=44$. B. $P=42$. C. $P=46$. D. $P=48$.

Câu 104. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ - 2018) Biết $\int_0^4\frac{\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x}{2x+3\sqrt{2x+1}+3}=a+b\ln 2+c\ln\frac{5}{3}\ (a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính $T=2a+b+c$.

A. $T=4$. B. $T=2$. C. $T=1$. D. $T=3$.

Dạng 4.1.2 Hàm số chứa hàm lượng giác

Câu 105. (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Tính tích phân $I=\int_0^{\pi}\cos^3 x.\sin x dx$.

A. $I=-\frac{1}{4}$ B. $I=-\frac{1}{4}\pi^4$ C. $I=-\pi^4$ D. $I=0$

Câu 106. (THPT KINH MÔN - HD - LẦN 2 - 2018) Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x-5\sin x+6}dx=a\ln\frac{4}{c}+b$, tính tổng $S=a+b+c$

A. $S=1$. B. $S=4$. C. $S=3$. D. $S=0$.

Câu 107. (SGD - BÌNH DƯƠNG - HK 2 - 2018) Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+\cos x}.\sin x dx$. Nếu đặt $t=2+\cos x$ thì kết quả nào sau đây đúng?

A. $I=\int_3^2\sqrt{t}dt$. B. $I=\int_2^3\sqrt{t}dt$. C. $I=2\int_3^2\sqrt{t}dt$. D. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{t}dt$.

Câu 108. (SGD&ĐT ĐỒNG THÁP - HKII - 2018) Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$ bằng cách đặt $u=\tan x$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}u^2du$. B. $I=\int_0^2\frac{1}{u^2}du$. C. $I=-\int_0^1 u^2du$. D. $I=\int_0^1 u^2du$.

Câu 109. (THTP LÊ QUÝ ĐÔN - HÀ NỘI - LẦN 1 - 2018) Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$.

A. $I=\frac{5}{2}$. B. $I=\frac{3}{2}$. C. $I=\frac{\pi}{3}+\frac{9}{20}$. D. $I=\frac{9}{4}$.

Câu 110. (THPT LÝ THÁI TỔ - BẮC NINH - 2018) Cho tích phân $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+2}dx=a\ln 5+b\ln 2$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a+b=0$. B. $a-2b=0$. C. $2a-b=0$. D. $a+2b=0$.

Câu 111. (THPT ĐÔNG SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 02) Có bao nhiêu số $a\in(0;20\pi)$ sao cho $\int_0^a\sin^5 x\sin 2x dx=\frac{2}{7}$.

A. 10. B. 9. C. 20. D. 19.

Câu 112. (HSG BẮC NINH NĂM 2018-2019) Biết $F(x)$ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ và $F(0)=2$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}-8}{3}$ B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}+8}{3}$ C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4\sqrt{2}-8}{3}$ D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4\sqrt{2}+8}{3}$

Câu 113. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{1+\sin x}=\frac{a\sqrt{3}+b}{c}$, với $a,b\in\mathbb{Z},c\in\mathbb{Z}^+$ và a,b,c là các số nguyên tố cùng nhau. Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng

A. 5. B. 12. C. 7. D. -1.

Câu 114. Cho tích phân số $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+2}dx=a\ln 5+b\ln 2$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a+b=0$. B. $a-2b=0$. C. $2a-b=0$.. D. $a+2b=0$..

Câu 115. (THPT NGHEN - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(\cos x)^2-5\cos x+6}dx=a\ln\frac{4}{c}+b$, với a, b là các số hữu tỉ, $c>0$. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=3$. B. $S=0$. C. $S=1$. D. $S=4$.

Dạng 4.13. Hàm số chứa hàm số mũ, logarit

Câu 116. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Cho $\int_0^1\frac{dx}{e^x+1}=a+b\ln\frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=-2$. B. $S=0$. C. $S=1$. D. $S=2$.

Câu 117. (SGD&ĐT CẦN THƠ - HKII - 2018) Cho tích phân $I=\int_1^e\frac{3\ln x+1}{x}dx$. Nếu đặt $t=\ln x$ thì

A. $I=\int_0^1\frac{3t+1}{e^t}dt$. B. $I=\int_1^e\frac{3t+1}{t}dt$. C. $I=\int_1^e(3t+1)dt$. D. $I=\int_0^1(3t+1)dt$.

Câu 118. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $I=\int_1^e\frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}dx=a\ln 3+b\ln 2+\frac{c}{3}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đâu đúng.

A. $a^2+b^2+c^2=1$. B. $a^2+b^2+c^2=11$. C. $a^2+b^2+c^2=9$. D. $a^2+b^2+c^2=3$.

Câu 119. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Biết $I=\int_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)dx=a\ln 5+b\ln 3+c$ trong đó a,b,c là các số thực. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ là:

A. $T=11$. B. $T=9$. C. $T=10$. D. $T=8$.

Câu 120. Cho $I=\int_1^e\frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}dx$ có kết quả dạng $I=\ln a+b$ với $a>0$, $b\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2ab=-1$. B. $2ab=1$. C. $-b+\ln\frac{3}{2a}=-\frac{1}{3}$. D. $-b+\ln\frac{3}{2a}=\frac{1}{3}$.

Câu 121. (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $\int\limits_1^e \frac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}dx=\ln\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ với a, b, c là các số nguyên dương, biết $\frac{a}{b};\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị $a+b+c+d$?

A. 18. B. 15. C. 16. D. 17.

Câu 122. [KIM LIÊN - HÀ NỘI - LẦN 1 - 2018] Biết $\int\limits_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+ex^3.2^x}{\pi+e.2^x}dx=\frac{1}{m}+\frac{1}{e\ln n}\ln\left(p+\frac{e}{e+\pi}\right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $S=m+n+p$.

A. $S=6$. B. $S=5$. C. $S=7$. D. $S=8$.

Câu 123. (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2) Cho $\int\limits_1^e \frac{(3x^3-1)\ln x+3x^2-1}{1+x\ln x}dx=a.e^3+b+c.\ln(e+1)$ với a,b,c là các số nguyên và $\ln e=1$. Tính $P=a^2+b^2+c^2$.

A. $P=9$. B. $P=14$. C. $P=10$. D. $P=3$.

Câu 124. (ĐỀ 01 ĐỀ PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Biết $I=\int_0^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+3e^{-x}+4}=\frac{1}{c}(\ln a-\ln b+\ln c)$ với a, b, c là các số nguyên dương.

Tính $P=2a-b+c$.

A. $P=-3$. B. $P=-1$. C. $P=4$. D. $P=3$

Câu 125. (THPT CHUYÊN HẠ LONG - LẦN 2 - 2018) Biết $\int\limits_1^2 \frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx=\ln(\ln a+b)$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P=a^2+b^2+ab$.

A. 10. B. 8. C. 12. D. 6.

Câu 126. (THPT CHUYÊN THÁI BÌNH - LẦN 4 - 2018) Cho $\int\limits_0^1 \frac{(x^2+x)e^x}{x+e^{-x}}dx=a.e+b\ln(e+c)$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+2b-c$.

A. $P=1$. B. $P=-1$. C. $P=0$. D. $P=-2$.

Dạng 4.1.4 Hàm số hữu tỷ, đa thức

Câu 127. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. 2 B. 1 C. -2 D. -1

Câu 128. (TT HOÀNG HOA THÁM - 2018-2019) Tính $K=\int\limits_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$ bằng

A. $K=\ln 2$. B. $K=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$. C. $K=2\ln 2$. D. $K=\ln\frac{8}{3}$.

Câu 129. (CHUYÊN LONG AN - LẦN 1 - 2018) Cho tích phân $I=\int\limits_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5}dx$, giả sử đặt $t=1+x^2$. Tìm mệnh đề đúng.

A. $I=\frac{1}{2}\int\limits_1^2\frac{(t-1)^3}{t^5}\mathrm{d}t$. B. $I=\int\limits_1^3\frac{(t-1)^3}{t^5}\mathrm{d}t$.

C. $I=\frac{1}{2}\int\limits_1^2\frac{(t-1)^3}{t^4}\mathrm{d}t$. D. $I=\frac{3}{2}\int\limits_1^4\frac{(t-1)^3}{t^4}\mathrm{d}t$.

Câu 130. (KTNL GIA BÌNH NĂM 2018-2019) Có bao nhiêu số thực a để $\int\limits_0^1\frac{x}{a+x^2}dx=1$.

A. 2 B. 1 C. 0 D. 3

Câu 131. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho $\int\limits_0^1\frac{xdx}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. -2 B. -1 C. 2 D. 1

Câu 132. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho $\int 2x(3x-2)^6\,\mathrm{d}x=A(3x-2)^8+B(3x-2)^7+C$ với $A,B,C\in\mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $12A+7B$.

A. $\frac{23}{252}$ B. $\frac{241}{252}$ C. $\frac{52}{9}$ D. $\frac{7}{9}$

Câu 133. (CHUYÊN HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Biết $\int\limits_0^1\frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x=a-\ln b$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $P=a^2+b^2$.

A. 13. B. 5. C. 4. D. 10.

Dạng 4.2 Hàm số không tường minh (hàm ẩn)

Câu 134. (THPT CẨM GIÀNG 2 NĂM 2018-2019) Cho biết $\int\limits_{-1}^5 f(x)\mathrm{d}x=15$. Tính giá trị của $P=\int\limits_0^2\left[f(5-3x)+7\right]\mathrm{d}x$.

A. $P=15$. B. $P=37$. C. $P=27$. D. $P=19$.

Câu 135. (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1) Cho $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=2018$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2\left[f(2x)+f(4-2x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=0$. B. $I=2018$. C. $I=4036$. D. $I=1009$.

Câu 136. Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-6;6]$. Biết rằng $\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=8$; $\int\limits_1^3 f(-2x)\mathrm{d}x=3$. Giá trị của $I=\int\limits_{-1}^6 f(x)\mathrm{d}x$ là

A. $I=5$. B. $I=2$. C. $I=14$. D. $I=11$.

Câu 137. (THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^{\pi^2} f\left(x\right)\mathrm{d}x = 2018$, tính $I = \int\limits_0^{\pi} xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = 1008$. B. $I = 2019$. C. $I = 2017$. D. $I = 1009$.

Câu 138. (CHUYEN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\int\limits_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. B. 4. C. 2. D. 8.

Câu 139. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho $\int\limits_1^2 f\left(x^2+1\right)x\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $I = \int\limits_2^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. B. 1. C. 4. D. -1.

Câu 140. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) 1 Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $\left[1;3\right]$ thỏa mãn điều kiện $\int\limits_1^3 \left[f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=10$ đồng thời $\int\limits_1^3 \left[2f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=6$. Tính $\int\limits_1^3 f\left(4-x\right)\mathrm{d}x + 2\int\limits_1^2 g\left(2x-1\right)\mathrm{d}x$

A. 9. B. 6. C. 7. D. 8.

Câu 141. (TT THANH TƯỜNG NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_0^2 f\left(3x+1\right)\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int\limits_0^7 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = 16$. B. $I = 18$. C. $I = 8$. D. $I = 20$.

Câu 142. (THPT QUỲNH LƯU 3 NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Cho $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x\right) = f\left(10-x\right)$ và $\int\limits_3^7 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_3^7 xf\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. 80. B. 60. C. 40. D. 20.

Câu 143. (THPT QUANG TRUNG ĐỐNG ĐA HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 9$. Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} f\left(\sin 3x\right)\cos 3x\mathrm{d}x$.

A. $I = 5$. B. $I = 9$. C. $I = 3$. D. $I = 2$.

Câu 144. (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2018-2019 LẦN 1) Cho tích phân $I = \int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 32$. Tính tích phân $J = \int\limits_0^2 f\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

A. $J = 32$ B. $J = 64$ C. $J = 8$ D. $J = 16$

Câu 145. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Biết $f\left(x\right)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{0}^{9} f\left(x\right)\mathrm{d}x = 9$. Khi đó giá trị của $\int_{1}^{4} f\left(3x-3\right)\mathrm{d}x$ là

A. 0. B. 24. C. 27. D. 3.

Câu 146. (ĐỀ THI CÔNG BẰNG KHTN LẦN 02 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_{0}^{1} f(2x)dx = 2$ .Tích phân $\int_{0}^{2} f(x)dx$ bằng

A. 8. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 147. Cho hàm $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\int_{0}^{2017} f\left(x\right)\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \int_{0}^{1} f\left(2017x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{1}{2017}$. B. $I = 0$. C. $I = 2017$. D. $I = 1$.

Câu 148. Cho tích phân $\int_{1}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x = a$. Hãy tính tích phân $I = \int_{0}^{1} xf\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x$ theo a.

A. $I = 4a$. B. $I = \dfrac{a}{4}$. C. $I = \dfrac{a}{2}$. D. $I = 2a$.

Câu 149. (TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM HƯNG YÊN NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_{e}^{e^2} \dfrac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x = 2$. Tính $\int_{\frac{1}{4}}^{2} \dfrac{f\left(2x\right)}{x}\mathrm{d}x$.

A. 0. B. 1. C. 4. D. 8.

Câu 150. (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1) Cho hàm số $y = f\left(x\right) = \begin{cases} x^2+3x^2 ; x \ge 1 \\ 5-x ; x < 1 \end{cases}$. Tính $I = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)\cos x\mathrm{d}x + 3\int_{0}^{1} f\left(3-2x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{71}{6}$. B. $I = 31$. C. $I = 32$. D. $I = \dfrac{32}{3}$.

Câu 151. (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Cho $I = \int_{1}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x = 2$. Giá trị của $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin xf\left(\sqrt{3\cos x+1}\right)}{\sqrt{3\cos x+1}}\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. B. $-\dfrac{4}{3}$. C. $\dfrac{4}{3}$. D. -2.

Câu 152. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Biết $\int_{1}^{4} f\left(x\right)dx = 5$ và $\int_{4}^{5} f\left(x\right)dx = 20$. Tính $\int_{1}^{2} f\left(4x-3\right)dx - \int_{0}^{\ln 2} f\left(e^{2x}\right)e^{2x}dx$.

A. $I = \dfrac{15}{4}$. B. $I = 15$. C. $I = \dfrac{5}{2}$. D. $I = 25$.

Câu 153. (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(2-x)=x.e^{x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=\dfrac{e^4-1}{4}$. B. $I=\dfrac{2e-1}{2}$. C. $I=e^4-2$. D. $I=e^4-1$.

Câu 154. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x)=3f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$ B. $I=6$ C. $I=3$ D. $I=2$

Câu 155. (TT HOÀNG HOA THÁM - 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x.f(\cos^2 x)dx=2$ và $\int_e^{e^2}\dfrac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}dx=2$. Tính $\int_{\frac{1}{4}}^{2}\dfrac{f(2x)}{x}dx$.

A. 0. B. 1. C. 4. D. 8.

Câu 156. (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x.f(\cos^2 x)dx=\int_1^8\frac{f(\sqrt[3]{x})}{x}dx=6.$$

Tính tích phân $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}\dfrac{f(x^2)}{x}dx$

A. 4 B. 6 C. 7 D. 10

Câu 157. (THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - ĐÀ NẴNG - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^{2018} f(x)\mathrm{d}x=2$. Khi đó tích phân $\int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}}\dfrac{x}{x^2+1}f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 158. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 4 - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=3$ và $\int_0^1\dfrac{x^2f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=1$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. B. $I=6$. C. $I=3$. D. $I=4$.

Câu 159. (SGD THANH HÓA - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f(\sin^2 x)\mathrm{d}x=\int_1^{16}\dfrac{f(\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $\int_{\frac{1}{8}}^{1}\dfrac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. B. $I=\dfrac{3}{2}$. C. $I=2$. D. $I=\dfrac{5}{2}$.

Câu 160. (SGD - NAM ĐỊNH - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[1;4\right]$ và thỏa mãn $f\left(x\right)=\dfrac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}+\dfrac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I=\int\limits_3^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=3+2\ln^2 2$. B. $I=2\ln^2 2$. C. $I=\ln^2 2$. D. $I=2\ln 2$.

Câu 161. (THPT CHUYÊN THĂNG LONG - ĐÀ LẠT - 2018) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thảo mãn: $7f\left(x\right)+4f\left(4-x\right)=2018x\sqrt{x^2+9}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{2018}{11}$. B. $\dfrac{7063}{3}$. C. $\dfrac{98}{3}$. D. $\dfrac{197764}{33}$.

Câu 162. (SỞ GD&ĐT NAM ĐỊNH - HKII - 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[1;4\right]$ và thỏa mãn $f(x)=\dfrac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}+\dfrac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I=\int\limits_3^4 f(x)\,dx$.

A. $I=3+2\ln^2 2$. B. $I=2\ln^2 2$. C. $I=\ln^2 2$. D. $I=2\ln 2$.

Dạng 5. Tích phân TỪNG PHẦN

Dạng 5.1 Hàm số tường minh

Câu 163. (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Tính tích phân $I=\int\limits_1^e x\ln x\,dx$:

A. $I=\dfrac{e^2-1}{4}$ B. $I=\dfrac{1}{2}$ C. $I=\dfrac{e^2-2}{2}$ D. $I=\dfrac{e^2+1}{4}$

Câu 164. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Cho $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\left(1+x\ln x\right)\mathrm{d}x=a\mathrm{e}^2+b\mathrm{e}+c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=c$ B. $a+b=-c$ C. $a-b=c$ D. $a-b=-c$

Câu 165. (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho $\int\limits_1^e\left(2+x\ln x\right)\mathrm{d}x=ae^2+be+c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=c$ B. $a-b=c$ C. $a-b=-c$ D. $a+b=-c$

Câu 166. Tích phân $\int\limits_0^1\left(x-2\right)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{-5-3\mathrm{e}^2}{4}$. B. $\dfrac{5-3\mathrm{e}^2}{4}$. C. $\dfrac{5-3\mathrm{e}^2}{2}$. D. $\dfrac{5+3\mathrm{e}^2}{4}$.

Câu 167. (THPT CẨM GIÀNG 2 NĂM 2018-2019) Biết rằng tích phân $\int\limits_0^1\left(2x+1\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=a+b.\mathrm{e}$, tích $a.b$ bằng

A. -15. B. -1. C. 1. D. 20.

Câu 168. (THPT HÙNG VƯƠNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho tích phân $I=\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{b}{c}+a\ln 2$ với a là số thực, b và c là các số dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P=2a+3b+c$.

A. $P=6$. B. $P=5$. C. $P=-6$. D. $P=4$.

Câu 169. (THPT LÊ XOAY VĨNH PHÚC LẦN 1 NĂM 2018-2019) Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x-1)\sin 2x dx$. Tìm đẳng thức đúng?

A. $I=-(x-1)\cos 2x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx$.

B. $I=-\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx$.

C. $I=-\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx$.

D. $I=-(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx$.

Câu 170. (CHUYÊN KHTN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Biết rằng tồn tại duy nhất các bộ số nguyên a,b,c sao cho $\int_2^3(4x+2)\ln x dx=a+b\ln 2+c\ln 3$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 19. B. -19. C. 5. D. -5.

Câu 171. (HSG BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx=a\ln 2+b\ln 3$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính $P=a+4b$.

A. $P=0$ B. $P=1$ C. $P=3$ D. $P=-3$

Câu 172. (PEN I - THẦY LÊ ANH TUẤN - ĐỀ 3 - NĂM 2019) Tính tích phân $I=\int_1^{2^{1000}}\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$, ta được

A. $I=-\frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}}+1001\ln\frac{2}{1+2^{1000}}$.

B. $I=-\frac{1000\ln 2}{1+2^{1000}}+\ln\frac{2^{1000}}{1+2^{1000}}$.

C. $I=\frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}}-1001\ln\frac{2}{1+2^{1000}}$.

D. $I=\frac{1000\ln 2}{1+2^{1000}}-\ln\frac{2^{1000}}{1+2^{1000}}$.

Câu 173. (ĐỀ 15 LOVE BOOK NĂM 2018-2019) Biết $\int_0^2 2x\ln(x+1)\mathrm{dx}=a.\ln b$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $6a+7b$.

A. $6a+7b=33$. B. $6a+7b=25$. C. $6a+7b=42$. D. $6a+7b=39$.

Câu 174. (CHUYÊN HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Biết rằng $\int_1^a \ln x dx=1+2a,\ (a>1)$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $a\in(18;21)$. B. $a\in(1;4)$. C. $a\in(11;14)$. D. $a\in(6;9)$.

Câu 175. (KTNL GV BẮC GIANG NĂM 2018-2019) Cho tích phân $\int_0^1(x-2)e^x dx=a+be$, với $a;b\in\mathbb{Z}$. Tổng $a+b$ bằng

A. 1. B. -3. C. 5. D. -1.

Câu 176. (KTNL GV THUẬN THÀNH 2 BẮC NINH NĂM 2018-2019) Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 xe^x dx$.

A. $I=e^2$. B. $I=-e^2$. C. $I=e$. D. $I=3e^2-2e$.

Câu 177. (THPT YÊN PHONG SỐ 1 BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Biết rằng $\int\limits_2^3 x\ln x\,\mathrm{d}x=m\ln 3+n\ln 2+p$ trong đó $m,n,p\in\mathbb{Q}$. Tính $m+n+2p$

A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{9}{2}$. C. 0. D. $-\frac{5}{4}$.

Câu 178. (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA LẦN 2 NĂM 2018-2019) Biết $\int\limits_0^2 2x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=a.\ln b$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $3a+4b$.

A. 42. B. 21. C. 12. D. 32.

Câu 179. (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2018-2019 LẦN 1) Cho tích phân $I=\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{b}{c}+a\ln 2$ với a là số thực, b và c là các số nguyên dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P=2a+3b+c$.

A. $P=6$ B. $P=-6$ C. $P=5$ D. $P=4$

Câu 180. Biết $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{a}\pi-\ln b$. Khi đó, giá trị của a^2+b bằng

A. 11. B. 7. C. 13. D. 9.

Câu 181. (TT HOÀNG HOA THÁM - 2018-2019) Cho $\int \ln(x^2-x)dx=F(x), F(2)=2\ln 2-4$. Khi đó $I=\int\limits_2^3\left[\frac{F(x)+2x+\ln(x-1)}{x}\right]dx$ bằng

A. $3\ln 3-3$. B. $3\ln 3-2$. C. $3\ln 3-1$. D. $3\ln 3-4$

Câu 182. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Biết $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{a}\pi-\ln b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+b.$

A. $T=9$. B. $T=13$. C. $T=7$. D. $T=11$.

Câu 183. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019) Cho $\int\limits_1^2 \frac{\ln(1+2x)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\ln 5+b\ln 3+c\ln 2$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+2(b+c)$ là:

A. 0. B. 9. C. 3. D. 5.

Câu 184. Cho $\int\limits_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $P=ab$.

A. $P=\frac{3}{2}$. B. $P=0$. C. $P=\frac{-9}{2}$. D. $P=-3$.

Câu 185. (KTNL GV BẮC GIANG NĂM 2018-2019) Cho tích phân $\int_0^1 (x-2)e^x dx = a+be$, với $a;b\in\mathbb{Z}$. Tổng $a+b$ bằng

A. 1. B. -3. C. 5. D. -1.

Câu 186. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x+2\cos x)}{\cos^2 x}dx = a\ln 3+b\ln 2+c\pi$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của abc bằng

A. $\frac{15}{8}$ B. $\frac{5}{8}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{17}{8}$

Câu 187. (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Biết $\int_{\frac{1}{12}}^{12}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\frac{a}{b}e^{\frac{c}{d}}$ trong đó a,b,c,d là các số nguyên dương và các phân số $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là tối giản. Tính $bc-ad$.

A. 12. B. 1. C. 24. D. 64.

Câu 188. (THPT YÊN KHÁNH A - LẦN 2 - 2018) Cho $\int_0^2 \frac{x+\ln(x+1)}{(x+2)^2}dx=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\ln 3$ (với $a,c\in\mathbb{Z};b,d\in\mathbb{N}^*;\frac{a}{b}\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản). Tính $P=(a+b)(c+d)$.

A. 7. B. -7. C. 3. D. -3.

Dạng 5.2 Hàm số không tường minh (hàm ẩn)

Câu 189. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=1$ B. $I=-8$ C. $I=-12$ D. $I=8$

Câu 190. (HSG BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2)=16, \int_0^2 f(x)dx=4$. Tính $I=\int_0^1 xf'(2x)dx$.

A. $I=20$ B. $I=7$ C. $I=12$ D. $I=13$

Câu 191. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x^2 f(x)dx=-\frac{1}{21}$, $f(1)=0$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=\frac{1}{7}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{5}{12}$. B. $-\frac{1}{5}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $-\frac{7}{10}$.

Câu 192. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1, f(1) = \cot 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 \left[f(x)\tan^2 x + f'(x)\tan x\right]\mathrm{d}x$.

A. -1. B. $1-\ln(\cos 1)$. C. 0. D. $1-\cot 1$.

Câu 193. (THPT NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}$ Tính $\int_0^1 x^3 f'(x)dx$.

A. -1 B. 1 C. 3 D. -3

Câu 194. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$ và $\int_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{6}{\pi}$ B. $\frac{2}{\pi}$ C. $\frac{4}{\pi}$ D. $\frac{1}{\pi}$

Câu 195. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) Biết m là số thực thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x + 2m)\mathrm{d}x = 2\pi^2 + \frac{\pi}{2} - 1$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \le 0$. B. $0 < m \le 3$. C. $3 < m \le 6$. D. $m > 6$.

Câu 196. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. 4 B. $\frac{7}{5}$ C. 1 D. $\frac{7}{4}$

Câu 197. (THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. π. B. $\frac{3\pi}{2}$. C. $\frac{2}{\pi}$. D. $\frac{1}{\pi}$.

Câu 198. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{7}{5}$ B. 1 C. $\frac{7}{4}$ D. 4

Câu 199. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$, $\int_0^1[f'(x)]^2\,dx=36$ và $\int_0^1 x.f(x)\,dx=\frac{1}{5}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\,dx$ bằng

A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 4 D. $\frac{2}{3}$

Câu 200. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2)=3$, $\int_0^2[f'(x)]^2\,dx=4$ và $\int_0^2 x^2 f(x)\,dx=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^2 f(x)\,dx$ bằng

A. $\frac{2}{115}$ B. $\frac{297}{115}$ C. $\frac{562}{115}$ D. $\frac{266}{115}$

Câu 201. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$, $\int_0^1[f'(x)]^2\,dx=5$ và $\int_0^1 x.f(x)\,dx=-\frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\,dx$ bằng

A. $\frac{15}{19}$ B. $\frac{17}{4}$ C. $\frac{17}{18}$ D. $\frac{15}{4}$

Câu 202. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2)=6$, $\int_0^2[f'(x)]^2\,dx=7$ và $\int_0^2 x.f(x)\,dx=\frac{17}{2}$. Tích phân $\int_0^2 f(x)\,dx$ bằng

A. 8 B. 6 C. 7 D. 5

Câu 203. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;3]$ thỏa mãn $f(3)=6$, $\int_0^3[f'(x)]^2\,dx=2$ và $\int_0^3 x^2.f(x)\,dx=\frac{154}{3}$. Tích phân $\int_0^3 f(x)\,dx$ bằng

A. $\frac{53}{5}$ B. $\frac{117}{20}$ C. $\frac{153}{5}$ D. $\frac{13}{5}$

Câu 204. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=2$, $\int_0^1[f'(x)]^2\,dx=8$ và $\int_0^1 x^3.f(x)\,dx=10$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\,dx$ bằng

A. $-\frac{2}{285}$ B. $\frac{194}{95}$ C. $\frac{116}{57}$ D. $\frac{584}{285}$

Câu 205. (SGD&ĐT BẮC GIANG - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1[f'(x)]^2\,dx=\int_0^1(x+1)e^x f(x)\,dx=\frac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\,dx$.

A. $I=2-e$. B. $I=e-2$. C. $I=\frac{e}{2}$. D. $I=\frac{e-1}{2}$.

Câu 206. (SGD - NAM ĐỊNH - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x)\mathrm{d}x$

A. $I=1$.
B. $I=\frac{1}{2}$.
C. $I=2$.
D. $I=\frac{1}{4}$.

Câu 207. (CHUYÊN VINH - LẦN 1 - 2018). Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. π.
B. $\frac{1}{\pi}$.
C. $\frac{2}{\pi}$.
D. $\frac{3\pi}{2}$.

Câu 208. (THPT TRẦN PHÚ - ĐÀ NẴNG - 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos x}\mathrm{d}x=1$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x.\tan x.f(x)]\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x.f'(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. 4.
B. $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$.
C. $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$.
D. 6.

Câu 209. (PTNK CƠ SỞ 2 - TPHCM - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(1)=0$, $\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$ và $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{2}$.
B. π.
C. $\frac{1}{\pi}$.
D. $\frac{2}{\pi}$.

Câu 210. (CHUYÊN TRẦN PHÚ - HẢI PHÒNG - LẦN 2 - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x=9$ và $\int_0^1 x^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$.
B. $\frac{5}{2}$.
C. $\frac{7}{4}$.
D. $\frac{6}{5}$.

Câu 211. (THPT PHAN CHU TRINH - ĐẮC LẮC - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x=\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$.
B. $\frac{\mathrm{e}^2}{4}$.
C. $\mathrm{e}-2$.
D. $\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Câu 212. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2\mathrm{d}x=7$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{7}{5}$. B. $I=-\frac{7}{5}$. C. $I=-\frac{7}{20}$. D. $I=\frac{7}{20}$.

Câu 213. (THPT QUẢNG YÊN - QUẢNG NINH - 2018) Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa mãn: $f\left(1\right)=0,\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=7$ và $\int\limits_0^1 x^2.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. B. $I=\frac{7}{5}$. C. $I=4$. D. $I=\frac{7}{4}$.

Câu 214. (ĐỀ THI GIỮA KỲ II YÊN PHONG 1 - 2018) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=3$, $\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2dx=\frac{4}{11}$ và $\int\limits_0^1 x^4f\left(x\right)dx=\frac{7}{11}$. Giá trị của $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$ là

A. $\frac{35}{11}$. B. $\frac{65}{21}$. C. $\frac{23}{7}$. D. $\frac{9}{4}$.

Câu 215. (THPT BÌNH GIANG - HẢI DƯƠNG - 2018) Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[1;2\right]$ và thỏa mãn $f\left(2\right)=0$, $\int\limits_1^2\left(f'\left(x\right)\right)^2dx=\frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}$ và $\int\limits_1^2\frac{f\left(x\right)}{\left(x+1\right)^2}dx=-\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$. Tính tích phân $\int\limits_1^2 f\left(x\right)dx$.

A. $\frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$. B. $\ln\frac{3}{2}$. C. $\frac{3}{4}-2\ln\frac{3}{2}$. D. $\frac{3}{4}+2\ln\frac{3}{2}$.

Câu 216. (SỞ GD&ĐT BẠC LIÊU - 2018) Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=0$, $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{4}{3}-\ln 3$ và $\int\limits_0^1\frac{4f\left(x\right)}{\left(2x+1\right)^2}dx=2\ln 3-\frac{8}{3}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1\frac{f\left(x\right)}{4}dx$ bằng.

A. $\frac{1-3\ln 3}{3}$. B. $\frac{4-\ln 3}{3}$. C. $\frac{-\ln 3}{16}$. D. $-\ln\frac{3}{16}$.

Câu 217. (SỞ GD&ĐT HƯNG YÊN - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f(0)=1$; $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{30}$ và $\int\limits_0^1(2x-1)f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{30}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{11}{30}$. B. $\frac{11}{12}$. C. $\frac{11}{4}$. D. $\frac{1}{30}$.

Dạng 6. Kết hợp nhiều phương pháp để giải toán

Câu 218. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f\left(3\right)=1$ và $\int\limits_0^1 xf\left(3x\right)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int\limits_0^3 x^2f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{25}{3}$. B. 3. C. 7. D. -9.

Câu 219. (Mã đề 101 - BGD - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4)=1$ và $\int_0^1 xf(4x)dx=1$, khi đó $\int_0^4 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. 8. B. 14. C. $\frac{31}{2}$. D. -16.

Câu 220. (Mã 103 - BGD - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(6)=1$ và $\int\limits_0^1 xf(6x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int\limits_0^6 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{107}{3}$. B. 34. C. 24. D. -36.

Câu 221. (Mã 102 - BGD - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5)=1$ và $\int\limits_0^1 xf(5x)dx=1$, khi đó $\int\limits_0^5 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. 15 B. 23 C. $\frac{123}{5}$ D. -25

Câu 222. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Cho $\int\limits_0^1 x\ln(2+x^2)\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 2. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. 0.

Câu 223. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(2)=16$ và $\int\limits_0^2 f(x)dx=4$. Tích phân $\int\limits_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx$ bằng

A. 112. B. 12. C. 56. D. 144.

Câu 224. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM 2018-2019) Cho tích phân $I=\int\limits_0^{\pi^2}\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x = a\pi^2+b$ $(a,b\in\mathbb{Z})$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b}<-3$ B. $a^2-b=-4$ C. $a-b=6$ D. $\frac{a}{b}\in(-1;0)$

Câu 225. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN LẦN 3 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_0^1 x.f'(2x)\mathrm{d}x$.

A. 7. B. 12. C. 20. D. 13.

Câu 226. (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\ln 2+\frac{\pi}{c}$ với a, b, c là các số nguyên. Khi đó, $\frac{bc}{a}$ bằng

A. -6. B. $\frac{8}{3}$. C. 6. D. $-\frac{8}{3}$.

Câu 227. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN LẦN 1 NĂM 2018-2019) Cho tích phân $I=\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}.\sin\sqrt{x}\text{d}x=a\pi^2+b\ (a,\ b\in\mathbb{Z})$, Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b}<-3$. B. $a^2-b=-4$. C. $\frac{a}{b}\in(-1;0)$. D. $a-b=6$.

Dạng 7. Tích phân của một số hàm số khác

Dạng 7.1 Tích phân hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

Câu 228. (PEN I - THẦY LÊ ANH TUẤN - ĐỀ 3 - NĂM 2019) Cho a là số thực dương, tính tích phân $I=\int_{-1}^{a}|x|\text{d}x$ theo a.

A. $I=\frac{a^2+1}{2}$. B. $I=\frac{a^2+2}{2}$. C. $I=\frac{-2a^2+1}{2}$. D. $I=\frac{|3a^2-1|}{2}$.

Câu 229. (KTNL GIA BÌNH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)\text{d}x=2$; $\int_0^3 f(x)\text{d}x=6$. Tính $I=\int_{-1}^{1}f(|2x-1|)\text{d}x$

A. $I=8$ B. $I=6$ C. $I=\frac{3}{2}$ D. $I=4$

Câu 230. (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1) Cho số thực $m>1$ thỏa mãn $\int_1^m|2mx-1|dx=1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m\in(4;6)$. B. $m\in(2;4)$. C. $m\in(3;5)$. D. $m\in(1;3)$.

Câu 231. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int_{-1}^{1}|x|^3\text{d}x=\left|\int_{-1}^{1}x^3\text{d}x\right|$. B. $\int_{-1}^{2018}|x^4-x^2+1|\text{d}x=\int_{-1}^{2018}(x^4-x^2+1)\text{d}x$.

C. $\int_{-2}^{3}|e^x(x+1)\text{d}x|=\int_{-2}^{3}e^x(x+1)\text{d}x$. D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2x}\text{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\text{d}x$.

Câu 232. (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho tích phân $\int_1^5\left|\frac{x-2}{x+1}\right|dx=a+b\ln 2+c\ln 3$ với *a, b, c* là các số nguyên. Tính P = *abc*.

A. $P=-36$ B. $P=0$ C. $P=-18$ D. $P=18$

Câu 233. (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Có bao nhiêu số tự nhiên m để $\int_0^2|x^2-2m^2|\text{d}x=\left|\int_0^2(x^2-2m^2)\text{d}x\right|$.

A. Vô số. B. 0. C. Duy nhất. D. 2.

Câu 234. (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^3 f(x)dx=8$ và $\int\limits_0^5 f(x)dx=4$. Tính $\int\limits_{-1}^1 f(|4x-1|)dx$.

A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{11}{4}$. C. 3. D. 6.

Câu 235. (THPT CHU VĂN AN -THÁI NGUYÊN - 2018) Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^1 \left|2^x-2^{-x}\right|dx$.

A. $\frac{1}{\ln 2}$. B. $\ln 2$. C. $2\ln 2$. D. $\frac{2}{\ln 2}$.

Câu 236. (PTNK CƠ SỞ 2 - TPHCM - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_0^2 f(6x)\mathrm{d}x=14$. Tính $\int\limits_{-2}^2 f(5|x|+2)\mathrm{d}x$.

A. 30. B. 32. C. 34. D. 36.

Câu 237. (LÊ QUÝ ĐÔN - QUẢNG TRỊ - LẦN 1 - 2018) Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=4$, $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int\limits_{-1}^1 f(|2x+1|)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. B. $I=5$. C. $I=6$. D. $I=4$.

Câu 238. (ĐỀ THI GIỮA KỲ II YÊN PHONG 1 - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;3)$ và $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2;\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=8$. Giá trị của tích phân $\int\limits_{-1}^1 f(|2x-1|)\mathrm{d}x=?$

A. 6 B. 3 C. 4 D. 5

Dạng 7.2 Tích phân nhiều công thức

Câu 239. (ĐỀ 04 VTED NĂM 2018-2019) Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & khi\ x\le 0\\ a(x-x^2) & khi\ x>0\end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^1 f(x)dx$ bằng:

A. $\frac{a}{6}-1$. B. $\frac{2a}{3}+1$. C. $\frac{a}{6}+1$. D. $\frac{2a}{3}-1$.

Câu 240. (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}e^x+m & \text{khi } x\ge 0\\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=ae+b\sqrt{3}+c$, $(a,b,c\in Q)$. Tổng $a+b+3c$ bằng

A. 15. B. -10. C. -19. D. -17.

Câu 241. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} e^x+m, & \text{khi } x\ge 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2}, & \text{khi } x<0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = ae+b\sqrt{3}+c,(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Tổng $T=a+b+3c$ bằng

A. 15 B. -10 C. -19 D. -17

Dạng 7.3 Tích phân hàm số chẵn, lẻ

Câu 242. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)dx$.

A. $I=-6$ B. $I=0$ C. $I=-2$ D. $I=6$

Câu 243. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $f\left(x\right)$ là hàm số chẵn trên đoạn $\left[-a;a\right]$ và $k>0$. Giá trị tích phân $\int\limits_{-a}^{a}\dfrac{f\left(x\right)}{1+\mathrm{e}^{kx}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\int\limits_{0}^{a} f\left(x\right)\mathrm{d}x$. B. $\int\limits_{-a}^{a} f\left(x\right)\mathrm{d}x$. C. $2\int\limits_{-a}^{a} f\left(x\right)\mathrm{d}x$. D. $2\int\limits_{0}^{a} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 244. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho $f\left(x\right)$, $f\left(-x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f\left(x\right)+3f\left(-x\right)=\dfrac{1}{x^2+4}$. Biết $I=\int\limits_{-2}^{2} f\left(x\right)dx=\dfrac{\pi}{m}$. Khi đó giá trị của m là

A. $m=2$. B. $m=20$. C. $m=5$. D. $m=10$.

Câu 245. (THPT HÀM RỒNG THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 1) Cho hàm số $f\left(x\right)$, $f\left(-x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thõa mãn $2f\left(x\right)+3f\left(-x\right)=\dfrac{1}{4+x^2}$. Tính $I=\int_{-2}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{\pi}{20}$. B. $I=\dfrac{\pi}{10}$. C. $I=\dfrac{-\pi}{20}$. D. $I=\dfrac{-\pi}{10}$.

Câu 246. (THPT HÀM RỒNG - THANH HÓA - 2018) Cho $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=\pi\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{c}$, với $a,b,c\in\mathbb{N}$, $b<15$. Khi đó $a+b+c$ bằng:

A. 10. B. 9. C. 11. D. 12.

Câu 247. (SGD&ĐT HÀ NỘI - 2018) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm lẻ và liên tục trên $\left[-4;4\right]$ biết $\int\limits_{-2}^{0} f\left(-x\right)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_{1}^{2} f\left(-2x\right)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_{0}^{4} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-10$. B. $I=-6$. C. $I=6$. D. $I=10$.

Câu 248. (HỒNG QUANG - HẢI DƯƠNG - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-\ln 2;\ln 2\right]$ và thỏa mãn $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\dfrac{1}{e^x+1}$. Biết $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f\left(x\right)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$ $\left(a;b\in\mathbb{Q}\right)$. Tính $P=a+b$.

A. $P=\frac{1}{2}$. B. $P=-2$. C. $P=-1$. D. $P=2$.

Câu 249. (THPT CHUYÊN ĐH VINH - LẦN 3 - 2018) Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=1$. Giá trị của $\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. B. 6. C. 4. D. 3.

Câu 250. (SGD&ĐT BRVT - 2018) Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=10$. Tính $I=\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x$.

A. $I=10$. B. $I=\frac{10}{3}$. C. $I=20$. D. $I=5$.

Câu 251. (THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - GIA LAI - LẦN 2 - 2018) Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}$. Tính tích phân $I=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. B. $I=4$. C. $I=6$. D. $I=8$.

Câu 252. (ĐỀ THI GIỮA KỲ II YÊN PHONG 1 - 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $\int_{-1}^{1} f(x)dx=6$. Kết quả của $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+2018^x}dx$ bằng

A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Dạng 8. Một số bài toán tích phân khác

Câu 253. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{3}$ và $f'(x)=x[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{2}{9}$ C. $-\frac{7}{6}$ D. $-\frac{11}{6}$

Câu 254. (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{4}{35}$ B. $-\frac{71}{20}$ C. $-\frac{79}{20}$ D. $-\frac{4}{5}$

Câu 255. (THPT BA ĐÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f^2(1-x)=(x^2+3)f(x+1)$. Biết rằng $f(x)\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$, tính $I=\int_0^2(2x-1)f''(x)dx$.

A. 8. B. 0. C. -4. D. 4.

Câu 256. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Tính tích phân $\int_0^1 \max\left\{e^x, e^{1-2x}\right\}dx$

A. $e-1$.   B. $\frac{3}{2}\left(e-\sqrt[3]{e}\right)$.   C. $e-\sqrt[3]{e}$.   D. $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$.

Câu 257. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cot\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}dx = \frac{2+\sqrt{a}}{2}\ln b - \frac{\pi}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $a^2+b^2+c^2$

A. 48.   B. 18.   C. 34.   D. 36.

Câu 258. (ĐỀ 04 VTED NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x.f(x).f'(x)=f^2(x)-x, \forall x\in\mathbb{R}$ và có $f(2)=1$. Tích phân $\int_0^2 f^2(x)dx$

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. 4

Câu 259. (THPT ĐÔNG SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)\left[f(x)\right]^2, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $-\frac{1}{6}$.   B. $-\ln 2$.   C. $-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.   D. $-\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

Câu 260. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x)+18x^2=\left(3x^2+x\right)f'(x)+(6x+1)f(x);\forall\in\mathbb{R}$.

Biết $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)}dx = ae^2+b,(a,b\in\mathbb{Q})$.Giá trị của $a-b$ bằng

A. 1.   B. 2.   C. 0.   D. $\frac{2}{3}$.

Câu 261. (CHUYÊN TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)>0$ và $f(x)-f'(x)=-\frac{2\left[f(x)\right]^2}{e^x.x.\sqrt{x-x^2}}$ $\forall x\in(0;1)$. Biết $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f\left(\frac{1}{5}\right)\geq\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{6}\leq f\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{5}\leq f\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{1}{4}$ D. $f\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{1}{6}$

Câu 262. (ĐỀ THI THỬ VTED 03 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\int\limits_0^1[2f(x)+3x]f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1[4f(x)+x]\sqrt{xf(x)}\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{1}{24}$ B. $-\frac{1}{8}$ C. $-\frac{1}{12}$ D. $-\frac{1}{6}$

Câu 263. (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Biết $\int\limits_0^1(x+1)e^{f(x)}\mathrm{d}x=a.e^2+b$, với $a;b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của $a-b$ bằng.

A. 1. B. 2. C. 0. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 264. (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2(x)-2f(x).(3-x)\right]\mathrm{d}x=-\frac{109}{12}$. Tính $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

A. $\ln\frac{7}{9}$. B. $\ln\frac{2}{9}$. C. $\ln\frac{5}{9}$. D. $\ln\frac{8}{9}$.

Câu 265. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ SỐ 5) Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $I_n=\int\limits_0^1 x^2(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 266. (TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ SỐ 1 - 2018) Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x).f(a-x)=1 \\ f(x)>0, \forall x\in[0;a]\end{cases}$ và $\int\limits_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\frac{ba}{c}$, trong đó b, c là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(11;22)$. B. $(0;9)$. C. $(7;21)$. D. $(2017;2020)$.

Câu 267. (THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 4 - 2018) Cho hàm số $f(x)$ xá định trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}$. B. 0. C. 1. D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 268. (THPT HẬU LỘC 2 - TH - 2018) Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $f(x).f(a-x)=1$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^a\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x$?

A. $I=\frac{2a}{3}$. B. $I=\frac{a}{2}$. C. $I=\frac{a}{3}$. D. $I=a$.

Câu 269. (THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU - NGHỆ AN - LẦN 2 - 2018) Xét hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn $2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)=\sqrt{1-x}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{2}{15}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 270. (CHUYÊN HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Biết $\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^a}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính $P=2a+b$.

A. $P=8$. B. $P=10$. C. $P=6$. D. $P=12$.

Câu 271. (SGD - HÀ TĨNH - HK 2 - 2018) Cho hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến, có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $\left[0;2\right]$ và thỏa mãn $\left[f\left(x\right)\right]^2-f\left(x\right).f''\left(x\right)+\left[f'\left(x\right)\right]^2=0$. Biết $f\left(0\right)=1$, $f\left(2\right)=e^6$. Khi đó $f\left(1\right)$ bằng

A. e^2. B. $e^{\frac{3}{2}}$. C. e^3. D. $e^{\frac{5}{2}}$.

Câu 272. (THPT HÀM RỒNG - THANH HÓA - 2018) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\left[0;3\right]$; $f\left(3-x\right).f\left(x\right)=1, f\left(x\right)\neq -1$ với mọi $x\in\left[0;3\right]$ và $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$. Tính tích phân: $\int\limits_0^3\frac{x.f'\left(x\right)}{\left[1+f\left(3-x\right)\right]^2.f^2\left(x\right)}dx$.

A. 1. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 273. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC - LẦN 1 - 2018) Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $f\left(x\right)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $\left[0;a\right]$ thỏa mãn $f\left(x\right).f\left(a-x\right)=1$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^a\frac{1}{1+f\left(x\right)}\mathrm{d}x$?

A. $I=\frac{a}{3}$. B. $I=\frac{a}{2}$. C. $I=a$. D. $I=\frac{2a}{3}$.

Câu 274. (SỞ GD&ĐT NAM ĐỊNH - HKII - 2018) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f^2\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f'\left(x\right)\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}}f\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. B. $I=\frac{1}{2}$. C. $I=2$. D. $I=\frac{1}{4}$.

Câu 275. (THCS&THPT NGUYỄN KHUYẾN - BÌNH DƯƠNG - 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và đồng thời thỏa mãn hai điều kiện $f(x+1)=f(x)+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)}{x^2}$, $\forall x\neq 0$. Gọi $I=\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{f^2(x)+1}.\mathrm{d}x$. Hãy chọn khẳng định đúng về giá trị của I.

A. $I\in(-1;0)$. B. $I\in(1;2)$. C. $I\in(0;1)$. D. $I\in(-2;-1)$.

Phần B. LỜI GIẢI THAM KHẢO

Dạng 1. Tích phân cơ bản

Dạng 1.1 Áp dụng TÍNH CHẤT để giải

Câu 1. Chọn B

Ta có: $\int\limits_1^2\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_1^2 g(x)\mathrm{d}x=2-6=-4$.

Câu 2. Chọn C

Ta có $\int\limits_0^1\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int\limits_0^1 f(x)dx+\int\limits_0^1 g(x)dx=3+(-4)=-1$.

Câu 3. Chọn C

$\int_0^1[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 \mathrm{g}(x)\mathrm{d}x=2+(-4)=-2$.

Câu 4. Chọn C

$\int\limits_0^1\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x=-2-3=-5$.

Câu 5. Chọn A

Có $\int\limits_0^1\left[f(x)-2g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x=2-2.5=-8$.

Câu 6. Theo tính chất tích phân ta có

$\int\limits_a^b[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x;\int\limits_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, với $k\in\mathbb{R}$.

Câu 7. Ta có: $\int\limits_{-2}^4 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-2}^4 f(x)\mathrm{d}x$, $\int\limits_2^4 f(y)\mathrm{d}y=\int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó: $\int\limits_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^4 f(x)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow\int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^4 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x=-4-1=-5$.

Vậy $\int\limits_2^4 f(y)\mathrm{d}y=-5$.

Câu 8. Ta có

$\int_0^2\left[f(x)+3g(x)\right]dx=\int_0^2 f(x)dx+3\int_0^2 g(x)dx=3+3.7=24$.

Câu 9. Ta có $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{dx}=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{dx}+\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{dx}\Rightarrow\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{dx}=\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{dx}-\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{dx}=5+1=6$

Vậy $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$

Câu 10. $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = -3+4=1$.

Câu 11. Ta có $\int_{-1}^2 f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_{-1}^2 = f(2)-f(-1) = -1-8=-9.$

Câu 12. Ta có: $I=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = 9+4=13.$

Câu 13. Có $\int_{-1}^0 f(x)\,dx = 3; \int_0^3 f(x)\,dx = 1; \int_{-1}^3 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 f(x)\,dx + \int_0^3 f(x)\,dx = 3+1=4$

Câu 14. Theo tính chất của tích phân, ta có: $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_3^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra: $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x - \int_3^4 f(x)\mathrm{d}x = 10-4=6$.

Vậy $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 6$.

Câu 15. Ta có: $\int_1^4 F'(x)\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^4 = \frac{1}{2}\ln 7$.

Lại có: $\int_1^4 F'(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_1^4 = F(4)-F(1)$.

Suy ra $F(4)-F(1)=\frac{1}{2}\ln 7$. Do đó $F(4)=F(1)+\frac{1}{2}\ln 7 = 1+\frac{1}{2}\ln 7$.

Câu 16. Ta có: $I=\int_1^{12} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^8 f(x)\mathrm{d}x + \int_8^{12} f(x)\mathrm{d}x . = \int_1^8 f(x)\mathrm{d}x + \int_4^{12} f(x)\mathrm{d}x - \int_4^8 f(x)\mathrm{d}x = 9+3-5=7$.

Câu 17. Ta có $\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^6 f(x)\,dx + \int_6^{10} f(x)\,dx$

Suy ra $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_6^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_2^6 f(x)\,dx = 7-3=4$.

Câu 18. $\int_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x + 3\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x = 10 \ (1)$.

$\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x = 6 \Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x - \int_1^3 g(x)\mathrm{d}x = 6 \ (2)$.

Đặt $X=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$, $Y=\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} X+3Y=10 \\ 2X-Y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=4 \\ Y=2 \end{cases}$.

Do đó ta được: $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 4$ và $\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x = 2$.

Vậy $\int_1^3 \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = 4+2=6$.

Câu 19. Ta có: $\int_0^{10} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^6 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$.

$\Rightarrow 7 = P+3 \Rightarrow P=4$.

Câu 20. Ta có: $\int_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{dx}=10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)\mathrm{dx}+3\int_1^3 g(x)\mathrm{dx}=10$.

$\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{dx}=6 \Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)\mathrm{dx}-\int_1^3 g(x)\mathrm{dx}=6$.

Đặt $u=\int_1^3 f(x)\mathrm{dx};\ \mathrm{v}=\int_1^3 g(x)\mathrm{dx}$.

Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} u+3v=10 \\ 2u-v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_1^3 f(x)\mathrm{dx}=4 \\ \int_1^3 g(x)\mathrm{dx}=2 \end{cases}$

Vậy $\int_1^3 \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{dx}=6$.

Câu 21. Đặt $a=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ và $b=\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó, $\int_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x = a+3b$, $\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x = 2a-b$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} a+3b=10 \\ 2a-b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$.

Vậy $I=a+b=6$.

Dạng 1.2 Áp dụng bảng công thức cơ bản

Câu 22. Chọn A

Ta có

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x)+2\sin x\right]\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x - 2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5-2(0-1)=7.$$

Câu 23. Chọn A

Ta có: $I=\int_{-1}^2 \left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^2 + 2\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x - 3\int_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}+2.2-3(-1)=\frac{17}{2}$.

Câu 24.

Lời giải

$$I=\int_{-2}^5 \left[f(x)-4g(x)-1\right]\mathrm{d}x = \int_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^5 4g(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^5 \mathrm{d}x = \int_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x - 4\int_{-2}^5 g(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^5 \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x + 4\int_5^{-2} g(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^5 \mathrm{d}x = 8+4.3-x\Big|_{-2}^5 = 8+4.3-7=13.$$

Câu 25. Chọn A

Ta có $\int\limits_{-1}^{2}\left[x+2f(x)+3\mathrm{g}(x)\right]dx=\int\limits_{-1}^{2}xdx+2\int\limits_{-1}^{2}f(x)dx+3\int\limits_{-1}^{2}g(x)dx=\frac{3}{2}+4-3=\frac{5}{2}$

Câu 26. Chọn D

$$\int\limits_{0}^{2}\left[f(x)-5g(x)+x\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}f(x)dx-5\int\limits_{0}^{2}\mathrm{g}(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}x\mathrm{d}x=3+5+2=10$$

Câu 27. $\int\limits_{0}^{5}\left[4f(x)-3x^2\right]\mathrm{d}x=4\int\limits_{0}^{5}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{5}3x^2\mathrm{d}x=-8-x^3\Big|_0^5=-8-125=-133$.

Câu 28. Chọn A

$$\int\limits_{1}^{2}\left[4f(x)-2x\right]dx=1\Leftrightarrow 4\int\limits_{1}^{2}f(x)dx-2\int\limits_{1}^{2}xdx=1\Leftrightarrow 4\int\limits_{1}^{2}f(x)dx-2.\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2=1$$

$$\Leftrightarrow 4\int\limits_{1}^{2}f(x)dx=4\Leftrightarrow\int\limits_{1}^{2}f(x)dx=1$$

Câu 29. Chọn. A.

$$\int\limits_{0}^{1}\left(2f(x)-3x^2\right)dx=2\int\limits_{0}^{1}f(x)dx-3\int\limits_{0}^{1}x^2dx=2-1=1.$$

Câu 30. $I=\int\limits_{-1}^{0}(2x+1)dx=\left(x^2+x\right)\Big|_{-1}^{0}=0-0=0$.

Câu 31. Chọn A

Ta có $f(x)=\int\left(2\sin^2x+1\right)\mathrm{d}x=\int\left(2-\cos 2x\right)\mathrm{d}x=2x-\frac{1}{2}\sin 2x+C.$

Vì $f(0)=4\Rightarrow C=4$

Hay $f(x)=2x-\frac{1}{2}\sin 2x+4.$

Suy ra $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(2x-\frac{1}{2}\sin 2x+4\right)\mathrm{d}x$

$$=x^2+\frac{1}{4}\cos 2x+4x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{16}+\pi-\frac{1}{4}=\frac{\pi^2+16\pi-4}{16}.$$

Câu 32. Chọn C

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(2\sin^2x+3\right)\mathrm{d}x=\int\left(1-\cos 2x+3\right)\mathrm{d}x=\int\left(4-\cos 2x\right)\mathrm{d}x=4x-\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

Ta có $f(0)=4$ nên $4.0-\frac{1}{2}\sin 0+C=4\Leftrightarrow C=4$.

Nên $f(x)=4x-\frac{1}{2}\sin 2x+4$.

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(4x-\frac{1}{2}\sin 2x+4\right)\mathrm{d}x=\left(2x^2+\frac{1}{4}\cos 2x+4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+8\pi-2}{8}.$$

Câu 33. Chọn B

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int(2\cos^2x+3)dx=\int(2.\frac{1+\cos 2x}{2}+3)dx$

$= \int (\cos 2x + 4)dx = \frac{1}{2}\sin 2x + 4x + C$ do $f(0) = 4 \Rightarrow C = 4$.

Vậy $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + 4x + 4$ nên $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{2}\sin 2x + 4x + 4)dx$

$= (-\frac{1}{4}\cos 2x + 2x^2 + 4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}$.

Câu 34. Ta có: $\int_0^1 (3x+1)(x+3)\mathrm{d}x = \int_0^1 (3x^2 + 10x + 3)\mathrm{d}x = (x^3 + 5x^2 + 3x)\Big|_0^1 = 9$.

Vậy : $\int_0^1 (3x+1)(x+3)\mathrm{d}x = 9$.

Câu 35. Chọn B

+ Tính được $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Câu 36. Chọn B

Ta có $I = \int_0^2 (2x+1)dx = (x^2 + x)\Big|_0^2 = 4 + 2 = 6$.

Câu 37. Chọn A

Ta có $\int_0^b (3x^2 - 2ax - 1)\mathrm{d}x = (x^3 - ax^2 - x)\Big|_0^b = b^3 - ab^2 - b$.

Câu 38. Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (mx+n)\mathrm{d}x = \frac{m}{2}x^2 + nx + C$.

Lại có: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3 \Rightarrow \left(\frac{m}{2}x^2 + nx\right)\Big|_0^1 = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m + n = 3\ (1)$.

$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 8 \Rightarrow \left(\frac{m}{2}x^2 + nx\right)\Big|_0^2 = 8 \Leftrightarrow 2m + 2n = 8\ \ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{2}m + n = 3 \\ 2m + 2n = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 2 \end{cases}$.

$\Rightarrow m + n = 4$.

Câu 39. Chọn B

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $a = b = \frac{1}{3} \Rightarrow a - b = 0$.

Câu 40. Ta có:

$\int_0^2 \left(f(x) + 3x^2\right)\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 3x^2\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 10 - \int_0^2 3x^2\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 10 - x^3\Big|_0^2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 10 - 8 = 2$.

Câu 41. Ta có: $\int\limits_0^m \left(3x^2-2x+1\right)dx=6 \Leftrightarrow \left(x^3-x^2+x\right)\Big|_0^m=6 \Leftrightarrow m^3-m^2+m-6=0 \Leftrightarrow m=2$.

Vậy $m\in(0;4)$.

Câu 42. Ta có: $\int f(x)\,dx=\int\left(ax^2+bx+c\right)dx=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C$.

Lại có: $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=-\frac{7}{2}\Rightarrow\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Bigg|_0^1=-\frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=-\frac{7}{2}\ (1)$.

$\int\limits_0^2 f(x)\,dx=-2\Rightarrow\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Bigg|_0^2=-2 \Leftrightarrow \frac{8}{3}a+2b+2c=-2\ (2)$.

$\int\limits_0^3 f(x)\,dx=\frac{13}{2}\Rightarrow\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Bigg|_0^3=\frac{13}{2} \Leftrightarrow 9a+\frac{9}{2}b+3c=\frac{13}{2}\ (3)$.

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=-\frac{7}{2}\\ \frac{8}{3}a+2b+2c=-2\\ 9a+\frac{9}{2}b+3c=\frac{13}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=3\\ c=-\frac{16}{3}\end{cases}$.

$\Rightarrow P=a+b+c=1+3+\left(-\frac{16}{3}\right)=-\frac{4}{3}$.

Dạng 2. Tích phân HÀM HỮU TỶ

Câu 43. Chọn C

Ta có $\int\limits_1^2\frac{dx}{2x+3}=\frac{1}{2}\ln|2x+3|\Big|_1^2=\frac{1}{2}(\ln 7-\ln 5)=\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$.

Câu 44. Chọn C

Ta có $\int\limits_1^2\frac{dx}{3x-2}=\frac{1}{3}\ln|3x-2|\Big|_1^2=\frac{1}{3}(\ln 4-\ln 1)=\frac{2}{3}\ln 2$.

Câu 45. Chọn D

$\int\limits_0^2\frac{dx}{x+3}=\ln|x+3|\Big|_0^2=\ln\frac{5}{3}$

Câu 46. Chọn A

$\int\limits_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\left[\ln|x+1|-\ln|x+2|\right]_0^1=2\ln 2-\ln 3$; do đó $a=2;b=-1$

Câu 47. Chọn A

$I=\int\limits_1^e\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(\ln|x|+\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^e=\frac{1}{e}$.

Câu 48. $I=\int\limits_0^3\frac{dx}{x+2}=\ln(x+2)\Big|_0^3=\ln 5-\ln 2=\ln\frac{5}{2}$.

Câu 49. Ta có: $\int\limits_1^2\frac{dx}{3x-2}=\frac{1}{3}\ln|3x-2|\Big|_1^2=\frac{2}{3}\ln 2$.

Câu 50. Ta có $I=\int\limits_1^2 \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(x-\ln|x|\right)\Big|_1^2=(2-\ln 2)-(1-\ln 1)=1-\ln 2$.

Câu 51. Cách 1. Tự luận

Ta có:

$$\int\limits_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(2x+1)}=\int\limits_1^2\left(\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=2\int\limits_1^2\frac{1}{2x+1}\mathrm{d}x-\int\limits_1^2\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$=2.\frac{1}{2}\ln|2x+1|\Big|_1^2-\ln|x+1|\Big|_1^2=\ln(2x+1)\Big|_1^2-\ln(x+1)\Big|_1^2=\ln 5-\ln 3-(\ln 3-\ln 2)$$

$$=\ln 2-2\ln 3+\ln 5.$$

Do đó: $a=1$, $b=-2$, $c=1$. Vậy $a+b+c=1+(-2)+1=0$.

Câu 52. Ta có $\int\limits_1^3\frac{x+2}{x}dx=\int\limits_1^3\left(1+\frac{2}{x}\right)dx=\int\limits_1^3 dx+\int\limits_1^3\frac{2}{x}dx=2+2\ln|x|\Big|_1^3=2+2\ln 3.$

Do đó $a=2,b=2,c=3\Rightarrow S=7.$

Câu 53. Chọn C

Ta có $I=\int\limits_{-1}^0\frac{3x^2+5x-1}{x-2}dx=\int\limits_{-1}^0\left(3x+11+\frac{21}{x-2}\right)dx=\left(\frac{3}{2}x^2+11x+21.\ln|x-2|\right)\Big|_{-1}^0$

$=21.\ln\frac{2}{3}+\frac{19}{2}$. Suy ra $a=21,b=\frac{19}{2}$. Vậy $a+4b=59$

Câu 54. Chọn A

$$\int_0^1\frac{x^2-2}{x+1}dx=\int_0^1(x-1)dx-\int_0^1\frac{dx}{x+1}=\frac{(x-1)^2}{2}\Big|_0^1-\ln|x+1|\Big|_0^1=\frac{-1}{2}-\ln 2$$

$\Rightarrow m=2,n=-1\Rightarrow m+n=1$

Câu 55. Ta có $I=\int\limits_0^1\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(1-\frac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}(x^2+1)=x\Big|_0^1-\ln(x^2+1)\Big|_0^1=1-\ln 2$

$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\Rightarrow a+b=3$.

Câu 56. $\int\limits_3^5\frac{x^2+x+1}{x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_3^5\left(x+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|\right)\Big|_3^5=8+\ln\frac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=8\\b=3\end{cases}\Rightarrow S=a-2b=2$.

Câu 57. Ta có $\int\limits_1^2\left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(x^2+\frac{x+1-1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(x^2+1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+x-\ln|x+1|\right)\Big|_1^2=\frac{10}{3}+\ln 2-\ln 3=\frac{10}{3}+\ln\frac{2}{3}=\frac{10}{b}+\ln\frac{a}{b}.$$

Suy ra $a=2;b=3$. Vậy $a+b=5$.

Câu 58.

$$\int\limits_1^3\frac{x+3}{x^2+3x+2}dx=\int\limits_1^3\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}dx=\int\limits_1^3\frac{2}{x+1}dx-\int\limits_1^3\frac{1}{x+2}dx$$

$$=\left(2\ln|x+1|-\ln|x+2|\right)\Big|_1^3=2\ln 2+\ln 3-\ln 5$$

Suy ra $a=2$, $b=1$, $c=-1$.

Nên $a+b+c=2+1-1=2$.

Câu 59. Chọn D

Ta có: $I=\int\limits_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=\int\limits_3^4 \frac{5x-8}{(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x=\int\limits_3^4 \frac{3(x-2)+2(x-1)}{(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x=\int\limits_3^4\left(\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(3\ln|x-1|+2\ln|x-2|\right)\Big|_3^4=3\ln 3+2\ln 2-3\ln 2=3\ln 3-\ln 2+0.\ln 5$

Suy ra $\begin{cases}a=3\\ b=-1\\ c=0\end{cases}\Rightarrow\ 2^{a-3b+c}=2^6=64$.

Câu 60. Chọn A

$\int\limits_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_3^5\left(x+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|\right)\Bigg|_3^5=8+\ln\frac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=8\\ b=3\end{cases}\Rightarrow S=a-2b=2$.

Câu 61. Xét $I=\int\limits_0^1\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x$.

Đặt $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t$, với $t\in\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó $\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t$.

Với $x=0$, ta có $t=\frac{\pi}{6}$.

Với $x=1$, ta có $t=\frac{\pi}{3}$.

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)}{\frac{3}{4}\left(1+\tan^2 t\right)}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{3}}t\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. Từ đó suy ra $\begin{cases}a=3\\ b=9\end{cases}\Rightarrow a+b=12$.

Câu 62. Ta có:

$\int\limits_0^2\frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(1+\frac{x-1}{(x+1)(x+3)}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(1-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}\right)\mathrm{d}x=\left(x-\ln|x+1|+2\ln|x+3|\right)\Big|_0^2$

$=2-3\ln 3+2\ln 5$.

Vậy $a=2,b=-3,c=2$, do đó $abc=-12$.

Câu 63. Ta có:

$I=\int\limits_{-1}^0\frac{3x^2+5x-1}{x-2}dx=\int\limits_{-1}^0\left(3x+11+\frac{21}{x-2}\right)dx$

$\Rightarrow I=\left[\frac{3x^2}{2}+11x+21.\ln|x-2|\right]\Bigg|_{-1}^0=21.\ln 2+\frac{19}{2}-21.\ln 3$

$\Rightarrow I=21\ln\frac{2}{3}+\frac{19}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=21\\ b=\frac{19}{2}\end{cases}\Rightarrow a+2b=40$.

Câu 64. Đặt: $\frac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}=\frac{m(2\sin x+3\cos x)+n(2\cos x-3\sin x)}{2\sin x+3\cos x}$

$=\frac{(2m-3n)\sin x+(3m+2n)\cos x}{2\sin x+3\cos x}$

Đồng nhất hệ số ta có: $\begin{cases}2m-3n=3\\3m+2n=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{3}{13}\\n=-\dfrac{11}{13}\end{cases}$.

Nên: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{3}{13}(2\sin x+3\cos x)-\frac{11}{13}(2\cos x-3\sin x)}{2\sin x+3\cos x}dx$

$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{3}{13}-\dfrac{11}{13}.\dfrac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}\right]dx=\dfrac{3}{13}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{11}{13}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx$

$=\dfrac{3\pi}{26}-\dfrac{11}{13}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{d(2\sin x+3\cos x)}{2\sin x+3\cos x}dx=\dfrac{3\pi}{26}-\dfrac{11}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{3\pi}{26}-\dfrac{11}{13}\ln 2+\dfrac{11}{13}\ln 3$. Do đó: $\begin{cases}b=\dfrac{11}{13}\\c=\dfrac{3\pi}{26}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{b}{c}=\dfrac{11}{13}.\dfrac{26}{3\pi}=\dfrac{22}{3\pi}$.

Câu 65. Ta có $\int\limits_1^4\dfrac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3}dx=\int\limits_1^4\left(x+2+\dfrac{3(2x-1)}{x^2-x+3}\right)dx$

$=\left(\dfrac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_1^4+3\int\limits_1^4\dfrac{d(x^2-x+3)}{x^2-x+3}=\dfrac{27}{2}+3\ln\left|x^2-x+3\right|\Big|_1^4=\dfrac{27}{2}+3\ln 5$.

Mà $\int\limits_1^4\dfrac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3}dx=\dfrac{a}{b}+c\ln 5$, suy ra $a=27$, $b=2$, $c=3$.

Vậy $P=a-b^2-c^3=-4$.

Câu 66. Ta có

$\int\limits_0^1\dfrac{4x^2+15x+11}{2x^2+5x+2}dx=\int\limits_0^1\dfrac{(4x^2+10x+4)+(5x+7)}{2x^2+5x+2}dx=\int\limits_0^1\left(2+\dfrac{5x+7}{2x^2+5x+2}\right)dx$

$=\int\limits_0^1\left(2+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{2x+1}\right)dx=\left(2x+\ln|x+2|+\dfrac{3}{2}\ln|2x+1|\right)\Big|_0^1=2-\ln 2+\dfrac{5}{2}\ln 3$

Vậy $a=2$, $b=-1$, $c=\dfrac{5}{2}$ nên $T=6$.

Dạng 3. Giải tích phân bằng phương pháp VI PHÂN

Câu 67. Chọn A

Theo định nghĩa tích phân: $I=F(e)-F(1)=\int\limits_1^e f(x)dx=\int\limits_1^e\dfrac{\ln x}{x}dx=\int\limits_1^e\ln x.d(\ln x)=\dfrac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e=\dfrac{1}{2}$.

Câu 68. Chọn C

$\int\limits_0^1 e^{3x+1}dx=\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 e^{3x+1}d(3x+1)=\dfrac{1}{3}e^{3x+1}\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}(e^4-e)$.

Câu 69. Chọn B

Ta có $\int\limits_1^2 e^{3x-1}dx=\dfrac{1}{3}e^{3x-1}\Big|_1^2=\dfrac{1}{3}(e^5-e^2)$.

Câu 70. Chọn C

Ta có: $I=\int_0^2 f(3x)dx=\frac{1}{3}\int_0^2 f(3x)d3x=\frac{1}{3}\int_0^6 f(t)dt=\frac{1}{3}.12=4.$

Câu 71. Chọn C

Ta có $\int_1^2 e^{3x-1}\mathrm{d}x=\int_1^2 e^{3x-1}\mathrm{d}(3x-1)=\frac{1}{3}\cdot e^{3x-1}\Big|_1^2=\frac{1}{3}\left(e^5-e^2\right)$. Suy ra $m=\frac{1}{3}$, $p=5$ và $q=2$.

Vậy $m+p+q=\frac{1}{3}+5+2=\frac{22}{3}$.

Câu 72. Chọn C

Cách 1: Ta có: $I=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1}=\ln|x+1|\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2$. Chọn đáp án C.

Câu 73. $K=\int_2^3\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_2^3\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}\left(x^2-1\right)=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|\Big|_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$.

Câu 74. Ta có: $\int_0^1 xe^{x^2+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2+2}\mathrm{d}\left(x^2+2\right)=\frac{1}{2}e^{x^2+2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(e^3-e^2\right)$.

Nên $a=1$, $b=3$, $c=2$.

Vậy $a+b+c=6$.

Câu 75. Chọn B

$$\int_1^e\frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx=\int_1^e\frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln x}dx=\int_1^e\frac{d(x+\ln x)}{x+\ln x}=\ln(x+\ln x)\Big|_1^e=\ln(e+1)$$

Vậy $a=1,\ b=1$ nên $T=a^2-ab+b^2=1$.

Câu 76. Chọn B

Ta có: $I=\int_1^2(x+1)^2e^{x-\frac{1}{x}}dx=\int_1^2\left(x^2+2x+1\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx=\int_1^2\left(x^2+1\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx+\int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}}dx$

Xét $I_1=\int_1^2\left(x^2+1\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx=\int_1^2 x^2.e^{x-\frac{1}{x}}.\frac{x^2+1}{x^2}dx=\int_1^2 x^2.e^{x-\frac{1}{x}}d\left(x-\frac{1}{x}\right)=\int_1^2 x^2d\left(e^{x-\frac{1}{x}}\right)$

$=x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2-\int_1^2 e^{x-\frac{1}{x}}d\left(x^2\right)=x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2-\int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}}dx$

$\Rightarrow I_1+\int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}}dx=x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2\qquad\Rightarrow I=x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2=4e^{\frac{3}{2}}-1$

Do $\int_1^2(x+1)^2e^{x-\frac{1}{x}}dx=me^{\frac{p}{q}}-n$, trong đó $m,n,p,q\in\mathbb{Z}^+$ và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản $\Rightarrow\begin{cases}m=4\\n=1\\p=3\\q=2\end{cases}$

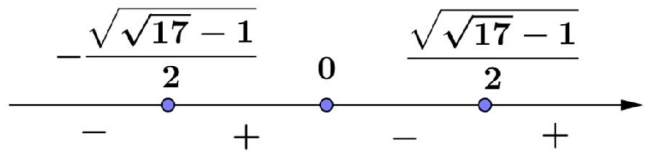
Khi đó, $T=m+n+p+q=4+1+3+2=10$.

Câu 77. Chọn D

Ta có $f(x)=\int_{2x}^{x^2}\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_{2x}^{x^2}\frac{\mathrm{d}\left(1+t^2\right)}{1+t^2}=\ln\left(1+t^2\right)\Big|_{2x}^{x^2}=\ln\left(1+x^4\right)-\ln\left(1+4x^2\right)$.

$f'(x)=\dfrac{4x^3}{1+x^4}-\dfrac{8x^2}{1+4x^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{4x^3}{1+x^4}-\dfrac{8x}{1+4x^2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{\sqrt{17}-1}}{2} \end{array}\right.$.

Trục xét dấu:



Từ đó ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 78. Chọn C

$I=\int\limits_0^1 f'(x)e^{f(x)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 e^{f(x)}\mathrm{d}\left(f(x)\right)=e^{f(x)}\Big|_0^1=e^{f(1)}-e^{f(0)}=e^5-e^5=0$.

Dạng 4. Giải tích phân bằng phương pháp ĐỔI BIẾN SỐ

Dạng 4.1. Hàm số tường minh

Dạng 4.1.1. Hàm số chứa căn thức

Câu 79. Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x+4}\Rightarrow 2tdt=dx$.

Với $x=5\Rightarrow t=3$; $x=21\Rightarrow t=5$

Ta có $\int\limits_5^{21}\dfrac{dx}{x\sqrt{x+4}}=2\int\limits_3^5\dfrac{dt}{t^2-4}=\dfrac{1}{2}\left(\ln|t-2|-\ln|t+2|\right)\Big|_3^5=\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln 5-\dfrac{1}{2}\ln 7$.

Câu 80. Chọn. A.

Đặt $t=\sqrt{x+9}$ $\Rightarrow t^2=x+9\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=16\Rightarrow t=5$, $x=55\Rightarrow t=8$.

Do đó $\int\limits_{16}^{55}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}}=\int\limits_5^8\dfrac{2t\mathrm{d}t}{t\left(t^2-9\right)}=2\int\limits_5^8\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2-9}=\dfrac{1}{3}\int\limits_5^8\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|\Bigg|_5^8$

$=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{5}{11}-\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}\ln 5-\dfrac{1}{3}\ln 11$.

Vậy $a=\dfrac{2}{3};b=\dfrac{1}{3};c=-\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow a-b=-c$.

Câu 81. Chọn A

$I=\int\limits_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$

đặt $u=x^2-1\Rightarrow du=2xdx$. Đổi cận $x=1\Rightarrow u=0$; $x=2\Rightarrow u=3$

Nên $I=\int\limits_0^3\sqrt{u}du$

Câu 82. Đặt $t=\sqrt{\mathrm{e}^x+3}\Rightarrow t^2=\mathrm{e}^x+3\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases} x=\ln 6 \\ x=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} t=3 \\ t=2 \end{cases}$.

Suy ra $\int\limits_0^{\ln 6}\frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}}dx=\int\limits_2^3\frac{2tdt}{1+t}=\int\limits_2^3\left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt=\left(2t-2\ln|t+1|\right)\Big|_2^3=\left(6-2\ln 4\right)-\left(4-2\ln 3\right)$

$=2-4\ln 2+2\ln 3\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-4\\c=2\end{cases}.$

Vậy $T=0$.

Câu 83. Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2tdt=3dx\Rightarrow\frac{2t}{3}dt=dx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=2$

Khi đó $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{3}\int\limits_0^1\frac{1}{t}.tdt=\frac{2}{3}\int\limits_0^1 dt=\frac{2}{3}t\Big|_0^1=\frac{2}{3}$.

Cách khác: Sử dụng công thức $\int\frac{dx}{\sqrt{ax+b}}=\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+C$ thì $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$.

Câu 84. Chọn B

Cách 1

$$\int\limits_1^2\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\int\limits_1^2\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\int\limits_1^2\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2}dx$$

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\Rightarrow dt=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx\Leftrightarrow 2dt=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}dx$

Khi đó $I=\int\limits_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\frac{2}{t^2}dt=\left(\frac{-2}{t}\right)\Big|_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2$

$\Rightarrow P=a+b+c=32+12+2=46.$

Cách 2

$$\int\limits_1^2\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\int\limits_1^2\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\int\limits_1^2\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}dx$$

$$=\int\limits_1^2\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}dx=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2=2\sqrt{2}-2-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2$$

Câu 85. Đặt $\sqrt{1+\ln x}=t\Rightarrow\ln x=t^2-1\Rightarrow\frac{dx}{x}=2tdt$

Đổi cận $\begin{cases}x=1\to t=1\\x=e\to t=\sqrt{2}\end{cases}$

Vậy $\int\limits_1^e\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{\left(t^2-1\right)2tdt}{t}=2\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{2}$

Suy ra $a=\frac{4}{3};b=-\frac{2}{3}\Rightarrow S=a+b=\frac{2}{3}$

Câu 86. Đặt $x=4\sin t\Rightarrow dx=4\cos tdt$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=2\sqrt{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{16-16\sin^2 t}.4\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4|\cos t|.4\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4|\cos t|.4\cos t\,dt=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\cos t|.\cos t\,dt.$$

Mà vì $t\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ thì $\cos t>0$ nên khi đó $I=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\,dt=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\,dt$.

Câu 87. Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2tdt=3dx\Rightarrow dx=\frac{2}{3}tdt$

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2$; $x=5\Rightarrow t=4$

$$\int_1^5\frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}dx=\frac{2}{3}\int_2^4\frac{t}{1+t}dt=\frac{2}{3}\int_2^4(1-\frac{1}{1+t})dt=\frac{2}{3}(t-\ln|t+1|)\Big|_2^4=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\ln 5+\frac{2}{3}\ln 3.$$

$\Rightarrow a=\frac{4}{3},b=\frac{2}{3},c=-\frac{2}{3}\Rightarrow a+b+c=\frac{4}{3}$.

Câu 88. Chọn B

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}dx=\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{\frac{x}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}}dx=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x.\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^3}}dx$$

• Đặt $t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=\frac{-1}{t^2}dt$

Đổi cận: $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=2$; $x=1\Rightarrow t=1$

Khi đó: $I=\int_2^1\frac{t}{\sqrt{1+t^3}}\left(\frac{-1}{t^2}dt\right)=\int_1^2\frac{t^2dt}{t^3.\sqrt{1+t^3}}$

• Đặt $u=\sqrt{1+t^3}\Rightarrow u^2=1+t^3\Rightarrow t^3=u^2-1\Rightarrow 3t^2dt=2u\,du\Rightarrow t^2dt=\frac{2u\,du}{3}$

Đổi cận: $t=1\Rightarrow u=\sqrt{2}$; $t=2\Rightarrow u=3$

Ta có: $I=\int_{\sqrt{2}}^3\frac{\frac{2u\,du}{3}}{(u^2-1).u}=\frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^3\frac{du}{u^2-1}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Big|_{\sqrt{2}}^3=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$

Suy ra $a=3,\ b=3,\ c=2,\ d=2$. Vậy $a+b+c+d=10$.

Câu 89. Đặt $t=\sqrt[3]{1+x^2}\Rightarrow t^3=1+x^2\Rightarrow 3t^2dt=2xdx\Rightarrow xdx=\frac{3t^2dt}{2}$.

Đổi cận:

x	0	$\sqrt{7}$
t	1	2

$$\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx=\int_1^2\frac{t^3-1}{t}.\frac{3t^2}{2}dt=\frac{3}{2}.\int_1^2(t^4-t)dt=\frac{3}{2}.\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^2=\frac{141}{20}.$$

$\Rightarrow m-7n=141-7.20=1$.

Câu 90. Chọn A

$A=\int_0^1 \frac{dx}{3x+5\sqrt{3x+1}+7}$

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2tdt=3dx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;\ x=1\Rightarrow t=2$

$$A=\int_1^2 \frac{\frac{2}{3}tdt}{t^2+5t+6}=\frac{2}{3}\int_1^2 \frac{t}{(t+2)(t+3)}dt=\frac{2}{3}\int_1^2\left(\frac{-2}{t+2}+\frac{3}{t+3}\right)dt=\frac{2}{3}\left(-2\ln|t+2|+3\ln|t+3|\right)\Big|_1^2$$

$$=\frac{2}{3}(-2\ln 4+3\ln 5+2\ln 3-3\ln 4)=\frac{2}{3}(-10\ln 2+2\ln 3+3\ln 5)=-\frac{20}{3}\ln 2+\frac{4}{3}\ln 3+2\ln 5$$

Vậy: $a+b+c=-\frac{20}{3}+\frac{4}{3}+2=-\frac{10}{3}$.

Câu 91. Chọn D

Đặt $\sqrt{1+\ln x}=t\Rightarrow \ln x=t^2-1\Rightarrow \frac{dx}{x}=2tdt$

Đổi cận $\begin{cases} x=1\rightarrow t=1 \\ x=e\rightarrow t=\sqrt{2}\end{cases}$

Vậy $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{(t^2-1)2tdt}{t}=2\int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{2}$

Suy ra $a=\frac{4}{3};b=-\frac{2}{3}\Rightarrow S=a+b=\frac{2}{3}$

Câu 92. Chọn C

$\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx=$

$t=4+2\sqrt{x+1}\Rightarrow (t-4)^2=4(x+1)$

$\Rightarrow 2(t-4)dt=4dx$

$x=0\Rightarrow t=6$

$x=3\Rightarrow t=8$

$$I=\int_6^8 \frac{t^2-8t+16-4}{8t}.(t-4)dt=\int_6^8 \frac{t^3-12t^2+44t-48}{8t}dt=\int_6^8 \frac{t^2}{8}-\frac{3t}{2}+\frac{11}{2}-\frac{6}{t}dt$$

$$=\left(\frac{t^3}{24}-\frac{3t^2}{4}+\frac{11}{2}t-6\ln|t|\right)\Big|_6^8=\frac{7}{3}-12\ln 2+6\ln 3$$

$\Rightarrow a+b+c=1$

Câu 93. Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow x=t^2-1$

$\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=0\rightarrow t=1;\quad x=3\rightarrow t=2$

$$I=\int_1^2 \frac{t^2-1}{4+2t}.2t\,\mathrm{d}t=\int_1^2\left(t^2-2t+3-\frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}-t^2+3t-6\ln|t+2|\right)\Big|_1^2=\frac{7}{3}-12\ln 2+6\ln 3.$$

Suy ra $a=7,b=-12,c=6,d=3$. Do đó $a+b+c+d=4$.

Câu 94. Ta có $I=\int\limits_0^a \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^a \frac{x\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^a x\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow u^2=x^2+1\Rightarrow u\mathrm{d}u=x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=1$, $x=a\Rightarrow u=\sqrt{a^2+1}$.

Vậy $I=\int\limits_1^{\sqrt{a^2+1}} u^2\mathrm{d}u=\left.\frac{u^3}{3}\right|_1^{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{3}\left[\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}-1\right]$.

Câu 95. Đặt $x=\sin^2 y$ ta có $\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\sin^2 y\right)\Leftrightarrow \mathrm{d}x=2\sin y.\cos y\mathrm{d}y$

Khi $x=0\Rightarrow y=0$ và $x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{\pi}{4}$.

Suy ra $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin y}{\cos y}.2\sin y\cos y\mathrm{d}y=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin^2 y\mathrm{d}y$.

Câu 96. Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow xdx=tdt$

Đổi cận: $x=\sqrt{3}\Rightarrow t=2, x=2\sqrt{2}\Rightarrow t=3$.

Khi đó $\int\limits_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x^2-1}dx=\int\limits_2^3\frac{tdt}{t^2+t-2}=\left.\left(\frac{1}{3}\ln|t-1|+\frac{2}{3}\ln|t+2|\right)\right|_2^3$

$=\left(\frac{1}{3}\ln 2+\frac{2}{3}\ln 5\right)-\left(\frac{2}{3}\ln 4\right)=\frac{2}{3}\ln 5-\ln 2$.

Vậy $a=3,b=2,c=1\Rightarrow 3a+2b+c=14$.

Câu 97. Đặt $t=\sqrt{25-x^2}\Rightarrow t^2=25-x^2\Rightarrow x\,dx=-t\,dt$

Khi đó:

$$I=\int\limits_1^4\frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx=\int\limits_3^{2\sqrt{6}}\frac{t^2}{25-t^2}dt=\int\limits_3^{2\sqrt{6}}\left(-1+\frac{25}{25-t^2}\right)dt=\int\limits_3^{2\sqrt{6}}\left(-1+\frac{5}{2(5-t)}+\frac{5}{2(5+t)}\right)dt$$

$$=\left.\left(-t+\frac{5}{2}\ln\left|\frac{5+t}{5-t}\right|\right)\right|_3^{2\sqrt{6}}=3-2\sqrt{6}+\frac{5}{2}\ln\left(\frac{5\sqrt{6}+12}{5\sqrt{6}-12}\right)-5\ln 2.$$

Vậy $a=3,\ b=-2,\ c=\frac{5}{2},\ d=-5\Rightarrow a+b+c+d=-\frac{3}{2}$.

Câu 98. $x=2\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$.

Với $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos t\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-\sin^2 t}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\cos t}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}t.$$

Câu 99. $I=\int\limits_0^1\frac{x^3}{x+\sqrt{1+x^2}}dx=\int\limits_0^1 x^3\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)dx=\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}dx-\int\limits_0^1 x^4dx=A-\frac{1}{5}$

+ Tính A: Đặt $t=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$

$$A=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right).t^2dt=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(t^4-t^2\right)dt=\left.\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\right|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2+2\sqrt{2}}{15}$$

$I=\dfrac{-1+2\sqrt{2}}{15}\ \Rightarrow\ a=2;\ b=2;\ c=-1$

$P=a+b^2-c=7$

Câu 100. Với $n\in\mathbb{N}^*$, khi đó:

Đặt $t=1-x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=-2x\mathrm{d}x\Rightarrow x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=0\to t=1; x=1\to t=0$

Khi đó $I=-\dfrac{1}{2}\int\limits_1^0 t^n\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 t^n\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}.\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2n+2}$

Cách 2: Ta có $\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=-2x\mathrm{d}x\to-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=x\mathrm{d}x$

$I=\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)^n x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=-\dfrac{1}{2}.\dfrac{\left(1-x^2\right)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{2n+2}$

Câu 101. Đặt $t=\sqrt[6]{x}\Rightarrow x=t^6\Rightarrow \mathrm{d}x=6.t^5\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=1;\ \ x=64\Rightarrow t=2$.

Suy ra $I=\int\limits_1^2\dfrac{6t^5}{t^3+t^2}\mathrm{d}t=6\int\limits_1^2\dfrac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t=6\int\limits_1^2\left(t^2-t+1-\dfrac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$

$=6\int\limits_1^2\left(t^2-t+1\right)\mathrm{d}t-6\int\limits_1^2\dfrac{1}{t+1}\mathrm{d}\left(t+1\right)$

$=6\left(\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{t^2}{2}+t\right)\Bigg|_1^2-6\ln\left|t+1\right|\Big|_1^2=6\left(\dfrac{8}{3}-\dfrac{5}{6}\right)-6\left(\ln 3-\ln 2\right)=11-6\ln\dfrac{3}{2}=6\ln\dfrac{2}{3}+11$.

Từ đó suy ra $\begin{cases}a=6\\ b=11\end{cases}\Rightarrow a-b=-5$.

Câu 102. Ta có

$\int\limits_1^2\dfrac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 x\left(3x+\sqrt{9x^2-1}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(3x^2-x\sqrt{9x^2-1}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 3x^2\mathrm{d}x-\int\limits_1^2 x\sqrt{9x^2-1}\mathrm{d}x$

$=x^3\Big|_1^2+\int\limits_1^2 x\sqrt{9x^2-1}\mathrm{d}x=7+\int\limits_1^2 x\sqrt{9x^2-1}\mathrm{d}x$.

Tính $\int\limits_1^2 x\sqrt{9x^2-1}\mathrm{d}x$.

Đặt $\sqrt{9x^2-1}=t\Rightarrow 9x^2-1=t^2\Rightarrow x\mathrm{d}x=\dfrac{t\mathrm{d}t}{9}$.

Khi $x=1$ thì $t=2\sqrt{2}$; khi $x=2$ thì $t=\sqrt{35}$.

Khi đó $\int\limits_1^2 x\sqrt{9x^2-1}\mathrm{d}x=\int\limits_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{35}} t\dfrac{t\mathrm{d}t}{9}=\dfrac{t^3}{27}\Bigg|_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{35}}=\dfrac{35}{27}\sqrt{35}-\dfrac{16}{27}\sqrt{2}$.

Vậy $\int\limits_1^2\dfrac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\mathrm{d}x=7-\dfrac{35}{27}\sqrt{35}+\dfrac{16}{27}\sqrt{2}\Rightarrow a=7,\ b=\dfrac{16}{27},\ c=-\dfrac{35}{27}$.

Vậy $P=a+2b+c-7=7+\dfrac{32}{27}-\dfrac{35}{27}-7=-\dfrac{1}{9}$.

Câu 103. Đặt $I=\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}}=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$.

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\Rightarrow dt=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+1)}}dx\Leftrightarrow\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}=2\frac{dt}{t}$.

Khi $x=1$ thì $t=\sqrt{2}+1$, khi $x=2$ thì $t=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

$I=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}=2\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2}=-2\frac{1}{t}\Big|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2$

$=\sqrt{32}-\sqrt{12}-\sqrt{4}\Rightarrow a=32$, $b=12$, $c=4$

Vậy $P=a+b+c=48$

Câu 104. $I=\int_0^4\frac{\sqrt{2x+1}dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3}=\int_0^4\frac{\sqrt{2x+1}dx}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}=\int_0^4\frac{2\left(\sqrt{2x+1}+1\right)-\left(\sqrt{2x+1}+2\right)dx}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}$

$=\int_0^4\frac{2dx}{\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}-\int_0^4\frac{dx}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}$.

Đặt $u=\sqrt{2x+1}\Rightarrow udu=dx$. Với $x=0\Rightarrow u=1$, với $x=4\Rightarrow u=3$.

Suy ra $I=\int_1^3\frac{2udu}{u+2}-\int_1^3\frac{udu}{u+1}=\int_1^3\left(2-\frac{4}{u+2}\right)du-\int_1^3\left(1-\frac{1}{u+1}\right)du$

$=\left(u-4\ln|u+2|+\ln|u+1|\right)\Big|_1^3=2-4\ln\frac{5}{3}+\ln 2$

$\Rightarrow a=2$, $b=1$, $c=1\Rightarrow T=2.1+1-4=1$.

Dạng 4.1.2. Hàm số chứa hàm lượng giác

Câu 105. Chọn D

Ta có: $I=\int_0^{\pi}\cos^3x.\sin xdx$. Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx\Leftrightarrow -dt=\sin xdx$

Đổi cận: Với $x=0\Rightarrow t=1$; với $x=\pi\Rightarrow t=-1$.

Vậy $I=-\int_1^{-1}t^3dt=\int_{-1}^1t^3dt=\frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^1=\frac{1^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}=0$.

Cách khác : Bấm máy tính.

Câu 106. Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$. $x=0\Rightarrow t=0$, $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2x-5\sin x+6}dx=\int_0^1\frac{1}{t^2-5t+6}dt=\int_0^1\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t-2}\right)dt=\ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Big\|_0^1=\ln 2-\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{4}{3}$

$\Rightarrow a=1, b=0, c=3\Rightarrow S=a+b+c=4$.

Câu 107. Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+\cos x}.\sin xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+\cos x}d(\cos x)$

$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+\cos x}d(\cos x+2)=-\int_3^2\sqrt{t}dt=\int_2^3\sqrt{t}dt$.

Câu 108. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x.\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\tan x\Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=0$, $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=1$

Suy ra: $I=\int\limits_0^1 u^2\mathrm{d}u$.

Câu 109. Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

Khi đó: $I=\int\limits_1^{\frac{1}{2}}\frac{-1}{t^3}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t=\left.\frac{-1}{2t^2}\right|_{\frac{1}{2}}^1=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$.

Câu 110. Đặt $t=\cos x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{5}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=2$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+2}\mathrm{d}x=-\int\limits_{\frac{5}{2}}^{2}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_2^{\frac{5}{2}}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln t\Big|_2^{\frac{5}{2}}=\ln\frac{5}{2}-\ln 2=\ln 5-2\ln 2$$

Vậy ta được $a=1;b=-2$.

Câu 111. $I=\int\limits_0^a\sin^5 x\sin 2x\mathrm{d}x=2\int\limits_0^a\sin^6 x.\cos x\mathrm{d}x$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$ và $\begin{cases}\sin a=b;\quad b\in[-1;1]\\ \sin 0=0\end{cases}$.

$I=2\int\limits_0^b t^6\mathrm{d}t=2.\left.\frac{t^7}{7}\right|_0^b=\frac{2b^7}{7}$.

Theo giả thiết: $\int\limits_0^a\sin^5 x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{2}{7}\Rightarrow\frac{2b^7}{7}=\frac{2}{7}\Leftrightarrow b=1\Leftrightarrow\sin a=1\Leftrightarrow a=\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

$a\in(0;20\pi)\Leftrightarrow 0<\frac{\pi}{2}+k2\pi<20\pi\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}<k2\pi<\frac{39\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{4}<k<\frac{39}{4}$.

Mà $k\in\mathbb{Z}$ nên suy ra $k\in\{0;1;2;...;9\}$.

Câu 112. Ta có:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)$$

Đặt $t=\sqrt{1+\sin x}\Rightarrow 2tdt=\cos xdx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x + 1}{\sqrt{1+\sin x}}\cos x dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2(t^2-1)+1}{t}2tdt = 2\int_1^{\sqrt{2}}\left(2t^2 - 1\right)dt = 2\left(\frac{2t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2+2\sqrt{2}}{3}$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2+2\sqrt{2}}{3} + F\left(0\right) = \frac{2+2\sqrt{2}}{3} + 2 = \frac{8+2\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 113. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}x}{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 1 + \tan\frac{x}{2} \Rightarrow 2\mathrm{d}t = \left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = 3-\sqrt{3}$.

$$I = \int_1^{3-\sqrt{3}} \frac{2\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{2}{t}\Bigg|_1^{3-\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}+3}{3}.$$

Suy ra $a = -1, b = 3, c = 3$ nên $a+b+c = 5$.

Câu 114. + Xét: $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2}\mathrm{d}x$

+ Đặt $u = cosx + 2 \Rightarrow \mathrm{d}u = -\sin x\mathrm{d}x \Rightarrow \sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$

+ Đổi cận: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{5}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{5}{2}}^{2} \frac{-1}{u}\mathrm{d}u = -\ln|u|\Bigg|_{\frac{5}{2}}^{2} = -\left(\ln 2 - \ln\frac{5}{2}\right) = \ln 5 - 2\ln 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}.$$

Câu 115. Đặt $t = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\left(\cos x\right)^2 - 5\cos x + 6}\mathrm{d}x = -\int_1^0 \frac{1}{t^2 - 5t + 6}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}\right)\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Bigg|_0^1 = \ln 2 - \ln\frac{3}{2} = \ln\frac{4}{3}$$

$$= a\ln\frac{4}{c} + b.$$

Do đó: $\begin{cases} a = 1 \\ c = 3 \\ b = 0 \end{cases}$.

Vậy $S=a+b+c=4$.

Dạng 4.1.3. Hàm số chứa hàm số mũ, logarit

Câu 116. Chọn B

Cách 1. Đặt $t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=e$

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}=\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x\left(e^x+1\right)}=\int_1^e \frac{dt}{t(t+1)}=\int_1^e\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\left(\ln|t|-\ln|t+1|\right)\Big|_1^e=\left(1-\ln(1+e)\right)-(-\ln 2)$$

$$=1+\ln\frac{2}{1+e}=1-\ln\frac{1+e}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow S=a^3+b^3=0.$$

Cách 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}=\int_0^1\frac{\left(e^x+1\right)-e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1 dx-\int_0^1\frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=x\Big|_0^1-\ln\left|e^x+1\right|\Big|_0^1=1-\ln\frac{1+e}{2}$.

Suy ra $a=1$ và $b=-1$. Vậy $S=a^3+b^3=0$.

Câu 117. Đặt $t=\ln x \Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$. Đổi cận $x=e\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=\displaystyle\int_1^e \frac{3\ln x+1}{x}dx=\int_0^1(3t+1)dt$.

Câu 118. Chọn D

Ta có $I=\displaystyle\int_1^e\frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}dx$, đặt $\ln x+2=t\Rightarrow\frac{dx}{x}=dt$

$$I=\int_2^3\frac{t-2}{t^2}dt=\int_2^3\frac{1}{t}dt-2\int_2^3\frac{1}{t^2}dt=\ln t\Big|_2^3+\frac{2}{t}\Big|_2^3=\ln 3-\ln 2+\frac{2}{3}-\frac{2}{2}=\ln 3-\ln 2-\frac{1}{3}$$

Suy ra $a=1; b=-1; c=-1$, vậy $a^2+b^2+c^2=3$. Chọn D.

Câu 119. Đặt $x^2+9=t\Rightarrow 2xdx=dt\Leftrightarrow xdx=\frac{1}{2}dt$.

Khi đó $I=\frac{1}{2}.\displaystyle\int_9^{25}\ln t.dt=\frac{1}{2}(t.\ln t-t)\Big|_9^{25}=\frac{1}{2}\left[(25\ln 25-25)-(9\ln 9-9)\right]=25\ln 5-9\ln 3-8$.

Suy ra $T=a+b+c=25-9-8=8$.

Câu 120. Đặt $\ln x+2=t\Leftrightarrow \ln x=t-2\Rightarrow\frac{1}{x}dx=dt$.

Đổi cận: khi $x=1$ thì $t=2$; khi $x=e$ thì $t=3$.

Khi đó $I=\displaystyle\int_2^3\frac{t-2}{t^2}dt=\int_2^3\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=\left(\ln|t|+\frac{2}{t}\right)\Big|_2^3=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\b=-\frac{1}{3}\end{cases}$.

Vậy $2ab=-1$.

Câu 121. Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=0$; $x=e\Rightarrow t=1$. Khi đó:

$$I=\int_1^e\frac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}dx=\int_0^1\frac{2t+1}{(t+2)^2}dt=\int_0^1\left(\frac{-3}{(t+2)^2}+\frac{2}{t+2}\right)dt=\left(\frac{3}{t+2}+2\ln|t+2|\right)\Big|_0^1=\ln\frac{9}{4}-\frac{1}{2}.$$

Vậy $a+b+c+d=9+4+1+2=16$.

Câu 122. Ta có $\int_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+ex^3.2^x}{\pi+e.2^x}dx=\int_0^1\left(x^3+\frac{2^x}{\pi+e.2^x}\right)dx=\frac{1}{4}+\int_0^1\frac{2^x}{\pi+e.2^x}dx=\frac{1}{4}+J$.

Tính $J=\int_0^1\frac{2^x}{\pi+e.2^x}dx$. Đặt $\pi+e.2^x=t\Rightarrow e.2^x\ln 2dx=dt\Leftrightarrow 2^xdx=\frac{1}{e.\ln 2}dt$.

Đổi cận: Khi $x=0$ thì $t=\pi+e$; khi $x=1$ thì $t=\pi+2e$.

$J=\int_0^1\frac{2^x}{\pi+e.2^x}dx=\frac{1}{e\ln 2}\int_{\pi+e}^{\pi+2e}\frac{1}{t}dt=\frac{1}{e\ln 2}\ln|t|\Big|_{\pi+e}^{\pi+2e}=\frac{1}{e\ln 2}\ln\left(1+\frac{e}{e+\pi}\right)$.

Khi đó $\int_0^1\frac{\pi x^3+2^x+ex^3.2^x}{\pi+e.2^x}dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{e\ln 2}\ln\left(1+\frac{e}{e+\pi}\right)\Rightarrow m=4$, $n=2$, $p=1$. Vậy $S=7$.

Câu 123. Ta có

$$I=\int_1^e\frac{(3x^3-1)\ln x+3x^2-1}{1+x\ln x}dx=\int_1^e\frac{3x^2(1+x\ln x)-(1+\ln x)}{1+x\ln x}dx=\int_1^e 3x^2dx-\int_1^e\frac{(1+\ln x)}{1+x\ln x}dx=e^3-1-A$$

Tính $A=\int_1^e\frac{(1+\ln x)}{1+x\ln x}dx$. Đặt $t=1+x\ln x\Rightarrow dt=(1+\ln x)dx$.

Đổi cận: $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\ x=e\Rightarrow t=e+1\end{cases}$. Khi đó $A=\int_1^{1+e}\frac{dt}{t}=\ln t\Big|_1^{1+e}=\ln(e+1)$.

Vậy $I=e^3-1-\ln(e+1)\longrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\Rightarrow P=a^2+b^2+c^2=3\\ c=-1\end{cases}$.

Câu 124. Ta có $I=\int_0^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+3e^{-x}+4}=\int_0^{\ln 2}\frac{e^xdx}{e^{2x}+4e^x+3}$.

Đặt: $t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$, $x=\ln 2\Rightarrow t=2$.

Khi đó $I=\int_1^2\frac{1}{t^2+4t+3}dt=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+3}\right)dt=\frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{t+3}\Big|_1^2=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 5+\ln 2)$.

Suy ra $a=3$, $b=5$, $c=2$. Vậy $P=2a-b+c=3$.

Câu 125. Ta có $\int_1^2\frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx=\int_1^2\frac{x+1}{x(x+\ln x)}dx$.

Đặt $t=x+\ln x\Rightarrow dt=\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x+1}{x}dx$.

Khi $x=1\Rightarrow t=1$; $x=2\Rightarrow t=2+\ln 2$.

Khi đó $I=\int_1^{2+\ln 2}\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_1^{2+\ln 2}=\ln(\ln 2+2)$. Suy ra $\begin{cases}a=2\\ b=2\end{cases}$.

Vậy $P=8$.

Câu 126. Ta có: $I=\int_0^1\frac{(x^2+x)e^x}{x+e^{-x}}dx=\int_0^1\frac{(x+1)e^xxe^x}{xe^x+1}dx$.

Đặt $t=xe^x+1\Rightarrow dt=(1+x)e^xdx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=e+1$.

Khi đó: $I=\int_1^{e+1}\frac{t-1}{t}dt=\int_1^{e+1}\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=(t-\ln|t|)\Big|_1^{e+1}=e-\ln(e+1)$.

Suy ra: $a=1$, $b=-1$, $c=1$.

Vậy: $P=a+2b-c=-2$.

Dạng 4.1.4. Hàm số hữu tỷ, đa thức

Câu 127. Chọn D

Đặt $t=x+2 \Rightarrow dt=dx$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=2$; $x=1 \Rightarrow t=3$

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2}=\int_2^3 \frac{(t-2)dt}{t^2}=\int_2^3\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=\left(\ln|t|+\frac{2}{t}\right)\Bigg|_2^3=\ln 3+\frac{2}{3}-(\ln 2+1)=-\frac{1}{3}-\ln 2+\ln 3$$

Suy ra $a=-\frac{1}{3};b=-1;c=1$

$3a+b+c=-1-1+1=-1$.

Câu 128. Đặt $t=x^2-1 \Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x \Rightarrow x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$

Với $x=2 \Rightarrow t=3$; $x=3 \Rightarrow t=8$

Ta có $K=\frac{1}{2}\int_3^8 \frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|\Big|_3^8=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$.

Câu 129. Ta có: $t=1+x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$.

$x=1 \Rightarrow t=2$.

$$\Rightarrow I=\int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{x.x^6}{(1+x^2)^5}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5}\mathrm{d}t.$$

Câu 130. Chọn B

Điều kiện tích phân tồn tại là $a+x^2 \neq 0, \forall x \in [0;1] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a<-1 \\ a>0 \end{array}\right.$

Đặt $t=a+x^2 \Rightarrow dt=2x\mathrm{d}x$. Khi đó

$$\int_0^1 \frac{x}{a+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_a^{1+a}\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+a}{a}\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+a=e^2a \\ 1+a=-e^2a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{e^2-1} \\ a=\dfrac{-1}{e^2+1} \end{array}\right.$$

So sánh điều kiện ta được $a=\frac{1}{e^2-1}$.

Câu 131. Chọn B

Đặt $t=x+2 \Rightarrow dt=dx$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=2$; $x=1 \Rightarrow t=3$

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2}=\int_2^3 \frac{(t-2)dt}{t^2}=\int_2^3\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=\left(\ln|t|+\frac{2}{t}\right)\Bigg|_2^3=\ln 3+\frac{2}{3}-(\ln 2+1)=-\frac{1}{3}-\ln 2+\ln 3$$

Suy ra $a=-\frac{1}{3};b=-1;c=1$

$3a+b+c=-1-1+1=-1$.

Câu 132. Đặt $t=3x-2 \Rightarrow \mathrm{d}t=3\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{3}$.

Khi đó.

$$\int 2x(3x-2)^6\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int\frac{t+2}{3}t^6\mathrm{d}t=\frac{2}{9}\int\left(t^7+2t^6\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{9}\left(\frac{t^8}{8}+\frac{2t^7}{7}\right)+C.$$

$=\frac{1}{36}(3x-2)^8+\frac{4}{63}(3x-2)^7+C$.

Từ đó ta có $A=\frac{1}{36}$, $B=\frac{4}{63}$. Suy ra $12A+7B=\frac{7}{9}$.

Câu 133. Ta có $I=\int\limits_0^1\frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x$

Đặt $t=x+1\Rightarrow\begin{cases}dt=dx\\x=t-1\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}x=0\leftrightarrow t=1\\x=1\leftrightarrow t=2\end{cases}$

Khi đó $I=\int\limits_1^2\frac{2(t-1)^2+3(t-1)+3}{t^2}\mathrm{dt}=\int\limits_1^2\frac{2t^2-t+2}{t^2}\mathrm{dt}=\int\limits_1^2\left(2-\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}\right)\mathrm{dt}=\left(2t-\ln t-\frac{2}{t}\right)\Big|_1^2$

$=3-\ln 2$.

Suy ra $P=3^2+2^2=13$.

Dạng 4.2. Hàm số không tường minh (hàm ẩn)

Câu 134. Đặt $t=5-3x\Rightarrow\mathrm{d}t=-3\mathrm{d}x\Rightarrow\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0$ thì $t=5$; $x=2$ thì $t=-1$.

Ta có: $P=\int\limits_0^2\left[f(5-3x)+7\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(5-3x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 7\mathrm{d}x=\int\limits_5^{-1}f(t)\frac{\mathrm{d}t}{-3}+7x\big|_0^2=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^5 f(t)\mathrm{d}t+14$

$=\frac{1}{3}.15+14=19$.

Câu 135. Ta có $I=\int\limits_0^2 f(2x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 f(4-2x)\mathrm{d}x=H+K$

Tính $K=\int\limits_0^2 f(2x)dx$.

Đặt $t=2x\Rightarrow\mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$; đổi cận: $x=0\Rightarrow t=2;x=2\Rightarrow t=4$. Nên $K=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(t)\mathrm{d}t=1009$

Tính $H=\int\limits_0^2 f(4-2x)\mathrm{d}x$,

Đặt $t=4-2x\Rightarrow dt=-2dx$; đổi cận: $x=0\Rightarrow t=4;x=2\Rightarrow t=0$. Nên $H=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(t)\mathrm{d}t=1009$

Suy ra $I=K+H=2018$.

Câu 136. Ta có $y=f(x)$ là hàm số chẵn, suy ra $f(-2x)=f(2x)$. Khi đó: $\int\limits_1^3 f(-2x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 f(2x)\mathrm{d}x=3$.

Xét tích phân: $I_1=\int\limits_1^3 f(2x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=2x\Rightarrow\mathrm{d}t=2\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2$; $x=3\Rightarrow t=6$.

$\Rightarrow I_1=\int\limits_2^6 f(t).\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_2^6 f(t)\mathrm{d}t=3\Rightarrow\int\limits_2^6 f(t)\mathrm{d}t=6\Rightarrow\int\limits_2^6 f(x)\mathrm{d}x=6$.

Vậy $I=\int\limits_{-1}^6 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_2^6 f(x)\mathrm{d}x=8+6=14$.

Câu 137. Xét $I=\int_0^{\pi} xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x \Rightarrow x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0; x=\pi \Rightarrow t=\pi^2$.

Khi đó $I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi^2} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\pi^2} f(x)\mathrm{d}x=1009$.

Câu 138. Đặt $\sqrt{x}=t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$. Khi $x=1$ thì $t=1$; $x=4$ thì $t=2$.

Suy ra $\int_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_1^2 f(t).2\mathrm{d}t=2\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t=2.2=4$.

Vậy $\int_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=4$.

Câu 139. Đặt $x^2+1=t \Rightarrow 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \Rightarrow x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$.

Đổi cận $x=1 \Rightarrow t=2; x=2 \Rightarrow t=5$.

Suy ra: $2=\int_1^2 f\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_2^5 f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int_2^5 f(t)\mathrm{d}t=4 \Rightarrow I=\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x=4$.

Câu 140. Ta có: $\int_1^3\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{dx}=10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)\mathrm{dx}+3\int_1^3 g(x)\mathrm{dx}=10$.

$\int_1^3\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{dx}=6 \Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)\mathrm{dx}-\int_1^3 g(x)\mathrm{dx}=6$.

Đặt $u=\int_1^3 f(x)\mathrm{dx}$; $\mathrm{v}=\int_1^3 g(x)\mathrm{dx}$.

Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} u+3v=10 \\ 2u-v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_1^3 f(x)\mathrm{dx}=4 \\ \int_1^3 g(x)\mathrm{dx}=2 \end{cases}$

+ Tính $\int_1^3 f(4-x)\mathrm{dx}$

Đặt $t=4-x \Rightarrow \mathrm{dt}=-\mathrm{dx}; x=1 \Rightarrow t=3; x=3 \Rightarrow t=1$.

$\int_1^3 f(4-x)\mathrm{dx}=\int_3^1 f(t)(-\mathrm{dt})=\int_1^3 f(t)\mathrm{dt}=\int_1^3 f(x)\mathrm{dx}=4$.

+ Tính $\int_1^2 g(2x-1)\mathrm{dx}$

Đặt $z=2x-1 \Rightarrow \mathrm{dz}=2\mathrm{dx}; x=1 \Rightarrow z=1; x=2 \Rightarrow z=3$.

$\int_1^2 g(2x-1)\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\int_1^3 g(z)\mathrm{dz}=\frac{1}{2}\int_1^3 g(x)\mathrm{dx}=1$.

Vậy $\int_1^3 f(4-x)\mathrm{dx}+2\int_1^2 g(2x-1)\mathrm{dx}=6$.

Câu 141. $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{dx}=2$, $B=\int_0^2 f(3x+1)\mathrm{dx}=6$ đặt $t=3x+1\Rightarrow dt=3dx$.

Đổi cận : $\left\langle\begin{matrix} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=2\Rightarrow t=7\end{matrix}\right.$

Ta có: $B=\frac{1}{3}\int_1^7 f(t)\mathrm{dt}=6\Rightarrow\int_1^7 f(t)\mathrm{dt}=18\Rightarrow\int_1^7 f(x)\mathrm{dx}=18$.

Vậy $I=\int_0^7 f(x)\mathrm{dx}=\int_0^1 f(x)\mathrm{dx}+\int_1^7 f(x)\mathrm{dx}=20$.

Câu 142. Đặt $t=10-x$. Khi đó $\mathrm{d}t=-\mathrm{dx}$.
Đổi cận: $x=3\Rightarrow t=7$.
$x=7\Rightarrow t=3$.

Khi đó $I=-\int_7^3(10-t)f(10-t)\mathrm{d}t=\int_3^7(10-t)f(10-t)\mathrm{d}t=\int_3^7(10-x)f(10-x)\mathrm{dx}$

$=\int_3^7(10-x)f(x)\mathrm{dx}=10\int_3^7 f(x)\mathrm{dx}-\int_3^7 xf(x)\mathrm{dx}=10\int_3^7 f(x)\mathrm{dx}-I$.

Suy ra $2I=10\int_3^7 f(x)\mathrm{dx}=10.4=40$. Do đó $I=20$.

Câu 143. Đặt $t=\sin 3x\Rightarrow \mathrm{d}t=3\cos 3x.\mathrm{d}x$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=1\end{cases}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x)\cos 3x\mathrm{dx}=\frac{1}{3}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}.9=3$

Câu 144. Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{dx}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}t}{2}=\mathrm{dx}.$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=2\Rightarrow t=4$.

$J=\int_0^2 f(2x)\mathrm{dx}=\int_0^4\frac{1}{2}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^4 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}I=16.$

Câu 145. Xét $I=\int_1^4 f(3x-3)\mathrm{dx}$.

Đặt $t=3x-3\Rightarrow \mathrm{d}t=3\mathrm{dx}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=4\Rightarrow t=9 \\ x=1\Rightarrow t=0\end{cases}$. Vậy $I=\int_0^9 f(t)\frac{1}{3}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^9 f(x)\mathrm{dx}=\frac{1}{3}.9=3$.

Câu 146. Đặt $t=2x\ \Rightarrow\ dt=2dx\ \Rightarrow\ dx=\frac{dt}{2}$,

$x=0\Rightarrow t=0$

$x=1\Rightarrow t=2$

Ta có $2=\int_0^1 f(2x)dx=\int_0^2 \frac{f(t)dt}{2}=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt \Rightarrow \int_0^2 f(t)dt=4$

Theo tính chất tích phân $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 f(t)dt=4$

Vậy $\int_0^2 f(x)dx=4$

Câu 147. Đặt $t=2017x \Rightarrow dt=2017dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2017}dt$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=1 \Rightarrow t=2017$

Vậy $I=\int_0^{2017} f(t).\frac{1}{2017}dt=\frac{1}{2017}\int_0^{2017} f(t)dt=\frac{1}{2017}$.

Câu 148. Đặt $t=x^2+1 \Rightarrow dt=2xdx$.

Đổi cận

x	0	1
t	1	2

$$I=\int_0^1 xf\left(x^2+1\right)dx=\int_1^2 f(t).\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int_1^2 f(t)dt=\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)dx=\frac{a}{2}.$$

Câu 149. * $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f\left(\cos^2 x\right)}{\cos^2 x}.\sin 2xdx$.

Đặt $\cos^2 x=t \Rightarrow \sin 2xdx=-dt$.

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	1	$\frac{1}{2}$

Khi đó $I_1=-\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t}dt \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t}dt=4$.

* $I_2=\int_e^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}dx=\frac{1}{2}\int_e^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{\ln^2 x}.\frac{2\ln x}{x}dx$.

Đặt $\ln^2 x=t \Rightarrow \frac{2\ln x}{x}dx=dt$.

Đổi cận

x	e	e^2
t	1	4

Khi đó $I_2=\frac{1}{2}\int_1^4 \frac{f(t)}{t}dt \Rightarrow \int_1^4 \frac{f(t)}{t}dt=4$.

* Tính $I=\int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x}dx$. Đặt $2x=t \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$.

Đổi cận

x	$\frac{1}{4}$	2
t	$\frac{1}{2}$	4

Khi đó $I=\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t+\int_{1}^{4}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=4+4=8$.

Câu 150. Xét tích phân $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x$.Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

Ta có $I_1=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(5-x)\mathrm{d}x=\left(5x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{9}{2}$

Xét tích phân $I_2=\int_0^1 f(3-2x)\mathrm{d}x$.Đặt $t=3-2x\Rightarrow \mathrm{d}t=-2\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{-\mathrm{d}t}{2}$

Đổi cận

x	0	1
t	3	1

Ta có

$$I_2=\int_0^1 f(3-2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^3(x^2+3)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+3x\right)\Big|_1^3=\frac{1}{2}\left(18-\frac{10}{3}\right)=\frac{22}{3}$$

Vậy $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(3-2x)\mathrm{d}x=9+22=31$.

Câu 151. Đặt $u=\sqrt{3\cos x+1}\Rightarrow u^2=3\cos x+1\Rightarrow -\frac{2}{3}u\mathrm{d}u=\sin x\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=1 \\ x=0\Rightarrow u=2\end{cases}$.

Do đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x f\left(\sqrt{3\cos x+1}\right)}{\sqrt{3\cos x+1}}\mathrm{d}x=\int_2^1\frac{-2uf(u)}{3u}\mathrm{d}u=\frac{2}{3}\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u=\frac{2}{3}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Câu 152. Chọn A

Đặt $t=4x-3\Rightarrow dt=4dx$ thì

$\int_1^2 f(4x-3)dx=\frac{1}{4}\int_1^5 f(t)dt=\frac{1}{4}\left(\int_1^4 f(t)dt+\int_4^5 f(t)dt\right)=\frac{1}{4}(5+20)=\frac{25}{4}$.

Đặt $u=e^{2x}\Rightarrow du=2e^{2x}dx$ thì

$\int_0^{\ln 2} f\left(e^{2x}\right)e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int_1^4 f(u)du=\frac{5}{2}$.

Vậy $I=\frac{25}{4}-\frac{5}{2}=\frac{15}{4}$.

Câu 153. Đặt $x=2-t\Rightarrow dx=-dt$.

$\Rightarrow I=\int\limits_{2}^{0} f(2-t)(-dt)=\int\limits_{0}^{2} f(2-t)(dt)=\int\limits_{0}^{2} f(2-x)dx$.

$\Rightarrow 2I=\int\limits_{0}^{2}\left[f(x)+f(2-x)\right]dx=\int\limits_{0}^{2} xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} e^{x^2}d\left(x^2\right)=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^2=\frac{e^4-1}{2}$.

Vậy $I=\frac{e^4-1}{4}$.

Câu 154. Ta có: $3=3.1=3.\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1} 3f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1} f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f(2x)\mathrm{d}(2x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $2x=t\Rightarrow \mathrm{d}(2x)=\mathrm{d}t$, với $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=2$.

$\Leftrightarrow 3=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x, \forall x\in\mathbb{R}$ (do hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$).

$\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=6, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=6, \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 1+\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=6, \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=5, \forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 155. Ta có $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)dx=2 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x.\cos x}{\cos^2 x}.f\left(\cos^2 x\right)dx=2$.

Đặt $t=\cos^2 x\Rightarrow dt=-2\sin x\cos xdx\Rightarrow -\frac{1}{2}dt=\sin x\cos xdx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$ và $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x.\cos x}{\cos^2 x}.f\left(\cos^2 x\right)dx=2 \Leftrightarrow \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}=4$.

Ta có $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}dx=2 \Leftrightarrow \int\limits_{e}^{e^2} \frac{\ln x.f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln^2 x}dx=2$.

Tương tự trên ta có $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}dx=2 \Leftrightarrow \int\limits_{1}^{4} \frac{f(t)}{t}=4$.

* Tính $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}dx$.

Đặt $t=2x\Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$.

Đổi cận: $x=\frac{1}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$ và $x=2 \Rightarrow t=4$.

Khi đó $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{f(t)}{t}=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}dt+\int\limits_{1}^{4} \frac{f(t)}{t}=4+4=8$.

Câu 156. +) Đặt $t=\sqrt[3]{x}\Rightarrow t^3=x\Rightarrow 3t^2dt=dx$

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=1$ và $x=8\Rightarrow t=2$.

Khi đó $\int\limits_1^8\frac{f(\sqrt[3]{x})}{x}dx=\int\limits_1^2\frac{f(\text{t})}{t^3}3t^2dt=3\int\limits_1^2\frac{f(\text{t})}{t}dt=6\Rightarrow\int\limits_1^2\frac{f(\text{t})}{t}dt=2$

+) Đặt $t=\cos^2x\Rightarrow dt=-2\cos x\sin xdx\Rightarrow dt=-2\cos^2x\tan xdx\Rightarrow\tan xdx=-\frac{1}{2t}dt$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{1}{4}$.

Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x.f(\cos^2x)dx=-\frac{1}{2}\int\limits_1^{\frac{1}{4}}\frac{f(\text{t})}{t}dt=6\Rightarrow\int\limits_{\frac{1}{4}}^1\frac{f(\text{t})}{t}dt=12$

+) Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx\Rightarrow dt=2x^2\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\frac{dt}{t}$

Đổi cận: $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{1}{4}$ và $x=\sqrt{2}\Rightarrow t=2$ Khi đó

$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}\frac{f(x^2)}{x}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{4}}^2\frac{f(\text{t})}{t}dt=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{4}}^1\frac{f(\text{t})}{t}dt+\frac{1}{2}\int\limits_1^2\frac{f(\text{t})}{t}dt=\frac{2+12}{2}=7$

Câu 157. Đặt $I=\int\limits_0^{\sqrt{e^{2018}-1}}\frac{x}{x^2+1}f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\ln\left(x^2+1\right)\Rightarrow\mathrm{d}t=\frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=\sqrt{e^{2018}-1}\Rightarrow t=2018$.

Vậy $I=\int\limits_0^{2018}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{2018}f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$.

Câu 158. Ta có $K=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f\left(\tan x\right)\mathrm{d}x=3$. Đặt $\tan x=t\Rightarrow\mathrm{d}t=\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\left(t^2+1\right)\mathrm{d}x$.

Vậy $K=\int\limits_0^1f\left(t\right).\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t=\int\limits_0^1f\left(x\right).\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=3$.

Lại có $\int\limits_0^1\frac{x^2f\left(x\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[f\left(x\right)-\frac{1}{x^2+1}f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\frac{1}{x^2+1}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Vậy suy ra $I=\int\limits_0^1f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$.

Câu 159. Đặt $I_1=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f\left(\sin^2x\right)\mathrm{d}x=1$, $I_2==\int\limits_1^{16}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=1$.

□ Đặt $t=\sin^2x\Rightarrow\mathrm{d}t=2\sin x.\cos x\mathrm{d}x=2\sin^2x.\cot x\mathrm{d}x=2t.\cot x\mathrm{d}x$.

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{1}{2}$	1

$$I_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f\left(t\right).\frac{1}{2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f\left(4x\right)}{4x}\mathrm{d}\left(4x\right)=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\displaystyle\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x=2I_1=2$

□Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

x	1	16
t	1	4

$$I_2=\int_1^{16}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int_1^4\frac{f\left(t\right)}{t^2}2t\mathrm{d}t=2\int_1^4\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=2\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f\left(4x\right)}{4x}\mathrm{d}\left(4x\right)=2\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}I_2=\frac{1}{2}$

Khi đó, ta có:

$$\int_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

Câu 160. Ta có $\displaystyle\int_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_1^4\left[\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}\right]\mathrm{d}x=\int_1^4\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int_1^4\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

Xét $\displaystyle K=\int_1^4\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Đặt $2\sqrt{x}-1=t\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{t+1}{2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\mathrm{d}t$.

$\displaystyle\Rightarrow K=\int_1^3 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Xét $\displaystyle M=\int_1^4\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int_1^4\ln x\mathrm{d}\left(\ln x\right)=\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^4=2\ln^2 2$.

Do đó $\displaystyle\int_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x+2\ln^2 2\Rightarrow\int_3^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2\ln^2 2$.

Câu 161. Ta có: $7f\left(x\right)+4f\left(4-x\right)=2018x\sqrt{x^2+9}\Rightarrow f\left(x\right)=-\frac{4}{7}f\left(4-x\right)+\frac{2018}{7}x\sqrt{x^2+9}$.

Khi đó $\displaystyle I=\int_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{4}{7}\int_0^4 f\left(4-x\right)\mathrm{d}x+\frac{2018}{7}\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\mathrm{d}x\ \ (1)$.

Xét: $\int\limits_0^4 f(4-x)\mathrm{d}x$, đặt $t=4-x$, $\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$ nên $\int\limits_0^4 f(4-x)\mathrm{d}x=-\int\limits_4^0 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^4 f(t)\mathrm{d}x=I$

Xét: $\int\limits_0^4 x\sqrt{x^2+9}\mathrm{d}x$, đặt $u=\sqrt{x^2+9}\Rightarrow u^2=x^2+9\Rightarrow u\mathrm{d}u=x\mathrm{d}x$.

Nên $\int\limits_0^4 x\sqrt{x^2+9}\mathrm{d}x=\int\limits_3^5 u^2\mathrm{d}u=\left.\frac{u^3}{3}\right|_3^5=\frac{98}{3}$.

Từ $(1)\Rightarrow I=-\frac{4}{7}I+\frac{2018}{7}.\frac{98}{3}\Leftrightarrow \frac{11}{7}I=\frac{2018.98}{7.3}\Leftrightarrow I=\frac{197764}{33}$.

Câu 162. Ta có: $\int\limits_1^4 f(x)\,dx=\int\limits_1^4\left(\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\int\limits_1^4\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}dx+\int\limits_1^4\frac{\ln x}{x}dx=A+B$.

Xét $B=\int\limits_1^4\frac{\ln x}{x}dx=\int\limits_1^4\ln x\,d(\ln x)=\left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_1^4=\frac{(\ln 4)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}=2\ln^2 2$.

Xét $A=\int\limits_1^4\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}dx$.

Đặt $t=2\sqrt{x}-1\Rightarrow dt=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$. Khi đó $A=\int\limits_1^4\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}dx=\int\limits_1^3 f(t)\,dt=\int\limits_1^3 f(x)\,dx$

Vậy $\int\limits_1^4 f(x)\,dx=\left(\int\limits_1^3 f(x)\,dx\right)+2\ln^2 2\Rightarrow\int\limits_1^4 f(x)\,dx-\int\limits_1^3 f(x)\,dx=2\ln^2 2\Rightarrow I=2\ln^2 2$.

Dạng 5. Tích phân TỪNG PHẦN

Dạng 5.1 Hàm số tường minh

Câu 163. Chọn D

$I=\int\limits_1^e x\ln x\,dx$. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow I=\left.\frac{x^2}{2}\ln x\right|_0^e-\int\limits_0^e\frac{1}{x}.\frac{x^2}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_0^e xdx=\frac{e^2}{2}-\left.\frac{x^2}{4}\right|_0^e=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$.

Câu 164. Chọn C

Ta có $\int\limits_1^{\mathrm{e}}(1+x\ln x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\mathrm{e}}1.\mathrm{d}x+\int\limits_1^{\mathrm{e}}x\ln x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1+\int\limits_1^{\mathrm{e}}x\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=x.\mathrm{d}x\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$

Khi đó $\int\limits_1^{\mathrm{e}}x\ln x\,\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{2}\ln x\right|_1^{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}\int\limits_1^{\mathrm{e}}x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\left.\frac{1}{4}x^2\right|_1^{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{\mathrm{e}^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{\mathrm{e}^2}{4}+\frac{1}{4}$.

Suy ra $\int\limits_1^{\mathrm{e}}(1+x\ln x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1+\frac{\mathrm{e}^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{\mathrm{e}^2}{4}+\mathrm{e}-\frac{3}{4}$ nên $a=\frac{1}{4}$, $b=1$, $c=-\frac{3}{4}$.

Vậy $a-b=c$.

Câu 165. Chọn B

Ta có $\int\limits_1^e (2+x\ln x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^e 2\mathrm{d}x + \int\limits_1^e x\ln x\mathrm{d}x = 2x\Big|_1^e + I = 2e-2+I$ với $I=\int\limits_1^e x\ln x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow I = \dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \dfrac{x}{2}\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \dfrac{x^2}{4}\Big|_1^e = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{1}{4}\left(e^2-1\right) = \dfrac{e^2+1}{4}$

$\Rightarrow \int\limits_1^e (2+x\ln x)\mathrm{d}x = 2e-2+\dfrac{e^2+1}{4} = \dfrac{1}{4}e^2+2e-\dfrac{7}{4}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ b=2 \\ c=-\dfrac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow a-b=c$

Câu 166. Đặt $\begin{cases} u=x-2 \\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} \end{cases}$.

Suy ra

$\int\limits_0^1 (x-2)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = (x-2)\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

$= -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2+1-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2+1-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2+\dfrac{1}{4} = -\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^2+\dfrac{5}{4} = \dfrac{5-3\mathrm{e}^2}{4}$.

Câu 167. Chọn C.

Điều kiện: a, $b\in\mathbb{Z}$.

Đặt $\begin{cases} u=2x+1 \\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=2\mathrm{d}x \\ v=\mathrm{e}^x \end{cases}$.

$\Rightarrow \int\limits_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = (2x+1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - 2\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = (2x-1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 1+\mathrm{e} = a+b.\mathrm{e}$.

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$. Vậy tích $a.b=1$.

Câu 168. Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\dfrac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x} \\ v=\dfrac{-1}{x} \end{cases} \Rightarrow I=\dfrac{-\ln x}{x}\Big|_1^2 + \int\limits_1^2 \dfrac{1}{x^2}dx = \left(\dfrac{-\ln x}{x}+\dfrac{-1}{x}\right)\Big|_1^2 = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\ln 2}{2}$

$\Rightarrow b=1, c=2, a=\dfrac{-1}{2} \Rightarrow P=2a+3b+c=4$.

Câu 169. Đặt $\begin{cases} u=(x-1) \\ \mathrm{d}v=\sin 2x\mathrm{d}x \end{cases}$, ta có $\begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=-\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$. Do đó:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x-1)\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_o^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x.$$

Câu 170. Đặt $\begin{cases}\ln x=u\Rightarrow \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\\ (4x+2)\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\Rightarrow 2x^2+2x=v\end{cases}$

Khi đó

$$\int_2^3(4x+2)\ln x\mathrm{d}x=\ln x.\left(2x^2+2x\right)\Big|_2^3-2\int_2^3(x+1)\mathrm{d}x=24\ln 3-12\ln 2-2.\frac{7}{2}=-7-12\ln 2+24\ln 3.$$

Vậy $a=-7;\ b=-12;\ c=24\Rightarrow a+b+c=5$.

Câu 171. $\displaystyle\int_1^2\frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^2\ln(1+x)\left(\frac{-1}{x}\right)'\mathrm{d}x=\ln(1+x).\frac{-1}{x}\Big|_1^2-\int_1^2\frac{1}{x+1}.\frac{-1}{x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{-1}{2}\ln 3+\ln 2+\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int_1^2\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{-1}{2}\ln 3+\ln 2-\ln(1+x)\Big|_1^2+\ln x\Big|_1^2$$

$$=\frac{-1}{2}\ln 3+\ln 2-\ln 3+2\ln 2=\frac{-3}{2}\ln 3+3\ln 2\Rightarrow a=3,b=\frac{-3}{2}.$$

Vậy $a+4b=-3$.

Câu 172. Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\dfrac{dx}{(x+1)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\ v=-\dfrac{1}{x+1}\end{cases}$

$$\Rightarrow I=-\frac{\ln x}{x+1}\Big|_1^{2^{1000}}+\int_1^{2^{1000}}\frac{1}{x+1}.\frac{dx}{x}=-\frac{\ln 2^{1000}}{2^{1000}+1}+\int_1^{21000}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=-\frac{1000\ln 2}{2^{1000}+1}+\ln\left|\frac{x}{x=1}\right|\Big|_1^{2^{1000}}$$

$$=-\frac{1000\ln 2}{2^{1000}+1}+\ln\frac{2^{1000}}{2^{1000}+1}-\ln\frac{1}{2}=-\frac{1000\ln 2}{2^{1000}+1}+\ln\frac{2^{1001}}{2^{1000}+1}=-\frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}}+1001\ln\frac{2}{1+2^{1000}}.$$

Câu 173. Xét $I=\displaystyle\int_0^2 2x\ln(x+1)dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ dv=2xdx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{x+1}dx\\ v=x^2-1\end{cases}$.

Ta có $I=\left(x^2-1\right)\ln(x+1)\big|_0^2-\displaystyle\int_0^2\frac{x^2-1}{x+1}dx=3\ln 3-\int_0^2(x-1)dx=3\ln 3-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^2=3\ln 3$.

Vậy $a=3,b=3\Rightarrow 6a+7b=39$.

Câu 174. Đặt $u=\ln x\ \Rightarrow du=\dfrac{1}{x}dx$

$dv=dx\ \Rightarrow v=x$

Ta có $\displaystyle\int_1^a\ln xdx=a.\ln a-\int_1^a dx=a\ln a-a+1=1+2a$

$\Rightarrow a\ln a=3a\Leftrightarrow \ln a=3\Leftrightarrow a=e^3$.

Vậy $a\in(18;21)$.

Câu 175.

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x-2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 (x-2)e^x dx = (x-2)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = -e+2-e^x\Big|_0^1 = 3-2e = a+be$

với $a;b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a=3, b=-2 \Rightarrow a+b=1$

Câu 176. Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$I = \int_1^2 xe^x dx = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^x\Big|_1^2 = 2e^2 - e - \left(e^2 - e\right) = e^2$.

Câu 177. Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

$\Rightarrow \int_2^3 x\ln x\, dx = \dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_2^3 - \dfrac{1}{2}\int_2^3 x\, dx = \dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_2^3 - \dfrac{x^2}{4}\Big|_2^3 = \dfrac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \dfrac{5}{4}$.

Suy ra $m+n+2p=0$.

Câu 178. Xét $I = \int_0^2 2x\ln(1+x)dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = 2xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x}dx \\ v = x^2-1 \end{cases}$.

Ta có: $I = \left(x^2-1\right)\ln(x+1)\Big|_0^2 - \int_0^2 \dfrac{x^2-1}{x+1}dx = 3\ln 3 - \int_0^2 (x-1)dx = 3\ln 3 - \left(\dfrac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_0^2 = 3\ln 3$.

Vậy $a=3$, $b=3 \Rightarrow 3a+4b=21$.

Câu 179. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{1}{x^2}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}.dx \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$

Ta có $I = \left(\dfrac{-1}{x}.\ln x\right)\Bigg|_1^2 + \int_1^2 \dfrac{1}{x^2}dx = \dfrac{-1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{x}\Big|_1^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln 2 \Rightarrow b=1, c=2, a=-\dfrac{1}{2}$. Khi đó

$P = 2\left(\dfrac{-1}{2}\right) + 3.1 + 2 = 4$.

Câu 180. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$

$I = x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \dfrac{\pi}{3}.\sqrt{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x dx}{\cos x} = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{d(\cos x)}{\cos x}$

$= \dfrac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln\dfrac{1}{2} - \ln 1 = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2 \Rightarrow a=3; b=2$. Vậy $a^2+b=11$.

Câu 181. Đặt $\begin{cases} u = \ln\left(x^2 - x\right) \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \dfrac{2x-1}{x^2 - x} \\ v = x \end{cases}$

Suy ra $F(x) = \int \ln\left(x^2 - x\right)dx = x\ln\left(x^2 - x\right) - \int \dfrac{2x-1}{x-1}dx = x\ln\left(x^2 - x\right) - 2x - \ln|x-1| + C$

$F(2) = 2\ln 2 - 4 \Rightarrow C = 0$ suy ra $F(x) = x\ln\left(x^2 - x\right) - 2x - \ln|x-1|$

Khi đó: $I = \int_2^3 \left[\dfrac{F(x) + 2x + \ln(x-1)}{x}\right]\mathrm{d}x = \int_2^3 \ln\left(x^2 - x\right)\mathrm{d}x = F(3) - F(2) = 3\ln 3 - 2$.

Câu 182. Xét $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x.\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \tan x \end{cases}$.

$I = x.\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\mathrm{d}x = x.\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x) = \left[x\tan x + \ln(\cos x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi - \ln 2.$

Suy ra $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow T = a^2 + b = 11.$

Câu 183. Áp dụng phương pháp tích phân từng phần:

Đặt: $\begin{cases} u = \ln(1+2x) \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2}{2x+1}\mathrm{d}x \\ \text{chọn } v = -\dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{-(2x+1)}{x} \end{cases}$.

$\Rightarrow \int_1^2 \dfrac{\ln(1+2x)}{x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{-(2x+1)}{x}\cdot\ln(1+2x)\Big|_1^2 + \int_1^2 \dfrac{2}{x}\mathrm{d}x$

$= \left(-\dfrac{5}{2}\ln 5 + 3\ln 3\right) + 2\ln|x|\Big|_1^2$

$= \dfrac{-5}{2}\ln 5 + 3\ln 3 + 2\ln 2$.

$\Rightarrow a = -5,\ b = 3,\ c = 2$.

Vậy $a + 2(b+c) = 5$.

Câu 184. Ta có $I = \int_1^2 \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(1+x) \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{du} = \dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{x}. \end{cases}$

Khi đó $I = -\dfrac{1}{x}\ln(1+x)\Big|_1^2 + \int_1^2 \dfrac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\ln 3 + \ln 2 + \int_1^2\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2+\left(\ln\frac{x}{x+1}\right)\Bigg|_1^2=-\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2+2\ln 2-\ln 3=3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3.$$

Suy ra $a=3$, $b=-\frac{3}{2}$. Vậy $P=ab=\frac{-9}{2}$.

Câu 185. Chọn A.

Đặt $\begin{cases}u=x-2\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}\Rightarrow\int_0^1(x-2)e^x dx=(x-2)e^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=-e+2-e^x\Big|_0^1=3-2e=a+be$

với $a;b\in\mathbb{Z}\Rightarrow a=3,b=-2\Rightarrow a+b=1$

Câu 186. Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=\ln(\sin x+2\cos x)\Rightarrow du=\dfrac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}dx\\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\Rightarrow v=\tan x+2\end{cases}$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x+2\cos x)}{\cos^2 x}dx=(\tan x+2)\ln(\sin x+2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-2\sin x}{\cos x}dx$$

$$=3\ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)-2\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\tan x)dx=3\ln 3-\frac{7}{2}\ln 2-\left(x+2\ln|\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=3\ln 3-\frac{7}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}-2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=3\ln 3-\frac{5}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}\Rightarrow a=3,\ b=-\frac{5}{2},\ c=-\frac{1}{4}.$$

Vậy $abc=18$.

Câu 187. Ta có: $I=\int_{\frac{1}{12}}^{12}\left[x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+1\right]e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int_{\frac{1}{12}}^{12}x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{\frac{1}{12}}^{12}e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

Đặt: $\begin{cases}u=x\\dv=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx\end{cases}\rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^{x+\frac{1}{x}}\end{cases}$.

Khi đó: $I=\int_{\frac{1}{12}}^{12}x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{\frac{1}{12}}^{12}e^{x+\frac{1}{x}}dx=x.e^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{12}}^{12}-\int_{\frac{1}{12}}^{12}e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{\frac{1}{12}}^{12}e^{x+\frac{1}{x}}dx$

$$=12e^{12+\frac{1}{12}}-\frac{1}{12}e^{12+\frac{1}{12}}=\frac{143}{12}e^{\frac{145}{12}}.$$

Vậy: $a=143;b=12;c=145;d=12$. Dó đó: $bc-ad=12.145-143.12=24$.

Câu 188. Ta có $\int_0^2\frac{x+\ln(x+1)}{(x+2)^2}dx=\int_0^2\frac{1}{x+2}dx-\int_0^2\frac{2}{(x+2)^2}dx+\int_0^2\frac{\ln(x+1)}{(x+2)^2}dx$.

$$\int_0^2\frac{1}{x+2}dx-\int_0^2\frac{2}{(x+2)^2}dx=\left(\ln|x+2|+\frac{2}{x+2}\right)\Bigg|_0^2=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

$$I=\int_0^2\frac{\ln(x+1)}{(x+2)^2}dx.$$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = \dfrac{1}{(x+2)^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ v = \dfrac{-1}{(x+2)} + 1 = \dfrac{x+1}{x+2} \end{cases}$

Suy ra $I = \left(\dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{(x+2)}\right)\Bigg|_0^2 - \int_0^2 \dfrac{1}{(x+2)}dx = \dfrac{3}{4}\ln 3 - \ln 2$.

Do đó $\int_0^2 \dfrac{x+\ln(x+1)}{(x+2)^2}dx = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}\ln 3 \Rightarrow P = (-1+2)(3+4) = 7$.

Dạng 5.2 Hàm số không tường minh (hàm ẩn)

Câu 189. Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$. Khi đó $I = (x+1)f(x)\big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx$.

Suy ra $10 = 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = -10+2 = -8$

Vậy $\int_0^1 f(x)dx = -8$.

Câu 190.

Lời giải

Ta có: $I = \int_0^1 xf'(2x)dx = \dfrac{1}{2}xf(2x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \dfrac{1}{2}f(2x)dx = \dfrac{1}{2}f(2) - \dfrac{1}{4}\int_0^1 f(2x)d(2x)$

$I = \dfrac{1}{2}f(2) - \dfrac{1}{4}\int_0^2 f(x)dx = \dfrac{1}{2}.16 - \dfrac{1}{4}.4 = 7$.

Câu 191. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$.

•$-\dfrac{1}{21} = \int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 udv = uv\big|_0^1 - \int_0^1 vdu = \dfrac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \dfrac{x^3}{3}f'(x)dx = -\dfrac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)dx$

$\Rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x)dx = \dfrac{1}{7}$.

•$\int_0^1 \left(x^3 - f'(x)\right)^2 dx = \int_0^1 x^6 dx - 2\int_0^1 x^3 f'(x)dx + \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = \dfrac{1}{7} - 2.\dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{7} = 0$

$\Rightarrow \left(f'(x) - x^3\right)^2 = 0, \forall x \in [0;1] \Rightarrow f'(x) = x^3, \forall x \in [0;1]$.

Kết hợp điều kiện $f(1) = 0$ ta có $f(x) = \dfrac{1}{4}(x^4 - 1); \forall x \in [0;1]$

Vậy $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \dfrac{1}{4}(x^4-1)dx = \dfrac{1}{4}\int_0^1 (x^4-1)dx = -\dfrac{1}{5}$.

Câu 192. Ta có $\int_0^1 \left[f(x)\tan^2 x + f'(x)\tan x\right]dx = \int_0^1 f(x)\tan^2 xdx + \int_0^1 f'(x)\tan xdx$.

Lại có:

$$\int_0^1 f(x)\tan^2 x\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x-1.$$

$$\int_0^1 f'(x)\tan x\mathrm{d}x=\int_0^1\tan x\mathrm{d}\left(f(x)\right)=f(x).\tan x\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}(\tan x)$$

$$=f(1).\tan 1-\int_0^1\frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\cot 1.\tan 1-\int_0^1\frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=1-\int_0^1\frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

Vậy $I=0$.

Câu 193. Chọn A

$$\begin{cases}u=f(x)\Rightarrow du=f'(x)dx\\ dv=x^2dx\Rightarrow v=\dfrac{x^3}{3}\end{cases}$$

$$I=\frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^3}{3}f'(x)dx=\frac{1^3}{3}f(1)-0.f(0)-\int_0^1\frac{x^3}{3}f'(x)dx\alpha$$

$$\frac{1}{3}=\frac{-1}{3}\int_0^1 x^3f'(x)dx\Rightarrow\int_0^1 x^3f'(x)dx=-1$$

Câu 194. Ta có: $\int_0^1 f(x)\sin\frac{\pi}{2}xdx=-\frac{2}{\pi}f(x).\cos\frac{\pi}{2}x\Big|_0^1+\frac{2}{\pi}\int_0^1 f'(x).\cos\frac{\pi}{2}xdx=\frac{3}{2}$

$$\int_0^1(f(x)-3\sin\frac{\pi}{2}x)^2dx=\int_0^1 f^2(x)dx-6\int_0^1 f(x)\sin\frac{\pi}{2}xdx+9\int_0^1\sin^2\frac{\pi}{2}xdx=0$$

Từ đây ta suy ra $f(x)=3\sin\frac{\pi}{2}x\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 3\sin\frac{\pi}{2}xdx=\frac{6}{\pi}$.

Câu 195. Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\cos x+2m\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2mx\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x+\frac{m\pi^2}{4}$.

Gọi $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\cos xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\sin x\end{cases}$.

$$I=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

Khi đó: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\cos x+2m\right)\mathrm{d}x=\frac{m\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}-1$.

Suy ra $\frac{m}{4}=2\Leftrightarrow m=8$.

Câu 196. Chọn B

Cách 1: Đặt $u=f(x)\Rightarrow du=f'(x)dx$, $dv=x^2dx\Rightarrow v=\frac{x^3}{3}$.

Ta có $\frac{1}{3}=\frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^3}{3}f'(x)dx\Rightarrow\int_0^1 x^3f'(x)dx=-1$

Ta có $\int_0^1 49x^6\mathrm{d}x = 7,\ \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 7, \int_0^1 2.7x^3.f'(x)dx = -14 \Rightarrow \int_0^1 \left[7x^3 + f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow 7x^3 + f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{7x^4}{4} + C$, mà $f(1) = 0 \Rightarrow C = \dfrac{7}{4}$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\dfrac{7x^4}{4} + \dfrac{7}{4}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{7}{5}$.

Cách 2: Nhắc lại bất đẳng thức Holder tích phân như sau:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx$$

Dấu bằng xảy ra khi $f(x) = k.g(x), \left(\forall x \in [a;b], k \in \mathbb{R}\right)$

Ta có $\dfrac{1}{9} = \left(\int_0^1 \dfrac{x^3}{3} f'(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 \dfrac{x^6}{9}dx.\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = \dfrac{1}{9}$. Dấu bằng xảy ra khi $f'(x) = k.\dfrac{x^3}{3}$.

Mặt khác $\int_0^1 \dfrac{x^3}{3} f'(x)dx = \dfrac{-1}{3} \Rightarrow k = 21 \Rightarrow f'(x) = -7x^3$ suy ra $f(x) = -\dfrac{7x^4}{4} + \dfrac{7}{4}$.

Từ đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\dfrac{7x^4}{4} + \dfrac{7}{4}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{7}{5}$.

Câu 197. Xét tích phân $I = \int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$

Đặt $\begin{cases} u = \cos(\pi x) \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\pi\sin(\pi x)dx \\ v = f(x) \end{cases}$, ta có

$I = f(x)\cos(\pi x)\Big|_0^1 + \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx = -f(1) - f(0) + \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx = \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx$

Mà $I = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx = \dfrac{1}{2}$

Mặt khác: $\int_0^1 \sin^2(\pi x)dx = \dfrac{1}{2}\int_0^1 \left[1 - \cos(2\pi x)\right]dx = \dfrac{1}{2}\left[x - \dfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\right]\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \int_0^1 \left[f^2(x) - 2.f(x)\sin(\pi x) + \sin^2(\pi x)\right]dx = \dfrac{1}{2} - 2.\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 0$.

Khi đó $\int_0^1 \left[f(x) - \sin(\pi x)\right]^2 dx = 0$

Vì $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $\left[f(x) - \sin(\pi x)\right]^2 \ge 0, \forall x \in [0;1]$ nên ta suy ra $f(x) - \sin(\pi x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \sin(\pi x)$.

Do đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(\pi x)dx = -\dfrac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_0^1 = \dfrac{2}{\pi}$

Câu 198. Từ giả thiết: $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 3x^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Tính: $I=\int_0^1 3x^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=3x^2\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=x^3 \end{cases}$.

Ta có:

$I=\int_0^1 3x^2 f(x)\mathrm{d}x = x^3 f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = 1.f(1)-0.f(0)-\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$.

Mà: $\int_0^1 3x^2 f(x)\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow 1 = -\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-1 \Leftrightarrow 7\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-7 \Leftrightarrow \int_0^1 7x^3.f'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$, (theo giả thiết: $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$).

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(7x^3.f'(x)+\left[f'(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x)\left[7x^3+f'(x)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow 7x^3+f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-7x^3 \Rightarrow f(x)=-\frac{7}{4}x^4+C$.

Với $f(1)=0 \Rightarrow -\frac{7}{4}.1^4+C=0 \Rightarrow C=\frac{7}{4}$.

Khi đó: $f(x)=-\frac{7}{4}x^4+\frac{7}{4}$.

Vậy: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-\frac{7}{4}x^4+\frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x=-\frac{7}{4}\left(\frac{x^5}{5}-x\right)\Big|_0^1=\frac{7}{5}$.

Câu 199. Từ giả thiết: $\int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{5} \Rightarrow \int_0^1 5x.f(x)\mathrm{d}x=1$.

Tính: $I=\int_0^1 5x.f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=5x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=\frac{5}{2}x^2 \end{cases}$.

Ta có: $I=\int_0^1 5x.f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}x^2.f(x)\Big|_0^1-\frac{5}{2}\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x$

$=\frac{5}{2}.f(1)-\frac{5}{2}\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x=10-\frac{5}{2}\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x$, (vì $f(1)=4$)

Mà: $I=\int_0^1 5x.f(x)\mathrm{d}x=1 \Rightarrow 1=10-\frac{5}{2}\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x=\frac{18}{5}$

$\Leftrightarrow 10\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x=36 \Leftrightarrow 10\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$, (theo giả thiết: $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=36$)

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 \left[10x^2.f'(x) - \left[f'(x)\right]^2\right] \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f'(x)\left[10x^2 - f'(x)\right]\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow 10x^2 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 10x^2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{10x^3}{3} + C$

Với $f(1) = 4 \Rightarrow 4 = \dfrac{10.1}{3} + C \Rightarrow C = \dfrac{2}{3}$.

Khi đó: $f(x) = \dfrac{10x^3}{3} + \dfrac{2}{3}$.

Vậy: $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\dfrac{10x^3}{3} + \dfrac{2}{3}\right)\mathrm{d}x = \left.\left(\dfrac{5x^4}{6} + \dfrac{2}{3}x\right)\right|_0^1 = \dfrac{3}{2}$.

Câu 200. Từ giả thiết: $\int\limits_0^2 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \int\limits_0^2 3x^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Tính: $I = \int\limits_0^2 3x^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = 3x^2\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = x^3 \end{cases}$.

Ta có: $I = \int\limits_0^2 3x^2 f(x)\mathrm{d}x = x^3.f(x)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = 24 - \int\limits_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$, (vì $f(2) = 3$)

Mà: $I = \int\limits_0^2 3x^2 f(x)\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow 1 = 24 - \int\limits_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = 23 \Leftrightarrow \dfrac{4}{23}\int\limits_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{23}\int\limits_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$, (theo giả thiết: $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 4$)

$\Leftrightarrow \int\limits_0^2 \left[\dfrac{4}{23}x^3.f'(x) - \left[f'(x)\right]^2\right]\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f'(x)\left[\dfrac{4}{23}x^3 - f'(x)\right]\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow \dfrac{4}{23}x^3 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{4}{23}x^3 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{23}x^4 + C$

Với $f(2) = 3 \Rightarrow 3 = \dfrac{16}{23} + C \Rightarrow C = \dfrac{53}{23}$.

Khi đó: $f(x) = \dfrac{1}{23}x^4 + \dfrac{53}{23}$.

Vậy $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(\dfrac{1}{23}x^4 + \dfrac{53}{23}\right)\mathrm{d}x = \left.\left(\dfrac{1}{115}x^5 + \dfrac{53}{23}x\right)\right|_0^2 = \dfrac{562}{115}$.

Câu 201. Tính: $I = \int\limits_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x$. Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$

Ta có: $I = \dfrac{1}{2}x^2.f(x)\Big|_0^1 - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x = 2 - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$, (vì $f(1) = 4$).

Mà: $\int_0^1 x.f(x)\,dx=-\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\,dx$

$\Leftrightarrow \int_0^1 x^2 f'(x)\,dx=5$, (theo giả thiết: $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx=5$) $\Leftrightarrow \int_0^1 x^2 f'(x)\,dx=\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(x^2 f'(x)-\left[f'(x)\right]^2\right)dx=0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x).\left[x^2-f'(x)\right]dx=0$

$\Rightarrow x^2-f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x^2 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3+C$.

Với $f(1)=4 \Rightarrow C=\frac{11}{3}$.

Khi đó: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}\right)dx=\left(\frac{1}{12}x^4+\frac{11}{3}x\right)\Big|_0^1=\frac{15}{4}$.

Câu 202. Tính: $I=\int_0^2 x.f(x)\,dx$.

Đặt: $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=f'(x)\,dx \\ v=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

Ta có: $I=\frac{1}{2}x^2.f(x)\Big|_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2 x^2 f'(x)\,dx =12-\frac{1}{2}\int_0^2 x^2 f'(x)\,dx$, (vì $f(2)=6$).

Theo giả thiết: $\int_0^2 x.f(x)\,dx=\frac{17}{2} \Rightarrow \frac{17}{2}=12-\frac{1}{2}\int_0^2 x^2 f'(x)\,dx$

$\Leftrightarrow \int_0^2 x^2 f'(x)\,dx=7$

$\Leftrightarrow \int_0^2 x^2 f'(x)\,dx=\int_0^2 \left[f'(x)\right]^2 dx$

$\Leftrightarrow \int_0^2 \left(x^2 f'(x)-\left[f'(x)\right]^2\right)dx=0$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f'(x).\left[x^2-f'(x)\right]dx=0$

$\Rightarrow x^2-f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x^2 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3+C$.

Với $f(2)=6 \Rightarrow C=\frac{10}{3}$.

Khi đó: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{10}{3}$.

Vậy $\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{10}{3}\right)dx=\left(\frac{1}{12}x^4+\frac{10}{3}x\right)\Big|_0^2=8$.

Câu 203. Tính $I=\int\limits_0^3 x^2.f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=\frac{1}{3}x^3 \end{cases}$.

Ta có $I=\frac{1}{3}x^3.f(x)\Big|_0^3-\frac{1}{3}\int\limits_0^3 x^3f'(x)\mathrm{d}x \;=54-\frac{1}{3}\int\limits_0^3 x^3f'(x)\mathrm{d}x$, (vì $f(3)=6$).

Theo giả thiết: $\int\limits_0^3 x^2.f(x)\mathrm{d}x=\frac{154}{3}\Rightarrow\frac{154}{3}=54-\frac{1}{3}\int\limits_0^3 x^3f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^3 x^3f'(x)\mathrm{d}x=8\Leftrightarrow\int\limits_0^3 x^3f'(x)\mathrm{d}x=4\int\limits_0^3\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_0^3\left(x^3f'(x)-4\left[f'(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^3 f'(x)\left[x^3-4f'(x)\right]\mathrm{d}x=0$.

$\Rightarrow x^3-4f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^3}{4}\Rightarrow f(x)=\frac{x^4}{16}+C$.

Với $f(3)=6\Rightarrow C=\frac{15}{16}$.

Khi đó: $f(x)=\frac{x^4}{16}+\frac{15}{16}$.

Vậy $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\left(\frac{1}{16}x^4+\frac{15}{16}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{80}x^5+\frac{15}{16}x\right)\Big|_0^3=\frac{117}{20}$.

Câu 204. Tính: $I=\int\limits_0^1 x^3.f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=x^3\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=\frac{1}{4}x^4 \end{cases}$.

Ta có: $I=\frac{1}{4}x^4.f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{4}\int\limits_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x \;=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\int\limits_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x$, (vì $f(1)=2$).

Theo giả thiết: $\int\limits_0^1 x^3.f(x)\mathrm{d}x=10\Rightarrow\int\limits_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x=-38$

$\Leftrightarrow 8.\int\limits_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x=-38.8\Leftrightarrow 8.\int\limits_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x=-38.\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left(8x^4f'(x)+38\left[f'(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f'(x).\left[8x^4+38f'(x)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow\;8x^4+38f'(x)=0\;\Leftrightarrow\;f'(x)=-\frac{4}{19}x^4\;\Rightarrow\;f(x)=-\frac{4}{95}x^5+C$.

Với $f(1)=2\;\Rightarrow\;C=\frac{194}{95}$.

Khi đó: $f(x)=-\frac{4}{95}x^5+\frac{194}{95}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-\frac{4}{95}x^5+\frac{194}{95}\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{2}{285}x^6+\frac{194}{95}x\right)\Big|_0^1=\frac{116}{57}$.

Câu 205. Xét $A=\int_0^1(x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=(x+1)e^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=xe^x\end{cases}$

Suy ra $A=xe^x f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1-e^2}{4}$

Xét $\int_0^1 x^2e^{2x}\mathrm{d}x=e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{e^2-1}{4}$

Ta có : $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x+2\int_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 x^2e^{2x}\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_0^1\left(f'(x)+xe^x\right)^2\mathrm{d}x=0$

Suy ra $f'(x)+xe^x=0,\forall x\in[0;1]$ (do $\left(f'(x)+xe^x\right)^2\ge 0,\forall x\in[0;1]$)

$\Rightarrow f'(x)=-xe^x\Rightarrow f(x)=(1-x)e^x+C$

Do $f(1)=0$ nên $f(x)=(1-x)e^x$

Vậy $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)e^x\mathrm{d}x=(2-x)e^x\Big|_0^1=e-2$.

Câu 206. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$. Đặt $\begin{cases}\sin 2x=u\\ f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\cos 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\\ f(x)=v\end{cases}$, khi đó

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=\sin 2x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x=\sin\frac{\pi}{2}.f\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin 0.f(0)-2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$

$=-2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$.

Theo đề bài ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}$.

Mặt khác ta lại có $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}$.

Do $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[f(x)-\cos 2x\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[f^2(x)-2f(x).\cos 2x+\cos^2 2x\right]\mathrm{d}x=\left(\frac{\pi}{8}-2\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)=0$ nên $f(x)=\cos 2x$.

Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}}\cos 4x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{4}$.

Câu 207. Đặt $\begin{cases}u=\cos(\pi x)\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=-\pi\sin(\pi x)\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$. Khi đó:

$$\int\limits_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\cos(\pi x)f(x)\Big|_0^1+\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$$

$$=-\left(f(1)+f(0)\right)+\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

Cách 1: Ta có $\int\limits_0^1\left[f(x)-k\sin(\pi x)\right]^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-2k\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x+k^2\int\limits_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}-k+\frac{k^2}{2}=0\Leftrightarrow k=1$.

Do đó $\int\limits_0^1\left[f(x)-\sin(\pi x)\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$. Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

Cách 2: Sử dụng BĐT Holder.

$$\boxed{\left[\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\le\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\int\limits_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f(x)=kg(x),\forall x\in[a;b]$.

Áp dụng vào bài ta có $\frac{1}{4}=\left[\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x\right]^2\le\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.\int\limits_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$,

suy ra $f(x)=k\sin(\pi x)$.

Mà $\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k\int\limits_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=1\Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

Câu 208. Ta có: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x.f'(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\sin x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\cos x\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

$$I=\sin x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x.f(x)\mathrm{d}x=\frac{3\sqrt{2}}{2}-I_1.$$

$$2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin x.\tan x.f(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin^2 x.\frac{f(x)}{\cos x}\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\left(1-\cos^2 x\right).\frac{f(x)}{\cos x}\right]\mathrm{d}x.$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x.f(x)\mathrm{d}x=1-I_1.$$

$$\Rightarrow I_1=-1\Rightarrow I=\frac{3\sqrt{2}}{2}+1=\frac{3\sqrt{2}+2}{2}.$$

Câu 209. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\end{cases}$

Do đó $\int_0^1\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}f(x)\Big|_0^1-\frac{2}{\pi}\int_0^1\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int_0^1\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}.$$

Lại có: $\int_0^1\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow I=\int_0^1\left(-\frac{2}{\pi}.f'(x)\right)^2\mathrm{d}x-2\left(-\frac{2}{\pi}\right)\int_0^1\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(-\frac{2}{\pi}f'(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2}{8}-\frac{2}{\pi}.\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}=0$$

Vì $\left(-\frac{2}{\pi}f'(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2\geq 0$ trên đoạn $[0;1]$ nên

$$\int_0^1\left(-\frac{2}{\pi}f'(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow-\frac{2}{\pi}f'(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Suy ra $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+C$ mà $f(1)=0$ do đó $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

Câu 210. Ta có: $\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x=9$ (1)

- Tính $\int_0^1 x^3f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x^3.\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^4}{4}\end{cases}$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}=\int_0^1x^3f(x)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^4}{4}.f(x)\right)\Big|_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1x^4.f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\int_0^1x^4.f'(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\int_0^1x^4.f'(x)\mathrm{d}x=-1\Rightarrow 18\int_0^1x^4.f'(x)\mathrm{d}x=-18\ \ (2)$$

- Lại có: $\int_0^1x^8\mathrm{d}x=\frac{x^9}{9}\Big|_0^1=\frac{1}{9}\Rightarrow 81\int_0^1x^8\mathrm{d}x=9$ (3)

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$$\int_0^1 \left[\left[f'(x)\right]^2 + 18x^4.f'(x) + 81x^8\right]\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) + 9x^4\right]\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi.\int_0^1 \left[f'(x) + 9x^4\right]\mathrm{d}x = 0$$

Hay thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x) + 9x^4$, trục hoành Ox, các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ khi quay quanh Ox bằng 0

$$\Rightarrow f'(x) + 9x^4 = 0 \Rightarrow f'(x) = -9x^4 \Rightarrow f(x) = \int f'(x).\mathrm{d}x = -\frac{9}{5}x^4 + C.$$

Lại do $f(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{14}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}\right)\mathrm{d}x = \left.\left(-\frac{3}{10}x^6 + \frac{14}{5}x\right)\right|_0^1 = \frac{5}{2}.$$

Câu 211. - Tính : $I = \int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x = J + K$.

Tính $K = \int_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^x f(x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \left[\mathrm{e}^x f(x) + \mathrm{e}^x f'(x)\right]\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow K = \left.\left(x\mathrm{e}^x f(x)\right)\right|_0^1 - \int_0^1 \left[x\mathrm{e}^x f(x) + x\mathrm{e}^x f'(x)\right]\mathrm{d}x = -\int_0^1 x\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x \ \left(\text{do } f(1) = 0\right)$$

$$\Rightarrow K = -J - \int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow I = J + K = -\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x.$$

- Kết hợp giả thiết ta được :

$$\begin{cases} \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{4} \\ -\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{4} & (1) \\ 2\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2} & (2) \end{cases}$$

- Mặt khác, ta tính được : $\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{4}$ (3) .

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$$\int_0^1 \left(\left[f'(x)\right]^2 + 2x\mathrm{e}^x f'(x) + x^2\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_o^1 \left(f'(x) + x\mathrm{e}^x\right)^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \pi\int_o^1 \left(f'(x) + x\mathrm{e}^x\right)^2 \mathrm{d}x = 0$$

hay thể tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x) + x\mathrm{e}^x$, trục Ox, các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ khi quay quanh trục Ox bằng 0

$$\Rightarrow f'(x) + x\mathrm{e}^x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x\mathrm{e}^x$$

$$\Rightarrow f(x) = -\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = (1-x)\mathrm{e}^x + \mathrm{C}.$$

- Lại do $f(1) = 0 \Rightarrow \mathrm{C} = 0 \Rightarrow f(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \left((1-x)\mathrm{e}^x\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = -1 + \mathrm{e}^x\Big|_0^1 = \mathrm{e} - 2$

Câu 212. Đặt $u = f(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = (x-1)^2\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{(x-1)^3}{3}$

Ta có $-\dfrac{1}{3} = \int_1^2 (x-1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{(x-1)^3}{3}.f(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 \dfrac{(x-1)^3}{3} f'(x)\,\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{3}\int_1^2 (x-1)^3 f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow -\int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = -14$

Tính được $\int_1^2 49(x-1)^6\,\mathrm{d}x = 7 \Rightarrow \int_1^2 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x - \int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 49(x-1)^6\,\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow \int_1^2 \left[7(x-1)^3 - f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f'(x) = 7(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \dfrac{7(x-1)^4}{4} + C$.

Do $f(2) = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{7(x-1)^4}{4} - \dfrac{7}{4}$.

Vậy $I = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[\dfrac{7(x-1)^4}{4} - \dfrac{7}{4}\right]\mathrm{d}x = -\dfrac{7}{5}$.

Câu 213. Xét tích phân $\int_0^1 x^2.f(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

$\dfrac{1}{3} = \int_0^1 x^2.f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1 - \dfrac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = -1$

$\int_0^1 x^6\,dx = \dfrac{1}{7}$.

Ta có: $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x + 14\int_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x + 49\int_0^1 x^6\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int_0^1 \left(f'(x) + 7x^3\right)^2\mathrm{d}x = 0$

Mà $\int_0^1 \left(f'(x) + 7x^3\right)^2\mathrm{d}x \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $f'(x) + 7x^3 = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3$

$\Rightarrow f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = -\int 7x^3\,\mathrm{d}x = -\dfrac{7x^4}{4} + C$.

$f(1) = 0 \Rightarrow C = \dfrac{7}{4} \Rightarrow f(x) = -\dfrac{7x^4}{4} + \dfrac{7}{4}$.

$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\dfrac{7x^4}{4} + \dfrac{7}{4}\right)\mathrm{d}x = -\dfrac{7x^5}{20}\Big|_0^1 + \dfrac{7x}{4}\Big|_0^1 = -\dfrac{7}{20} + \dfrac{7}{4} = \dfrac{7}{5}$.

Câu 214. Xét $\int_0^1 x^4 f(x)\,dx = \dfrac{7}{11}$

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^4 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \dfrac{x^5}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 x^4 f(x)dx = \dfrac{1}{5}x^5 f(x)\Big|_0^1 - \dfrac{1}{5}\int\limits_0^1 x^5 f'(x)dx = \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5}\int\limits_0^1 x^5 f'(x)dx$ (vì $f(1)=3$)

$\Rightarrow \int\limits_0^1 x^5 f'(x)dx = 5\left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{7}{11}\right) = -\dfrac{2}{11}$.

Xét $\begin{cases} \int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = \dfrac{4}{11} \\ \int\limits_0^1 x^5 f'(x)dx = -\dfrac{2}{11} \\ \int\limits_0^1 x^{10}dx = \dfrac{1}{11}x^{11}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{11} \end{cases} \Rightarrow \int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx + 4\int\limits_0^1 x^5 f'(x)dx + 4\int\limits_0^1 x^{10}dx = 0$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 \left[\left(f'(x) + 2x^5\right)\right]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = -2x^5 \Rightarrow f(x) = \dfrac{-x^6}{3} + C$. Do $f(1)=3 \Rightarrow C = \dfrac{10}{3}$ nên

$\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 \left(\dfrac{-x^6}{3} + \dfrac{10}{3}\right)dx = \dfrac{23}{7}$

Câu 215. $\int\limits_1^2 \dfrac{f(x)}{(x+1)^2}dx = -\dfrac{5}{12} + \ln\dfrac{3}{2}.$

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx \\ dv = \dfrac{dx}{(x+1)^2} \Rightarrow v = -\dfrac{1}{x+1} \end{cases}$

$\int\limits_1^2 \dfrac{f(x)}{(x+1)^2}dx = -\dfrac{f(x)}{x+1}\Bigg|_1^2 + \int\limits_1^2 \dfrac{f'(x)}{x+1}dx = \dfrac{f(1)}{2} - \dfrac{f(2)}{3} + \int\limits_1^2 \dfrac{f'(x)}{x+1}dx = \dfrac{f(1)}{2} + \int\limits_1^2 \dfrac{f'(x)}{x+1}dx$

$\Rightarrow \int\limits_1^2 \left(f'(x)\right)^2 dx + \int\limits_1^2 \dfrac{f'(x)}{2}dx + \int\limits_1^2 \dfrac{f'(x)}{x+1}dx = 0$

$\Rightarrow \int\limits_1^2 \left(f'(x)\right)^2 dx - \int\limits_1^2 \dfrac{f'(x)}{2}dx + \int\limits_1^2 \dfrac{f'(x)}{x+1}dx = 0$

$\Leftrightarrow \int\limits_1^2 \left[\left(f'(x)\right)^2 + \dfrac{f'(x)}{x+1} - \dfrac{f'(x)}{2}\right]dx = 0$

$\Leftrightarrow \left(f'(x)\right)^2 + \dfrac{f'(x)}{x+1} - \dfrac{f'(x)}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'(x) + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = C \\ f(x) = \dfrac{x}{2} - \ln|x+1| + C \end{array}\right.$

TH1: $f(x) = C, f(2) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ (loại)

TH2: $f(x) = \dfrac{x}{2} - \ln|x+1| + C, f(2) = 0 \Leftrightarrow C = \ln 3 - 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x}{2} - \ln|x+1| + \ln 3 - 1$

$\int_1^2 f(x)dx=\frac{3}{4}-2\ln\frac{3}{2}.$

Câu 216. Ta tính. $\int_0^1 \frac{4f(x)}{(2x+1)^2}dx=2\ln 3-\frac{8}{3}\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{(2x+1)^2}dx=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{2}{3}$

Đặt: $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=\frac{1}{(2x+1)^2}dx \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=-\frac{1}{2}.\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2}=\frac{x}{2x+1} \end{cases}$

$\frac{1}{2}\ln 3-\frac{2}{3}=\int_0^1 \frac{f(x)}{(2x+1)^2}dx=-\left.\frac{xf(x)}{2x+1}\right|_0^1-\int_0^1 \frac{xf'(x)}{2x+1}dx=-\int_0^1 \frac{x}{2x+1}f'(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{2x+1}f'(x)dx=-\frac{1}{2}\ln 3+\frac{2}{3}\Leftrightarrow 4\int_0^1 \frac{x}{2x+1}f'(x)dx=-2\ln 3+\frac{8}{3}$

Tính tích phân: $\int_0^1 \left(\frac{x}{2x+1}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{2x}{2x+1}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int_0^1 \left(1-\frac{1}{2x+1}\right)^2dx$

$=\frac{1}{4}\int_0^1 \left(1-\frac{2}{2x+1}+\frac{1}{(2x+1)^2}\right)dx$

$=\frac{1}{4}\left.\left(x-\ln|2x+1|-\frac{1}{2(2x+1)}\right)\right|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ln 3$

$\Rightarrow 4\int_0^1 \left(\frac{x}{2x+1}\right)^2dx=\frac{4}{3}-\ln 3$

$\Rightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2dx-4\int_0^1 \frac{x}{2x+1}f'(x)dx+4\int_0^1 \left(\frac{x}{2x+1}\right)^2dx=0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x)-\frac{2x}{2x+1}\right)^2dx=0\Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{2x+1}=1-\frac{1}{2x+1}$

$\Rightarrow f(x)=x-\frac{1}{2}\ln(2x+1)+C$ vì $x\in(0;1)$

Vì $f(1)=0\Rightarrow C=\frac{1}{2}\ln 3-1$

$\Rightarrow I=\int_0^1 \frac{f(x)}{4}dx=\frac{1}{4}\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\ln(2x+1)+\frac{1}{2}\ln 3-1\right)dx=\frac{1}{4}\int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\ln 3-1\right)dx-\frac{1}{8}\int_0^1 \ln(2x+1)dx$

$A=\frac{1}{4}\int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\ln 3-1\right)dx=\frac{1}{4}\left.\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\ln 3-x\right)\right|_0^1=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\ln 3$

$B=\int_0^1 \ln(2x+1)dx$ đặt $\begin{cases} u=\ln(2x+1) \\ dv=dx \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} du=\frac{2}{2x+1}dx \\ x=x \end{cases}$

$\Rightarrow B=x\ln(2x+1)\big|_0^1-\int_0^1 \frac{2x}{2x+1}dx=\ln 3-\left.\left(x-\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right)\right|_0^1=\frac{3}{2}\ln 3-1$

$\Rightarrow I=A-\frac{1}{8}B=-\frac{1}{16}\ln 3$

Câu 217. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = (2x-1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = x^2 - x \end{cases}$.

Suy ra $\int_0^1 (2x-1)f(x)dx = (x^2-x)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x^2-x)f'(x)dx = -\int_0^1 (x^2-x)f'(x)dx$

$\Rightarrow \int_0^1 (x^2-x)f'(x)dx = \frac{1}{30}$

Ta có: $\int_0^1 (x^2-x)^2 dx = \int_0^1 (x^4-2x^3+x^2)dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{30}$.

Do đó, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 2\int_0^1 (x^2-x)f'(x)dx + \int_0^1 (x^2-x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) - (x^2-x)\right]^2 dx = 0$

$\Rightarrow f'(x) = x^2 - x \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$.

Vì $f(0) = 1$ nên $C = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$.

Vậy $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1\right)dx = \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{11}{12}$.

Dạng 6. Kết hợp nhiều phương pháp để giải toán

Câu 218. Chọn D

Đặt $t = 3x \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt$.

Suy ra $1 = \int_0^1 xf(3x)dx = \frac{1}{9}\int_0^3 tf(t)dt \Leftrightarrow \int_0^3 tf(t)dt = 9$.

Đặt $\begin{cases} u = f(t) \\ dv = tdt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(t)dt \\ v = \frac{t^2}{2} \end{cases}$.

$\Rightarrow \int_0^3 tf(t)dt = \frac{t^2}{2}f(t)\Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{t^2}{2}f'(t)dt = \frac{9}{2}f(3) - \frac{1}{2}\int_0^3 t^2 f'(t)dt$.

$\Leftrightarrow 9 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\int_0^3 t^2 f'(t)dt \Leftrightarrow \int_0^3 t^2 f'(t)dt = -9$.

Vậy $\int_0^3 x^2 f'(x)dx = -9$.

Câu 219. Chọn D

Xét $\int_0^1 xf(4x)dx = 1$. Đặt:

$t = 4x \Rightarrow \int_0^4 \frac{1}{4}t.f(t).\frac{1}{4}dt = 1 \Rightarrow \int_0^4 t.f(t)dt = 16 \Rightarrow \int_0^4 x.f(x)dx = 16$.

Xét $I=\int_0^4 x^2 f'(x)dx=\int_0^4 x^2 df(x)$

Suy ra: $I=x^2.f(x)\Big|_0^4-\int_0^4 2x.f(x)dx=4^2 f(4)-2.16=-16.$

Câu 220. Chọn D

Theo bài ra: $\int\limits_0^1 xf(6x)\mathrm{d}x=1$.

Đặt $t=6x\Rightarrow \mathrm{d}t=6\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

x	0	1
t	0	6

Do đó: $\int\limits_0^1 xf(6x)\mathrm{d}x=1\Leftrightarrow \int\limits_0^6 \frac{1}{6}t.f(t)\frac{\mathrm{d}t}{6}=1\Leftrightarrow \frac{1}{36}\int\limits_0^6 t.f(t)\mathrm{d}t=1\Leftrightarrow \int\limits_0^6 t.f(t)\mathrm{d}t=36$.

Tính $I=\int\limits_0^6 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=x^2 \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x \\ v=f(x)\end{cases}$

$\Rightarrow I=x^2 f(x)\Big|_0^6-\int\limits_0^6 2xf(x)\mathrm{d}x=36f(6)-2\int\limits_0^6 xf(x)\mathrm{d}x=36.1-2.36=-36$.

Câu 221. Chọn D

+) $I=\int\limits_0^5 x^2 f'(x)dx=\int\limits_0^5 x^2 df(x)=x^2.f(x)\Big|_0^5-\int\limits_0^5 f(x)dx^2$

$=25.f(5)-0.f(x)-\int\limits_0^5 f(x).2xdx$

$=25-2\int\limits_0^5 xf(x)dx$

+) Ta có: $\int\limits_0^1 xf(5x)dx=1$

Đặt $5x=t\Rightarrow \int\limits_0^5 \frac{t}{5}f(t)d\frac{t}{5}=1\Leftrightarrow \int\limits_0^5 tf(t)dt=25$

Vậy $I=25-2\times 25=-25$.

Câu 222. Đặt $t=2+x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\left|\begin{array}{l} x=0\rightarrow t=2 \\ x=1\rightarrow t=3\end{array}\right.$.

$\int\limits_0^1 x\ln(2+x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_2^3 \ln t\mathrm{d}t.$

Đặt $\begin{cases}u=\ln t \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}t}{t} \\ v=t\end{cases}\Rightarrow \int\limits_2^3 \ln t\mathrm{d}t=t\ln t\Big|_2^3-\int\limits_2^3 \mathrm{d}t=t\ln t\Big|_2^3-t\Big|_2^3=3\ln 3-2\ln 2-1$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 x\ln(2+x^2)=\frac{3}{2}\ln 3-\ln 2-\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{2},b=-1,c=-\frac{1}{2}\Rightarrow a+b+c=0$.

Câu 223. Đặt $t=\frac{x}{2}\Rightarrow x=2t\Rightarrow dx=2dt$.

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=4\Rightarrow t=2\end{cases}$. Do đó $\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx=\int_0^2 4tf'(t)dt=\int_0^2 4xf'(x)dx$.

Đặt $\begin{cases}u=4x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=4dx\\ v=f(x)\end{cases}$.

Suy ra $\int_0^2 4xf'(x)dx=[4xf(x)]\big|_0^2-\int_0^2 4f(x)dx=8f(2)-4\int_0^2 f(x)dx=8.16-4.4=112.$

Câu 224. Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow 2t\mathrm{dt}=\mathrm{dx}$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$, $x=\pi^2\Rightarrow t=\pi$.

$\Rightarrow I=\int_0^\pi 2t^2\sin t\mathrm{d}t=2\int_0^\pi x^2\sin x\mathrm{dx}$.

Đặt $u=x^2\Rightarrow du=2x\mathrm{dx}$, $\mathrm{d}v=\sin x\mathrm{dx}\Rightarrow v=-\cos x$.

$\Rightarrow\int_0^\pi x^2\sin x\mathrm{dx}=-x^2\cos x\big|_0^\pi+\int_0^\pi 2x\cos x\mathrm{dx}=\pi^2+2\left(x\sin x+\cos x\right)\big|_0^\pi=\pi^2-4$

$\Rightarrow I=2\pi^2-8$. Ta có $a=2$, $b=-8\Rightarrow\frac{a}{b}=-\frac{1}{4}\in(-1;0)$.

Câu 225. Đặt $t=2x\Rightarrow\mathrm{dt}=2\mathrm{dx}$. Với $x=0\Rightarrow t=0$; Với $x=1\Rightarrow t=2$.

Suy ra: $I=\int_0^2\frac{t}{2}f'(t)\frac{\mathrm{dt}}{2}=\frac{1}{4}\int_0^2 tf'(t)\mathrm{dt}=\frac{1}{4}\int_0^2 xf'(x)\mathrm{dx}$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{dx}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{dx}\\ v=f(x)\end{cases}$.

Ta có $I=\frac{1}{4}\left[xf(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{dx}\right]=\frac{1}{4}\left[2f(2)-0f(0)-4\right]=\frac{1}{4}(2.16-4)=7$.

Câu 226. Ta có: $\begin{cases}u=\ln(\sin x+\cos x)\\ \mathrm{d}v=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{dx}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{dx}\\ v=\tan x\end{cases}$.

Khi đó: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{dx}=\tan x.\ln(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{dx}$.

Đặt $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{dx}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-\tan^2 x}{\tan x+1}\mathrm{dx}$

Đặt $\tan x=t\Rightarrow dt=\left(1+\tan^2 x\right)dx\Rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}$. Với $x=0\to t=0$ và $x=\frac{\pi}{4}\to t=1$

Ta có : $J=\int_0^1\frac{t-t^2}{(t+1).(t^2+1)}\mathrm{dt}=\int_0^1\frac{(t+1)-(1+t^2)}{(1+t).(1+t^2)}\mathrm{dt}=\int_0^1\frac{\mathrm{dt}}{1+t^2}-\int_0^1\frac{\mathrm{dt}}{t+1}=\frac{\pi}{4}-\ln 2$.

Vậy $I=\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+\ln 2=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{bc}{a}=-\frac{8}{3}$.

Câu 227. Đặt $\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2\Rightarrow\mathrm{dx}=2t\mathrm{d}t$.

x	$0\quad\pi^2$

t	0 π

Ta có: $I=\int\limits_0^{\pi}2t^2\sin t\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}u=2t^2\\ \mathrm{d}v=\sin t\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=4t\mathrm{d}t\\ v=-\cos t\end{cases}$.

Suy ra $I=-2t^2\cos t\Big|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}4t\cos t\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}u_1=4t\\ \mathrm{d}v_1=\cos t\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u_1=4\mathrm{d}t\\ v_1=\sin t\end{cases}$.

Vậy $I=-2t^2\cos t\Big|_0^{\pi}+4t\sin t\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}4\sin t\mathrm{d}t=-2\left(-\pi^2\right)+4\cos t\Big|_0^{\pi}=2\pi^2-8$.

Do đó $a=2;\ b=-8\Rightarrow\dfrac{a}{b}\in(-1;0)$.

Dạng 7. Tích phân của một số hàm số khác

Dạng 7.1 Tích phân hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

Câu 228. Chọn A

Vì $a>0$ nên $I=-\int\limits_{-1}^{0}x\,dx+\int\limits_0^{a}x\,dx=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{1+a^2}{2}$

Câu 229. Chọn D

$$I=\int\limits_{-1}^{1}f\left(|2x-1|\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}f(1-2x)\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}f(2x-1)\mathrm{d}x=I_1+I_2.$$

Xét $I_1=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}f(1-2x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}f(1-2x)\mathrm{d}(1-2x)=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^3f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^3f(x)\mathrm{d}x=3$.

Xét $I_2=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}f(2x-1)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}f(2x-1)\mathrm{d}(2x-1)=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1f(x)\mathrm{d}x=1$

Vậy $I=I_1+I_2=4$.

Câu 230. Do $m>1\Rightarrow 2m>2\Rightarrow\dfrac{1}{2m}<1$. Do đó với $m>1,x\in[1;m]\Rightarrow 2mx-1>0$.

Vậy $\int\limits_1^m|2mx-1|dx=\int\limits_1^m(2mx-1)dx=\left(mx^2-x\right)\Big|_1^m=m^3-m-m+1=m^3-2m+1$.

Từ đó theo bài ra ta có $m^3-2m+1=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$. Do $m>1$ vậy $m=\sqrt{2}$.

Câu 231. Chọn B

Ta có: $x^4-x^2+1=x^4-2.x^2.\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó: $\int_{-1}^{2018}\left|x^4-x^2+1\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2018}\left(x^4-x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

Câu 232. Chọn A

Ta có

$$\int_1^5 \left|\frac{x-2}{x+1}\right| dx = -\int_1^2 \frac{x-2}{x+1} dx + \int_2^5 \frac{x-2}{x+1} dx$$

$$= -\int_1^2 \left(1 - \frac{3}{x+1}\right) dx + \int_2^5 \left(1 - \frac{3}{x+1}\right) dx$$

$$= -\left(x - 3\ln|x+1|\right)\Big|_1^2 + \left(x - 3\ln|x+1|\right)\Big|_2^5$$

$$= -(2 - 3\ln 3) + 1 - 3\ln 2 + 5 - 3\ln 6 - 2 + 3\ln 3$$

$$= 2 - 6\ln 2 + 3\ln 3$$

Vậy $a = 2, b = -6, c = 3 \Rightarrow P = abc = -36$.

Câu 233. $\int_0^2 \left|x^2 - 2m^2\right| dx = \left|\int_0^2 \left(x^2 - 2m^2\right) dx\right|$ $(*)$

Ta có: $x^2 - 2m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m\sqrt{2} \\ x = m\sqrt{2} \end{array}\right.$.

TH1. Nếu $m = 0$ thì $(*)$ luôn đúng.

TH2. Nếu $m \neq 0$ thì $(*)$ đúng $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2m^2 > 0 \ (1) \\ x^2 - 2m^2 < 0 \ (2) \end{array}\right.$ với mọi $x \in [0;2]$.

+) $m > 0$.

(1) đúng $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m\sqrt{2} < m\sqrt{2} \le 0 \\ 2 \le -m\sqrt{2} < m\sqrt{2} \end{array}\right.$ (vô nghiệm).

(2) đúng $\Leftrightarrow \begin{cases} -m\sqrt{2} \le 0 \\ m\sqrt{2} \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ m \ge \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \ge \sqrt{2}$.

+) $m < 0$.

(1) đúng $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\sqrt{2} < -m\sqrt{2} \le 0 \\ 2 \le m\sqrt{2} < -m\sqrt{2} \end{array}\right.$ (vô nghiệm).

(2) đúng $\Leftrightarrow \begin{cases} m\sqrt{2} \le 0 \\ -m\sqrt{2} \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0 \\ m \le -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \le -\sqrt{2}$.

Suy ra $m \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right) \cup \{0\}$ là giá trị cần tìm.

Câu 234. Ta có $\int_{-1}^{1} f(|4x-1|)dx = \int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(|4x-1|)dx + \int_{\frac{1}{4}}^{1} f(|4x-1|)dx$

$$= \int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx + \int_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)dx = I + J.$$

+) Xét $I = \int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx$.

Đặt $t = 1 - 4x \Rightarrow dt = -4dx$;

Với $x = -1 \Rightarrow t = 5; x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = 0$.

$$I = \int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx = \int_{5}^{0} f(t)(-\frac{1}{4}dt) = \frac{1}{4}\int_{0}^{5} f(t)dt = \frac{1}{4}\int_{0}^{5} f(x)dx = 1.$$

+) Xét $J = \int_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)dx$.

Đặt $t = 4x - 1 \Rightarrow dt = 4dx$;

Với $x = 1 \Rightarrow t = 3; x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = 0$.

$$J = \int_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)dx = \int_{0}^{3} f(t)(\frac{1}{4}dt) = \frac{1}{4}\int_{0}^{3} f(t)dt = \frac{1}{4}\int_{0}^{3} f(x)dx = 2.$$

Vậy $\int_{-1}^{1} f(|4x-1|)dx = 3.$

Câu 235. $I = \int_{-1}^{1} |2^x - 2^{-x}| dx$ ta có $2^x - 2^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$.

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^{1} |2^x - 2^{-x}| dx = \int_{-1}^{0} |2^x - 2^{-x}| dx + \int_{0}^{1} |2^x - 2^{-x}| dx = \left|\int_{-1}^{0} \left(2^x - 2^{-x}\right)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} \left(2^x - 2^{-x}\right)dx\right|$$

$$= \left|\left(\frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2}\right)\Big|_{-1}^{0}\right| + \left|\left(\frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2}\right)\Big|_{0}^{1}\right| = \frac{1}{\ln 2}.$$

Câu 236. + Xét $\int_{0}^{1} f(2x)\mathrm{d}x = 2$.

Đặt $u = 2x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$; $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = 2$.

Nên $2 = \int_{0}^{1} f(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} f(u)\mathrm{d}u \Rightarrow \int_{0}^{2} f(u)\mathrm{d}u = 4$.

+ Xét $\int_{0}^{2} f(6x)\mathrm{d}x = 14$.

Đặt $v = 6x \Rightarrow \mathrm{d}v = 6\mathrm{d}x$; $x = 0 \Rightarrow v = 0$; $x = 2 \Rightarrow v = 12$.

Nên $14 = \int_{0}^{2} f(6x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int_{0}^{12} f(v)\mathrm{d}v \Rightarrow \int_{0}^{12} f(v)\mathrm{d}v = 84$.

+ Xét $\int_{-2}^{2} f(5|x|+2)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} f(5|x|+2)\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(5|x|+2)\mathrm{d}x$.

□ Tính $I_1 = \int_{-2}^{0} f(5|x|+2)\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 5|x| + 2$.

Khi $-2 < x < 0$, $t = -5x + 2 \Rightarrow \mathrm{d}t = -5\mathrm{d}x$; $x = -2 \Rightarrow t = 12$; $x = 0 \Rightarrow t = 2$.

$$I_1 = \frac{-1}{5}\int_{12}^{2} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\left[\int_{0}^{12} f(t)\mathrm{d}t - \int_{0}^{2} f(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{5}(84 - 4) = 16.$$

□ Tính $I_1 = \int_0^2 f(5|x|+2)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 5|x|+2$.

Khi $0 < x < 2$, $t = 5x+2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 5\mathrm{d}x$; $x = 2 \Rightarrow t = 12$; $x = 0 \Rightarrow t = 2$.

$$I_2 = \frac{1}{5}\int_2^{12} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\left[\int_0^{12} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{5}(84-4) = 16.$$

Vậy $\int_{-2}^{2} f(5|x|+2)\,\mathrm{d}x = 32$.

Câu 237. Đặt $u = 2x+1 \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}u$. Khi $x=-1$ thì $u=-1$. Khi $x=1$ thì $u=3$.

Nên $I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} f(|u|)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f(|u|)\,\mathrm{d}u + \int_0^3 f(|u|)\,\mathrm{d}u\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f(-u)\,\mathrm{d}u + \int_0^3 f(u)\,\mathrm{d}u\right)$.

Xét $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Đặt $x = -u \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$.

Khi $x=0$ thì $u=0$. Khi $x=1$ thì $u=-1$.

Nên $4 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{-1} f(-u)\,\mathrm{d}u = \int_{-1}^{0} f(-u)\,\mathrm{d}u$.

Ta có $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6 \Rightarrow \int_0^3 f(u)\,\mathrm{d}u = 6$.

Nên $I = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f(-u)\,\mathrm{d}u + \int_0^3 f(u)\,\mathrm{d}u\right) = \frac{1}{2}(4+6) = 5$.

Câu 238. Ta có $\int_{-1}^{1} f(|2x-1|)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x-1)\,\mathrm{d}x = I + J$

Tính $I = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\,\mathrm{d}x$

Đặt $t = 1-2x \Rightarrow \mathrm{d}t = -2\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=-1 \Rightarrow t=3; x=\frac{1}{2} \Rightarrow t=0$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2}\int_3^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.8 = 4$$

Tính $J = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x-1)\,\mathrm{d}x$

Đặt $t = 2x-1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow t=1$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.2 = 1$$

Vậy $\int\limits_{-1}^{1} f\left(\left|2x-1\right|\right)\mathrm{d}x = I + J = 4 + 1 = 5$.

Dạng 7.2. Tích phân nhiều công thức

Câu 239. Chọn A

Ta thấy, $\int_{-1}^{1} f\left(x\right)dx = \int_{-1}^{0} f\left(x\right)dx + \int_{0}^{1} f\left(x\right)dx = \int_{-1}^{0} 2xdx + \int_{0}^{1} a\left(x - x^2\right)dx$

$= \left(x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + a\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1} = -1 + a\left(\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{a}{6} - 1$.

Câu 240. Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\mathrm{e}^x + m\right) = m + 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(2x\sqrt{3 + x^2}\right) = 0$ và $f\left(0\right) = m + 1$.

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x = 0$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right) = f\left(0\right)$ hay $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} 2x\sqrt{3 + x^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1}\left(\mathrm{e}^x - 1\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0}\sqrt{3 + x^2}\,\mathrm{d}\left(3 + x^2\right) + \int\limits_{0}^{1}\left(\mathrm{e}^x - 1\right)\mathrm{d}x$

$= \dfrac{2}{3}\left(3 + x^2\right)\sqrt{3 + x^2}\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\mathrm{e}^x - x\right)\Big|_{0}^{1} = \mathrm{e} + 2\sqrt{3} - \dfrac{22}{3}$.

Suy ra $a = 1$, $b = 2$, $c = -\dfrac{22}{3}$.

Vậy tổng $a + b + 3c = -19$.

Câu 241. Chọn C

Do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục tại $x = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right) = f\left(0\right) \Leftrightarrow 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Ta có $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = I_1 + I_2$

$I_1 = \int_{-1}^{0} 2x\sqrt{3 + x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\left(3 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(3 + x^2\right) = \dfrac{2}{3}\left(3 + x^2\right)\sqrt{3 + x^2}\,\Bigg|_{-1}^{0} = 2\sqrt{3} - \dfrac{16}{3}$

$I_2 = \int_{0}^{1}\left(e^x - 1\right)\mathrm{d}x = \left(e^x - x\right)\Bigg|_{0}^{1} = e - 2$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f\left(x\right)dx = I_1 + I_2 = e + 2\sqrt{3} - \dfrac{22}{3} \Rightarrow a = 1; b = 2; c = -\dfrac{22}{3}$

Vậy $T = a + b + 3c = 1 + 2 - 22 = -19$.

Dạng 7.3 Tích phân hàm số chẵn, lẻ

Câu 242. Chọn D

Đặt $x = -t$. Khi đó $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f\left(x\right)dx = \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f\left(-t\right)d\left(-t\right) = -\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f\left(-t\right)dt = \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(-x\right)dx$

Ta có: $I = \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)d\left(x\right) = \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f\left(x\right)d\left(x\right) + \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)d\left(x\right) = \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(-x\right)d\left(x\right) + \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)d\left(x\right)$

Hay $I = \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\left(f\left(-x\right) + f\left(x\right)\right)d\left(x\right) = \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2 + 2\cos 2x}\,d\left(x\right) = \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2(1 + \cos 2x)}\,d\left(x\right)$

$$\Leftrightarrow I=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{4\cos^2 x}d\left(x\right)=2\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left|\cos x\right|d\left(x\right)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xd\left(x\right)-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\cos xd\left(x\right)$$

Vậy $I=2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=6.$

Câu 243. Ta có $\int_{-a}^{a}\frac{f\left(x\right)}{1+e^{kx}}dx=\int_{-a}^{0}\frac{f\left(x\right)}{1+e^{kx}}dx+\int_0^{a}\frac{f\left(x\right)}{1+e^{kx}}dx$.

Xét tích phân $\int_{-a}^{0}\frac{f\left(x\right)}{1+e^{kx}}dx$.

Đặt $t=-x\Leftrightarrow x=-t$

$\Rightarrow dt=-dx\Leftrightarrow -dt=dx$

Đổi cận:

$x=-a\Rightarrow t=a$

$x=0\Rightarrow t=0$

Khi đó,

$$\int_{-a}^{0}\frac{f\left(x\right)}{1+e^{kx}}dx=\int_a^{0}\frac{f\left(-t\right)}{1+e^{k(-t)}}\left(-dt\right)=\int_0^{a}\frac{f\left(t\right)}{1+e^{-kt}}dt$$

$$=\int_0^{a}\frac{e^{kt}.f\left(t\right)}{1+e^{kt}}dx=\int_0^{a}\frac{e^{kx}.f\left(x\right)}{1+e^{kx}}dx$$

Do đó, $\int_{-a}^{a}\frac{f\left(x\right)}{1+e^{kx}}dx=\int_0^{a}\frac{e^{kx}.f\left(x\right)}{1+e^{kx}}dx+\int_0^{a}\frac{f\left(x\right)}{1+e^{kx}}dx=\int_0^{a}\frac{\left(e^{kx}+1\right)f\left(x\right)}{1+e^{kx}}dx=\int_0^{a}f\left(x\right)dx$

Câu 244. Hàm số $f\left(x\right), f\left(-x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f\left(x\right)+3f\left(-x\right)=\frac{1}{x^2+4}$ nên ta có:

$$\int_{-2}^{2}\left(2f\left(x\right)+3f\left(-x\right)\right)dx=\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4}\quad(1)$$

Đặt $K=\int_{-2}^{2}\left(2f\left(x\right)+3f\left(-x\right)\right)dx=2\int_{-2}^{2}f\left(x\right)dx+3\int_{-2}^{2}f\left(-x\right)dx$

Đặt $-x=t\Rightarrow dx=-dt;\ f\left(-x\right)=f\left(t\right)$, $x=-2\Rightarrow t=2;\ x=2\Rightarrow t=-2$

Do đó $\int_{-2}^{2}f\left(-x\right)dx=\int_2^{-2}f\left(t\right).\left(-dt\right)=\int_{-2}^{2}f\left(t\right)dt=\int_{-2}^{2}f\left(x\right)dx$

$$\Rightarrow K=2\int_{-2}^{2}f\left(x\right)dx+3\int_{-2}^{2}f\left(-x\right)dx=2\int_{-2}^{2}f\left(x\right)dx+3\int_{-2}^{2}f\left(x\right)dx=5\int_{-2}^{2}f\left(x\right)dx\quad(2)$$

Đặt $J=\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4}$; $x=2\tan\alpha,\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$,

Ta có: $dx=d\left(2\tan\alpha\right)=\frac{2d\alpha}{\cos^2\alpha}=2\left(1+\tan^2\alpha\right)d\alpha$.

Với $x=-2\Rightarrow\alpha=-\frac{\pi}{4}$; Với $x=2\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$.

Do đó $J=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\left(1+\tan^2\alpha\right)}{4\tan^2\alpha+4}d\alpha=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\alpha}{2}=\frac{1}{2}\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}\quad(3)$

Từ (1), (2) và (3), ta có $K = J \Rightarrow 5\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{\pi}{20}$

Mà theo giả thiết, $I = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{\pi}{m}$ nên $\frac{\pi}{m} = \frac{\pi}{20} \Rightarrow m = 20$.

Chú ý: Có thể tính nhanh $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4}$ *bằng công thức:* $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

Từ đó: $\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left(\arctan 1 - \arctan(-1)\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{4}$$

Câu 245. Tính $\int_{-2}^{2} f(-x)\mathrm{d}x$

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$

Đổi cận

x	-2	2
t	2	-2

$$\Rightarrow \int_{-2}^{2} f(-x)\mathrm{d}x = -\int_{2}^{-2} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x$$

$$2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2} \Rightarrow \int_{-2}^{2}\left(2f(x)+3f(-x)\right)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^{2} 5f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}.\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{10}.\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{20}$$

Câu 246. $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+x^2}\sin x\mathrm{d}x}_{I_1} - \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\mathrm{d}x}_{I_2}$

Ta nhận thấy $\sqrt{1+x^2}\sin x$ là hàm lẻ nên $I_1 = 0$

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x.\ \text{Chọn } v = -\cos x \end{cases}$$

$$I_2 = -x\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\mathrm{d}x = -\frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2}$$

Suy ra $I = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2} = \pi\sqrt{\frac{2}{16}} - \sqrt{2} = \pi\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{2}$

Vậy $a+b+c = 11$

Câu 247. Xét tích phân $\int_{-2}^{0} f(-x)\mathrm{d}x = 2$.

Đặt $-x = t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.

Đổi cận: khi $x=-2$ thì $t=2$; khi $x=0$ thì $t=0$ do đó $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{2}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t$

$\Rightarrow \int\limits_{0}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t=2 \Rightarrow \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=2$.

Do hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-2x)=-f(2x)$.

Do đó $\int\limits_{1}^{2} f(-2x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{1}^{2} f(2x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{1}^{2} f(2x)\,\mathrm{d}x=-4$.

Xét $\int\limits_{1}^{2} f(2x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $2x=t \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: khi $x=1$ thì $t=2$; khi $x=2$ thì $t=4$ do đó $\int\limits_{1}^{2} f(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t=-4$

$\Rightarrow \int\limits_{2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t=-8 \Rightarrow \int\limits_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=-8$.

Do $I=\int\limits_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=2-8=-6$.

Câu 248. Gọi $I=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận: Với $x=-\ln 2 \Rightarrow t=\ln 2$; Với $x=\ln 2 \Rightarrow t=-\ln 2$.

Ta được $I=-\int\limits_{\ln 2}^{-\ln 2} f(-t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)\,\mathrm{d}x$.

Khi đó ta có: $2I=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)\,\mathrm{d}x==\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$.

Xét $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$. Đặt $u=\mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

Đổi cận: Với $x=-\ln 2 \Rightarrow u=\frac{1}{2}$; $x=\ln 2 \Rightarrow u=2$.

Ta được $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+1\right)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{u(u+1)}\,\mathrm{d}u$

$=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u=\left(\ln|u|-\ln|u+1|\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\ln 2$

Vậy ta có $a=\frac{1}{2}$, $b=0 \Rightarrow a+b=\frac{1}{2}$.

Câu 249. Do $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=1 \Rightarrow \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=2$

$\Rightarrow \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=3$.

Mặt khác $\int\limits_{-2}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$ và $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét $I=\int\limits_{-2}^{0}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$. Đặt $t=-x\Rightarrow dx=-dt$

$$\Rightarrow I=\int\limits_{-2}^{0}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=-\int\limits_{2}^{0}\frac{f(-t)}{3^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{2}\frac{f(-t)}{\frac{1}{3^t}+1}\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{2}\frac{3^tf(t)}{3^t+1}\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{2}\frac{3^xf(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-2}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}\frac{3^xf(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}\frac{(3^x+1)f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=$$

$\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=3$.

Câu 250. Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=-2\Rightarrow t=2$, $x=2\Rightarrow t=-2$.

$$I=\int\limits_{-2}^{2}\frac{f(t)}{2^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int\limits_{-2}^{2}\frac{2^t}{2^t+1}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-2}^{2}\frac{2^x}{2^x+1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow 2I=\int\limits_{-2}^{2}\frac{f(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x+\int\limits_{-2}^{2}\frac{2^x}{2^x+1}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x+10$$

Mặt khác do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(-x)=f(x)$.

Xét $J=\int\limits_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x$, đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow J=\int\limits_{0}^{2}f(-t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{2}f(-x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=10\Rightarrow 2I=20\Rightarrow I=10.$$

Câu 251. Ta có $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0}f(x)\mathrm{d}x$ Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$; Đổi cận: $x=-\frac{3\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{3\pi}{2}$; $x=0\Rightarrow t=0$.

Suy ra $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0}f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{0}f(-t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}f(-t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}f(-x)\mathrm{d}x$.

Theo giả thiết ta có: $f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\left(f(x)+f(-x)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2-2\cos x}\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}f(-x)\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}|\sin x|\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0}f(x)\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x-2\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=6$$

Câu 252. Xét tích phân $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+2018^x}dx$. Đặt $x=-t$; $dx=-dt$; $x=-1\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=-1$.

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+2018^x}dx=-\int_{1}^{-1}\frac{f(-t)}{1+2018^{-t}}dt=\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{1+\frac{1}{2018^t}}dt=\int_{-1}^{1}\frac{2018^t.f(t)}{1+2018^t}dt=\int_{-1}^{1}\frac{2018^x f(x)}{1+2018^x}dx.$$

Vậy $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+2018^x}dx+\int_{-1}^{1}\frac{2018^x f(x)}{1+2018^x}dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx=6$.

Do đó $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+2018^x}dx=\frac{1}{2}.6=3$.

Dạng 8. Một số bài toán tích phân khác

Câu 253. Chọn A

Từ hệ thức đề cho: $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2$ (1), suy ra $f'(x)\ge 0$ với mọi $x\in[1;2]$. Do đó $f(x)$ là hàm không giảm trên đoạn $[1;2]$, ta có $f(x)\le f(2)<0$ với mọi $x\in[1;2]$.

Chia 2 vế hệ thức (1) cho $\left[f(x)\right]^2\Rightarrow\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=x,\forall x\in[1;2]$.

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1;2]$ hệ thức vừa tìm được, ta được:

$$\int_1^2\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}\mathrm{d}x=\int_1^2 x\mathrm{d}x\Rightarrow\int_1^2\frac{1}{\left[f(x)\right]^2}\mathrm{d}f(x)=\frac{3}{2}\Rightarrow\left.\frac{-1}{f(x)}\right|_1^2=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{1}{f(1)}-\frac{1}{f(2)}=\frac{3}{2}$$

Do $f(2)=-\frac{1}{3}$ nên suy ra $f(1)=-\frac{2}{3}$.

Chú ý: có thể tự kiểm tra các phép biến đổi tích phân trên đây là có nghĩa.

Câu 254. Chọn D

Ta có: $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2\Rightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3\Rightarrow\int_1^2\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow\left.\left(-\frac{1}{f(x)}\right)\right|_1^2=\frac{15}{4}\Leftrightarrow-\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(1)}=\frac{15}{4}\Leftrightarrow f(1)=-\frac{4}{5}.$$

Câu 255. Ta có: $\begin{cases}f^2(1-x)=(x^2+3),f(x+1)\Rightarrow f^4(1-x)=(x^2+3)^2.f^2(x+1)\ (1)\\ f^2(1+x)=(x^2+3).f(1-x)\ (2)\end{cases}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(1-x)=x^2+3=(1-x-1)^2+3$

$\Rightarrow f(x)=(x-1)^2+3$

$\Rightarrow f''(x)=2$

$\Rightarrow I=\int_0^2(4x-2)\mathrm{d}x=\left.(2x^2-2x)\right|_0^2=4$.

Câu 256. Ta có: $e^x\ge e^{1-2x}\Leftrightarrow x\ge 1-2x\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{3}$. Suy ra: $\max\left\{e^x,e^{1-2x}\right\}=\begin{cases}e^{1-2x}\ khi\ 0\le x\le\frac{1}{3}\\ e^x\quad khi\ \frac{1}{3}\le x\le 1\end{cases}$

Do đó $I=\int\limits_0^1 \max\left\{e^x,e^{1-2x}\right\}dx=\int\limits_0^{\frac{1}{3}} e^{1-2x}dx+\int\limits_{\frac{1}{3}}^1 e^x dx=-\frac{1}{2}e^{1-2x}\Big|_0^{\frac{1}{3}}+e^x\Big|_{\frac{1}{3}}^1$

$=-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}e+e-e^{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(e-\sqrt[3]{e}\right).$

Câu 257.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cot\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}dx$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\frac{7\pi}{12}+\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}{\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-1+\frac{2\sin\frac{7\pi}{12}}{\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}\right)dx$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-1+\frac{\tan\frac{7\pi}{12}\cos\left(\frac{5\pi}{12}-x+\frac{\pi}{6}+x\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-1+\tan\frac{7\pi}{12}\left(\cot\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\right)\right)dx$$

$$=\left(-x+\tan\frac{7\pi}{12}\left(\ln\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\ln\cos\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{\pi}{4}+\frac{2+\sqrt{3}}{2}\ln 3$$

Do đó $a=3;b=3;c=4$. Vậy $a^2+b^2+c^2=34$.

Câu 258. Chọn C

Ta có:

$x.f(x).f'(x)=f^2(x)-x\Leftrightarrow 2x.f(x).f'(x)=2f^2(x)-2x$

$\Leftrightarrow 2x.f(x).f'(x)+f^2(x)=3f^2(x)-2x\Leftrightarrow\int\limits_0^2\left(x.f^2(x)\right)'dx=3\int\limits_0^2 f^2(x)dx-\int\limits_0^2 2xdx$

$\Leftrightarrow\left(x.f^2(x)\right)\Big|_0^2=3I-4\Leftrightarrow 2=3I-4\Leftrightarrow I=2$

Câu 259.

$f'(x)=(2x+1)\left[f(x)\right]^2,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\frac{-f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=-(2x+1),\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-(2x+1),\forall x\in\mathbb{R}$

Vậy $\frac{1}{f(x)}=-\int(2x+1)dx=-x^2-x+C\Rightarrow f(x)=\frac{1}{-x^2-x+C}$.

Do $f(0)=-1\Rightarrow C=-1$. Vậy $f(x)=-\frac{1}{x^2+x+1}$.

$$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x.$$

Đặt $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t,\ t\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra $I=-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)}{\frac{3}{4}\left(1+\tan^2 t\right)}\mathrm{d}t=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}t=-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Câu 260.

lời giải

Chọn A

Ta có $f(x).f'(x)+18x^2=\left(3x^2+x\right)f'(x)+(6x+1)f(x)$

lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $\frac{f^2(x)}{2}+6x^3=\left(3x^2+x\right)f(x)$

$$\Rightarrow f^2(x)-2\left(3x^2+x\right)f(x)+12x^3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=6x^2\\ f(x)=2x\end{array}\right.$$

TH1: $f(x)=6x^2$ không thoả mãn kết quả $\int_0^1(x+1)e^{f(x)}dx=ae^2+b,(a,b\in\mathbb{Q})$

TH2: $f(x)=2x\Rightarrow\int_0^1(x+1)e^{f(x)}dx=\int_0^1(x+1)e^{2x}dx=\frac{3}{4}e^2-\frac{1}{4}$. Suy ra $a=\frac{3}{4};b=-\frac{1}{4}$

Vậy $a-b=1$

Câu 261. Vì $f(x)>0$ và $\forall x\in(0;1)$ ta có:

$$f(x)-f'(x)=-\frac{2\left[f(x)\right]^2}{e^x.x.\sqrt{x-x^2}}\Leftrightarrow\frac{e^xf(x)-e^xf'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=-\frac{2}{x\sqrt{x-x^2}}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{e^x}{f(x)}\right)'=\frac{-2}{x\sqrt{x-x^2}}\Rightarrow\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}\frac{-2}{x\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x=\left.\frac{e^x}{f(x)}\right|_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{e}}{f\left(\frac{1}{2}\right)}-\frac{\sqrt[5]{e}}{f\left(\frac{1}{5}\right)}=2\sqrt{e}-\frac{\sqrt[5]{e}}{f\left(\frac{1}{5}\right)}$$

$$\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}\frac{-2}{x\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}\frac{-2}{x^2.\sqrt{\frac{1}{x}-1}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}-1}}d\left(\frac{1}{x}\right)=4\left.\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right|_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}=-4$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{e}-\frac{\sqrt[5]{e}}{f\left(\frac{1}{5}\right)}=-4\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{2\left(\sqrt{e}+2\right)}{\sqrt[5]{e}}\approx 5,97$$

Câu 262. Chọn A

Ta có $M=\int_0^1\left[2f^2(x)+3xf(x)-4f(x)\sqrt{xf(x)}-x\sqrt{xf(x)}\right]\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1\left[-\left(\sqrt{x}-\sqrt{f(x)}\right)\sqrt{f(x)}\left[\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{x}\right)^2+f(x)\right]\right]\mathrm{d}x$$

Đặt $a=\sqrt{x}-\sqrt{f(x)}$, $b=\sqrt{f(x)}$ thì

$$M=\int_0^1\left[-ab\left(a^2+b^2\right)\right]\mathrm{d}x\geq\int_0^1\left[-\frac{(a+b)^2}{4}.\frac{(a+b)^2}{2}\right]\mathrm{d}x\geq\int_0^1-\frac{x^2}{8}\mathrm{d}x=-\frac{1}{24}.$$

Câu 263. Ta có $f(x).f'(x)+18x^2=\left(3x^2+x\right)f'(x)+(6x+1)f(x)$

$$\Rightarrow\int\left[f(x).f'(x)+18x^2\right]\mathrm{d}x=\int\left[\left(3x^2+x\right)f'(x)+(6x+1)f(x)\right]\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\int\left[\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3\right]'\mathrm{d}x=\int\left[\left(3x^2+x\right)f(x)\right]'\mathrm{d}x$$

$\Rightarrow\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3=\left(3x^2+x\right)f(x)+C$, với C là hằng số.

Mặt khác: theo giả thiết $f(0)=0$ nên $C=0$.

Khi đó $\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3=\left(3x^2+x\right)f(x)(1),\forall x\in\mathbb{R}$.

$$(1)\Leftrightarrow f^2(x)+12x^3=\left(6x^2+2x\right)f(x)\Leftrightarrow\left[f(x)-2x\right]\left[f(x)-6x^2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=2x\\f(x)=6x^2\end{array}\right..$$

Trường hợp 1: Với $f(x)=6x^2,\forall x\in\mathbb{R}$, ta có $f'(0)=0$ (loại).

Trường hợp 2: Với $f(x)=2x,\forall x\in\mathbb{R}$, ta có :

$$\int_0^1(x+1)e^{f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)e^{2x}\mathrm{d}x=\left[\frac{(x+1)e^{2x}}{2}\right]\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{e^{2x}}{2}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}e^2-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{4}\\b=-\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow a-b=1.$$

Câu 264. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2(x)-2f(x).(3-x)\right]\mathrm{d}x=-\frac{109}{12}.\Leftrightarrow\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\left(f(x)-(3-x)\right)^2-(3-x)^2\right]\mathrm{d}x=-\frac{109}{12}$

$$\Leftrightarrow\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(f(x)-(3-x)\right)^2\mathrm{d}x-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(3-x)^2\,\mathrm{d}x=-\frac{109}{12}.$$

Mà $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(3-x)^2\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(9-6x+x^2\right)\mathrm{d}x=\left(9x-3x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{109}{12}$

Suy ra $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(f(x)-(3-x)\right)^2\mathrm{d}x=0$.

Vì $\left[f(x)-(3-x)\right]^2\geq0,\ \forall x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ nên $f(x)=3-x$, $\forall x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Vậy $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3-x}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-x+2}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)\mathrm{d}x$

$$=\left(-\ln|x+1|+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\ln\frac{2}{9}.$$

Câu 265. Xét $I_n=\int\limits_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=x\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{-\left(1-x^2\right)^{n+1}}{2(n+1)}\end{cases}.$

$$I_n=\frac{-x\left(1-x^2\right)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1+\frac{1}{2(n+1)}\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)^{n+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2(n+1)}\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)^{n+1}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow I_{n+1}=\frac{1}{2(n+2)}\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)\left(1-x^2\right)^{n+1}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow I_{n+1}=\frac{1}{2(n+2)}\left[\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)^{n+1}\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^{n+1}\mathrm{d}x\right]$$

$$\Rightarrow I_{n+1}=\frac{1}{2(n+2)}\left[2(n+1)I_n-I_{n+1}\right]\Rightarrow\frac{I_{n+1}}{I_n}=\frac{2n+1}{2n+5}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=1.$$

Câu 266. Cách 1. Đặt $t=a-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=a; x=a\Rightarrow t=0.$

Lúc đó $I=\int\limits_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\int\limits_a^0\frac{-\mathrm{d}t}{1+f(a-t)}=\int\limits_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(a-x)}=\int\limits_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+\dfrac{1}{f(x)}}=\int\limits_0^a\frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

Suy ra $2I=I+I=\int\limits_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}+\int\limits_0^a\frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\int\limits_0^a 1\mathrm{d}x=a$

Do đó $I=\frac{1}{2}a\Rightarrow b=1; c=2\Rightarrow b+c=3.$

Câu 267. Ta có:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin 2x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-2}{2}.$$

Do đó:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}+\frac{\pi-2}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2\mathrm{d}x=0$$

Suy ra $f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, hay $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$

Bởi vậy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$$

Câu 268. Đặt $t=a-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Thay vào ta được $I=\int_0^a\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{1}{1+f(a-t)}\mathrm{d}t=\int_0^a\frac{1}{1+f(a-x)}\mathrm{d}x$.

Suy ra $0=\int_0^a\left[\frac{f(a-x)-f(x)}{(1+f(x))(1+f(a-x))}\right]\mathrm{d}x$, do hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$. Suy ra $f(a-x)=f(x)$, trên đoạn $[0;a]$.

Mà $f(x).f(a-x)=1\Rightarrow f(x)=1$. Vậy $I=\int_0^a\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}$.

Câu 269. Ta có: $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$ (1)

Đặt $t=1-x\Rightarrow x=1-t$, phương trình (1) trở thành $2f(1-t)+3f(t)=\sqrt{t}$

Thay t bởi x ta được phương trình $3f(x)+2f(1-x)=\sqrt{x}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}\\3f(x)+2f(1-x)=\sqrt{x}\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{5}\left(3\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\right)$

$$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int_0^1\left(3\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x-\frac{2}{5}\int_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$$

*Xét $I=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x$

Đặt $u=\sqrt{x}\Rightarrow u^2=x\Rightarrow \mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=0$; $x=1\Rightarrow u=1$

$$\Rightarrow I=2\int_0^1 u^2\mathrm{d}u=\frac{2u^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

*Xét $J=\int_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$

Đặt $v=\sqrt{1-x}\Rightarrow v^2=1-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-2v\mathrm{d}v$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow v=1$; $x=1\Rightarrow v=0$

$$\Rightarrow J=-2\int_1^0 v^2\mathrm{d}v=2\int_0^1 v^2\mathrm{d}v=\frac{2v^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{5}.\frac{2}{3}-\frac{2}{5}.\frac{2}{3}=\frac{2}{15}.$$

Câu 270. Xét tích phân $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\pi-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.
Khi $x=0$ thì $t=\pi$.
Khi $x=\pi$ thì $t=0$.

Ta có $I=-\int\limits_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin^{2018}(\pi-t)}{\sin^{2018}(\pi-t)+\cos^{2018}(\pi-t)}\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$

$=\pi\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$

$=\pi\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x-I$.

Suy ra $I=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$.

Xét tích phân $J=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-u\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$.

Khi $x=\frac{\pi}{2}$ thì $u=0$.

Khi $x=\pi$ thì $t=-\frac{\pi}{2}$.

Nên $J=-\int\limits_{0}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\sin^{2018}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\cos^{2018}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}\mathrm{d}u=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$.

Vì hàm số $f(x)=\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}$ là hàm số chẵn nên:

$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$

Từ đó ta có:

$I=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x\right)$

$=\frac{\pi}{2}\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x\right)$

$=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}$.

Như vậy $a=2$, $b=4$. Do đó $P=2a+b=2.2+4=8$.

Câu 271. Theo bài ra ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;2]\Rightarrow f(x)\geq f(0)=1>0$ do đó $f(x)>0\quad \forall x\in[0;2]$.

Ta có $\left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]' = \dfrac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}$

Theo đề bài $\left[f(x)\right]^2 - f(x).f''(x)+\left[f'(x)\right]^2 = 0$

$\Rightarrow f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2 = \left[f(x)\right]^2 \Rightarrow \left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]' = 1$

$\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = x+C \Rightarrow \int\limits_0^2 \dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 (x+C)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_0^2 \dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}(f(x)) = \left(\dfrac{x^2}{2}+Cx\right)\Bigg|_0^2$

$\Rightarrow \ln\left|f(x)\right|\Big|_0^2 = 2+2C \Rightarrow \ln\left|e^6\right| - \ln|1| = 2+2C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = x+2$.

Do đó $\ln f(x)\Big|_0^1 = \left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_0^1 \Rightarrow \ln f(1) = \dfrac{5}{2} \Rightarrow f(1) = e^{\frac{5}{2}}$.

Câu 272. $\left(1+f(3-x)\right)^2.f^2(x) = f^2(x)+2.f(3-x).f^2(x)+f^2(3-x).f^2(x)$

$= f^2(x)+2.f(x)+1 = \left(f(x)+1\right)^2$.

$I = \int\limits_0^3 \dfrac{x.f'(x)}{\left(1+f(x)\right)^2}\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{f'(x)}{\left(1+f(x)\right)^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{1+f(x)} \end{cases}$

$I = \dfrac{-x}{1+f(x)}\Bigg|_0^3 + \int\limits_0^3 \dfrac{dx}{1+f(x)} = \dfrac{-3}{1+f(3)} + I_1$

$f(0) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow f(3) = 2$

Đặt $t = 3-x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 3$

$x = 3 \Rightarrow t = 0$

$I_1 = \int\limits_0^3 \dfrac{dt}{1+f(3-t)} = \int\limits_0^3 \dfrac{dx}{1+\dfrac{1}{f(x)}} = \int\limits_0^3 \dfrac{f(x).dx}{1+f(x)}$

$2I_1 = \int\limits_0^3 \dfrac{1+f(x)}{1+f(x)}dx = 3 \Rightarrow I_1 = \dfrac{3}{2}$

Vậy $I = -1+\dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 273. - Đặt $t = a-x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$; đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = a$, $x = a \Rightarrow t = 0$.

$$\Rightarrow I=\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^a \frac{1}{1+f(a-t)}\mathrm{d}t=\int_0^a \frac{1}{1+f(a-x)}\mathrm{d}x=\int_0^a \frac{1}{1+\frac{1}{f(x)}}\mathrm{d}x=\int_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow 2I=\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x+\int_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^a \frac{1+f(x)}{1+f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^a \mathrm{d}x=x\Big|_0^a=a$$

Vậy $I=\frac{a}{2}$.

Câu 274. Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\mathrm{d}f(x)=\left[f(x)\sin 2x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}\sin 2x$

$$=f\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2.\frac{\pi}{4}\right)-f(0)\sin(2.0)-2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$=f\left(\frac{\pi}{4}\right)-2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x.$$

Do đó $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

Mặt khác: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4x)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$.

Bởi vậy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\mathrm{d}x-2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[f^2(x)-2f(x)\cos 2x+\cos^2 2x\right]\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[f(x)-\cos 2x\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f(x)=\cos 2x.$$

Nên:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\cos 4x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{4}.$$

Câu 275. - Đặt $y=f(x)$. Khi đó từ giả thiết ta có :

$$f(x+1)=y+1,\ f\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{y+1}{(x+1)^2},\ f\left(-\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{y+1}{(x+1)^2}.$$

Suy ra $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=f\left(-\frac{1}{x+1}+1\right)=f\left(-\frac{1}{x+1}\right)+1=-\frac{y+1}{(x+1)^2}+1=\frac{x^2+2x-y}{(x+1)^2}$ (1)

Và $f\left(\frac{x+1}{x}\right)=f\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+f\left(\frac{1}{x}\right)=1+\frac{y}{x^2}=\frac{x^2+y}{x^2}$,

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=f\left(\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\right)=\frac{f\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}=\frac{\frac{x^2+y}{x^2}}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}=\frac{x^2+y}{(x+1)^2}\ \ (2).$$

- Từ (1) và (2) suy ra : $\dfrac{x^2+2x-y}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+y}{(x+1)^2}\Rightarrow x^2+2x-y=x^2+y\Rightarrow y=x$ hay $f(x)=x$.

Do đó: $I=\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{f^2(x)+1}.\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}.\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2\approx 0,35$.

Vậy $I\in(0;1)$.