

Thời gian: 180 phút

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số : $y = x^4 - 2x^2 + 1$

Câu 2 (1,0 điểm). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x + 3$ tại giao điểm của nó với trục tung.

Câu 3 (1,0 điểm).

a) Tìm môđun của số phức z biết $3z + 2\bar{z} = (4 - i)^2$

b) Giải bất phương trình : $3 \cdot 9^x + 2 \cdot 3^x - 1 > 0$ ($x \in \mathbb{R}$)

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + x) \cdot \cos x dx$.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;0;2), B(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 4 = 0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng AB và viết phương trình của mặt cầu (S) có tâm I nằm trên đường thẳng AB , bán kính bằng 4 và tiếp xúc với mặt phẳng (P) ; biết tâm I có hoành độ dương.

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Giải phương trình: $\cos x = \sqrt{2} \sin 2x + \sin x$.

b) Mạnh và Lâm cùng tham gia kì thi THPT Quốc Gia năm 2016, ngoài thi ba môn Toán, Văn, Anh bắt buộc thì Mạnh và Lâm đều đăng kí thêm hai môn tự chọn khác trong ba môn: Vật Lí, Hóa Học, Sinh Học dưới hình thức thi trắc nghiệm để xét tuyển vào Đại học, Cao đẳng. Mỗi môn tự chọn trắc nghiệm có 6 mã đề thi khác nhau, mã đề thi của các môn khác nhau là khác nhau. Tính xác suất để Mạnh và Lâm chỉ có chung đúng một môn tự chọn và một mã đề thi.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu đỉnh S lên mặt đáy là trung điểm H của đoạn thẳng AB. Biết góc hợp bởi SC và mặt đáy là 45° . Tính thể tích khối chóp S.ABCD và Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC cân tại $A(-1;3)$. Gọi D là điểm trên cạnh AB sao cho $AB = 3AD$ và H là hình chiếu vuông góc của B trên CD. Điểm

$M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của HC. Tìm tọa độ đỉnh C, biết đỉnh B nằm trên đường thẳng có

phương trình $x + y + 7 = 0$.

Câu 9 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + x - 4y + 2 = 0 \\ (2x^2 - 2y + 3)(2x - 1) + (8x^2 - 8y + 9)\sqrt{y - 1 - x^2} = 0 \end{cases}$$

Câu 10 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số dương và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức: $P = \frac{bc}{\sqrt{3a + bc}} + \frac{ca}{\sqrt{3b + ca}} + \frac{ab}{\sqrt{3c + ab}}$

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN

Câu 1	- TXĐ: $D = \mathbb{R}$ - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = +\infty$ - Sự biến thiên: +) Ta có: $y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$ +) Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr></table> $+\infty$ y 0 1 0 $+\infty$ Suy ra: * Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1), (0; 1)$ và hàm đồng biến trên các khoảng $(-1; 0), (1; +\infty)$. * Cực trị: $x_{CD} = 0, y_{CD} = 1$ $x_{CT} = \pm 1, y_{CT} = 0$ - Đồ thị:	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	y		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		1đ
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$													
y		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$										
2	Giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x + 3$ với trục tung là $M(0; 3)$ $y' = 3x^2 - 4 \Rightarrow y'(0) = -4$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm : $y = -4x + 3$	0.5 0.25 0.25																
3	a)Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$ -Ta có: $3z + 2\bar{z} = (4 - i)^2 \Leftrightarrow 3(a + bi) + 2(a - bi) = 15 - 8i \Leftrightarrow 5a + bi = 15 - 8i$ Giải được: $a = 3; b = -8 \Rightarrow z = 3 - 8i \Rightarrow z = \sqrt{73}$ b) Giải phương trình: $3 \cdot 9^x + 2 \cdot 3^x - 1 > 0 \quad (x \in \mathbb{R})$ Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$); ta có : $3t^2 + 2t - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1(\text{loại}) \\ t > \frac{1}{3} \end{cases}$	0.25 0.25 0.25																

	 Ta có : $3^x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x > 3^{-1} \Leftrightarrow x > -1$ Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -1$	0.25
4	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx$	0.25
	$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = e - 1$	0.25
	$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx = x \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$	0.25
	$I = I_1 + I_2 = e + \frac{\pi}{2} - 2$	0.25
5	-Vector chỉ phương của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -1)$ 	0.25
	-Phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ -----	0.25
	Gọi tâm $I(1+t; t; 2-t) \in AB; (t > -1)$ (S) tiếp xúc mp (P) $\Leftrightarrow d(I, (P)) = 4 \Leftrightarrow 5t + 2 = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} 5t + 2 = 12 \\ 5t + 2 = -12 \end{cases} \begin{cases} t = 2 \text{ (nhận)} \\ t = -\frac{14}{5} \text{ (loại)} \end{cases}$ 	0.25
	Phương trình mặt cầu (S) cần tìm : $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 16$	0.25
6	a) Giải phương trình: $\cos x = \sqrt{2} \sin 2x + \sin x \Leftrightarrow \cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin 2x \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin 2x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ 	0.25
	Tìm và kết luận nghiệm: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$	0.25
	b) Tìm được tập A có 48 số có 3 chữ số đôi một khác nhau Tìm được số phần tử của không gian mẫu : $n(\Omega) = C_{48}^4 = 194580$ 	0.25
	Tìm được trong 48 số có 12 số chia hết cho 5 và 36 số không chia hết cho 5 Số kết quả thuận lợi cho biến cố đề bài là : $C_{12}^1 \cdot C_{36}^3 = 85680$ Xác suất cần tìm là $P = \frac{476}{1081}$	0.25

7	+ Tính được $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$, $S_{ABCD} = a^2$ + $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{a^3.\sqrt{2}}{3}$ + Kẻ $AH \perp SM$ ($H \in SM$) (1) $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB$, mà $AD \perp AB \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AH$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow d(SM, AB) = AH$ + $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{a^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{2a^2}{9} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{3} = d(SM, AB)$	0.25 0.25 0.25 0.25
8	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm I; có đỉnh A thuộc đường thẳng d: $x + y - 2 = 0$, D(2; -1) là chân đường cao của tam giác ABC hạ từ đỉnh A. Gọi điểm E(3; 1) là chân đường vuông góc hạ từ B xuống AI; điểm P(2;1) thuộc đường thẳng AC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC. Gọi M là điểm đối xứng của A qua I. Ta có $\widehat{BCM} = \widehat{BAM} = \widehat{EDC}$ (Do tứ giác ABDE nội tiếp). Từ đó suy ra $DE \parallel MC$ mà $MC \perp AC \Rightarrow DE \perp AC$. Ta có $\overrightarrow{DE} = (1; 2)$. Phương trình AC : $1(x - 2) + 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 4 = 0$. Ta có $\{A\} = d \cap AC$. Tọa độ của A thỏa hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(0; 2)$.	0.25 0.25

	Ta có $\overline{AD} = (2; -3)$, $\overline{AE} = (3; -1)$. Phương trình BE : $3(x-3)-(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x-y-8=0$. Phương trình BD : $2(x-2)-3(y+1)=0 \Leftrightarrow 2x-3y-7=0$. $\{B\} = BE \cap BD$ Tọa độ của B thỏa hệ phương trình $\begin{cases} 3x-y-8=0 \\ 2x-3y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{17}{7} \\ y=-\frac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{17}{7}; -\frac{5}{7}\right)$. Ta có $\{C\} = AC \cap BD$, nên Tọa độ của C thỏa hệ phương trình $\begin{cases} x+2y-4=0 \\ 2x-3y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{26}{7} \\ y=\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{26}{7}; \frac{1}{7}\right).$ Kết luận : $A(0; 2)$, $B\left(\frac{17}{7}; -\frac{5}{7}\right)$, $C\left(\frac{26}{7}; \frac{1}{7}\right)$.	0.25
Câu 9	$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + x - 4y + 2 = 0 & (1) \\ x^3 + x - 3 = 2\sqrt{x+2} + y & (2) \end{cases}$ Điều kiện: $x \geq -2$. $(1) \Leftrightarrow x^3 + x + 2 = y^3 - 3y^2 + 4y \Leftrightarrow x^3 + x + 2 = (y-1)^3 + (y-1) + 2$.	0.25
	Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 2$ trên $[-2; +\infty)$. Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in [-2; +\infty)$. Mà $f(t)$ liên tục trên $[-2; +\infty)$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[-2; +\infty)$. Do đó: $x = y - 1$.	0.25
	Thay $y = x + 1$ và phương trình (2) ta được: $x^3 - 3 = 2\sqrt{x+2} + 1$ $\Leftrightarrow x^3 - 8 = 2(\sqrt{x+2} - 2) \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) = \frac{2(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} + 2)}$ $\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) = \frac{2(x-2)}{(\sqrt{x+2} + 2)} \Leftrightarrow (x-2) \left[x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{(\sqrt{x+2} + 2)} \right] = 0$	0.25
	$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$ $x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{(\sqrt{x+2} + 2)} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = \frac{2}{(\sqrt{x+2} + 2)} \quad (*)$ Ta có $VT = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geq 3$; $VP = \frac{2}{\sqrt{x+2} + 2} \leq 1, \forall x \in [-2; +\infty)$ Do đó phương trình (*) vô nghiệm. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 3)$.	0.25
10	Với $a + b + c = 3$ ta có $\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{bc}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right)$	0.25

	Theo BĐT Cô-Si: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$, dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b = c$	
	Tương tự $\frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} \leq \frac{ca}{2} \left(\frac{1}{b+a} + \frac{1}{b+c} \right)$ và $\frac{ab}{\sqrt{3c+ab}} \leq \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b} \right)$	0.25
	Suy ra $P \leq \frac{bc+ca}{2(a+b)} + \frac{ab+bc}{2(c+a)} + \frac{ab+ca}{2(b+c)} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}$	0.25
	Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Vậy $\max P = \frac{3}{2}$ khi $a = b = c = 1$.	0.25