

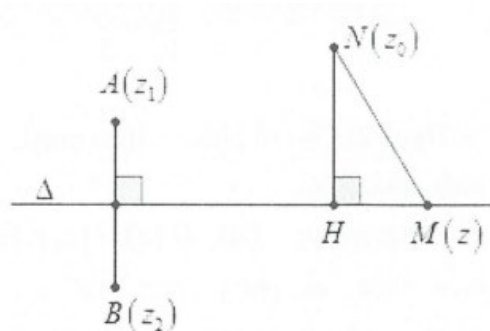
CHỦ ĐỀ 19: BÀI TOÁN CỰC TRỊ SỐ PHỨC

Dạng 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_1| = |z - z_2|$. Tìm số phức thỏa mãn $|z - z_0|$ nhỏ nhất.

Phương pháp: Đặt $M(z); A(z_1); B(z_2)$ là các điểm biểu diễn số phức $z; z_1$ và z_2 . Khi đó từ giả thiết $|z - z_1| = |z - z_2|$ suy ra $MA = MB$, tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực Δ của AB .

Gọi $N(z_0)$ là điểm biểu diễn số phức z_0

Ta có $MN = |z - z_0|$ nhỏ nhất khi $MN_{\min}$ khi M là hình chiếu vuông góc của N trên Δ và $MN_{\min} = d(N; \Delta)$



Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 4 - i| = |z + i|$. Gọi $z = a + bi$ ($a; b \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn $|z - 1 + 3i|$ nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức $T = 2a + 3b$ là:

- A. -4 B. 4 C. 0 D. 1

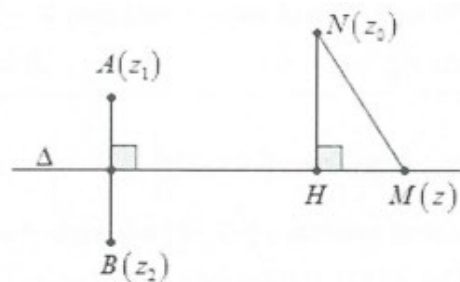
Lời giải

Đặt $M(z); A(4;1); B(0;-1)$ là các điểm biểu diễn số phức $z; 4+i$ và $-i$. Khi đó từ giả thiết suy ra $MA = MB$, tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực của AB đi qua $I(2;0)$ và có VTPT là $\vec{n} = \overrightarrow{AB}(-4;-2) \Rightarrow \Delta: 2x + y - 4 = 0$

Gọi $N(1;-3)$ là điểm biểu diễn số phức $1 - 3i$

Ta có $|z - 1 + 3i|$ nhỏ nhất khi $MN_{\min}$ khi M là hình chiếu vuông góc của N trên Δ , suy ra $MN: x - 2y + 1 = 0$

Giải hệ $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - 2y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow M(3; -2) \Rightarrow z = 3 - 2i \Rightarrow 2a + 3b = 0$. **Chọn C.**



Ví dụ 2: Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2i| = |z + 2|$. Gọi z là số phức thỏa mãn $|(2 - i)z + 5|$ nhỏ nhất.

Khi đó :

- A. $0 < |z| < 1$ B. $1 < |z| < 2$ C. $2 < |z| < 3$ D. $|z| > 3$

Lời giải

Gọi $M(x; y); A(0; 2); B(-2; 0)$ là các điểm biểu diễn số phức $z; 2i$ và -2 .

Từ giả thiết $\Rightarrow MA = MB \Rightarrow M \in$ trung trực của AB có phương trình $\Delta: x + y = 0$

Lại có: $P = |(2 - i)z + 5| = |2 - i| \left| z + \frac{5}{2 - i} \right| = \sqrt{5} |z + 2 + i|$, gọi $N(-2; -1)$ là điểm biểu diễn số phức $-2 - i$

suy ra $P = \sqrt{5}MN$

Ta có P nhỏ nhất khi $MN_{\min}$ khi M là hình chiếu vuông góc của N trên Δ , suy ra phương trình $MN: x - y + 1 = 0$

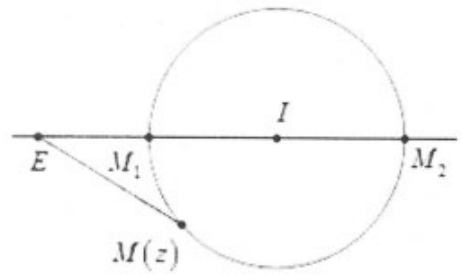
Giải hệ $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow z = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn A.**

Dạng 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_0| = R$. Tìm số phức thỏa mãn $P = |z - z_1|$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Phương pháp: Đặt $M(z); I(z_0); E(z_1)$ là các điểm biểu diễn số phức $z; z_0$ và z_1 . Khi đó từ giả thiết $|z - z_0| = R \Leftrightarrow MI = R \Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm I bán kính R . Ta có: $P = ME$ lớn nhất $\Leftrightarrow ME_{\max}$ và P nhỏ nhất $\Leftrightarrow ME_{\min}$. Khi đó:

$$P_{\max} = IE + R \Leftrightarrow M \equiv M_2 \text{ và } P_{\min} = |IE - R| \Leftrightarrow M \equiv M_1$$

(Điểm E có thể nằm trong hoặc ngoài đường tròn).



Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $|iz - 3 + 2i| = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z - 1 - i|$

- A. $P_{\min} = 3$ B. $P_{\min} = \sqrt{13} - 3$ C. $P_{\min} = 2$ D. $P_{\min} = \sqrt{10}$

Lời giải

Ta có: $|iz - 3 + 2i| = 3 \Leftrightarrow \left|i\left|z - \frac{3}{i} + 2\right|\right| = 3 \Leftrightarrow |z + 2 + 3i| = 3 \Rightarrow$ tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-2; -3)$ bán kính $R = 3$

Gọi $E(1; 1)$ là điểm biểu diễn số phức $1 + i \Rightarrow P = ME \Rightarrow P_{\min} = |EI - R| = 2$

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = \sqrt{5}$. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là 2 số phức làm cho biểu thức $P = |z - 2 - 3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất. Tính $T = 3|z_1| + 2|z_2|$

- A. $T = 20$ B. $T = 6$ C. $T = 14$ D. $T = 24$

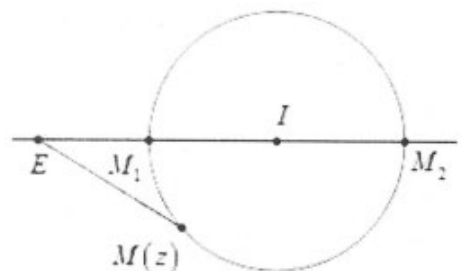
Lời giải

Ta có: $|z + 2 - i| = \sqrt{5} \Rightarrow$ tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-2; 1)$ bán kính $R = \sqrt{5}$. Gọi $E(2; 3) \Rightarrow P = ME$

Phương trình đường thẳng $IE: x - 2y + 4 = 0$

Dựa vào hình vẽ ta có $P_{\max} = IE + R \Leftrightarrow M \equiv M_2$

Giải hệ $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_2(-4; 0) \Rightarrow P_{\max} = 3\sqrt{5} \\ M_1(0; 2) \Rightarrow P_{\min} = \sqrt{5} \end{cases}$



Do đó $T = 3|z_1| + 2|z_2| = 3.2 + 2.4 = 14$. **Chọn C.**

Dạng 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_1| = |z - z_2|$. Tìm số phức thỏa mãn $P = |z - z_3| + |z - z_4|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

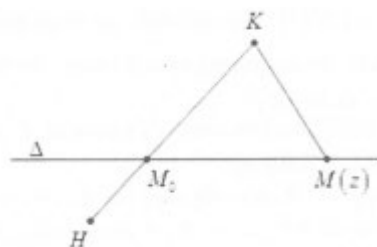
Phương pháp: Đặt $M(z); A(z_1); B(z_2); H(z_3); K(z_4)$ là các điểm biểu diễn số phức $z; z_1; z_2; z_3$ và z_4 . Khi đó từ giả thiết $|z - z_1| = |z - z_2|$ suy ra $MA = MB$, tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực Δ của AB ; $P = |z - z_3| + |z - z_4| = MH + MK$

TH1: H, K nằm khác phía so với đường thẳng Δ

Ta có: $P = MH + MK \geq HK$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv M_0 = HK \cap (\Delta)$

Khi đó $P_{\min} = HK$



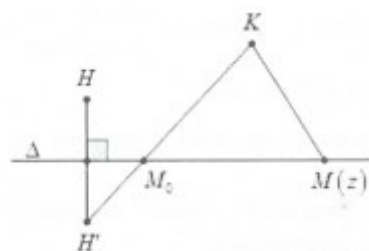
TH2: H, K nằm cùng phía so với đường thẳng Δ

Gọi H' là điểm đối xứng của H qua Δ

Khi đó: $P = MH + MK = MH' + MK \geq H'K$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv M_0 = H'K \cap (\Delta)$

Khi đó $P_{\min} = H'K$



Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = |z + 3 - 2i|$. Gọi $z = a + bi$ ($a; b \in \mathbb{R}$) sao cho

$P = |z - 2 - 4i| + |z + 1 - i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $a + b$ là:

A. 3

B. 5

C. 8

D. 4

Lời giải

Đặt $M(z); A(1; -2); B(-3; 2)$ từ giả thiết suy ra $MA = MB$ nên M thuộc đường thẳng trung trực của AB có phương trình $\Delta: x - y + 1 = 0$, gọi $H(2; 4)$ và $K(-1; 1)$ là các điểm biểu diễn số phức $2 + 4i$ và $-1 + i$

Ta có $P = MH + MK$ và 2 điểm H, K cùng phía so với đường thẳng Δ

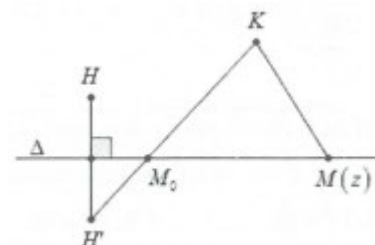
Gọi H' là điểm đối xứng của H qua $\Delta: x - y + 1 = 0$

Ta có: $HH': x + y - 6 = 0$ tọa độ trung điểm của HH' là nghiệm hệ

$$\text{phương trình } \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$$

Suy ra $H'(3; 3)$

Lại có: $P = MH + MK = MH' + MK \geq H'K$



Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M = H'K \cap d$. Phương trình đường thẳng $H'K$ là: $H'K: x - 2y + 3 = 0$

Suy ra $M_0 = H'K \cap \Delta \Rightarrow M_0(1; 2) \Rightarrow z = 1 + 2i$. Khi đó $P_{\min} = H'K = 2\sqrt{5}$. **Chọn A.**

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 4i| = |iz - 2|$. Gọi $z = a + bi$ ($a; b \in \mathbb{R}$) sao cho

$P = |z - i| + |z + 1 + 3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\sqrt{53}$

B. $\sqrt{37}$

C. 4

D. $\sqrt{41}$

Lời giải

Ta có: $|z - 2 + 4i| = |iz - 2| \Leftrightarrow |z - 2 + 4i| = |i| \left| z - \frac{2}{i} \right| = |z + 2i|$

Gọi $M(z); A(2; -4); B(0; -2)$ từ giả thiết suy ra $MA = MB$ nên M thuộc đường thẳng trung trực của AB có phương trình $\Delta: x - y - 4 = 0$, gọi $H(0; 1)$ và $K(-1; -3)$ là các điểm biểu diễn số phức i và $-1 - 3i$

Ta có: $P = MH + MK$ và 2 điểm H, K cùng phía so với đường thẳng Δ

Gọi H' là điểm đối xứng của H qua $\Delta: x - y - 5 = 0$

Ta có: $HH': x + y - 1 = 0$ tọa độ trung điểm của HH' là

nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

Suy ra $H'(5; -4)$

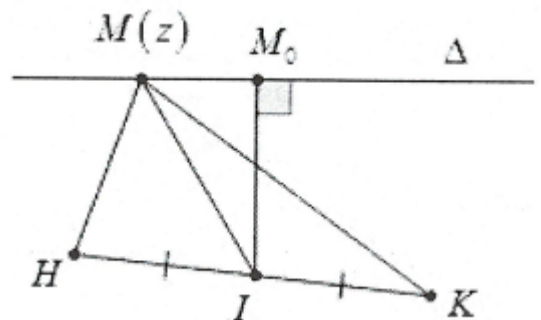
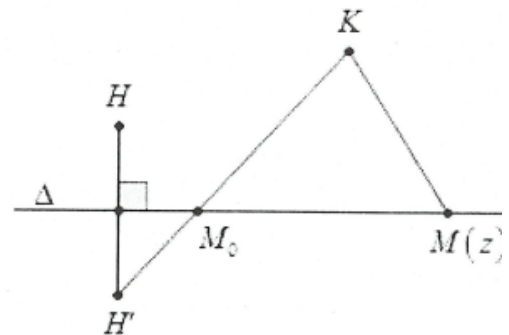
Lại có: $P = MH + MK = MH' + MK \geq H'K = \sqrt{37}$. **Chọn B.**

Dạng 4: Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_1| = |z - z_2|$. Tìm số phức thỏa mãn $P = |z - z_3|^2 + |z - z_4|^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Phương pháp: Đặt $M(z); A(z_1); B(z_2); H(z_3); K(z_4)$ là các điểm biểu diễn số phức $z; z_1; z_2; z_3$ và z_4 . Khi đó từ giả thiết $|z - z_1| = |z - z_2|$ suy ra $MA = MB$, tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực Δ của AB ;
 $P = |z - z_3|^2 + |z - z_4|^2 = MH^2 + MK^2$

Gọi I là trung điểm của $HK \Rightarrow MI^2 = \frac{MH^2 + MK^2}{2} - \frac{HK^2}{4} \Rightarrow P = MH^2 + MK^2 = 2MI^2 + \frac{HK^2}{2}$

nhỏ nhất khi $MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I xuống Δ .



Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2 - 4i| = |z - 2i|$. Gọi z là số phức thỏa mãn biểu thức

$P = |z - i|^2 + |z - 4 + i|^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $|z|^2$.

A. $|z|^2 = 12$

B. $|z|^2 = 10$

C. $|z|^2 = 2$

D. $|z|^2 = 5$

Lời giải

Gọi $M(z)$; $A(-2;4)$, $B(0;2)$ là các điểm biểu diễn số phức z ; $-2+4i$ và $2i$

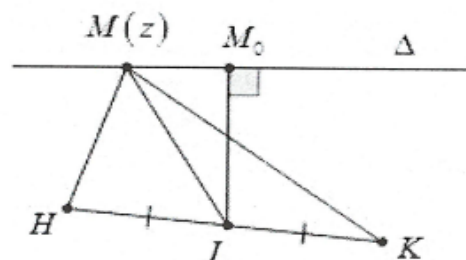
Khi đó $|z + 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow MA = MB \Rightarrow M$ thuộc trung trực của AB có phương trình $\Delta : x - y + 4 = 0$

Gọi $H(0;1)$, $K(4;-1) \Rightarrow P = MH^2 + MK^2 = 2MI^2 + \frac{HK^2}{2}$

(với $I(2;0)$ là trung điểm của HK)

Do đó $P_{\min} \Leftrightarrow ME_{\min}$ hay M là hình chiếu vuông góc của I xuống Δ , khi đó

$IM : x + y - 2 = 0 \Rightarrow M = IM \cap \Delta \Rightarrow M(-1;3) \Rightarrow |z|^2 = OM^2 = 10$. **Chọn B.**



Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 3i| = |z + 2 + i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = |z - 2 + 4i|^2 + |z + 2i|^2$ là:

A. $P_{\min} = 8$

B. $P_{\min} = 9$

C. $P_{\min} = 16$

D. $P_{\min} = 25$

Lời giải

Gọi $M(z)$; $A(1;-3)$, $B(-1;-1)$ là các điểm biểu diễn số phức z ; $1+3i$ và $-1-i$

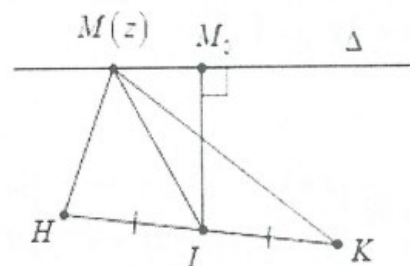
Khi đó $|z - 1 + 3i| = |z + 1 + i| \Leftrightarrow MA = MB \Rightarrow M$ thuộc trung trực của AB có phương trình $\Delta : x - y - 2 = 0$

Gọi $H(2;-4)$, $K(0;-2) \Rightarrow P = MH^2 + MK^2 = 2MI^2 + \frac{HK^2}{2}$

(với $I(1;-3)$ là trung điểm của HK)

Do đó $P_{\min} \Leftrightarrow ME_{\min}$ hay M là hình chiếu vuông góc của I

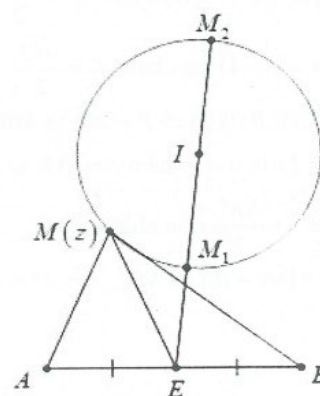
xuống Δ , khi đó $P_{\min} = 2[d(I;\Delta)]^2 + \frac{HK^2}{2} = 8$. **Chọn A.**



Dạng 5: Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_0| = R$. Tìm số phức thỏa mãn $P = |z - z_1|^2 + |z - z_2|^2$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Phương pháp: Đặt $M(z)$; $A(z_1)$; $B(z_2)$; $I(z_0)$ là các điểm biểu diễn số phức z ; z_1 ; z_2 và z_0 .

Khi đó từ giả thiết $|z - z_0| = R \Leftrightarrow MI = R \Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm I bán kính R.



Gọi E là trung điểm của AB ta có: $P = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow ME_{\max}$ và P nhỏ nhất $\Leftrightarrow ME_{\min}$.

Khi đó $P_{\max} \Leftrightarrow M \equiv M_2$ và $P_{\min} \Leftrightarrow M \equiv M_1$.

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 2$. Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn biểu thức

$P = |z - 2 - 3i|^2 + |z - 5i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $T = a + b$

A. $T = 1$

B. $T = 3$

C. $T = -1$

D. $T = -3$

Lời giải

Gọi $M(z); I(1; -2)$ khi đó $MI = 2 \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn tâm

$I(1; -2)$ bán kính $R = 2$

Đặt $A(2; 3); B(0; 5) \Rightarrow P = MA^2 + MB^2$

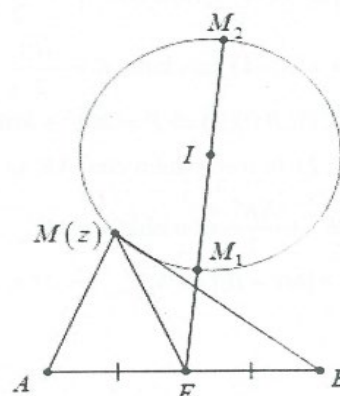
Gọi $H(1; 4)$ là trung điểm của AB ta có :

$P = 2MH^2 + \frac{AB^2}{2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow MH_{\max}$

Do $MH \leq MI + IH \Leftrightarrow MH_{\max} \Leftrightarrow M \equiv M_2$

Ta có: $IH : x = 1$

Giải hệ $\begin{cases} x = 1 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1(1; 0) \\ M_2(1; -4) \end{cases}$. Do đó $a + b = -3$. **Chọn D.**



Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + i| = \frac{\sqrt{13}}{2}$. Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn biểu thức

$P = |z - 2 - i|^2 + |z - 3i|^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = a + b$

A. $T = \frac{5}{2}$

B. $T = \frac{3}{2}$

C. $T = \frac{13}{2}$

D. $T = \frac{9}{2}$

Lời giải

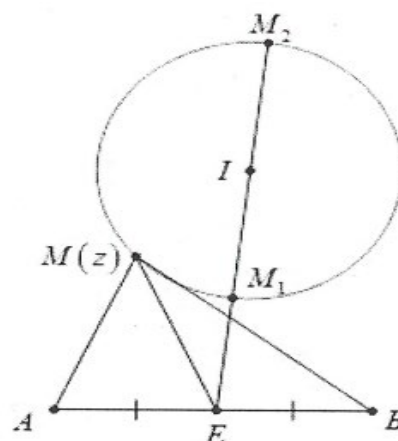
Gọi $M(z); I(3; -1)$ khi đó $MI = \frac{\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn tâm

$I(3; -1)$ bán kính $R = \frac{\sqrt{13}}{2}$

Đặt $A(2; 1); B(0; 3) \Rightarrow P = MA^2 + MB^2$

Gọi $E(1; 2)$ là trung điểm của AB ta có :

$P = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow ME_{\min}$



Do $ME \geq |MI - IE| \Leftrightarrow ME_{\min} \Leftrightarrow M \equiv M_1$

Ta có: $IE : 3x + 2y - 7 = 0$. Giải hệ $\begin{cases} 3x - 2y - 7 = 0 \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 = \frac{13}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1\left(2; \frac{1}{2}\right) \\ M_2\left(4; -\frac{5}{2}\right) \end{cases}$. Do đó $a + b = \frac{5}{2}$. **Chọn A.**

Dạng 6: Cho hai số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $|z_1 - z_0| = R$ và $|z_2 - w_1| = |z_2 - w_2|$;

trong đó $z_0; w_1; w_2$ là các số phức đã biết. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2|$

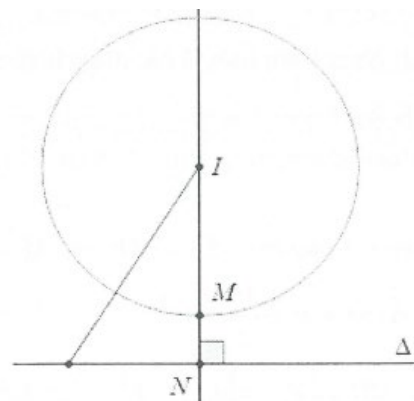
Phương pháp: Đặt $M(z_1); N(z_2)$ lần lượt là các điểm biểu diễn

số phức z_1 và z_2 .

Điểm M thuộc đường tròn tâm $I(z_0)$ bán kính R , N thuộc trung

trục Δ của AB với $A(w_1); B(w_2)$

Lại có: $P = MN \Rightarrow P_{\min} = |d_{(I; \Delta)} - R|$



Ví dụ 1: Cho số phức z_1 thỏa mãn $|z - 2|^2 - |z + i|^2 = 1$ và số phức z_2 thỏa mãn $|z - 4 - i| = \sqrt{5}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

B. $\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{5}$

D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Lời giải

Gọi $M(z; y)$ là điểm biểu diễn số phức z_1 . Khi đó $|z - 2|^2 - |z + i|^2 = 1$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 - x^2 - (y+1)^2 = 1 \Leftrightarrow -4x - 2y = -2 \Leftrightarrow (\Delta): 2x + y - 1 = 0$$

Gọi $N(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức z_2 . Khi đó $|z - 4 - i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-4)^2 + (b-1)^2 = 5$

Hay tập hợp điểm N trong mặt phẳng Oxy là đường tròn $(C): (x-4)^2 + (y-1)^2 = 5$

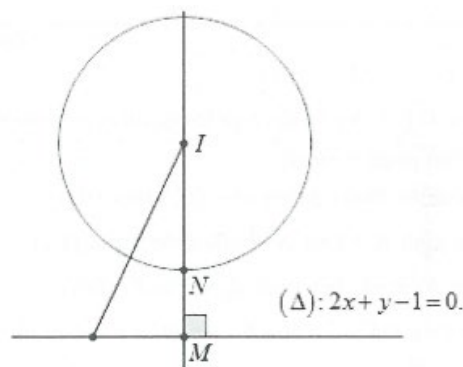
Ta có $d(I_{(C)}; (\Delta)) = \frac{8}{\sqrt{5}} > \sqrt{5} = R_{(C)}$

$\Rightarrow (\Delta)$ không cắt đường tròn (C) .

Lại có $MN = |z_1 - z_2| \Rightarrow$ dựa vào hình vẽ ta thấy

$$MN_{\min} \Leftrightarrow MN = d(I_{(C)}; (\Delta)) - R_{(C)}$$

Hay $|z_1 - z_2|_{\min} = \frac{8\sqrt{5}}{5} - \sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$. **Chọn D.**



Bài toán có thể hỏi thêm là tìm số phức z_1 hoặc z_2 để $|z_1 - z_2|_{\min}$ thì ta chỉ cần viết phương trình đường

thẳng $MN \perp (\Delta)$ sau đó tìm giao điểm $\begin{cases} M = (\Delta) \cap MN \\ N = (C) \cap MN \end{cases}$.

Ví dụ 2: Cho hai số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5$ và $|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2|$

A. $P_{\min} = \frac{5}{2}$

B. $P_{\min} = \frac{15}{2}$

C. $P_{\min} = 3$

D. $P_{\min} = 10$

Lời giải

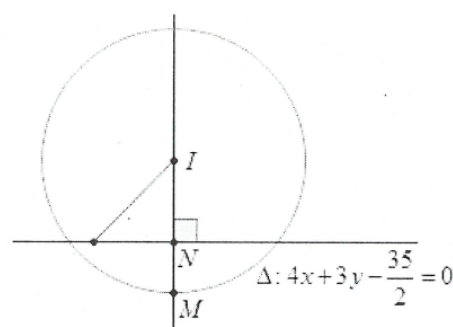
Gọi $M(z_1); N(z_2)$ lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức z_1 và z_2 .

Điểm M thuộc đường thẳng tròn tâm $I(-5;0)$ bán kính $R = 5$.

Điểm N thuộc đường thẳng trung trực Δ của AB với

$$A(-1;3); B(3;6) \Rightarrow \Delta: 4x + 3y - \frac{35}{2} = 0$$

Lại có: $P = MN \Rightarrow P_{\min} = |d_{(I;\Delta)} - R| = \frac{5}{2}$. **Chọn A.**



Dạng 7: Cho hai số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $|z_1 - w_1| = R_1$ và $|z_2 - w_1| = R_2$ trong đó $w_1; w_2$ là các số phức đã biết. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2|$.

Phương pháp: Đặt $M(z_1); N(z_2)$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1 và z_2 .

Điểm M thuộc đường tròn tâm (C_1) tâm $I(w_1)$ bán kính R_1 và N thuộc đường tròn (C_2) tâm $K(w_2)$ bán kính $R_2 \Rightarrow P = MN$. Dựa vào các vị trí tương đối của 2 đường tròn để tìm $MN_{\max}; MN_{\min}$

Ví dụ 1: Cho hai số phức $z; w$ thỏa mãn $z \cdot \bar{z} = 1$ và $|w - 3 + 4i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - w|$

A. $P_{\max} = 5$

B. $P_{\max} = 8$

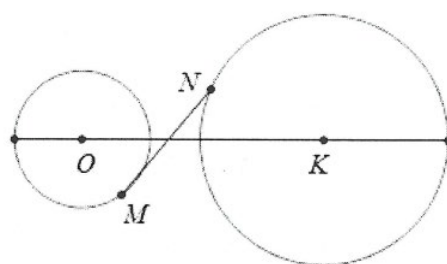
C. $P_{\max} = 10$

D. $P_{\max} = 5 + \sqrt{2}$

Lời giải

Ta có: $z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

Gọi $M(z); N(w)$ lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức z và w .



Điểm M thuộc đường tròn tâm (C_1) tâm $O(0;0)$ bán kính $R_1 = 1$ và N thuộc đường tròn (C_2) tâm $K(3;-4)$ bán kính $R_2 = 2 \Rightarrow P = MN$.

Dễ thấy $OK = 5 > R_1 + R_2$ nên (C_1) và (C_2) nằm ngoài nhau suy ra $MN_{\max} = OK + R_1 + R_2 = 8$. **Chọn B.**

Ví dụ 2: [Đề tham khảo Bộ GD & ĐT 2018] Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện

$|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi giá trị biểu thức $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất

A. $P = 10$

B. $P = 4$

C. $P = 6$

D. $P = 8$

Lời giải

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z

Từ giả thiết, ta có $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5 \Rightarrow M$ thuộc đường tròn (C) tâm $I(4;3)$, bán kính $R = \sqrt{5}$. Khi đó $P = MA + MB$, với $A(-1;3), B(1;-1)$.

Ta có $P^2 = MA^2 + MB^2 + 2MA \cdot MB \leq 2(MA^2 + MB^2)$.

Gọi $E(0;1)$ là trung điểm $AB \Rightarrow ME^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$.

Do đó $P^2 \leq 4ME^2 + AB^2$ mà $ME \leq CE = 3\sqrt{5}$ suy ra $P^2 \leq 4(3\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 = 200$.

Với C là giao điểm của đường thẳng EI với đường tròn (C) .

Vậy $P \leq 10\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra $\begin{cases} MA = MB \\ M \in C \end{cases} \Rightarrow M(6;4) \Rightarrow a + b = 10$. **Chọn A.**

Ví dụ 3: [Đề tham khảo Bộ GD & ĐT 2017] Xét các số phức z thỏa mãn điều kiện:

$|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = M + m$

A. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$

B. $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$

C. $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$

D. $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và gọi

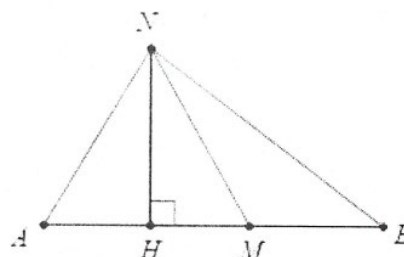
$M(x; y), A(-2;1), B(4;7)$ suy ra $AB = 6\sqrt{2}$.

Ta có $\overline{AB} = (6;6) \Rightarrow \vec{n} = (1;-1) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng

AB là $x - y + 3 = 0$.

Từ giả thiết, ta có $MA + MB = 6\sqrt{2} \rightarrow MA + MB = AB$

suy ra M thuộc đoạn thẳng AB .



$$\text{Gọi } N(1; -1) \Rightarrow |z - 1 + i| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = MN \Rightarrow \begin{cases} |z - 1 + i|_{\min} = MN_{\min} \\ |z - 1 + i|_{\max} = MN_{\max} \end{cases}.$$

- Độ dài đoạn thẳng MN nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của N trên AB .

$$\text{Hay } MN_{\min} = d(N; (AB)) = \frac{|1 - (-1) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \rightarrow m = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

- Độ dài đoạn thẳng MN lớn nhất khi và chỉ khi $M \equiv A$ hoặc $M \equiv B$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} M \equiv A \rightarrow MN = AN = \sqrt{13} \\ M \equiv B \rightarrow MN = BN = \sqrt{73} \end{cases} \Rightarrow MN_{\max} = \sqrt{73} \rightarrow M = \sqrt{73}.$$

$$\text{Vậy giá trị biểu thức } P = M + m = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}. \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 4: Xét các số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z - 1 - i| + |z - 7 - 4i| = 3\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z - 5 + 2i|$. Tính $P = M + m$

$$\text{A. } P = \sqrt{5} + \sqrt{10} \quad \text{B. } P = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{10}}{2} \quad \text{C. } P = 2(\sqrt{5} + \sqrt{10}) \quad \text{D. } P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2}$$

Lời giải

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ và gọi $M(x; y), A(1; 1), B(7; 4)$

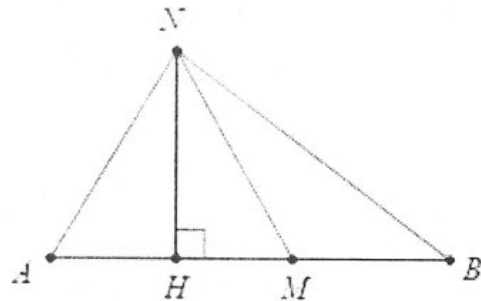
suy ra $AB = 3\sqrt{5}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (6; 3) \Rightarrow \vec{n}_{(AB)} = (1; -2) \Rightarrow$ phương trình đường

thẳng AB là $x - 2y + 1 = 0$.

Từ giả thiết, ta có $MA + MB = 3\sqrt{5} \rightarrow MA + MB = AB$

suy ra M thuộc đoạn thẳng AB .



$$\text{Gọi } N(5; -2) \Rightarrow |z - 5 + 2i| = MN \Rightarrow \begin{cases} |z - 5 + 2i|_{\min} = MN_{\min} \\ |z - 5 + 2i|_{\max} = MN_{\max} \end{cases}.$$

- Độ dài đoạn thẳng MN nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của N trên AB .

$$\text{Hay } MN_{\min} = d(N; (AB)) = \frac{|5 - 2(-2) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 2\sqrt{5} \rightarrow m = 2\sqrt{5}$$

- Độ dài đoạn thẳng MN lớn nhất khi và chỉ khi $M \equiv A$ hoặc $M \equiv B$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} M \equiv A \rightarrow MN = AN = 5 \\ M \equiv B \rightarrow MN = BN = 2\sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow MN_{\max} = 2\sqrt{10} \rightarrow M = 2\sqrt{10}.$$

$$\text{Vậy giá trị biểu thức } P = M + m = 2(\sqrt{5} + \sqrt{10}). \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 5: Biết số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $M = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính môđun của số phức $z + i$.

- A. $|z + i| = 2\sqrt{41}$ B. $|z + i| = 3\sqrt{5}$ C. $|z + i| = 5\sqrt{2}$ D. $|z + i| = \sqrt{41}$

Lời giải

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Ta có: $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5 \Rightarrow$ tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(3; 4)$ và $R = \sqrt{5}$.

Mặt khác: $M = |z + 2|^2 - |z - i|^2 = (x + 2)^2 + y^2 - [(x^2) + (y - 1)^2] = 4x + 2y + 3 \Leftrightarrow d : 4x + 2y + 3 - M = 0$

Do số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện nên d và (C) có điểm chung

$$\Leftrightarrow d(I; d) \leq R \Leftrightarrow \frac{|23 - M|}{2\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow |23 - M| \leq 10 \Leftrightarrow 13 \leq M \leq 33$$

$$\Rightarrow M_{\max} = 33 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 30 = 0 \\ (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow z + i = 5 - 4i \Rightarrow |z + i| = \sqrt{41}. \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 6: Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$?

- A. $P = 4\sqrt{6}$ B. $P = 5 + 3\sqrt{5}$ C. $P = 2\sqrt{26}$ D. $P = 34 + 3\sqrt{2}$

Lời giải

Đặt $A(z_1); B(z_2)$ theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (8; 6); |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 2; P = OA + OB$

$$104 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})^2 = 2(OA^2 + OB^2) \geq (OA + OB)^2 = P^2 \Rightarrow P \leq \sqrt{104} = 2\sqrt{26}. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 7: [Đề thi thử chuyên Đại học Vinh 2018] Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|iz + \sqrt{2} - i| = 1$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

- A. 3 B. $2\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{2}$ D. 4

Lời giải

Ta có: $|iz + \sqrt{2} - i| = 1 \Leftrightarrow |i(x + yi) + \sqrt{2} - i| = 1$ (với $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$))

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 1 \Rightarrow M(x, y) \text{ biểu diễn } z \text{ thuộc đường tròn tâm } I(1; \sqrt{2}) \text{ bán kính } R = 1.$$

Giả sử $A(z_1); B(z_2)$ do $|z_1 - z_2| = 2 \Rightarrow AB = 2 = 2R$ nên AB là đường kính của đường tròn $(I; R)$

Lại có: $|z_1| + |z_2| = OA + OB$

Mặt khác theo công thức trung tuyến ta có: $OI^2 = \frac{OA^2 + OB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow OA^2 + OB^2 = 8$

Theo BĐT Bunhiascopy ta có: $2(OA^2 + OB^2) \geq (OA + OB)^2 \Rightarrow OA + OB \leq 4$. **Chọn D.**

Ví dụ 8: Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 5 - 3i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 8$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 + z_2|$ là:

- A. $6 - \sqrt{34}$ B. $2\sqrt{34} - 6$ C. $2\sqrt{34} + 6$ D. $\sqrt{34} + 6$

Lời giải

Giả sử $w = z_1 + z_2$

Đặt $\begin{cases} w_1 = z_1 - 5 - 3i \\ w_2 = z_2 - 5 - 3i \end{cases}$ suy ra $w_1 + w_2 = z_1 + z_2 - 10 - 6i = w - 10 - 6i \Leftrightarrow |w_1 + w_2| = |w - 10 - 6i|$

Mà $\begin{cases} |w_1| = |w_2| = 5 \\ |w_1 - w_2| = |z_1 - z_2| = 8 \end{cases}$ mà $|w_1 + w_2|^2 + |w_1 - w_2|^2 = 2(|w_1|^2 + |w_2|^2) \Rightarrow |w_1 + w_2|^2 = 36$.

Vậy $|w - 10 - 6i| = |w_1 + w_2| = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow w$ thuộc đường tròn tâm $I(10; 6)$, bán kính $R = 6$.

Cách 2: Gọi $A(z_1); B(z_2)$ biểu diễn số phức $z_1; z_2$

Ta có: tập hợp z là đường tròn tâm $I(5; 3)$ bán kính $R = 5, AB = 8$

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow w = z_1 + z_2 = \overline{OA} + \overline{OB} = 2\overline{OH} \quad (1)$

Mặt khác $IH = \sqrt{IA^2 - HA^2} = 3 \Rightarrow$ tập hợp điểm H là đường tròn $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 9 \quad (C)$.

Giả sử $w(a; b), (1) \Rightarrow H\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right) \in (C) \Rightarrow \left(\frac{a}{2} - 5\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 3\right)^2 = 9 \Leftrightarrow (a - 10)^2 + (b - 6)^2 = 36$.

Do đó tập hợp điểm biểu diễn w thuộc đường tròn tâm $I(10; 6)$, bán kính $R = 6$.

Ta có: $|w|_{\min} = |OI - R| = 2\sqrt{34} - 6$. **Chọn B.**

Ví dụ 9: Cho z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $|6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i|$, thỏa mãn điều kiện $|z_1 - z_2| = \frac{8}{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z_1 + z_2|$

- A. $\frac{31}{5}$ B. $\frac{56}{5}$ C. $4\sqrt{2}$ D. 5

Lời giải

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ suy ra $\begin{cases} 6 - 3i + iz = 6 - 3i + i(x + yi) = 6 - y + (x - 3)i \\ 2z - 6 - 9i = 2x + 2yi - 6 - 9i = 2x - 6 + (2y - 9)i \end{cases}$

Khi đó, giả thiết $\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = (2x - 6)^2 + (2y - 9)^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 1 \quad (C)$.

Tập hợp z là đường tròn tâm $I(3;4)$ bán kính $R=1, AB=\frac{8}{5}$

Đặt $w = z_1 + z_2$ gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow w = z_1 + z_2 = \overline{OA} + \overline{OB} = 2\overline{OH} \quad (1)$

Mặt khác $IH = \sqrt{IA^2 - HA^2} = \frac{3}{5} \Rightarrow$ tập hợp điểm H là đường tròn $(x-3)^2 + (y-4)^2 = \frac{9}{25} \quad (C)$.

Giả sử $w(a;b), (1) \Rightarrow H\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right) \in (C) \Rightarrow \left(\frac{a}{2}-3\right)^2 + \left(\frac{b}{2}-4\right)^2 = \frac{9}{25} \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-8)^2 = \frac{36}{25}$.

Do đó tập hợp điểm biểu diễn w thuộc đường tròn tâm $I(6;8)$, bán kính $R=\frac{6}{5}$.

Ta có: $|w|_{\max} = OI + R = 10 + \frac{6}{5} = \frac{56}{5}$.

Chọn B.

Ví dụ 10: [Đề thi thử chuyên Đại học Vinh 2018] Cho số phức z thỏa mãn z không phải là số thực và

$w = \frac{z}{2+z^2}$ là số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M = |z+1-i|$ là

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. 8

Lời giải

Ta có $w = \frac{z}{2+z^2} \Rightarrow \overline{w} = \frac{\overline{z}}{2+\overline{z}^2} = \frac{\overline{z}}{2+\overline{z}^2} \quad (1)$. Vì w là số thực nên $w = \overline{w} \quad (2)$.

Từ (1), (2) suy ra $w = \frac{z}{2+z^2} = \frac{\overline{z}}{2+\overline{z}^2} \Leftrightarrow z(2+\overline{z}^2) = \overline{z}(2+z^2) \Leftrightarrow 2(z-\overline{z}) = z.\overline{z}(z-\overline{z})$

$\Leftrightarrow (z-\overline{z})(|z|^2-2) = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 2 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{2}$ (vì z không là số thực nên $z-\overline{z} \neq 0$).

Đặt $w = z+1-i \Leftrightarrow z = w-1+i$ nên $|w-1+i| = \sqrt{2} \Rightarrow |w|_{\max} = \sqrt{2} + \sqrt{1^2+1^2} = 2\sqrt{2}$. **Chọn B.**

Cách 2: Ta có w là số thực nên $\frac{1}{w} = z + \frac{2}{z}$ là số thực.

Đặt $z = a+bi \Rightarrow \frac{1}{w} = a+bi + \frac{2(a-bi)}{a^2+b^2}$ là số thực khi $b - \frac{2b}{a^2+b^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \text{ (không thỏa)} \\ a^2+b^2=2 \Rightarrow |z|=\sqrt{2} \end{cases}$

Tập hợp điểm biểu diễn z là đường tròn $O(0;0); R=\sqrt{2}$

Đặt $M(z); A(-1;1) \Rightarrow MA_{\max} = AO + R = 2\sqrt{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 11: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+1| + |z^2-z+1|$. Tính giá trị của $M.m$

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{39}{4}$

C. $3\sqrt{3}$

D. $\frac{13}{4}$

Lời giải

Gọi $z = x + yi; (x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R})$. Ta có: $|z| = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1$.

Đặt $t = |z + 1|$, ta có $0 = |z| - 1 \leq |z + 1| \leq |z| + 1 = 2 \Rightarrow t \in [0; 2]$.

Ta có $t^2 = (1 + z)(1 + \bar{z}) = 1 + z \cdot \bar{z} + z + \bar{z} = 2 + 2x \Rightarrow x = \frac{t^2 - 2}{2}$

Suy ra $|z^2 - z + 1| = |z^2 - z + z \cdot \bar{z}| = |z| |z - 1 + \bar{z}| = \sqrt{(2x - 1)^2} = |2x - 1| = |t^2 - 3|$

Xét hàm số $f(t) = t + |t^2 - 3|, t \in [0; 2]$. Bằng cách dùng đạo hàm, suy ra

$$\max f(t) = \frac{13}{4}; \min f(t) = \sqrt{3} \Rightarrow M.n = \frac{13\sqrt{3}}{4}.$$

Chọn A.

Ví dụ 12: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z + 1| + 2|z - 1|$

A. $\text{Max} T = 2\sqrt{5}$

B. $\text{Max} T = 2\sqrt{10}$

C. $\text{Max} T = 3\sqrt{5}$

D. $\text{Max} T = 3\sqrt{2}$

Lời giải

$$T = |z + 1| + 2|z - 1| \leq \sqrt{(1 + 2^2)(|z + 1|^2 + |z - 1|^2)} = \sqrt{5 \cdot 2(|z|^2 + 1)} = 2\sqrt{5} \text{ (BDT Cauchy-Swart)}$$

Chú ý: $|z + 1|^2 + |z - 1|^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2 = 2(|z|^2 + 1)$ với $z = x + yi$

Cách 2: Đặt $z = x + yi$. Ta có: $T = |x + yi + 1| + 2|x - yi - 1| = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$

Lại có $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow T = \sqrt{2x + 2} + 2\sqrt{-2x + 2} = f(x)$

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 2}} - \frac{2}{\sqrt{2 - 2x}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6}{10} \Rightarrow T_{\max} = 2\sqrt{5}$. **Chọn A.**

Ví dụ 13: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 4| + |z + 4| = 10$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là:

A. 10 và 4

B. 5 và 4

C. 4 và 3

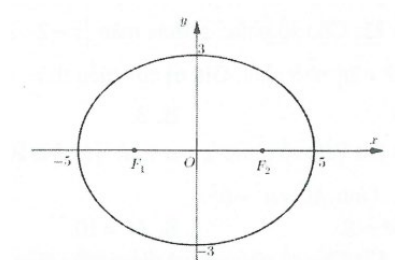
D. 5 và 3

Lời giải

Đặt $z = x + yi; (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow M(x, y)$ biểu diễn z

Ta có: $|z - 4| + |z + 4| = 10 \Leftrightarrow |x + yi - 4| + |x + yi + 4| = 10$

Gọi $F_1(-4; 0); F_2(4; 0) \Rightarrow MF_1 + MF_2 = 10$



Khi đó điểm biểu diễn z là Elip có trục lớn

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5; F_1F_2 = 2c = 8$$

$$\Rightarrow c = 4 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = 3. \text{ Do đó } 3 \leq OM \leq 5 \Rightarrow 3 \leq |z| \leq 5. \text{ Chọn D.}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ, hãy tìm số phức z có môđun nhỏ nhất, biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = \sqrt{5}$

- A. $z = -1 - 2i$ B. $z = 1 - 2i$ C. $z = 1 + 2i$ D. $z = -1 + 2i$

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z|$

- A. $P_{\max} = 9$ B. $P_{\max} = 5$ C. $P_{\max} = 12$ D. $P_{\max} = 3$

Câu 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 2i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$

- A. $4\sqrt{2} - 2$ B. $2\sqrt{2} + 1$ C. $2 + \sqrt{2}$ D. $3\sqrt{2} + 1$

Câu 4: Trong các số phức z thỏa mãn $|z + 3 + 4i| = 2$. Gọi z_0 là số phức của môđun nhỏ nhất. Tìm môđun của số phức z_0

- A. $|z_0| = 4$ B. $|z_0| = 2$ C. $|z_0| = 7$ D. $|z_0| = 3$

Câu 5: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |\bar{z} + 1 + i|$

- A. $\sqrt{13} + 2$ B. 4 C. 3 D. $\sqrt{13} + 1$

Câu 6: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3| = 2|z|$ và $\max|z - 1 + 2i| = a + b\sqrt{2}$. Tính $a + b$

- A. 4 B. $4\sqrt{2}$ C. 3 D. $\frac{4}{3}$

Câu 7: Cho số phức z có $|z| = 2$ thì số phức $w = z + 3i$ có môđun nhỏ nhất và lớn nhất lần lượt là bao nhiêu?

- A. 2 và 5 B. 1 và 6 C. 2 và 6 D. 1 và 5

Câu 8: Trong tất cả các số phức có dạng $z = m - 3 - (m - 2)i$ với $m \in \mathbb{R}$, hãy tìm số phức z có môđun nhỏ nhất?

- A. $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ B. $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ C. $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ D. $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Câu 9: Cho số phức $z = (m - 1) + (m - 2)i, m \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị của m để môđun của số phức z có giá trị lớn nhất là $\sqrt{5}$

- A. $-3 \leq m \leq 0$ B. $0 \leq m \leq 3$ C. $\begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m \leq -6 \\ m \geq 2 \end{cases}$

Câu 10: Cho số phức $z = m + (m - 3)i, m \in \mathbb{R}$. Tìm m để $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất?

- A. $m = 0$ B. $m = 3$ C. $m = \frac{3}{2}$ D. $m = -\frac{3}{2}$

Câu 11: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = |z - i|$. Gọi $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn $|z + 2 + 2i|$ nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức $a + 3b$ là:

A. 4**B. 3****C. 6****D. 0**

Câu 12: Biết số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ có môđun nhỏ nhất của.

Tính $M = a^2 + b^2$

A. $M = 8$ **B. $M = 10$** **C. $M = 16$** **D. $M = 26$**

Câu 13: Cho số phức z có điểm biểu diễn nằm trên đường thẳng $3x - 4y - 3 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$

A. $\frac{1}{5}$ **B. $\frac{3}{5}$** **C. $\frac{4}{5}$** **D. $\frac{2}{5}$**

Câu 14: Xét số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$

A. 4**B. $2\sqrt{2}$** **C. 10****D. 8**

Câu 15: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| = |z - 2 - i|$. Gọi $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn $|z - i|$ nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức $a + b$ là:

A. $\frac{-7}{10}$ **B. $\frac{9}{10}$** **C. $\frac{3}{10}$** **D. $\frac{7}{10}$**

Câu 16: Cho các số phức z, ω thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|$. Gọi $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn $|iz + 1|$ nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $a^2 + b^2$

A. 4**B. $\frac{5}{2}$** **C. 5****D. 2**

Câu 17: Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1| = |z + i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - 1 - 2i|$

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **B. $\sqrt{3}$** **C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$** **D. $\sqrt{2}$**

Câu 18: Cho số phức $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 1| = |z + i|$. Biết $|z - 2i|$ nhỏ nhất, tính $S = x + 2y$

A. $S = 2$ **B. $S = 3$** **C. $S = 1$** **D. $S = 4$**

Câu 19: Xét các số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = |z - i|$. Tính $P = 2a - b^2$ khi $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. $P = \frac{1}{25}$ **B. $P = \frac{19}{25}$** **C. $P = -\frac{4}{25}$** **D. $P = \frac{14}{25}$**

Câu 20: Cho các số phức z, ω thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|$ và $w = iz + 1$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|w|$

A. $|w|_{\min} = 2$ **B. $|w|_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$** **C. $|w|_{\min} = 2\sqrt{2}$** **D. $|w|_{\min} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$**

Câu 21: Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$. Tính $\min|w|$, biết $w = z - 2 + 2i$

A. $\min|w| = \frac{3}{2}$

B. $\min|w| = 2$

C. $\min|w| = 1$

D. $\min|w| = \frac{1}{2}$

Câu 22: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3| = 2|z|$ và $\max|z-1+2i| = a+b\sqrt{2}$. Tính $a+b$

A. 4

B. $4\sqrt{2}$

C. 3

D. $\frac{4}{3}$

Câu 23: Cho số phức z thỏa mãn z không phải số thực và $w = \frac{z}{2+z^2}$ là số thực. Biểu thức $|z+1-i|$ đạt giá

trị lớn nhất khi $z = a+bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Tính $P = a^2 - 2b$

A. -2

B. 1

C. 3

D. -5

Câu 24: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+i| = |z+1-i|$. Gọi $z = a+bi, (a, b \in \mathbb{R})$ sao cho

$P = |z-1-5i| + |z+2+i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $a+b$ bằng

A. $\frac{6}{5}$

B. $\frac{-6}{5}$

C. $\frac{-3}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

Câu 25: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2+i| = |\bar{z}-3i|$. Gọi $z = a+bi, (a, b \in \mathbb{R})$ sao cho $P = |z-i| + |z-2|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $2a-b$ bằng

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{-7}{5}$

C. $\frac{-1}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

Câu 26: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i| = |z+1|$. Gọi $z = a+bi, (a, b \in \mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn biểu thức

$P = |z-1+2i|^2 + |z-i|^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b$ là

A. $a+b=0$

B. $a+b=1$

C. $a+b=2$

D. $a+b=3$

Câu 27: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-i| = |z+1+i|$. Gọi $z = a+bi, (a, b \in \mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn biểu thức $P = |z-1-i|^2 + |z+2+i|^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b$ là

A. $a+b = \frac{13}{10}$

B. $a+b = \frac{1}{10}$

C. $a+b=1$

D. $a+b=2$

Câu 28: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i| = \sqrt{5}$ và $\omega = z+1+i$ có môđun lớn nhất. Tính môđun của số phức $|z|$

A. $|z| = 2\sqrt{5}$

B. $|z| = 3\sqrt{2}$

C. $|z| = \sqrt{6}$

D. $|z| = 5\sqrt{2}$

Câu 29: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z+1| + 2|z-1|$

A. $\max T = 2\sqrt{5}$

B. $\max T = 2\sqrt{10}$

C. $\max T = 3\sqrt{5}$

D. $\max T = 3\sqrt{2}$

Câu 30: Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$. Tính $\min|\omega|$, với $\omega = z-2 = 2i$

- A. $\min|\omega| = \frac{3}{2}$ B. $\min|\omega| = 2$ C. $\min|\omega| = 1$ D. $\min|\omega| = \frac{1}{2}$

Câu 31: Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\bar{z}|$

- A. $\sqrt{5}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$

Câu 32: Cho số phức z thỏa mãn $\left|iz + \frac{2}{1-i}\right| + \left|iz + \frac{2}{i-1}\right| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $|z|$. Tính Mm .

- A. $Mm = 2$ B. $Mm = 1$ C. $Mm = 2\sqrt{2}$ D. $Mm = 2\sqrt{3}$

Câu 33: Cho số phức z thỏa mãn $\frac{z-2i}{z-2}$ là số ảo. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z-1| + |z-i|$

- A. $5\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $3\sqrt{5}$

Câu 34: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\bar{z} = 1$ và $|z - \sqrt{3} + i| = m$. Tìm số phần tử của S .

- A. 2 B. 4 C. 1 D. 3

Câu 35: Biết rằng tồn tại hai số phức z thỏa mãn $|2z+1| = |z+\bar{z}+3|$ và $|z-8|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng hai phần thực của hai số phức đó.

- A. 7 B. 0 C. 14 D. 8

Câu 36: Cho số phức $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ thay đổi thỏa mãn $|z| = 1$. Hãy tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - y$

- A. 0 B. 12 C. $\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{5}$

Câu 37: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z+2| + 2|z-2|$

- A. $2\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{10}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $5\sqrt{2}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(2;4)$ bán kính $R = 5$

Ta có: $|z| = OM$, mặt khác OM đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất khi $M = OI \cap (C)$

Phương trình đường thẳng $OI : y = 2x$, phương trình đường tròn (C) : $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 5$

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} y = 2x \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 3 \Rightarrow y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OM_1 = \sqrt{5} \\ OM_2 = 3\sqrt{5} \end{cases} \text{ suy ra } z_1 = 1 + 2i \text{ là số phức thỏa mãn điều kiện } |z - 2 - 4i| = \sqrt{5}$$

Và có môđun nhỏ nhất, $z_2 = 3 + 6i$ là số phức có môđun lớn nhất. **Chọn C.**

Câu 2: Tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(3;-4)$ bán kính $R = 4$

Ta có: $|z| = OM$, khi đó $P_{\max} = OM_{\max} = OI + R = 5 + 4 = 9$. **Chọn A.**

Câu 3: Tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(2;-2)$ bán kính $R = 1$

Ta có: $|z| = OM$, khi đó $|z|_{\max} = OM_{\max} = OI + R = 2\sqrt{2} + 1$. **Chọn B.**

Câu 4: Tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(-3;-4)$ bán kính $R = 2$

Ta có: $|z| = OM$, khi đó $|z|_{\min} = OM_{\min} = |OI - R| = |5 - 2| = 2$. **Chọn D.**

Câu 5: Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có : $|z - 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$

Tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(2;3)$ bán kính $R = 1$

$$\text{Lại có: } P = |x - yi + 1 + i| = \sqrt{(x+1)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$$

Gọi $K(-1;1) \Rightarrow P = MK \rightarrow P_{\max} = IK + R = \sqrt{13} + 1$. **Chọn D.**

Câu 6: Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có : $|z - 3| = 2|z| \Leftrightarrow |x + yi - 3| = 2|x + yi|$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4(x^2 + y^2) \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \text{Tập hợp điểm M biểu diễn số phức } z \text{ là đường tròn tâm } I(-1;0) \text{ bán kính } R = 2$$

$$\text{Gọi } K(1;2) \Rightarrow |z - 1 - 2i| = MK \rightarrow MK_{\max} = IK + R = 2 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 4.$$

Chọn A.

Câu 7: Tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R = 2$

$$\text{Gọi } K(0;-3) \Rightarrow |w| = |z + 3i| = MK$$

Ta có: $MK_{\max} = OI + R = 5; MK_{\min} = |OK - R| = 1$. **Chọn D.**

$$\text{Câu 8: } |z|^2 = (m-3)^2 + (m-2)^2 = 2m^2 - 10m + 13 = 2\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

Do đó $|z|_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \frac{5}{2} \Rightarrow z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. **Chọn C.**

Câu 9: $|z|^2 = (m-1)^2 + (m-2)^2 = 2m^2 - 6m + 5 \leq 5 \Leftrightarrow 2m^2 - 6m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 3$. **Chọn B.**

Câu 10: $|z|^2 = m^2 + (m-3)^2 = 2m^2 - 6m + 9 = 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \geq \frac{9}{2}$

Do đó $|z|_{\min} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$. **Chọn C.**

Câu 11: Đặt $M(z)$; $A(2;3)$, $B(0;1)$ là các điểm biểu diễn số phức z ; $2+3i$ và i . Khi đó từ giả thiết suy ra $MA = MB$, tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực của AB đi qua $I(1;2)$ và có VTCP là $\vec{n}(1;1) \Rightarrow d: x + y - 3 = 0$

Gọi $N(-2;-2)$ là điểm biểu diễn số phức $-2-2i$

Ta có $|z + 2 + 2i|$ nhỏ nhất khi $MN_{\min}$ khi M là hình chiếu vuông góc của N trên d , suy ra $MN: x - y = 0$

Giải hệ $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow z = \frac{3+3i}{2} \Rightarrow a + 3b = 6$. **Chọn C.**

Câu 12: Tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là trung trực Δ của AB với $A(2;4)$, $B(0;2)$

Trung điểm của AB là $I(1;3)$; $\vec{n} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1;1) \Rightarrow \Delta: x + y - 4 = 0$

Mặt khác $|z| = OM$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của O xuống Δ

Khi đó $OM: x - y = 0 \Rightarrow M_o = OM \cap \Delta = (2;2) \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow M = 8$. **Chọn A.**

Câu 13: Ta có $|z| = OM$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của O xuống $\Delta: 3x - 4y - 3 = 0$

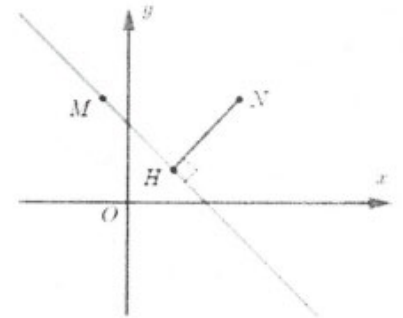
Khi đó $|z|_{\min} = OM_{\min} = d(O; \Delta) = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}$. **Chọn B.**

Câu 14: Tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là trung trực Δ của AB với $A(2;4)$, $B(0;2)$

Trung điểm của AB là $I(1;3)$; $\vec{n} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1;1) \Rightarrow \Delta: x + y - 4 = 0$

Mặt khác $|z| = OM$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của O xuống Δ

Khi đó $OM_{\min} = d(O; \Delta) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. **Chọn B.**



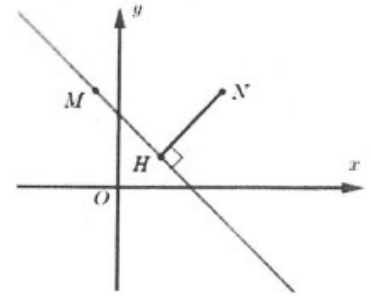
Câu 15: Đặt $M(z); A(1;-1), B(2;1)$ là các điểm biểu diễn số phức $z; 1-i$ và $2+i$. Khi đó từ giả thiết suy ra $MA = MB$, tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực của AB

đi qua $I\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ và có VTCP là $\vec{n}(1;2) \Rightarrow d: x+2y-\frac{3}{2}=0$

Gọi $N(0;1)$ là điểm biểu diễn số phức i

Ta có $|z-i|$ nhỏ nhất khi $MN_{\min}$ khi M là hình chiếu vuông góc của N trên

d , suy ra $MN: 2x-y+1=0$



Giải hệ $\begin{cases} x+2y-\frac{3}{2}=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-1}{10} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{-1}{10}; \frac{4}{5}\right) \Rightarrow z=\frac{-1}{10}+\frac{4i}{5} \Rightarrow a+b=\frac{7}{10}$. **Chọn D.**

Câu 16: Gọi $I(x; y); M(-2;2), N(0;4)$ là điểm biểu diễn các số phức $z; -2+2i; 4i$

Từ giả thiết $\Rightarrow IM = IN \Rightarrow I \in$ trung trực của MN là $d: x+y-2=0$

Khi đó $iz+1=-y+xi+1 \Rightarrow |iz+1|=x^2+(y-1)^2=NM$ với $N(0;1)$

Ta có $|iz+1|$ nhỏ nhất khi $MN_{\min}$ khi M là hình chiếu vuông góc của N trên d , suy ra $MN: x-y+1=0$

Giải hệ $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow z=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i \Rightarrow a^2+b^2=\frac{5}{2}$. **Chọn B**

Câu 17: Gọi $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow |x+1+yi|=|x+(y+1)i|$$

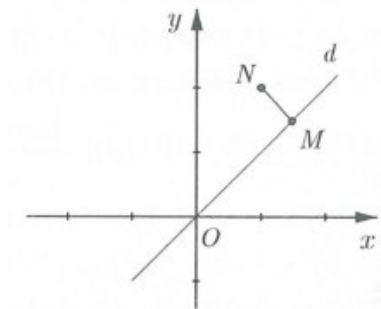
$$\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=x^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow x-y=0$$

$\Rightarrow M(z)$ có quỹ tích là đường thẳng $d: x-y=0$

Với $z'=1+2i \Rightarrow N(z')=(1;2)$

Ta có $|z|_{\min} \Leftrightarrow NM_{\min} \Leftrightarrow NM \perp d$

$$\Rightarrow |z|_{\min} = d(N; d) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ **Chọn C.}**$$



Câu 18: Gọi $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

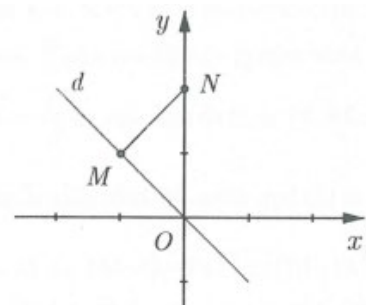
$$\Rightarrow |x-1+yi|=|x+(y+1)i|$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=x^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow x+y=0$$

$\Rightarrow M(z)$ có quỹ tích là đường thẳng $d: x+y=0$

Với $z'=2i \Rightarrow N(z')=(0;2)$

Ta có $|z|_{\min} \Leftrightarrow NM_{\min} \Leftrightarrow NM \perp d \Rightarrow MN: x-y+k=0$



Mà MN qua $N(0;2) \Rightarrow k=2 \Rightarrow MN: x-y+2=0$

Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow M(-1;1) \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow S=1. \text{ Chọn C.}$$

Câu 19: Đặt $M(z) = M(a;b)$ và $A(1;-2), B(0;1) \Rightarrow MA = MB$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng trung trực của AB $\Rightarrow (d): x-3y-2=0$

Gọi H là hình chiếu của O trên (d) $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $OH: 3x+y=0$

Ta có $|z| = OM \geq OH$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv H \Rightarrow M = (d) \cap OH$

$$\text{Khi đó, tọa độ điểm M là nghiệm của hệ } \begin{cases} a-3b-2=0 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{5} \\ b=-\frac{3}{5} \end{cases}. \text{ Vậy } P=\frac{1}{25}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 20: Đặt $M(z) = M(a;b)$ và $A(-2;2), B(0;4) \Rightarrow MA = MB$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng trung trực của AB $\Rightarrow (d): x+y-2=0$

$$\text{Ta có } w = iz + 1 \Leftrightarrow |w| = |iz + 1| \Leftrightarrow \frac{|w|}{|i|} = \frac{|iz + 1|}{|i|} \Leftrightarrow |w| = \left| z + \frac{1}{i} \right| = MC, \text{ với } C(0;1)$$

Gọi H là hình chiếu của C trên (d) $\Rightarrow CM \geq CH$. Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$

$$\text{Vậy } |w|_{\min} = CH = d(C; (d)) = \frac{|0.1 + 1.1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Chọn B.}$$

$$\text{Câu 21: } |z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)| \Leftrightarrow |(z-1+2i)(z-1-2i)| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z-1+2i|=0 \\ |z-1-2i|=|z-1+3i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1-2i \Rightarrow w=-1 \rightarrow |w|=1 \\ |z-1-2i|=|z-1+3i| \quad (*) \end{cases}$$

Đặt $M(z) = M(a;b)$ và $A(1;2), B(1;-3) \Rightarrow (*) \Leftrightarrow MA = MB$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng trung trực của AB $\Rightarrow (d): 2y+1=0$

Ta có $w = z - 2 + 2i \Leftrightarrow |w| = |z - 2 + 2i| = MC$, với $C(2;-2)$

Gọi H là hình chiếu của C trên (d) $\Rightarrow CM \geq CH$. Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$

$$\text{Khi đó } |w|_{\min} = CH = d(C; (d)) = \frac{|2.0 + 2.(-2) + 1|}{\sqrt{0^2 + 2^2}} = \frac{3}{2}. \text{ Vậy } \min |w| = 1. \text{ Chọn C.}$$

$$\text{Câu 22: Đặt } z = x + yi \text{ (} x, y \in \mathbb{R} \text{) khi đó } |z-3| = 2|z| \Leftrightarrow |(z-3)^2| = 4|z|^2$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 4 \text{ (C)}$$

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(-1;0)$, bán kính $R=2$

Gọi $A(1;-2) \Rightarrow IA = 2\sqrt{2} > R \Rightarrow A$ nằm ngoài đường tròn (C) $\Rightarrow MA_{\max} = IA + R = 2 + 2\sqrt{2}$

Mặt khác $\max |z-1+2i| = a+b\sqrt{2} \rightarrow a=b=2$. Vậy $a+b=4$. **Chọn A.**

Câu 23: Vì w là số thực suy ra $\frac{1}{w} = \frac{2+z^2}{z} = z + \frac{2}{z}$ là số thực $\Leftrightarrow z + \frac{2}{z} = \bar{z} + \frac{2}{\bar{z}} \Leftrightarrow |z| = \sqrt{2}$

Suy ra tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 2$ với $\begin{cases} I(0;0) \\ R = \sqrt{2} \end{cases}$

Gọi $A(-1;1) \Rightarrow |z+1-i| = MA$ và $IA = \sqrt{2} = R \Rightarrow A$ nằm trên đường tròn (C)

Khi đó $MA_{\max} = IA + R = 2\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi I là trung điểm $MA \Rightarrow M(1;-1)$

Vậy $z=1-i$ thì $|z+1-i| = 2\sqrt{2} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow P = 1^2 - 2 \cdot (-1) = 3$. **Chọn C.**

Câu 24: Gọi $M(z); A(1;-1); B(-1;1)$ từ giả thiết suy ra $MA = MB$ nên M thuộc đường thẳng trung trực của AB có phương trình $y = x(d)$.

Gọi $H(1;5); K(-2;-1) \Rightarrow P = MH + MK$, 2 điểm H, K cùng phía so với đường thẳng d

Gọi H' là điểm đối xứng của $d : y = x$

Ta có: $HH' : x+y-6=0 \Rightarrow I(3;3) \Rightarrow H'(5;1)$

Lại có: $P = MH + MK = MH' + MK \geq H'K$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M = H'K \cap d$

Phương trình đường thẳng $H'K$ là: $2x-7y-3=0$

Suy ra $M = \left(-\frac{3}{5}; -\frac{3}{5}\right) \Rightarrow a+b = -\frac{6}{5}$. **Chọn B.**

Câu 25: Ta có: $|z-2+i| = |\bar{z}-3i| = |\overline{z-3i}| = |z+3i|$

Gọi $M(z); A(2;-1); B(0;-3)$ suy ra $MA = MB$ nên M thuộc đường thẳng trung trực của AB có phương trình $z+y+1=0(d)$.

Gọi $H(0;1); K(2;0) \Rightarrow P = MH + MK$, 2 điểm H, K cùng phía so với đường thẳng d

Gọi H' là điểm đối xứng của $d : z+y+1=0$

Ta có: $HH' : x-y+1=0 \Rightarrow I(-1;0) \Rightarrow H'(-2;-1)$

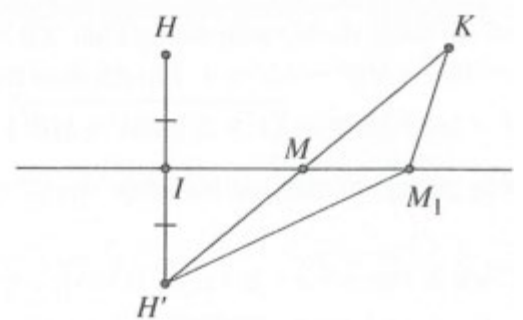
Lại có: $P = MH + MK = MH' + MK \geq H'K$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M = H'K \cap d$

Phương trình đường thẳng $H'K$ là: $x-4y-2=0$

Suy ra $M = \left(-\frac{2}{5}; -\frac{3}{5}\right) \Rightarrow 2a-b = -\frac{1}{5}$. **Chọn C.**

Câu 26: Gọi $M(z); A(1;2); B(-1;0)$



Khi đó $|z-1-2i|=|z+1| \Leftrightarrow MA=MB \Rightarrow M$ thuộc trung trực của AB có phương trình $x+y-1=0$ (d)

$$\text{Gọi } I(1;-2); J(0;1) \Rightarrow P = MI^2 + MJ^2 = 2ME^2 + \frac{IJ^2}{2}$$

(với $E\left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right)$ là trung điểm của IJ)

Do đó $P_{\min} \Leftrightarrow ME_{\min}$ hay M là hình chiếu vuông góc của E xuống d, khi đó $EM : x-y-1=0$

$$\Rightarrow M = EM \cap d \Rightarrow M(1;0) \Rightarrow a+b=1. \text{ Chọn A.}$$

Câu 27: Gọi $M(z); A(3;1), B(-1;-1)$

Khi đó $|z-3-i|=|z+1+i| \Leftrightarrow MA=MB \Rightarrow M$ thuộc trung trực của AB có phương trình $2x+y-2=0$ (d)

$$\text{Gọi } I(1;1); J(-2;-1) \Rightarrow P = MI^2 + MJ^2 = 2ME^2 + \frac{IJ^2}{2}$$

(với $E\left(\frac{-1}{2}; 0\right)$ là trung điểm của IJ)

Do đó $P_{\min} \Leftrightarrow ME_{\min}$ hay M là hình chiếu vuông góc của E xuống d, khi

$$\text{đó } EM : x-2y+\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow M = EM \cap d \Rightarrow M\left(\frac{7}{10}; \frac{3}{5}\right) \Rightarrow a+b=\frac{13}{10}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 28: Ta có $\omega = z+1+i \Leftrightarrow z = \omega-1-i$ nên $z-1+2i = \omega-1-i-1+2i = \omega-2+i$

$$\text{Khi đó } |z-1+2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |\omega-2+i| = \sqrt{5} \text{ nên } |\omega|_{\max} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \omega = 4-2i$$

$$\text{Suy ra } z = \omega-1-i = 4-2i-1-i = 3-3i \rightarrow |z| = \sqrt{3^2+(-3)^2} = 3\sqrt{2}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 29: Xét hai cách giải:

Cách 1: Gọi $z = x+yi (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow M(x, y)$

$$\text{Và } A(-1;0), B(1;0). \text{ Ta có } |z|=1 \Rightarrow |x+yi|=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính AB.

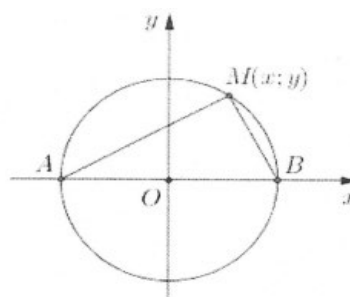
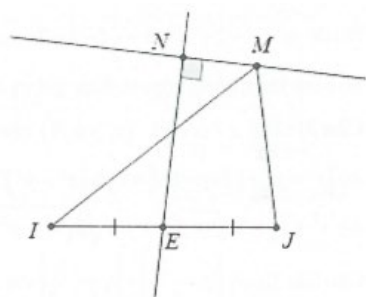
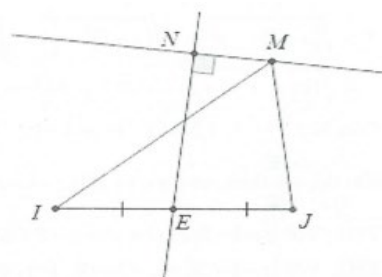
$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = AB^2 = 4. \text{ Khi đó, theo Bunhiacopski, ta có}$$

$$T = MA + 2MB \leq \sqrt{(1^2+2^2)(MA^2+MB^2)} = \sqrt{5 \cdot 4} = 2\sqrt{5}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $\max T = 2\sqrt{5}. \text{ Chọn A.}$

Cách 2: Đặt $z = x+yi (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z+1| = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$ và $|z-1| = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$$\text{Mặt khác } |z|=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1, \text{ khi đó}$$



$$T = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq \sqrt{(1^2 + 2^2)[(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2]}$$

$$= \sqrt{10(x^2 + y^2 + 1)} = \sqrt{10 \cdot 2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \max T = 2\sqrt{5}$$

Câu 30: $z^2 - 2z + 5 = (z-1)^2 + 4 = (z-1)^2 - (2i)^2 = (z-1+2i)(z-1-2i)$

Khi đó, giả thiết $\Leftrightarrow |(z-1+2i)(z-1-2i)| = |(z-1+2i)(z+3i-1)| \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1-2i \\ |z-1-2i| = |z+3i-1| \end{cases}$

TH1. Với $z = 1-2i$, ta có $w = z - 2 + 2i = 1-2i-2+2i = -1 \Rightarrow |w| = 1$

TH2. Với $|z-1-2i| = |z+3i-1|$ (*), đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có

$$(*) \Leftrightarrow |x-1+(y-2)i| = |x-1+(y+3)i| \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$$

Do đó $w = z - 2 + 2i = x - \frac{1}{2}i - 2 + 2i = x - 2 + \frac{3}{2}i \Rightarrow |w| = \sqrt{(x-2)^2 + \frac{9}{4}} \geq \frac{3}{2}$

So sánh hai trường hợp, ta được giá trị nhỏ nhất của $|w|$ bằng 1. **Chọn A.**

Câu 31: Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) nên $|z^2 - i| = 1 \Leftrightarrow |(z + yi)^2 - i| = 1$

$$\Leftrightarrow |x^2 - y^2 + (2xy - 1)i| = 1 \Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 + (2xy - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2\sqrt{xy} \leq x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow |z| \leq \sqrt{2}. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 32: Ta có $\left|iz + \frac{2}{1-i}\right| + \left|iz + \frac{2}{i-1}\right| = 4 \Leftrightarrow |iz + i + 1| + |iz - i - 1| = 4 \Leftrightarrow |z + 1 - i| + |z - 1 + i| = 4$

Gọi $A(-1;1), B(1;-1)$ có trung điểm là $O(0;0)$. Điểm M biểu diễn số phức z

Theo công thức trung tuyến thì $|z|^2 = OM^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$

Ta có $MA^2 + MB^2 \geq \frac{(MA + MB)^2}{2} = \frac{4^2}{2} = 8$. Do đó $|z|^2 \geq \frac{8}{2} - \frac{8}{4} = 2 \Leftrightarrow |z| \geq \sqrt{2}$

Lại có $4 = |z + 1 - i| + |z - 1 + i| \geq |z + 1 - i + z - 1 + i| = 2|z| \Leftrightarrow |z| \leq 2$

Vậy $M = 2; m = \sqrt{2} \rightarrow M.m = 2\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Câu 33: Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), khi đó $\frac{z-2i}{z-2} = \frac{x+(y-2)i}{x-2+yi} = \frac{[x+(y-2)i][x-2-yi]}{(x-2)^2 + y^2}$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2(x+y-2)i}{(x-2)^2 + y^2} \text{ là số ảo } \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2(x+y)$$

Suy ra $2(x+y) = x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Leftrightarrow (x+y)^2 - 4(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow x+y \leq 4$

Ta có $P = |z-1| + |z-i| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1}$
 $= \sqrt{2y+1} + \sqrt{2x+1} \leq 2\sqrt{x+y+1} = 2\sqrt{4+1} = 2\sqrt{5}$. Vậy $P_{\max} = 2\sqrt{5}$. **Chọn C.**

Câu 34: $z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ nên tập hợp biểu diễn số phức z là đường tròn (C_1) tâm O , $R = 1$

Lại có $|z - \sqrt{3} + i| = m$ nên tập hợp biểu diễn số phức z là đường tròn (C_2) tâm $I(\sqrt{3}; -1)$, $R' = m$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (C_1), (C_2)$ tiếp xúc trong hoặc tiếp xúc ngoài $\Leftrightarrow \begin{cases} OI = R + R' \\ OI + R = R' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$

Chọn A.

Câu 35: Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có $|2z+1| = |z+\bar{z}+3| \Leftrightarrow |2x+1+2yi| = |2x+3|$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2 + (2y)^2 = (2x+3)^2 \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2} - 1 \Rightarrow |z-8|^2 = (x-8)^2 + y^2 = \left(\frac{y^2}{2} - 9\right)^2 + y^2$$

Xét hàm số $f(x) = \left(\frac{y^2}{2} - 9\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}y^4 - 8y^2 + 81 \geq \frac{1}{4}(y^2 - 16)^2 + 17 \geq 17$

Suy ra $\min f(y) = 17$. Dấu bằng xảy ra khi $y^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \rightarrow x = 7 \\ y = -4 \rightarrow x = 7 \end{cases}$

Vậy tổng hai phần thực của hai số phức là 14. **Chọn C.**

Câu 36: $|z| = \sqrt{x^2 + 4y^2}$ mà $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 1$ (*)

Lại có $P = x - y \Leftrightarrow y = x - P$ thế vào (*), ta được $x^2 + 4(x - P)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x^2 - 8Px + 4P^2 = 1 \Leftrightarrow 5x^2 - 8Px + 4P^2 - 1 = 0 \quad (**)$$

Phương trình (**) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = (-4P)^2 - 5(4P^2 - 1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 5 - 4P^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq P \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow \min P = -\frac{\sqrt{5}}{2}; \max P = \frac{\sqrt{5}}{2}. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 37: Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow |z+2| = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}; |z-2| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

Mặt khác $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, khi đó

$$T = \sqrt{(x+2)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \leq \sqrt{(1^2 + 2^2)[(x+2)^2 + y^2 + (x-2)^2 + y^2]}$$

$$= \sqrt{10(x^2 + y^2 + 4)} = \sqrt{10 \cdot 5} = 5\sqrt{2} \Rightarrow \max T = 5\sqrt{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức T là $T = 5\sqrt{2}$. **Chọn D.**