

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

Ngày thi: 02/4/2024

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu tương ứng gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử một người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hóa bởi hàm số

$$P(t) = 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$$

ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo giây. Trong khoảng thời gian từ 0 đến 2 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 90 mmHg.

b) Cho phương trình $(m+1+\log_3 x)(2m-1+\log_3 x)=0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $3(x_1+x_2) \geq 10$.

Câu 2. (6,0 điểm)

a) Cho đa giác đều có $4n$ đỉnh ($n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$). Gọi S là tập hợp tất cả các tam giác có ba đỉnh là ba trong $4n$ đỉnh của đa giác đều đã cho. Chọn ngẫu nhiên một tam giác thuộc tập S . Gọi A là biến cố: “Tam giác được chọn là tam giác vuông nhưng không cân”. Tìm giá trị nguyên dương nhỏ nhất của n , biết rằng xác suất của biến cố A nhỏ hơn $\frac{2}{7}$.

b) Cho dãy (u_n) xác định bằng hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 2024 \\ (n+1)^2 u_{n+1} = (n^2 + 2n)u_n + 2023 \end{cases} \text{ Tính giới hạn của dãy số } (u_n).$$

Câu 3. (5,0 điểm)

a) Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $A'A = A'B = A'C = a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(BDD'B')$ và $(ABCD)$ bằng 60° , tính thể tích của khối lăng trụ đã cho theo a .

b) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng $3a$, $SA = SB = SD = a\sqrt{6}$ và tam giác ABD đều. Giả sử (P) là mặt phẳng thay đổi, luôn đi qua B và vuông góc với mặt phẳng (SCD) . Gọi α là góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (P) . Tìm giá trị lớn nhất của $\sin \alpha$.

Câu 4. (4,0 điểm)

a) Trong một hoạt động ngoại khóa của Đoàn trường, lớp Thảo định mở một gian hàng bán trà

sữa và kem que. Biết giá gốc một ly trà sữa là 15000 đồng, một que kem là 5000 đồng. Các bạn dự kiến bán trà sữa với giá 20000 đồng/1ly và kem giá 8000 đồng/1que. Dựa vào thống kê số người tham gia hoạt động và nhu cầu thực tế, các bạn trong lớp dự kiến tổng số ly trà sữa và số que kem bán được không vượt quá 200. Theo quỹ lớp thì số tiền lớp Thảo được dùng không quá 2000000 đồng. Hỏi lớp Thảo có thể đạt được tối đa lợi nhuận là bao nhiêu?

b) Gọi S là tập hợp các số nguyên dương n thỏa mãn tính chất “ n có đúng 35 ước số nguyên dương”. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất của tập hợp S đã cho.

 HẾT

Ghi chú: Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1.a (3 điểm)	Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu tương ứng gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử một người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hóa bởi hàm số $P(t) = 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$ ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo giây. Trong khoảng thời gian từ 0 đến 2 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 90 mmHg.	
	$P(t) = 90 \Leftrightarrow 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 90 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = -\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{14} + \frac{12}{14}k \\ t = \frac{7}{14} + \frac{12}{14}n \end{cases} (k, n \in \mathbb{Z}).$	1.0
	+) Với $t = -\frac{1}{14} + \frac{12}{14}k$ ta có $0 < -\frac{1}{14} + \frac{12}{14}k < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{12} < k < \frac{29}{12} \Rightarrow k \in \{1; 2\}$.	1.0
	+) Tương tự với $t = \frac{7}{14} + \frac{12}{14}n$ ta có $n \in \{0; 1\}$.	0.5
	Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 2 giây, có 4 lần huyết áp là 90 mmHg.	0.5
Câu 1.b (2 điểm)	Cho phương trình $(m+1+\log_3 x)(2m-1+\log_3 x) = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $3(x_1 + x_2) \geq 10$.	
	$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = -m-1 \\ \log_3 x = 1-2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^{-m-1} \\ x = 3^{1-2m} \end{cases}.$	0.5
	Vai trò x_1, x_2 như nhau nên giả sử $\begin{cases} x_1 = 3^{-m-1} \\ x_2 = 3^{1-2m} \end{cases}$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khi $-m-1 \neq 1-2m \Leftrightarrow m \neq 2$.	0.5
	$3(x_1 + x_2) \geq 10 \Leftrightarrow 3(3^{-m-1} + 3^{1-2m}) \geq 10 \Leftrightarrow 3^{-m} + 9 \cdot (3^{-m})^2 - 10 \geq 0$	0.5
	$\Leftrightarrow 3^{-m} \geq 1 \Leftrightarrow m \leq 0.$	0.5
Câu 2.a (3 điểm)	Cho đa giác đều có $4n$ đỉnh ($n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$). Gọi S là tập hợp tất cả các tam giác có ba đỉnh là ba trong $4n$ đỉnh của đa giác đều đã cho. Chọn ngẫu nhiên một tam giác	

	thuộc tập S. Gọi A là biến cố: “Tam giác được chọn là tam giác vuông nhưng không cân”. Tìm giá trị nguyên dương nhỏ nhất của n, biết rằng xác suất của biến cố A nhỏ hơn $\frac{2}{7}$.	
	Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{4n}^3$.	0.5
	Gọi A là biến cố cần tìm xác suất. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đều đã cho. Số đường chéo đi qua O của đa giác là $2n$.	0.5
	Mỗi tam giác vuông ứng với cạnh huyền là một đường chéo qua O và đỉnh còn lại của nó là một trong $4n - 2$ đỉnh còn lại của đa giác. Số cách chọn một đường chéo qua O là $2n$. Số cách chọn một đỉnh còn lại trong $4n - 2$ đỉnh của đa giác là $4n - 2$. Số tam giác vuông là $2n(4n - 2)$.	0.5
	Số tam giác vuông cân là $4n$. Do đó số tam giác vuông nhưng không cân là $2n(4n - 2) - 4n = 8n(n - 1)$.	0.5
	Suy ra $n(A) = 8n(n - 1)$. $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8n(n - 1)}{C_{4n}^3} = \frac{8n(n - 1)}{\frac{4n(4n - 1)(4n - 2)}{6}} = \frac{6n - 6}{8n^2 - 6n + 1}$	0.5
	Theo đề ta có $\frac{6n - 6}{8n^2 - 6n + 1} < \frac{2}{7} \Leftrightarrow 16n^2 - 54n + 44 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n > 2 \\ n < \frac{11}{8} \end{cases}$. Vậy giá trị nguyên dương nhỏ nhất thỏa đề bài là $n = 3$.	0.5
Câu 2.b (3 điểm)	Cho dãy (u_n) xác định bằng hệ thức truy hồi $\begin{cases} u_1 = 2024 \\ (n + 1)^2 u_{n+1} = (n^2 + 2n)u_n + 2023 \end{cases}$ Tính giới hạn của dãy số (u_n).	
	$u_{n+1} = \left(\frac{n^2 + 2n}{(n + 1)^2} \right) u_n + \frac{2023}{(n + 1)^2} = \left(1 - \frac{1}{(n + 1)^2} \right) u_n + \frac{2023}{(n + 1)^2}$	0.5
	$u_{n+1} - 2023 = \left(1 - \frac{1}{(n + 1)^2} \right) u_n + \frac{2023}{(n + 1)^2} - 2023 = u_n - 2023 - \frac{u_n - 2023}{(n + 1)^2}$	0.5
	Đặt $v_n = u_n - 2023$, $v_1 = 2024 - 2023 = 1$. $v_{n+1} = v_n - \frac{1}{(n + 1)^2} v_n = v_n \left[1 - \frac{1}{(n + 1)^2} \right] = \frac{(n + 2)n}{(n + 1)^2} v_n, \forall n \geq 1$	0.5
	$v_n \cdot v_{n-1} \cdots v_2 = \frac{(n + 1)(n - 1)}{n^2} v_{n-1} \cdot \frac{n(n - 2)}{(n - 1)^2} v_{n-2} \cdot \frac{(n - 1)(n - 3)}{(n - 2)^2} v_{n-3} \cdots v_1$	0.5
	Suy ra $v_n = \frac{n + 1}{2n} v_1 \Rightarrow u_n = v_n + 2023 = \frac{n + 1}{2n} + 2023 = \frac{4047n + 1}{2n}$	0.5
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4047n + 1}{2n} = \frac{4047}{2}$	0.5
Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $A'A = A'B = A'C = a$		

Câu 3.a (3 điểm)	Biết góc giữa hai mặt phẳng $(BDD'B')$ và $(ABCD)$ bằng 60°, tính thể tích của khối lăng trụ đã cho theo a.	
	Gọi $O = AC \cap BD$, $O' = A'C' \cap B'D'$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$. Vì $A'A = A'B = A'C = a$ nên $HA = HB = HC$, do đó $H \equiv O$.	1.0
	Vì hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ song song nhau nên góc giữa hai mặt phẳng $(BDD'B')$ và $(ABCD)$ bằng góc giữa hai mặt phẳng $(BDD'B')$ và $(A'B'C'D')$. $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp A'O \end{cases} \Rightarrow BD \perp (A'AO) \Rightarrow B'D' \perp (A'AO) \Rightarrow B'D' \perp AO'.$ Lại có $B'D' \perp A'O'$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng $(BDD'B')$ và $(A'B'C'D')$ bằng $\widehat{OO'A'} = \widehat{A'AO} = 60^\circ$.	1.0
	Tính được $A'O = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AO = \frac{a}{2}$, $S_{ABCD} = \frac{a^2}{2}$.	0.5
	Thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = A'O \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^3$.	0.5
Câu 3.b (2 điểm)	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng $3a$, $SA = SB = SD = a\sqrt{6}$ và tam giác ABD đều. Giả sử (P) là mặt phẳng thay đổi, luôn đi qua B và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Gọi α là góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (P). Tìm giá trị lớn nhất của $\sin \alpha$.	0.5

	Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đều ABD . $SA = SB = SD \Rightarrow SH \perp (ABD)$.	
	$B \in (P) \perp (SCD), (P) \cap (SCD) = \Delta$ Gọi E là hình chiếu của B lên $\Delta \Rightarrow BE \perp (SCD)$ Gọi K là hình chiếu của H lên $SD, (SHD) \perp (SCD) \Rightarrow HK \perp (SCD)$ $\Rightarrow BE = d(A; (SCD)) = d(H; (SCD)) = \frac{3}{2} d(H; (SCD)) = \frac{3}{2} HK$. $HD = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{3a}{\sqrt{3}} = a\sqrt{3}; SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = \sqrt{6a^2 - 3a^2} = a\sqrt{3}$. Suy ra $BE = \frac{3a\sqrt{6}}{4}$.	0.5
	Gọi F là hình chiếu của D lên $\Delta \Rightarrow DF \perp (P)$. Suy ra góc tạo bởi BD và (P) là $\alpha = \widehat{DBF}$. $\sin \alpha = \frac{FD}{BD} \leq \frac{DE}{BD}$, dấu bằng xảy ra khi $F \equiv E$.	0.5
	$\frac{DE}{BD} = \frac{\sqrt{BD^2 - BE^2}}{BD} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}a}{3a} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$. Vậy GTLN của $\sin \alpha$ bằng $\frac{\sqrt{10}}{4}$.	0.5
Câu 4.a (3 điểm)	Trong một hoạt động ngoại khóa của Đoàn trường, lớp Thảo định mở một gian hàng bán trà sữa và kem que. Biết giá gốc một ly trà sữa là 15000 đồng, một que kem là 5000 đồng. Các bạn dự kiến bán trà sữa với giá 20000 đồng/1ly và kem giá 8000 đồng/1que. Dựa vào thống kê số người tham gia hoạt động và nhu cầu thực tế, các bạn trong lớp dự kiến tổng số ly trà sữa và số que kem bán được không vượt quá 200. Theo quỹ lớp thì số tiền lớp Thảo được dùng không quá 2000000 đồng. Hỏi lớp Thảo có thể đạt được tối đa lợi nhuận là bao nhiêu?	
	Gọi x, y lần lượt là số ly trà sữa và số que kem mà lớp Thảo định nhập về để bán ($x, y \in \mathbb{N}$). Số tiền lợi nhuận thu được là $F(x; y) = 5x + 3y$ (nghìn đồng).	1.0
	Theo đề ta có hệ $\begin{cases} x + y \leq 200 \\ 15000x + 5000y \leq 2000000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 200 \\ 3x + y \leq 400 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$.	1.0
	Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là tứ giác $OABC$ (kể cả biên) như hình vẽ dưới đây.	0.5

	Nếu bán hết số hàng nhập về thì lợi nhuận là $F_{\max} = 5.100 + 3.100 = 800.$ Lợi nhuận đạt được là 800 nghìn đồng. Ghi chú: Nếu học sinh biến đổi như sau thì vẫn cho điểm tối đa: $F(x, y) = 5x + 3y = 2(x + y) + (3x + y) \leq 2.200 + 400 = 800.$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x + y = 200 \\ 3x + y = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 100 \end{cases}.$ Kết luận $F_{\max} = 800.$	0.5
Câu 4.b (1 điểm)	Gọi S là tập hợp các số nguyên dương n thỏa mãn tính chất “n có đúng 35 ước số nguyên dương”. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất của tập hợp S đã cho.	
	Giả sử $n = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$, trong đó $x_1, x_2, \dots, x_k$ là các số nguyên dương và $p_1, p_2, \dots, p_k$ là các số nguyên tố. Số ước số dương của n là $(x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_k + 1) = 35 = 1.35 = 5.7; x_i + 1 \geq 2, \forall i = \overline{1, k}.$ Từ đó ta có $\begin{cases} x_1 + 1 = 35 \\ x_1 + 1 = 5 \\ x_2 + 1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 34 \\ x_1 = 4 \\ x_2 = 6 \end{cases}.$	0.5
	Trường hợp 1: $x_1 = 34$. Để n bé nhất, ta chọn $p_1 = 2$, suy ra $n = 2^{34}$. Trường hợp 2: $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 6 \end{cases}$. Để n bé nhất, ta chọn $p_1 = 3, p_2 = 2$, suy ra $n = 3^4 \cdot 2^6 = 5148$ Vậy $n = 5148$ là số tự nhiên bé nhất thỏa đề bài.	0.5

HẾT

Ghi chú :

- Mọi lời giải đúng, khác với hướng dẫn chấm, đều cho điểm tối đa theo từng câu và từng phần tương ứng.
- Tổ chấm thảo luận để thống nhất các tình huống làm bài có thể xảy ra của học sinh.