

# 35 DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN KHẢO SÁT HÀM SỐ

**Dạng 1:** Cho hàm số  $y = f(x, m)$  có tập xác định  $D$ . Tìm điều kiện của tham số  $m$  để hàm số đơn điệu trên  $D$

## Cách giải

- Hàm số đồng biến trên  $D \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in D$
- Hàm số nghịch biến trên  $D \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in D$

**Chú ý:**

$$\text{Nếu } y' = ax^2 + bx + c \text{ thì: } y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \text{ và } y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

**Dạng 2:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x, m)$  đơn điệu trên một khoảng  $(a; b)$

## Cách giải

- Hàm số đồng biến trên  $(a; b) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (a; b)$
- Hàm số nghịch biến trên  $(a; b) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (a; b)$
- Sử dụng kiến thức:

$$m \geq f(x), \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow m \geq \max_{(a; b)} f(x) \text{ và } m \leq f(x), \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow m \leq \min_{(a; b)} f(x)$$

**Dạng 3:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x, m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  đơn điệu trên một khoảng có độ dài bằng  $k$  cho trước.

## Cách giải

- Ta có:  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$
- Hàm số đồng biến trên khoảng  $(x_1; x_2) \Leftrightarrow$  PT:  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \quad (1)$
- Biến đổi  $|x_1 - x_2| = k$  thành  $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = k^2 \quad (2)$
- Sử dụng định lý Viet, đưa phương trình (2) thành phương trình theo  $m$
- Giải phương trình, kết hợp với điều kiện (1) đưa ra kết quả

**Dạng 4:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x, m)$  có cực trị

## Cách giải

- Đối với hàm số:  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Khi đó, ta có:  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$   
Hàm số có cực trị  $\Leftrightarrow$  Hàm số có CĐ và CT  $\Leftrightarrow$  PT:  $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$  có hai nghiệm phân biệt
- Đối với hàm số:  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ . Khi đó, ta có:  $y' = \frac{amx^2 + 2anx + (bn - cm)}{(mx + n)^2} = \frac{g(x)}{(mx + n)^2}$

Hàm số có cực trị  $\Leftrightarrow$  Hàm số có CĐ và CT

$$\Leftrightarrow \text{PT: } g(x) = amx^2 + 2anx + (bn - cm) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } -\frac{n}{m}$$

**Dạng 5:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x, m)$  đạt cực trị tại điểm  $x_0$

**Cách giải**

- Hàm số đạt cực trị tại điểm  $x_0$  thì:  $y'(x_0) = 0$ . GPT này ta tìm được giá trị của  $m$
- Thử lại các giá trị của  $m$  vừa tìm được xem có thỏa mãn hay không?
  - Nếu  $y = B3$  hoặc  $y = B4$  thì vận dụng kiến thức:  $y''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$  là điểm CĐ  
 $y''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$  là điểm CT
  - Nếu  $y = \frac{B2}{B1}$  thì kiểm tra bằng cách lập bảng biến thiên

**Dạng 6:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x, m)$  có cực trị tại hai điểm  $x_1, x_2$  và các điểm cực trị đó thỏa mãn một hệ thức (I) nào đó.

**Cách giải**

- Tìm điều kiện của  $m$  để hàm số có cực trị (1)
- Vận dụng định lý Viet, ta có hệ thức liên hệ giữa  $x_1$  và  $x_2$
- Biến đổi hệ thức (I) đã cho và vận dụng định lý Viet để tìm được  $m$
- Kết hợp với điều kiện (1) đưa ra kết quả

**Dạng 7:** Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$

**Cách giải**

- Đối với hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ :
  - Thực hiện phép chia đa thức  $y$  cho  $y'$  và viết hàm số dưới dạng:  $y = u(x).y' + Mx + N$
  - Gọi  $A(x_1; y_1)$  và  $B(x_2; y_2)$  là hai điểm cực trị. Khi đó:  $y_1 = Mx_1 + N$  và  $y_2 = Mx_2 + N$
  - Do đó, phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có dạng:  $y = Mx + N$
- Đối với hàm số  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ :
  - Chứng minh bổ đề: Nếu hàm số  $y = \frac{u(x)}{v(x)}$  có  $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ v(x_0) \neq 0 \end{cases}$  thì  $y(x_0) = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$
  - Áp dụng bổ đề:
 

Gọi  $A(x_1; y_1)$  và  $B(x_2; y_2)$  là hai điểm cực trị. Khi đó:  $y_1 = \frac{2ax_1 + b}{m}$  và  $y_2 = \frac{2ax_2 + b}{m}$
  - Do đó, phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có dạng:  $y = \frac{2a}{m}x + \frac{b}{m}$

**Dạng 8:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = f(x, m)$  có các điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục tung

**Cách giải**

- Tìm điều kiện của  $m$  để hàm số có các điểm cực trị  $x_1$  và  $x_2$  (1)
- Vận dụng định lý Viet ta có hệ thức liên hệ giữa  $x_1$  và  $x_2$  (2)

- A và B nằm về hai phía đối với trục  $Oy \Leftrightarrow x_1 x_2 < 0$  (sử dụng hệ thức (2))
- Kết hợp với điều kiện (1) đưa ra kết quả

**Dạng 9:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = f(x, m)$  có các điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành

**Cách giải**

- Tìm điều kiện của  $m$  để hàm số có các điểm cực trị  $x_1$  và  $x_2$  (1)
- Vận dụng định lý Viet ta có hệ thức liên hệ giữa  $x_1$  và  $x_2$  (2)
- Tính các giá trị  $y_1$  và  $y_2$  (tính giống như ở **Dạng 7**)
- Các điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục  $Oy \Leftrightarrow y_1 y_2 < 0$  (sử dụng hệ thức (2))
- Kết hợp với điều kiện (1) đưa ra kết quả

**Dạng 10:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = f(x, m)$  có các điểm cực trị nằm về hai phía đối với đường thẳng  $d : Ax + By + C = 0$  cho trước

**Cách giải**

- Tìm điều kiện của  $m$  để hàm số có các điểm cực trị  $x_1$  và  $x_2$  (1)
- Vận dụng định lý Viet ta có hệ thức liên hệ giữa  $x_1$  và  $x_2$  (2)
- Tính các giá trị  $y_1$  và  $y_2$  (tính giống như ở **Dạng 7**)  $\Rightarrow$  Tọa độ các điểm cực trị:  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$
- A và B nằm về hai phía đối với  $d \Leftrightarrow (Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) < 0 \Rightarrow$  kết quả

**Dạng 11:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = f(x, m)$  có các điểm CĐ và CT đối xứng với nhau qua đường thẳng  $d : Ax + By + C = 0$

**Cách giải**

- Tìm điều kiện của  $m$  để hàm số có các điểm cực trị  $x_1$  và  $x_2$  (1)
- Vận dụng định lý Viet ta có hệ thức liên hệ giữa  $x_1$  và  $x_2$  (2)
- Tính các giá trị  $y_1$  và  $y_2$  (tính giống như ở **Dạng 7**)  $\Rightarrow$  Tọa độ các điểm cực trị:  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$
- A và B đối xứng với nhau qua  $d \Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp d \\ I \in d \end{cases}$  trong đó I là trung điểm của AB  $\Rightarrow$  giá trị  $m$
- Kết hợp với điều kiện (1) đưa ra kết quả

**Dạng 12:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = f(x, m)$  có các điểm CĐ và CT cách đều đường thẳng  $d : Ax + By + C = 0$

**Cách giải**

- Tìm điều kiện của  $m$  để hàm số có các điểm cực trị  $x_1$  và  $x_2$  (1)
- Vận dụng định lý Viet ta có hệ thức liên hệ giữa  $x_1$  và  $x_2$  (2)
- Tính các giá trị  $y_1$  và  $y_2$  (tính giống như ở **Dạng 7**)  $\Rightarrow$  Tọa độ các điểm cực trị:  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$
- A và B cách đều đường thẳng  $\begin{cases} AB \parallel d \\ I \in d \end{cases}$  trong đó I là trung điểm của AB  $\Rightarrow$  giá trị  $m$
- Kết hợp với điều kiện (1) đưa ra kết quả

**Dạng 13:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = f(x, m)$  có các điểm cực trị A và B thỏa mãn một hệ thức nào đó (VD:  $AB = k$ ,  $AB$  ngắn nhất,  $OA = \sqrt{2}OB \dots$ )

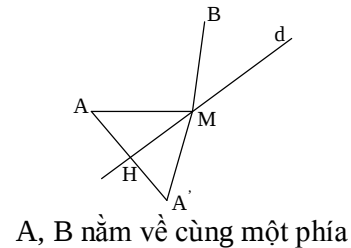
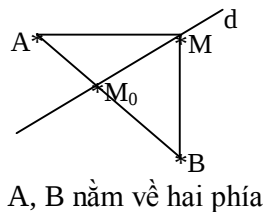
**Cách giải**

- Tìm điều kiện của  $m$  để hàm số có các điểm cực trị  $x_1$  và  $x_2$  (1)
- Vận dụng định lý Viet ta có hệ thức liên hệ giữa  $x_1$  và  $x_2$  (2)
- Tính các giá trị  $y_1$  và  $y_2$  (tính giống như ở **Dạng 7**)  $\Rightarrow$  Tọa độ các điểm cực trị:  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$
- Từ hệ thức liên hệ giữa các điểm A, B ta tìm được giá trị của  $m$

**Dạng 14:** Tìm điểm M thuộc đường thẳng  $d: Ax + By + C = 0$  sao cho tổng khoảng cách từ điểm M đến hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là nhỏ nhất

**Cách giải**

- Tìm các điểm cực trị  $A(x_1; y_1)$  và  $B(x_2; y_2)$  của ĐTHS  $y = f(x)$
- Viết phương trình đường thẳng AB
- Kiểm tra xem A và B nằm về cùng một phía hay nằm về hai phía đối với đường thẳng  $d$ 
  - + Nếu:  $(Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) < 0 \Rightarrow$  A và B nằm về hai phía đối với  $d$
  - Khi đó:  $MA + MB \geq AB$ . Do đó:  $MA + MB$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow$  M là giao điểm của AB với đường thẳng  $d$
  - + Nếu:  $(Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) > 0 \Rightarrow$  A và B nằm về cùng một phía đối với  $d$ 
    - Xác định tọa độ điểm  $A'$  đối xứng với điểm A qua đường thẳng  $d$
    - Khi đó:  $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ . Do đó:  $MA + MB$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow$  M là giao điểm của  $A'B$  với đường thẳng  $d$



**Dạng 15:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = f(x, m)$  có các điểm CĐ, CT và đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tạo với đường thẳng  $d: Ax + By + C = 0$  một góc bằng  $\alpha$

**Cách giải**

- Tìm điều kiện của  $m$  để hàm số có các điểm cực trị (1)
- Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua hai điểm cực trị
- Khi đó:
 
$$\begin{cases} \Delta \parallel d \Leftrightarrow k_{\Delta} = k_d \\ \Delta \perp d \Leftrightarrow k_{\Delta} \cdot k_d = -1 \\ \Delta \text{ tạo với } d \text{ góc } \alpha \Leftrightarrow \left| \frac{k_{\Delta} - k_d}{1 + k_{\Delta} k_d} \right| = \tan \alpha \end{cases} \Rightarrow \text{ giá trị của } m$$
- Kết hợp với điều kiện (1) đưa ra kết quả

**Dạng 16:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có các điểm CĐ, CT tạo thành một tam giác vuông cân.

**Cách giải**

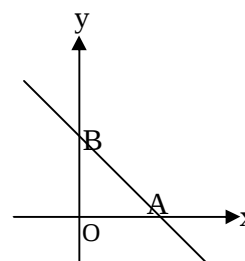
- Tìm điều kiện của  $m$  để hàm số có các điểm cực trị (1)
- Tìm tọa độ các điểm cực trị A, B, C của ĐTHS
- Xác định xem  $\triangle ABC$  cân tại điểm nào, giả sử cân tại A
- Khi đó:  $\triangle ABC$  vuông cân  $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow$  giá trị của  $m$
- Kết hợp với điều kiện (1) đưa ra kết quả

**Chú ý:** ĐTHS trùng phương có trục đối xứng là trục Oy và ĐTHS có các điểm CĐ, CT  $\Leftrightarrow$  ĐTHS có ba điểm cực trị

**Dạng 17:** Tìm giá trị của  $m$  để tiệm cận xiên của ĐTHS  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$  chắn trên hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng  $k$ .

**Cách giải**

- Tìm đường tiệm cận xiên của ĐTHS
- Tìm tọa độ giao điểm  $A(x_A; 0)$  và  $B(0; y_B)$  của TCX với các trục tọa độ
- Khi đó:  $OA = |x_A|$  và  $OB = |y_B| \Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} |x_A| \cdot |y_B|$
- Từ đó, suy ra kết quả của  $m$



**Dạng 18:** Tìm các điểm M trên đồ thị (C):  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  sao cho tổng khoảng cách từ điểm M đến giao điểm của hai đường tiệm cận là nhỏ nhất.

**Cách giải**

- Tìm các đường tiệm cận của ĐTHS  $\Rightarrow$  Giao điểm A và B của hai đường tiệm cận
- Sử dụng phương pháp chia đa thức, viết lại hàm số đã cho dưới dạng:  $y = p + \frac{q}{cx + d}$  (với  $p, q \in \mathbb{R}$ )
- Gọi  $M\left(m; p + \frac{q}{cm + d}\right) \in (C)$ . Tính khoảng cách từ điểm M đến các đường tiệm cận
- Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm  $\Rightarrow$  kết quả

**Chú ý:** - Khoảng cách từ điểm  $M(x_0; y_0)$  đến đường thẳng  $\Delta: Ax + By + C = 0$  là:  $d_{(M; \Delta)} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

- Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm A và B:  $A + B \geq 2\sqrt{AB}$ . Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow A = B$

- Đối với hàm số dạng  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$  cách làm hoàn toàn tương tự

**Dạng 19:** Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C):  $y = f(x)$  tại điểm  $M(x_0; y_0)$

**Cách giải**

- Xác định  $x_0$  và  $y_0$

- Tính  $y'$ . Từ đó suy ra:  $y'(x_0)$
- Phương trình tiếp tuyến cần tìm:  $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

**Dạng 20:** Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C):  $y = f(x)$  biết tiếp tuyến đó có hệ số góc bằng k

**Cách giải**

- Xác định k
- Tính  $f'(x)$  và giải phương trình  $f'(x) = k$  để tìm hoành độ tiếp điểm  $x_0$ . Từ đó suy ra:  $y_0 = f(x_0)$
- PT tiếp tuyến cần tìm:  $y = k(x - x_0) + y_0$

**Dạng 21:** Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C):  $y = f(x)$  biết tiếp tuyến đó đi qua điểm  $A(x_A; y_A)$

**Cách giải**

- Gọi  $\Delta$  là đường thẳng đi qua điểm  $A(x_A; y_A)$  và có hệ số góc k  $\Rightarrow$  PT  $\Delta$ :  $y = k(x - x_A) + y_A$  (\*)
- $\Delta$  là tiếp tuyến của (C)  $\Leftrightarrow$  HPT:  $\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A & (1) \\ k = f'(x) & (2) \end{cases}$  có nghiệm
- Thay k từ (2) vào (1) ta được:  $f(x) = f'(x)(x - x_A) + y_A$  (3)
- Giải phương trình (3) ta được  $x \Rightarrow k$  (thay vào (2))  $\Rightarrow$  PT tiếp tuyến cần tìm (thay vào (\*))

**Dạng 22:** Tìm các điểm M sao cho từ điểm M có thể kẻ được n tiếp tuyến tới đồ thị (C):  $y = f(x)$

**Cách giải**

- Giả sử:  $M(x_0; y_0)$ . Phương trình đường thẳng  $\Delta$  qua M và có hệ số góc k có dạng:  $y = k(x - x_0) + y_0$
- $\Delta$  là tiếp tuyến của (C)  $\Leftrightarrow$  HPT:  $\begin{cases} f(x) = k(x - x_0) + y_0 & (1) \\ k = f'(x) & (2) \end{cases}$  có nghiệm
- Thay k từ (2) vào (1) ta được:  $f(x) = f'(x)(x - x_0) + y_0$  (3)
- Khi đó, từ M kẻ được n tiếp tuyến đến (C)  $\Leftrightarrow$  PT (3) có n nghiệm phân biệt  $\Rightarrow$  kết quả

**Dạng 23:** Tìm các điểm M sao cho từ điểm M có thể kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị (C):  $y = f(x)$  và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

**Cách giải**

- Giả sử:  $M(x_0; y_0)$ . Phương trình đường thẳng  $\Delta$  qua M và có hệ số góc k có dạng:  $y = k(x - x_0) + y_0$
- $\Delta$  là tiếp tuyến của (C)  $\Leftrightarrow$  HPT:  $\begin{cases} f(x) = k(x - x_0) + y_0 & (1) \\ k = f'(x) & (2) \end{cases}$  có nghiệm
- Thay k từ (2) vào (1) ta được:  $f(x) = f'(x)(x - x_0) + y_0$  (3)
- Khi đó, qua M kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C)  $\Leftrightarrow$  PT (3) có 2 nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$
- Hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau  $\Leftrightarrow f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1 \Rightarrow$  kết quả

**Chú ý:** Qua M kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía đối với trục hoành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3) \text{ có 2 nghiệm phân biệt} \\ f(x_1) \cdot f(x_2) < 0 \end{cases}$$

**Dạng 24:** Tìm các giá trị của  $m$  để đồ thị  $(C_1): y = f(x, m)$  cắt đồ thị  $(C_2): y = g(x)$  tại  $n$  điểm phân biệt

**Cách giải**

- $(C_1)$  cắt  $(C_2)$  tại  $n$  điểm phân biệt  $\Leftrightarrow$  PT:  $f(x, m) = g(x)$  có  $n$  nghiệm phân biệt
- Tìm  $m$  bằng một số cách: dựa vào điều kiện có nghiệm của PT bậc hai, dựa vào bảng biến thiên, dựa vào đồ thị ...  $\Rightarrow$  kết quả

**Dạng 25:** Biện luận theo  $m$  số nghiệm của phương trình:  $F(x, m) = 0$

**Cách giải**

- Biến đổi phương trình  $F(x, m) = 0$  về dạng:  $f(x) = g(m)$ , trong đó đồ thị  $y = f(x)$  đã vẽ đồ thị
- Số nghiệm của PT đã cho chính là số giao điểm của đồ thị  $(C): y = f(x)$  với đường thẳng  $d: y = g(m)$
- Dựa vào số giao điểm của  $d$  với  $(C) \Rightarrow$  kết quả

**Dạng 26:** Tìm giá trị của  $m$  để đường thẳng  $d: y = px + q$  cắt đồ thị  $(C): y = \frac{ax+b}{cx+d}$  tại hai điểm phân biệt  $M, N$  sao cho độ dài đoạn  $MN$  là nhỏ nhất.

**Cách giải**

- $d$  cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $\Leftrightarrow$  PT:  $\frac{ax+b}{cx+d} = px+q$  có hai nghiệm phân biệt  
 $\Leftrightarrow$  PT:  $Ax^2 + Bx + C = 0$  (1) có hai nghiệm phân biệt khác  $-\frac{d}{c}$   
 $\Rightarrow$  điều kiện của  $m$  (\*)
- Khi đó,  $d$  cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $M(x_1; y_1)$  và  $N(x_2; y_2)$ . Theo định lý Viet ta có mối liên hệ giữa  $x_1$  và  $x_2$  ( $x_1$  và  $x_2$  là hai nghiệm của pt (1))
- Tính:  $MN^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Rightarrow$  kết quả của  $m$  để  $MN$  là nhỏ nhất

**Chú ý:** - Khi tính  $y_1$  và  $y_2$  ta thay  $x_1$  và  $x_2$  vào phương trình của đường thẳng  $d$

-  $\Delta OMN$  vuông  $\Leftrightarrow \overline{OM} \cdot \overline{ON} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

- Đối với đồ thị của hàm số  $(C): y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$  cách làm hoàn toàn tương tự

**Dạng 27:** Tìm giá trị của  $m$  để đường thẳng  $d: y = px + q$  cắt đồ thị  $(C): y = \frac{ax+b}{cx+d}$  tại hai điểm phân biệt thuộc cùng một nhánh của  $(C)$ .

**Cách giải**

- Xác định tiệm cận đứng của  $(C)$
- $d$  cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt thuộc cùng một nhánh của  $(C)$   
 $\Leftrightarrow$  PT:  $\frac{ax+b}{cx+d} = px+q$  có hai nghiệm phân biệt nằm về cùng một phía đối với TCD  
 $\Leftrightarrow$  PT:  $Ax^2 + Bx + C = 0$  (1) có hai nghiệm phân biệt khác  $-\frac{d}{c}$  và nằm về cùng một phía với TCD  
 $\Rightarrow$  kết quả của  $m$  (vận dụng điều kiện để hai điểm nằm cùng một phía đối với đường thẳng)

**Dạng 28:** Tìm giá trị của  $m$  để đường thẳng đồ thị  $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  cắt trục  $Ox$  tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

**Cách giải**

- Điều kiện cần:
  - Hoành độ các giao điểm  $x_1, x_2, x_3$  là nghiệm của PT:  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  (1)
  - Theo định lý Viet, ta có:  $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$  (2)
  - Do  $x_1, x_2, x_3$  lập thành một cấp số cộng, nên:  $x_1 + x_3 = 2x_2$ . Thay vào (2) ta được:  $x_2 = -\frac{b}{3a}$
  - Thay vào (1), ta được giá trị của  $m$
- Điều kiện đủ: Thử lại các giá trị của  $m$  vừa tìm được xem PT đã cho có 3 nghiệm hay không
- Kết luận: Đưa ra giá trị của  $m$

**Dạng 29:** Tìm giá trị của  $m$  để đường thẳng đồ thị  $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  cắt trục  $Ox$  tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số nhân.

**Cách giải**

- Điều kiện cần:
  - Hoành độ các giao điểm  $x_1, x_2, x_3$  là nghiệm của PT:  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  (1)
  - Theo định lý Viet, ta có:  $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$  (2)
  - Do  $x_1, x_2, x_3$  lập thành một cấp số nhân, nên:  $x_1x_3 = x_2^2$ . Thay vào (2) ta được:  $x_2 = -\sqrt[3]{\frac{d}{a}}$
  - Thay vào (1), ta được giá trị của  $m$
- Điều kiện đủ: Thử lại các giá trị của  $m$  vừa tìm được xem PT đã cho có 3 nghiệm hay không
- Kết luận: Đưa ra giá trị của  $m$

**Dạng 30:** Cho họ đường cong  $(C_m): y = f(x, m)$ , với  $m$  là tham số. Tìm điểm cố định mà họ đường cong trên đi qua với mọi giá trị của  $m$ .

**Cách giải**

- Gọi  $A(x_0; y_0)$  là điểm cố định của họ  $(C_m)$ . Khi đó ta có:  $y_0 = f(x_0, m), \forall m \Leftrightarrow Am + B = 0, \forall m$   

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ và } y_0 \Rightarrow \text{điểm cố định } A$$
- Kết luận các điểm cố định mà họ  $(C_m)$  luôn đi qua

**Dạng 31:** Cho họ đường cong  $(C_m): y = f(x, m)$ , với  $m$  là tham số. Tìm các điểm mà họ đường cong trên không đi qua với mọi giá trị của  $m$ .

**Cách giải**

- Gọi  $A(x_0; y_0)$  là điểm mà họ  $(C_m)$  không đi qua  $\forall m$ .
- Khi đó phương trình ẩn  $m: y_0 = f(x_0, m)$  vô nghiệm  $\Rightarrow$  điều kiện của  $x_0$  và  $y_0$

**Dạng 32:** Cho đồ thị (C):  $y = f(x)$ . Vẽ đồ thị của hàm số  $y = f(|x|)$

**Cách giải**

- Vẽ đồ thị của hàm số (C):  $y = f(x)$
- Ta có:  $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$
- Do đó, đồ thị của hàm số  $y = f(|x|)$  là hợp của hai phần:
  - Phần 1: là phần của đồ thị (C) nằm ở bên phải trục Ox
  - Phần 2: là phần đối xứng với phần 1 qua trục Ox

**Dạng 33:** Cho đồ thị (C):  $y = f(x)$ . Vẽ đồ thị của hàm số  $y = |f(x)|$

**Cách giải**

- Vẽ đồ thị của hàm số (C):  $y = f(x)$
- Ta có:  $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$
- Do đó, đồ thị của hàm số  $y = |f(x)|$  là hợp của hai phần:
  - Phần 1: là phần của đồ thị (C) bên trên trục Ox
  - Phần 2: là phần đối xứng với phần đồ thị (C) ở bên dưới trục Ox qua trục Ox

**Dạng 34:** Cho đồ thị (C):  $y = f(x)$ . Vẽ đồ thị của hàm số  $|y| = f(x)$

**Cách giải**

- Vẽ đồ thị của hàm số (C):  $y = f(x)$
- Ta có:  $|y| = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ y = f(x) \\ y = -f(x) \end{cases}$
- Do đó, đồ thị của hàm số  $|y| = f(x)$  là hợp của hai phần:
  - Phần 1: là phần của đồ thị (C) nằm bên trên trục Ox
  - Phần 2: là phần đối xứng với phần 1 qua trục Ox

**Dạng 35:** Cho đồ thị (C):  $y = f(x)$ . Vẽ đồ thị của hàm số  $y = f(x) = |u(x)| \cdot v(x)$

**Cách giải**

- Vẽ đồ thị của hàm số (C):  $y = f(x)$
- Ta có:  $y = \begin{cases} u(x) \cdot v(x) & \text{nếu } u(x) \geq 0 \\ -u(x) \cdot v(x) & \text{nếu } u(x) < 0 \end{cases}$
- Do đó, đồ thị của hàm số  $y = f(x) = |u(x)| \cdot v(x)$  là hợp của hai phần:
  - Phần 1: là phần của đồ (C) trên miền  $u(x) \geq 0$
  - Phần 2: là phần đối xứng với phần đồ thị (C) trên miền  $u(x) < 0$  qua trục Ox