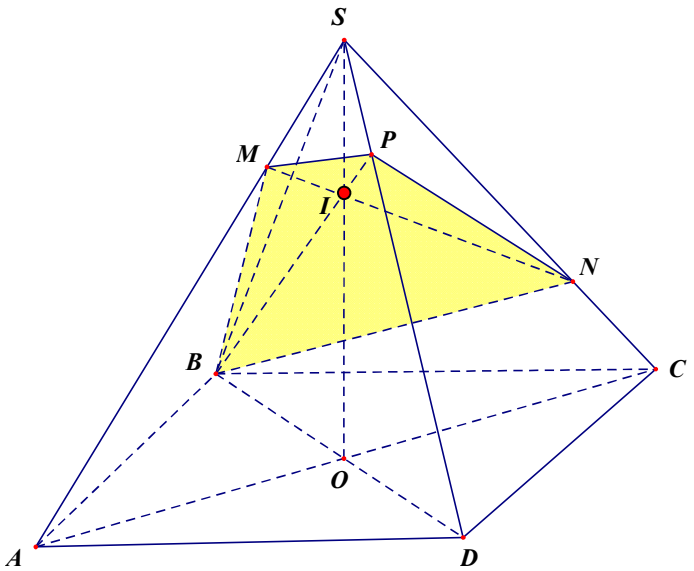
Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I là điểm thuộc đoạn SO sao cho $SI=\frac{1}{3}SO$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua B và I. (α) cắt các cạnh SA,SC,SD lần lượt tại M,N,P. Gọi m,n lần lượt là GTLN, GTNN của $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$. Tính $\frac{m}{n}$.

A. 2. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{9}{5}$. **D.** $\frac{8}{5}$.

Lời giải

Tác giả : Lưu Thị Thêm,Tên FB: Lưu Thêm

Chọn C



+) Đặt $\begin{cases}\frac{SA}{SM}=x\\ \frac{SC}{SN}=y\end{cases}$, $(x,y\ge 1)$.

+) Có $\frac{SB}{SB}+\frac{SD}{SP}=2\frac{SO}{SI}=2.3=6 \Rightarrow \frac{SD}{SP}=5$.

+) Có $x+y=2\frac{SO}{SI}=6 \Leftrightarrow y=6-x$, $1\le x\le 5$.

+) $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{x+1+y+5}{4.x.1.y.5}=\frac{12}{20xy}=\frac{3}{5xy}=\frac{3}{5x(6-x)}=\frac{3}{5(6x-x^2)}$.

+) Xét $f(x)=\frac{3}{5(6x-x^2)}$, với $1\le x\le 5$.

+) Có $f'(x)=\frac{3}{5}.\frac{2x-6}{(6x-x^2)^2}$.

+) $\begin{cases}f'(x)=0\\ 1<x<5\end{cases} \Leftrightarrow x=3$.

+) $f(1)=\frac{3}{25}$; $f(3)=\frac{1}{15}$; $f(5)=\frac{3}{25}$ $\Rightarrow \begin{cases} m=\frac{3}{25} \\ n=\frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{9}{5}$.

Email: Vqdethi@gmail.com

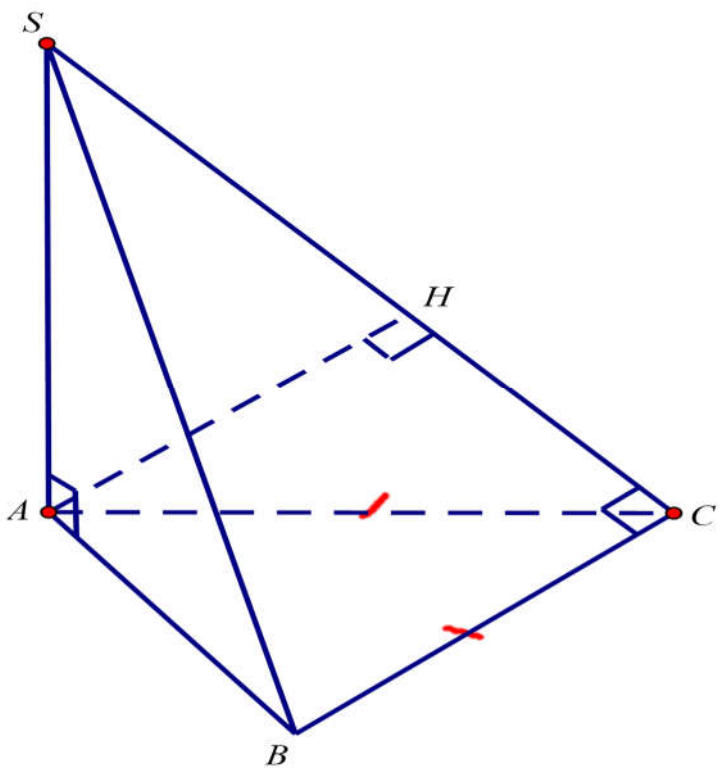
Câu 2. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$. Xác định độ dài cạnh AB để khối chóp $S.ABC$ có thể tích nhỏ nhất.

A. $AB=2a\sqrt{2}$. **B.** $AB=\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $AB=3a$. **D.** $AB=3a\sqrt{2}$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Văn Quý,Tên FB: Quybacninh

Chọn C



Ta có $\begin{cases} BC\perp AC \\ BC\perp SC \end{cases} \Rightarrow BC\perp(ASC)$.

Kẻ $AH\perp SC\Rightarrow AH=a\sqrt{3}$. Đặt $AC=x, SC=y\Rightarrow CH=\frac{x^2}{y}$.

$V_{S.ABC}=V_{A.SBC}=\frac{1}{3}AH.S_{\Delta BCS}$ đạt GTNN khi và chỉ khi $S_{\Delta BCS}=\frac{1}{2}xy$ đạt GTNN.

Do $BC\perp(SAC)\Rightarrow BC\perp SA$ mà $SA\perp AB$ (theo giả thiết) nên $SA\perp(ABC)$. Suy ra ΔSAC vuông tại A.

Trong ΔAHC có $AC^2-CH^2=AH^2\Leftrightarrow x^2-\frac{x^4}{y^2}=3a^2\Leftrightarrow y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3a^2}}\Rightarrow xy=\frac{x^3}{\sqrt{x^2-3a^2}}$

Xét hàm $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-3a^2}}\left(x>a\sqrt{3}\right)$. Có $f'(x)=\dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2-3a^2}}-\dfrac{x^4}{\left(\sqrt{x^2-3a^2}\right)^3}\left(x>a\sqrt{3}\right)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2=\dfrac{9a^2}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{3\sqrt{2}a}{2}$.

x	$a\sqrt{3}$		$\dfrac{3\sqrt{2}a}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$\dfrac{9a\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	

Vậy: $Min(xy)=\dfrac{9a\sqrt{3}}{2}$ khi $AB=x\sqrt{2}=3a$

Email: mp01100207@gmail.com

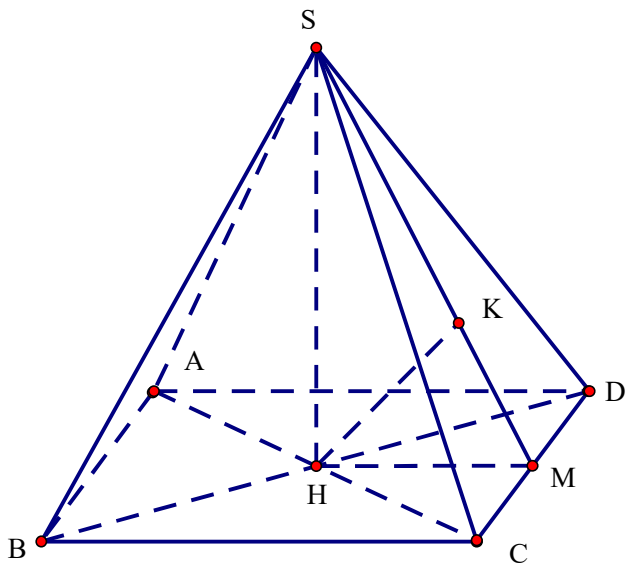
Câu 3. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng a, góc hợp bởi đường cao SH của hình chóp và mặt bên bằng α. Tìm α để thể tích $S.ABCD$ là lớn nhất.

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 75^0

Lời giải

Chọn B

Tác giả: Phúc Minh Anh,Tên FB: Phúc Minh Anh



Do hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên H là giao điểm của AC và BD

Gọi M là trung điểm của CD ta có $CD\perp(SHM)$ nên $(SHM)\perp(SCD)$ mà $(SHM)\cap(SCD)=SM$ nên từ H dựng $HK\perp SM$ tại K thì $HK\perp(SCD)$

Hay SK là hình chiếu của SH lên mặt phẳng (SCD) suy ra $(SH,(SCD))=\widehat{(SH,SK)}=\widehat{HSK}$ do tam giác SHK vuông tại K theo giả thiết ta có $\widehat{HSM}=\alpha$ với $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

Đặt $SH = h \Rightarrow HC^2 = a^2 - h^2 \Rightarrow HM = \sqrt{\dfrac{a^2 - h^2}{2}}$ và $BC = \sqrt{2(a^2 - h^2)}$

Tam giác SHM vuông tại H : $\tan\alpha = \dfrac{HM}{SH} = \dfrac{\sqrt{a^2 - h^2}}{\sqrt{2}h} \Leftrightarrow 2h^2\tan^2\alpha = a^2 - h^2$

$\Leftrightarrow h^2(1 + 2\tan^2\alpha) = a^2 \Rightarrow h = \dfrac{a}{\sqrt{1 + 2\tan^2\alpha}}$

$BC^2 = 2(a^2 - h^2) = 4h^2\tan^2\alpha = \dfrac{4a^2\tan^2\alpha}{1 + 2\tan^2\alpha} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}BC^2.SH = \dfrac{1}{3}\dfrac{4a^3\tan^2\alpha}{\sqrt{(1 + 2\tan^2\alpha)^3}}$

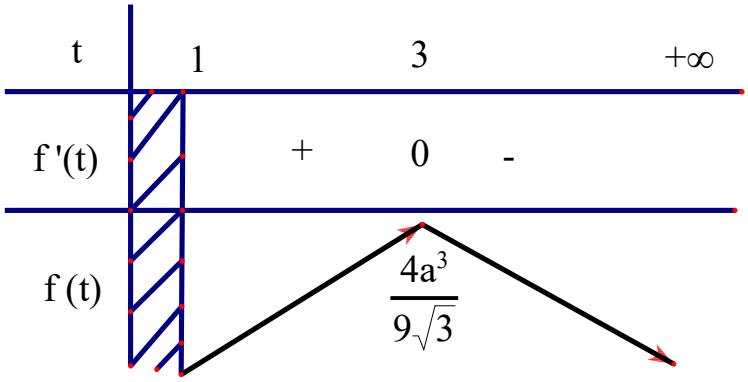
Đặt $t = 1 + 2\tan^2\alpha$ Với $t \in (1; +\infty) \Rightarrow \tan^2\alpha = \dfrac{t-1}{2}$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{2a^3}{3}.\dfrac{t-1}{t\sqrt{t}}$ trên $D = (1; +\infty)$

$f'(t) = \dfrac{a^3}{3}.\dfrac{\left(t\sqrt{t} - \dfrac{3}{2}\sqrt{t}(t-1)\right)}{t^3} = \dfrac{a^3}{3}.\dfrac{(3-t)}{2t^2\sqrt{t}}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$

Bảng biến thiên



Vậy $\max f(t) = \dfrac{4a^3}{9\sqrt{3}}$ khi $t = 3 \Rightarrow \tan\alpha = 1$ do $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ hay $\alpha = 45^0$.

Mail: *anhquanxl1979@gmail.com*

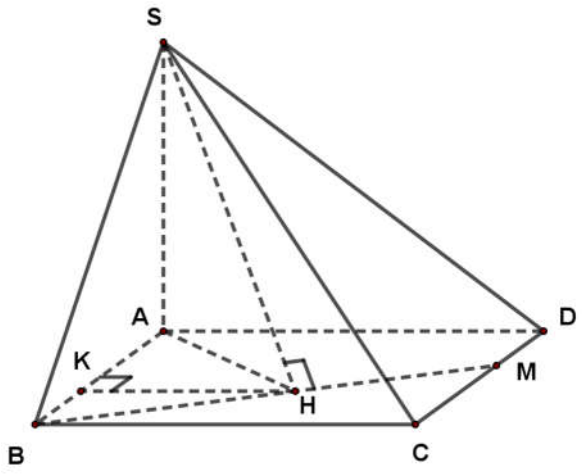
Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = b$ và vuông góc với $(ABCD)$. Điểm M thay đổi trên cạnh CD, H là hình chiếu vuông góc của S trên BM. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABH$ theo a, b.

A. $\dfrac{a^2b}{12}$. **B.** $\dfrac{a^2b}{24}$. **C.** $\dfrac{a^2b}{8}$. **D.** $\dfrac{a^2b}{18}$.

Tác giả: Nguyễn Anh Quân **Face: Nguyễn Quân**

Lời giải

Chọn A



Cách 1.

Do $\begin{cases} BH \perp SH \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAH) \Rightarrow BH \perp AH$, nên H thuộc đường tròn đường kính AB.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên cạnh AB. Dễ dàng suy ra được

Thể tích $V_{S.ABH} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABH} = \frac{1}{3}b.S_{\Delta ABH} = \frac{ab.HK}{6}$.

Do đó để thể tích lớn nhất thì HK lớn nhất. HK lớn nhất khi H là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$, tức là H trùng với tâm hình vuông $ABCD$ hay M trùng với D. Khi đó $HK = \frac{a}{2}$.

Vậy $V_{\max} = \frac{a^2b}{12}$.

Cách 2.

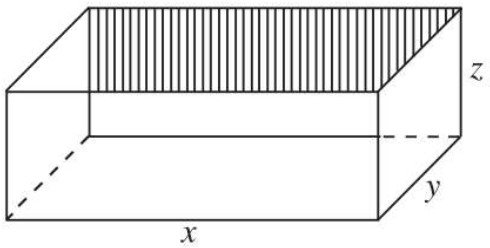
Do $\begin{cases} BH \perp SH \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAH) \Rightarrow BH \perp AH$

$$V_{S.ABH} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABH} = \frac{b}{6}HA.HB \le \frac{b}{6}.\frac{HA^2 + HB^2}{2} = \frac{b.AB^2}{12} = \frac{a^2b}{12}$$

Vậy $V_{\max} = \frac{a^2b}{12}$ khi $HA = HB \Leftrightarrow H$ trùng với tâm đáy, hay $M \equiv D$

Email: tc_ngduychien2006@yahoo.com

Câu 5. Gọi x, y, z là chiều dài, chiều rộng và chiều cao của thùng giấy dạng hình hộp chữ nhật không có nắp trên (*hình vẽ*). S là tổng diện tích xung quanh và đáy còn lại. Trong các thùng có cùng diện tích S, tìm tổng $x + y + z$ theo S của chiếc thùng có thể tích lớn nhất.



A. $x + y + z = \frac{\sqrt{3S}}{6}$.

B. $x + y + z = \frac{5\sqrt{3S}}{6}$.

C. $x+y+z=\frac{\sqrt{3S}}{3}$. **D.** $x+y+z=\frac{5\sqrt{3S}}{2}$.

Tác giả : Nguyễn Duy Chiến,Tên FB: Nguyễn Duy Chiến

Lời giải

Chọn B

Ta có $S=xy+2xz+2yz$

Theo Cauchy $\frac{xy+2xz+2yz}{3}\ge\sqrt[3]{4x^2y^2z^2}\Rightarrow\left(\frac{S}{3}\right)^3\ge 4x^2y^2z^2=4V^2\Rightarrow V\le\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{S}{3}\right)^3}$

Dấu "=" xảy ra khi $xy=2xz=2yz\Leftrightarrow x=y=2z=\sqrt{\frac{S}{3}}\Rightarrow x+y+z=\frac{5}{2}\sqrt{\frac{S}{3}}=\frac{5\sqrt{3S}}{6}$

Email: vannguyen300381@gmail.com

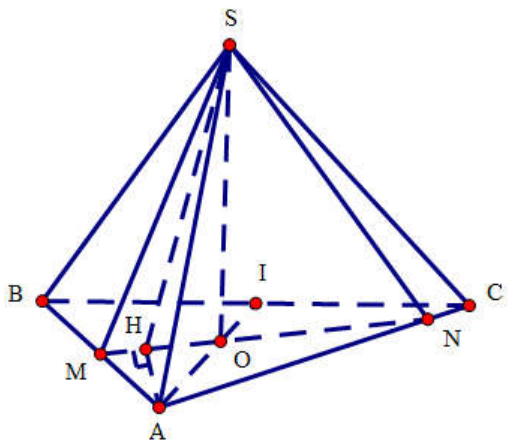
Câu 6. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ và O là tâm của đáy. Mặt phẳng (P) thay đổi chứa SO và cắt các đoạn thẳng AB, AC lần lượt tại các điểm M, N (M, N khác A). Khi góc tạo bởi đường thẳng SA và mặt phẳng (P) có số đo lớn nhất, hãy tính AM^2+AN^2

A. a^2. **B.** $\frac{3a^2}{4}$ **C.** $\frac{369a^2}{400}$. **D.** $\frac{8a^2}{9}$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Thị Vân Tên Facebook: Vân Nguyễn Thị

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của A trên MN, ta có $AH\perp MN, AH\perp SO\Rightarrow AH\perp(SMN)$

$\Rightarrow H$ là hình chiếu của A trên mặt phẳng (SMN)

$\Rightarrow$ Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SMN) là góc $\widehat{HSA}$

Do góc $0^0<\widehat{HSA}<90^0$ nên $\widehat{HSA}$ lớn nhất khi $\sin\widehat{HSA}$ lớn nhất

Ta có $\sin\widehat{HSA}=\frac{AH}{SA}\le\frac{OA}{SA}\le\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}\le\frac{1}{2}$

Vậy $\sin\widehat{HSA}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$ khi $H \equiv O$

Hay góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất khi $MN \perp AO$

Khi đó đường thẳng MN đi qua O và song song với BC

$\Rightarrow AM = AN = \frac{2}{3}a \Rightarrow AM^2 + AN^2 = \frac{8a^2}{9}$

Min - Max hình học không gian_Khai thác Tính chất hinh học_Nguyễn Đình Trưng

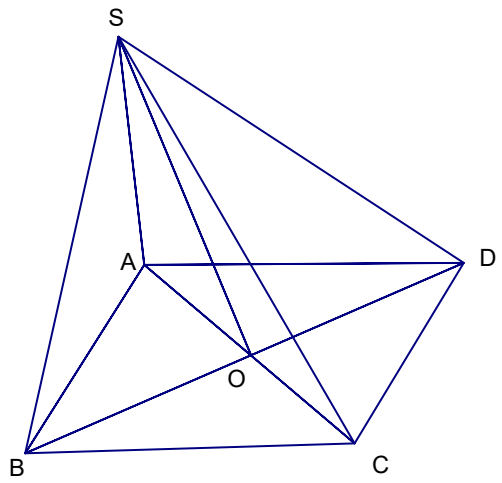
Email: trungthuy2005@gmail.com

Câu 7. Cho khối chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $SA = SB = SC = a$. Đặt $x = SD$ $\left(0 < x < a\sqrt{3}\right)$. Tìm x theo a để tích $AC.SD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $x = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Tác giả : Nguyễn Đình Trưng,Tên FB: Nguyễn Đình T-Rưng

Lời giải



Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh a nên $\Delta SOC = \Delta BOC \Rightarrow OS = OB = OD \Rightarrow$ tam giác SBD vuông tại S.

Suy ra $BD = \sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow OB = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{2}$;

$AC = 2OC = 2\sqrt{BC^2 - OB^2} = \sqrt{3a^2 - x^2}$. Do đó $AC.SD = x\sqrt{3a^2 - x^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si, ta có $x\sqrt{3a^2 - x^2} \le \frac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow AC.SD \le \frac{3a^2}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt{3a^2 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ thì tích $AC.SD$ đạt giá trị lớn nhất.

Email: nhatks@gmail.com

Câu 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) qua AK và cắt các cạnh SB , SD lần lượt tại

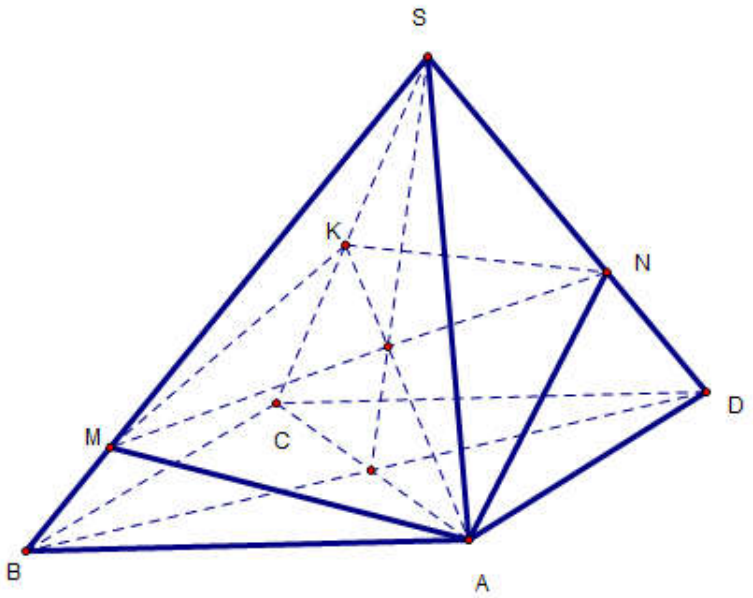
M và N. Đặt $V_1 = V_{S.AMKN}$, $V = V_{S.ABCD}$. Tìm $S = \max\frac{V_1}{V} + \min\frac{V_1}{V}$

A. $S = \frac{1}{2}$ **B.** $S = \frac{1}{4}$ **C.** $S = \frac{17}{24}$ **D.** $S = \frac{3}{4}$

Tác giả: Đỗ Thế Nhất Face: Đỗ Thế nhất

Lời giải

Chọn C



Đặt x = $\frac{SM}{SB}$, y= $\frac{SN}{SD}$. Tính $\frac{V_1}{V}$ theo x và y.

Ta có $\frac{V_{S.AMK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SK}{SC} = \frac{1}{2}x \Rightarrow V_{S.AMK} = \frac{x}{4}V$. Tương tự ta có $V_{S.ANK} = \frac{y}{4}V$

Suy ra $\frac{V_1}{V} = \frac{x+y}{4}(1)$

Lại có Do $V_1 = V_{S.AMN} + V_{S.MNK}$ và $V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = \frac{1}{2}V$. Mà

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD} = xy \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{xy}{2}V$$

$$\frac{V_{S.MNK}}{V_{S.BDC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}.\frac{SK}{SC} = \frac{xy}{2} \Rightarrow V_{S.MNK} = \frac{xy}{4}V$$

$\frac{V_{S.KMN}}{V_{S.CBD}}$

Suy ra $\frac{V_1}{V} = \frac{3xy}{4}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $y = \frac{x}{3x-1}$. Do x>0; y> 0 nên x>$\frac{1}{3}$

Vì $y \le 1 \Rightarrow \frac{x}{3x-1} \le 1 \Rightarrow x \ge \frac{1}{2}$. Vậy ta có $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

Xét hàm số f(x) = $\frac{V_1}{V} = \frac{3xy}{4} = \frac{3x^2}{4(3x-1)}$ với $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$. Có f'(x) = $\frac{3x(3x-2)}{4(3x-1)^2}$.

BBT:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$\frac{3}{8}$	↘	$\frac{1}{3}$	↗	$\frac{3}{8}$

Từ BBT suy ra $\min\frac{V_1}{V} = \frac{1}{3}; \max\frac{V_1}{V} = \frac{3}{8} \Rightarrow S = \frac{1}{3} + \frac{3}{8} = \frac{17}{24}$

Email: tiendv@gmail.com

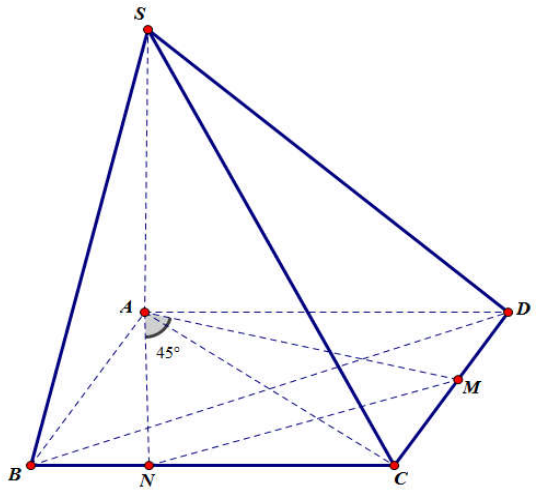
Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Kí hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 45°$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là ?

A. $\frac{\sqrt{2}+1}{9}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$.

Tác giả : Đào Văn Tiến

Lời giải

Chọn B



Đặt $DM = x$, $BN = y$ ta có

$\tan 45° = \tan\left(\widehat{DAM} + \widehat{BAN}\right) = \frac{\tan\widehat{DAM} + \tan\widehat{BAN}}{1 - \tan\widehat{DAM}.\tan\widehat{BAN}} = \frac{x+y}{1-xy}$. Suy ra $y = \frac{1-x}{1+x}$.

và $AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{x^2+1}$, $AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{1+y^2} = \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}$.

Vì vậy $V = \frac{1}{3}SA.S_{AMN} = \frac{1}{6}SA.AM.AN\sin 45° = f(x) = \frac{x^2+1}{6(x+1)} \geq f\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{3}$.

Email: thachtv.tc3@nghean.edu.vn

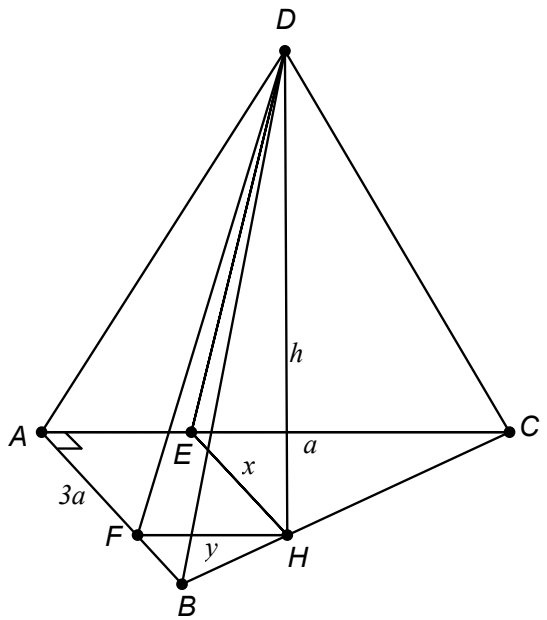
Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB = 3a, AC = a$. Mặt phẳng $(DBC),(DAC),(DAB)$ lần lượt tạo với mặt phẳng (ABC) các góc $90°, \alpha, \beta$ trong đó $\alpha + \beta = 90°$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\frac{3a^3}{13}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{10}$. **D.** $\frac{3a^3}{8}$.

Lời giải

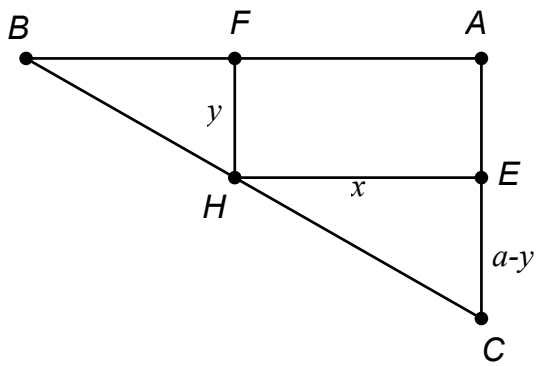
(Gv: Trịnh Văn Thạch, facebook: www.facebook.com/thachtv.tc3)

Chọn A



Kẻ $DH \perp BC$ tại H.

Do $(DBC) \perp (ABC) \Rightarrow DH \perp (ABC)$.



Kẻ $HE \perp AC$ tại E; $HF \perp AB$ tại F. Suy ra

Suy ra $\begin{cases} \alpha = ((DAC),(BCD)) = \widehat{DEH} \\ \beta = ((DAB),(BCD)) = \widehat{DFH} \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{DH}{HE} \\ \cot\beta = \dfrac{HF}{DH} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{h}{x} = \dfrac{y}{h} \Rightarrow h = \sqrt{xy}$

Mà $\dfrac{x}{3a} = \dfrac{a-y}{a} \Rightarrow x = 3(a-y) \Rightarrow h = \sqrt{xy} = \sqrt{3}\sqrt{y(a-y)} \le \sqrt{3}\dfrac{y+a-y}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow h_{\max} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $V_{\max} = \dfrac{1}{3}h_{\max}.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{3a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

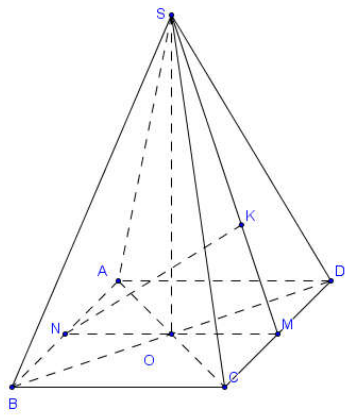
Email: Tanbaobg@gmail.com

Câu 11. Cho khối chóp tứ giác đều S.ABCD mà khoảng cách từ đỉnh A đến mp(SCD) bằng $2a$. Gọi α là góc giữa mặt bên hình chóp với đáy của hình chóp đó. Với giá trị nào của α thì thể tích của khối chóp S.ABCD đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $\alpha = \arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **B.** $\alpha = 45^0$. **C.** $\alpha = \arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **D.** $\alpha = 60^0$.

Lời giải

Họ và tên: Đỗ Tấn Bảo Tên FB: Đỗ Tấn Bảo



Chọn A

Gọi O là tâm hình vuông ABCD thì SO vuông góc với (ABCD) và SO là chiều cao của khối chóp S.ABCD.

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Suy ra CD $\perp$ (SMN).

Gọi K là hình chiếu của N lên SM. Suy ra MK $\perp$ (SCD) nên $NK = d(N,(SCD))$.

Từ AB || CD suy ra AB || (SCD). Do đó $NK = d(A,(SCD)) = 2a$.

Ta lại có $\begin{cases} CD \perp MN \\ CD \perp SM \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right) = \alpha$.

Do đó $MN = \dfrac{NK}{\sin\alpha} = \dfrac{2a}{\sin\alpha} \Rightarrow SO = OM.\tan\alpha = \dfrac{a}{\cos\alpha}$.

Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{3}MN^2.SO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{4a^2}{\sin^2\alpha}.\dfrac{a}{\cos\alpha} = \dfrac{4a^3}{3\sin^2\alpha\cos\alpha}$.

Vì vậy $V_{S.ABCD}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow f(\alpha) = \sin^2\alpha\cos\alpha$ lớn nhất, với $0^0 < \alpha < 90^0$.

Đặt $t = \cos\alpha, 0 < t < 1$ thì $V_{S.ABCD}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow f(t) = (1-t^2)t = t - t^3$ lớn nhất với $0 < t < 1$.

Dựa vào bảng biến thiên thì $V_{S.ABCD}$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \alpha=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Email: Tanbaobg@gmail.com

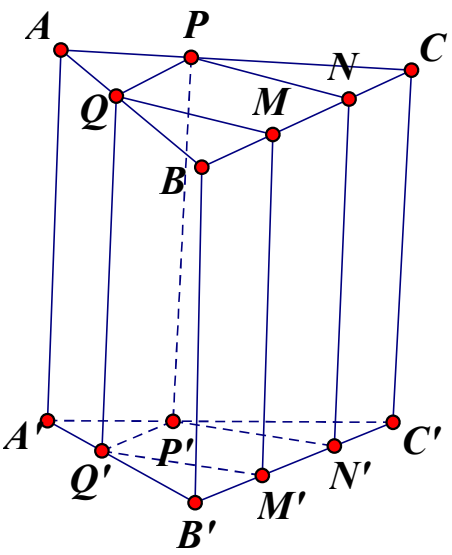
Câu 12. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a . Lấy các điểm M,N nằm trên cạnh BC ; P,Q lần lượt nằm trên cạnh AC,AB sao cho $MNPQ$ là hình chữ nhật. Hình hộp chữ nhật $MNPQ.M'N'P'Q'$ nội tiếp trong lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có thể tích lớn nhất là :

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^3}{8}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

Tác giả : Lê Thị Phương Liên facebook : Phuonglien Le

Lời giải

Chọn C



Gọi độ dài đoạn MN là x với $(0<x<a)$ thì $MQ=\frac{(a-x)\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích của hình hộp chữ nhật $MNPQ.M'N'P'Q'$ là $V=\frac{ax(a-x)\sqrt{3}}{2}$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{a\sqrt{3}x(a-x)}{2}$ có $f'(x)=\frac{a\sqrt{3}}{2}(a-2x)$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{a}{2}$

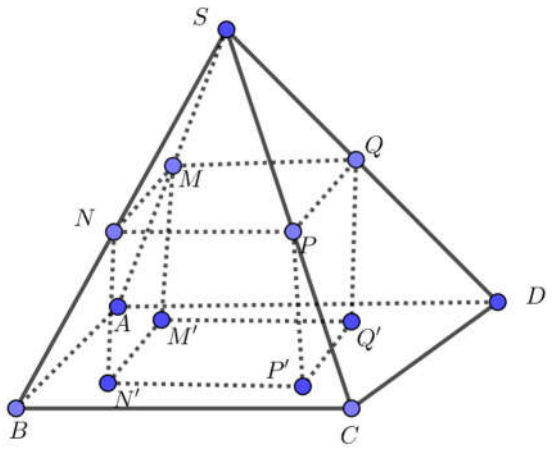
Vậy thể tích lớn nhất của hình hộp chữ nhật $MNPQ.M'N'P'Q'$ là $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. Nên chọn C

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$. Một mặt phẳng song song mặt đáy cắt các cạnh $SA;SB;SC;SD$ lần lượt tại M,N,P,Q. Gọi M',N',P',Q' lần lượt là hình chiếu của M,N,P,Q lên mặt đáy. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa điện $MNPQ.M'N'P'Q'$ lớn nhất.

A. $\frac{SM}{SA}=\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{SM}{SA}=\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{SM}{SA}=\frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn **B**



Đặt $\frac{SM}{SA}=x$. Suy ra $\frac{SN}{SB}=\frac{SP}{SC}=\frac{SQ}{SD}=x$.

Gọi h,h' lần lượt là chiều cao hình chóp và chiều cao khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$.

Do $MN//AB$ nên ta có $\frac{SM}{SA}=\frac{MN}{AB}\Leftrightarrow x=\frac{MN}{AB}\Leftrightarrow MN=x.AB$.

Tương tự ta có $BC=x.NP$

Ta có $S_{MNP}=x^2.S_{ABC}\Leftrightarrow S_{MNPQ}=x^2S_{ABCD}$ (Vì tam giác ΔMNP đồng dạng tam giac ABC)

Mặt khác ta có $\frac{AM}{AS}=\frac{h'}{h}$

$\Leftrightarrow \frac{SA-SM}{SA}=\frac{h'}{h}$

$\Leftrightarrow 1-x=\frac{h'}{h}\Leftrightarrow h'=(1-x)h$

Ta có $V_{MNPQ.M'N'P'Q'}=h'.S_{MNPQ}=(1-x)h.x^2.S_{ABCD}=(1-x)x^2.h.S_{ABCD}$

Do h,S_{ABCD} không thay đổi nên $V_{MNPQ.M'N'P'Q'}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $(1-x)x^2$ đạt lớn nhất.

Ta có $(1-x)x^2=4.(1-x)\frac{x}{2}\frac{x}{2}\le 4.\frac{\left(1-x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)^3}{27}=\frac{4}{27}$

Dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $1-x=\frac{x}{2}\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

Tvluatc3tt@gmail.com

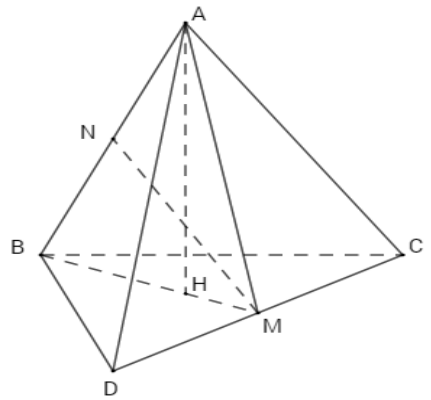
Câu 14. Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB=x$, các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x=\sqrt{6}$. **B.** $x=\sqrt{14}$. **C.** $x=3\sqrt{2}$. **D.** $x=2\sqrt{3}$.

Giáo viên: Trần Luật *Facebook: Trần Luật*

Lời giải

Chọn C



Gọi M , N lần lượt là trung điểm CD và AB ; H là hình chiếu vuông góc của A lên BM .

Ta có: $\begin{cases} CD \perp BM \\ CD \perp AM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABM) \Rightarrow (ABM) \perp (BCD)$.

Mà $AH \perp BM; BM = (ABM) \cap (BCD)$; $AH \perp (BCD)$.

Do ACD và BCD là hai tam giác đều cạnh $2\sqrt{3}$ $\Rightarrow AM = BM = 2\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$.

Tam giác AMN vuông tại N , có: $MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{9 - \dfrac{x^2}{4}}$.

Mặt khác ta lại có:

$S_{BCD} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 3\sqrt{3}$.

$V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}AH.S_{BCD} = \dfrac{1}{3}\dfrac{x\sqrt{36-x^2}}{6}.3\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}x\sqrt{36-x^2}$.

Ta có: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}AH.S_{BCD} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}x\sqrt{36-x^2} \le \dfrac{\sqrt{3}}{6}.\dfrac{x^2+36-x^2}{2} = 3\sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = \sqrt{36-x^2} \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$.

Vậy V_{ABCD} lớn nhất bằng $3\sqrt{3}$ khi $x = 3\sqrt{2}$.

Email: Tinh.danlapts@gmail.com

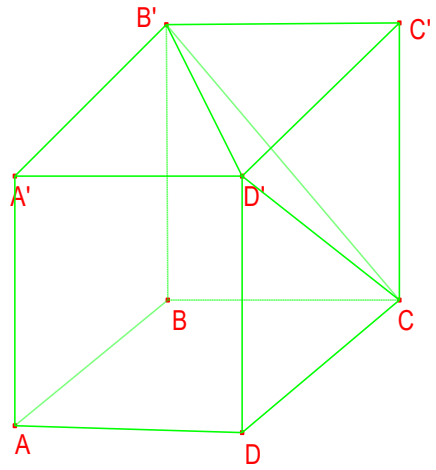
Câu 15. Cho lăng trụ tứ giác đều *ABCD.A'B'C'D'* cạnh đáy bằng 1, chiều cao bằng *x*. Tìm *x* để góc tạo bởi *B'D* và (*B'D'C*) đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = 1$ **B.** $x = 0,5$ **C.** $x = 2$ **D.** $x = \sqrt{2}$

Lời giải

Tác giả: Nguyen Van Tỉnh FP: Duongtinhnguyen

Chọn A



Gọi H là hình chiếu của D lên mặt phẳng (B'D'C) suy ra $\sin(B'D,(B'D'C)) = \frac{DH}{B'D} = \frac{DH}{\sqrt{2+x^2}}$

Mặt khác $DH = d(C';(B'D'C)) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$ (Sử dụng đường cao trong tam diện vuông C'B'D'C).

$$\sin(B'D,(B'D'C)) = \frac{DH}{B'D} = \frac{DH}{\sqrt{2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{(x^2+2)(2x^2+1)}} = \sqrt{\frac{x^2}{2x^4+5x^2+1}}$$

Góc lớn nhất khi $\sin(B'D,(B'D'C))$ lớn nhất. Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{2t^2+5t+1} \Rightarrow f'(t) = \frac{-2t^2+2}{(2t^2+5t+1)^2}$

f(t) lớn nhất khi t = 1 suy ra x = 1.

Email: nhuthanh3112@gmail.com

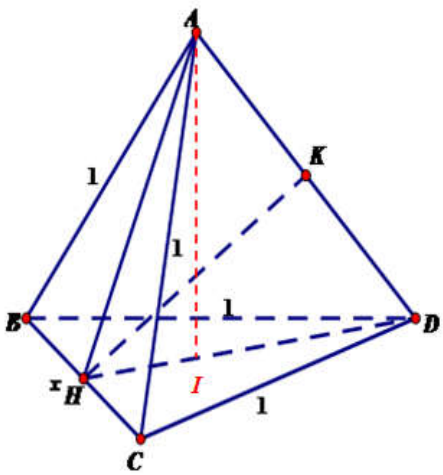
Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = BD = CD = 1$. Khi thể tích của khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất thì khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Tác giả : Trần Như Thanh Nhã, FB: Nhã Trần Như Thanh

Chọn D



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BC và AD.

Theo giả thiết: ΔABC cân tại A và ΔDBC cân tại D

$BC \perp AH$, $BC \perp DH \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp HK$

Và $AH = DH \Rightarrow AD \perp HK$ Do đó: $d(AD;BC) = HK$

Đặt $BC = x$ $(0 < x < 2)$.

$$AH = DH = \sqrt{DC^2 - HC^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

Gọi I là hình chiếu của A lên $HD \Rightarrow AI \perp (BCD)$

$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{\Delta BCD}.AI \le \frac{1}{3}.\frac{1}{2} BC.DH.AH$; (vмAI $\le AH$) $\Rightarrow V_{ABCD} \le \frac{1}{6}x.\frac{1}{4}(4-x^2)$

Xét hàm số $f(x) = x(4-x^2) = -x^3 + 4x$ trкn $(0;2)$; $f'(x) = -3x^2 + 4$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow V_{\max} \Leftrightarrow \begin{cases} I \equiv H \\ x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AH \perp (BCD) \\ DH = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

ΔAHD vuông cân tại H $\Rightarrow HK = DH\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Email: nhuthanh3112@gmail.com

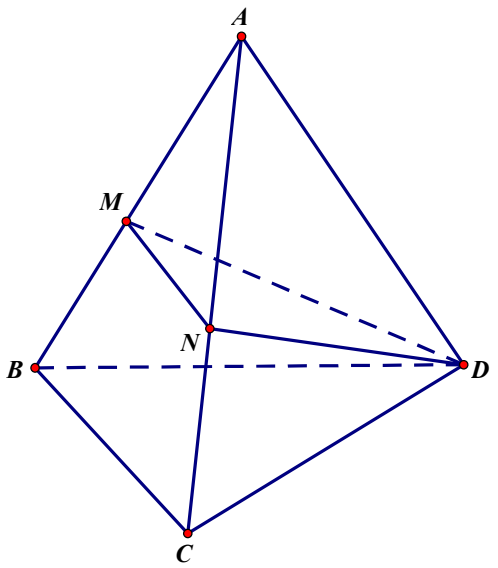
Câu 17. Cho tứ diện đều ABCD có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Đặt $AM = x; AN = y$. Tìm x, y để diện tích toàn phần của tứ diện DAMN nhỏ nhất.

A. $x = y = \frac{2}{3}$ **B.** $x = y = \frac{1}{3}$ **C.** $x = y = \frac{7}{4}$ **D.** $x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn A

Tác giả : Nguyễn Trung Nghĩa



+ Ta có $S_{\Delta AMN} = S_{\Delta AHM} + S_{\Delta AHN} \leftrightarrow xy = \frac{x+y}{3} (0 \le x \le 1)$

+ Theo bất đẳng thức cô si $3xy = x + y \ge 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy \ge \frac{4}{9}$

+ Ta có $S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}AN.AM\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}xy}{4}$

$S_{\Delta AMD}=\frac{1}{2}AD.AM\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}x}{4}$

$S_{\Delta AND}=\frac{1}{2}AD.AN\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}y}{4}$

+ Ta có $DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{\frac{2}{3}};MN^2=x^2+y^2-xy=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(x+y)^2-3xy}$

Vậy $S_{tp}=\frac{\sqrt{3}xy}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}(x+y)+\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{(x+y)^2-3xy}=\sqrt{3}xy+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3(xy)^2-3xy}.$

Đặt $1\ge t=xy\ge\frac{4}{9}$ Ta thu được giá trị nhỏ nhất của diện tích toàn phần đạt được khi $t=xy=\frac{4}{9}$, tức là $x=y=\frac{2}{3}$

Email: buinguyenphuong1991@gmail.com

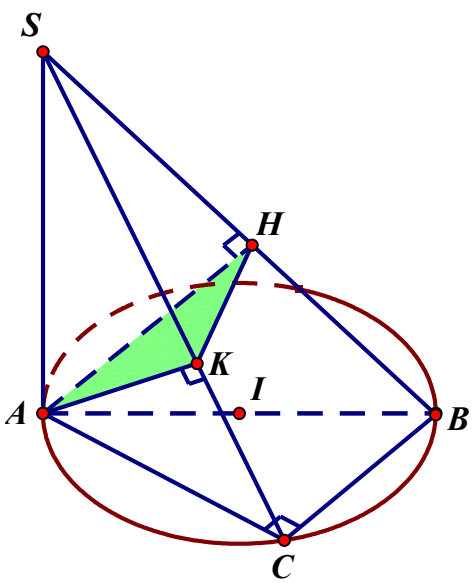
Câu 18. Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn (T) đường kính $AB=2R$. Gọi C là một điểm di động trên (T). Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (α) lấy điểm S sao cho $SA=R$. Hạ $AH\perp SB$ và $AK\perp SC$. Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích tứ diện $SAHK$.

A. $V_{\max}=\frac{R^3\sqrt{5}}{75}$. **B.** $V_{\max}=\frac{R^3\sqrt{5}}{25}$. **C.** $V_{\max}=\frac{R^3\sqrt{3}}{27}$. **D.** $V_{\max}=\frac{R^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Nguyên Phương,Tên FB: Bùi Nguyên Phương

Chọn A



Do $SH\perp(AHK)$ nên tứ diện $SAHK$ có chiều cao SH không đổi. Do đó thể tích V_{SAHK} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi diện tích S_{AHK} đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $BC\perp(SAC)\Rightarrow BC\perp AK$. Mà $AK\perp SC\Rightarrow AK\perp(SBC)\Rightarrow AK\perp KH$.

Do điểm K luôn nhìn đoạn thẳng AH cố định dưới một góc vuông nên ΔAHK có diện tích lớn nhất khi K là điểm chính giữa nửa cung tròn đường kính AH (có hai vị trí của K).

Ta có: $SB^2 = SA^2 + AB^2 = R^2 + 4R^2 = 5R^2 \Rightarrow SB = R\sqrt{5}$.

Xét ΔSAB vuông tại A có: $SA^2 = SH.SB \Rightarrow SH = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{R^2}{R\sqrt{5}} = \dfrac{R\sqrt{5}}{5}$

Và: $AH.SB = SA.AB \Rightarrow AH = \dfrac{SA.AB}{SB} = \dfrac{R.2R}{R\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}R}{5}$.

Diện tích lớn nhất của ΔAHK là: $S_{\max} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{AH}{2}.AH = \dfrac{AH^2}{4} = \dfrac{R^2}{5}$.

Vậy: $V_{\max} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{\max} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{R\sqrt{5}}{5}.\dfrac{R^2}{5} = \dfrac{R^3\sqrt{5}}{75}$.

sptoanchien@gmail.com

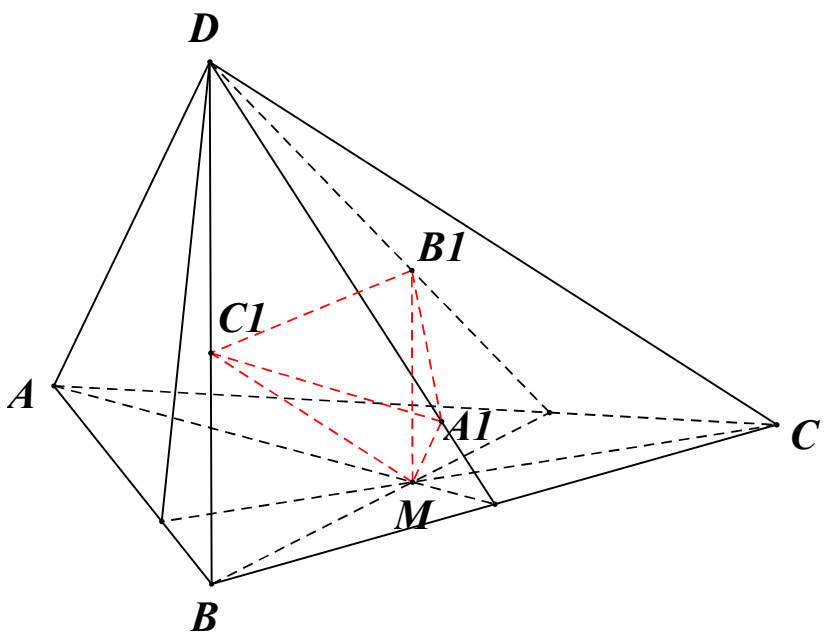
Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = DC = 6$ và đôi một vuông góc với nhau. Điểm M thay đổi trong tam giác ABC. Các đường thẳng đi qua M song song DA, DB, DC theo thứ tự cắt các mặt phẳng $(DBC),(DCA),(DAB)$ lần lượt tại $A_1; B_1; C_1$. Tìm thể tích lớn nhất của khối tự diện $MA_1B_1C_1$ khi M thay đổi.

A. $\dfrac{1}{3}$ **B.** $\dfrac{2}{3}$ **C.** 1 **D.** $\dfrac{4}{3}$

Lời giải

Tác giả: Trần Văn Minh Chiến Tên FB: Hung Ho

Chọn D



Ta có $\dfrac{V_{MBCD}}{V_{ABCD}} = \dfrac{d(M,(BCD))}{d(A,(BCD))} = \dfrac{MA_1}{AD} = \dfrac{MA_1}{6}$. Tương tự $\dfrac{V_{MADC}}{V_{ABCD}} = \dfrac{MB_1}{6}; \dfrac{V_{MABD}}{V_{ABCD}} = \dfrac{MC_1}{6}$

Suy ra $MA_1 + MB_1 + MC_1 = 6$. Mặt khác $MA_1; MB_1; MC_1$ đôi một vuông góc nên

$$V_{MA_1B_1C_1} = \frac{1}{6}MA_1.MB_1.MC_1 \le \frac{1}{6}\left(\frac{MA_1 + MB_1 + MC_1}{3}\right)^3 = \frac{4}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi M là trọng tâm tam giác ABC.

Bình luận: ***Bài này hoàn toàn có thể làm mạnh giả thiết bằng cách chỉ cần cho tứ diện*** $ABCD$ ***có thể tích bằng*** 36. ***Kết quả bài toán không thay đổi.***

Email: dangvietdong.ninhbinh.vn@gmail.com

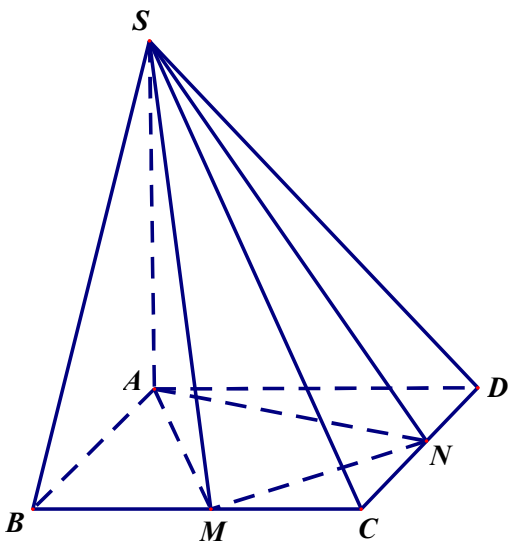
Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. M và N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc các cạnh BC và DC sao cho $\widehat{MAN} = 45^0$. Tính tỉ số giữa giá trị lớn nhất với giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMN$.

A. $-2+2\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{6}$. **D.** $2\sqrt{2}-1$.

Lời giải

Tác giả: Đặng Việt Đông Tên FB: Đặng Việt Đông

Chọn B



Ta có $V_{S.AMN} = \dfrac{1}{3}SA.S_{AMN} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.S_{AMN}$.

Do M, N là 2 điểm di động và SA cố định nên thể tích của khối chóp $SAMN$ phụ thuộc vào diện tích tam giác AMN.

Ta có các cách tính diện tích tam giác AMN như sau:

Cách 1.

Đặt $BM = x, DN = y; x, y \in [0;a]$.

Tam giác CMN vuông tại C nên

$MN^2 = CM^2 + CN^2$ hay $MN^2 = (a-x)^2 + (a-y)^2$.

Áp dụng định lý hàm số cosin cho tam giác AMN ta có

$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM.AN\cos\widehat{MAN} \Rightarrow MN^2 = 2a^2 + x^2 + y^2 - \sqrt{2(a^2+x^2)(a^2+y^2)}$

Suy ra $(a-x)^2 + (a-y)^2 = 2a^2 + x^2 + y^2 - \sqrt{2(a^2+x^2)(a^2+y^2)}$

$\Leftrightarrow (ax+ay)^2 = (a^2-xy)^2 \Leftrightarrow ax+ay = a^2 - xy \Leftrightarrow y = \dfrac{a^2-ax}{a+x}$.

Diện tích tam giác AMN là

$S_{AMN} = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{ADN} - S_{CMN} = \frac{1}{2}\left(a^2 - xy\right) = \frac{a}{2}.\frac{a^2 + x^2}{x + a}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 + a^2}{x + a}$ trên đoạn $[0;a]$.

Ta có $f'(x) = \frac{x^2 + 2ax - a^2}{(x+a)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \left(\sqrt{2} - 1\right)a$.

Ta lại có $f(0) = f(a) = a; f\left(\left(\sqrt{2} - 1\right)a\right) = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)a$.

Suy ra $\max\limits_{[0;a]} f(x) = a; \min\limits_{[0;a]} f(x) = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)a \Rightarrow a^2(\sqrt{2} - 1) \le S_{\triangle AMN} \le \frac{a^2}{2}$

Vậy tỉ số giữa giá trị lớn nhất với giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMN$ bằng $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$

Cách 2:

Đặt $\widehat{DAN} = \varphi \Rightarrow \widehat{MAB} = 45^\circ - \varphi$

Ta có:

$AM = \frac{a}{\cos(45^0 - \varphi)}$, $AN = \frac{a}{\cos\varphi}$

$$\Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2}AM.AN.\sin 45^0 = \frac{1}{2}\frac{a^2}{\cos\varphi.\cos(45^0 - \varphi)}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{2a^2}{\cos 45^0 + \cos(45^0 - 2\varphi)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{a^2}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(45^0 - 2\varphi)}$$

Mặt khác: $0 \le \cos(45^0 - 2\varphi) \le 1 \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2} = a^2(\sqrt{2} - 1) \le S_{\triangle AMN} \le \frac{a^2}{2}$

Cách 3:

Đặt $\begin{cases} BM = x \\ BN = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM^2 = x^2 + a^2 \\ AN^2 = y^2 + a^2 \end{cases} \Rightarrow MN^2 = (a - x)^2 + (a - y)^2$

Theo định lý cosin ta có :

$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM.AN.\cos 45^0 \Leftrightarrow a^2 - xy = a(x + y)$

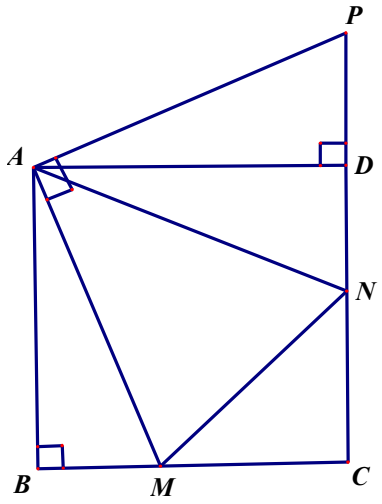
$$\Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2}AM.AN.\sin 45^0 = \frac{a^2 - xy}{2}$$

Đặt : $\sqrt{xy} = t \ge 0 \Rightarrow a^2 - t^2 \ge 2at \Leftrightarrow t \in \left[0;(\sqrt{2} - 1)a\right]$

$$\Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{a^2 - t^2}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{\triangle AMN_{\max}} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow t = 0 \\ S_{\triangle AMN_{\min}} = a^2(\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow t = a(\sqrt{2} - 1) \end{cases}$$

Cách 4. (Hình học thuần túy)



Dựng đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng DC tại P, khi đó ta chứng minh được $\Delta AMN = \Delta ANP \Rightarrow MN = NP$ và $BM + CN = MN \Rightarrow MN + NC + CM = 2a$ Vì $MN \le MC + CN$ và $MN = \sqrt{MC^2 + CN^2} \ge \sqrt{\frac{1}{2}}\left(MC + CN\right)$ từ đó suy ra $2\left(\sqrt{2} - 1\right)a \le MN \le a$

Email: phuongnamthptqx1@gmail.com

Câu 21. Một người thợ gò làm một cái thùng đựng nước dạng hình hộp chữ nhật có nắp bằng tôn. Biết rằng đường chéo hình hộp bằng $6dm$ và chỉ được sử dụng vừa đủ $36dm^2$ tôn.Với yêu cầu như trên người thợ làm được cái thùng có thể tích lớn nhất là Vdm^3. Giá trị của V gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A. $11,3$. **B.** $11,32$. **C.** $11,31$. **D.** $11,33$.

Lời giải.

Tác giả: Trần Văn Nam,Tên FB: Trần Văn Nam

Chọn C

Gọi kích thước của khối hộp là $x, y, z\ (x, y, z \ge 0)$ theo bài ra ta có

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 36 \\ xy + yz + zx = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 6\sqrt{2} \\ xy + yz + zx = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6\sqrt{2} - z \\ xy = 18 - \left(6\sqrt{2} - z\right)z \end{cases}$$

Ta có $\left(6\sqrt{2} - z\right)^2 \ge 72 - 4\left(6\sqrt{2} - z\right)z \Rightarrow z \in \left[0; 4\sqrt{2}\right]$

Thể tích: $xyz = z^3 - 6\sqrt{2}z^2 + 18z = f(z)$

$f'(z) = 3z^2 - 12\sqrt{2}z + 18; f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{2}; z = 3\sqrt{2}$

Khi đó $\underset{\left[0;4\sqrt{2}\right]}{Max} f(x) = Max\left\{f(0), f(\sqrt{2}), f(3\sqrt{2}), f(4\sqrt{2})\right\} = \left\{f(\sqrt{2}), f(4\sqrt{2})\right\} = 8\sqrt{2} \approx 11,31$

Vậy thể tích lớn nhất của thùng $8\sqrt{2} \approx 11,31$ khi $(x; y; z) = (\sqrt{2}; \sqrt{2}; 4\sqrt{2})$ và các hoán vị của nó.

Email: phuongnamthptqx1@gmail.com

Câu 22. Gọi V là thể tích nhỏ nhất của khối chóp tứ giác đều trong số các khối chóp tứ giác đều có khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau gồm một đường thẳng chứa một đường chéo của đáy và đường thẳng chứa một cạnh bên hình chóp bằng $\sqrt{3}$.Khi đó V bằng bao nhiêu?

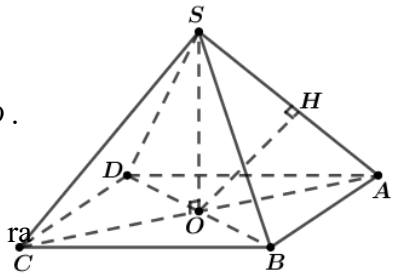
A. $V=3$. **B.** $V=9$. **C.** $V=9\sqrt{3}$. **D.** $V=27$.

Lời giải.

Tác giả: Trần Văn Nam „Tên FB: Trần Văn Nam

Chọn B

Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đặt $AB=x$, $SO=h$. Với O là tâm của hình vuông $ABCD$ $\Rightarrow SO\perp(ABCD)$. Qua O kẻ đường thẳng OH vuông góc với SA với $H\in SA$.



Ta có $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp SO \end{cases} \Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp OH.$

Suy ra OH là đoạn vuông góc chung của SA và BD.

Theo bài ra, ta có $d=d(SA,BD)=OH\longrightarrow OH=\sqrt{3}$.

Tam giác SAO vuông tại O, có đường cao OH suy ra

$\frac{1}{3}=\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OA^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{2}{x^2}$.

Lại có $\frac{1}{3}=\frac{1}{h^2}+\frac{2}{x^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\underset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{1}{h^2}.\frac{1}{x^4}}\Leftrightarrow hx^2\geq 27$.

Vậy $V_{ABCD}=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}hx^2\geq 9\Rightarrow V=9$

Tác giả: Trần Văn Nam,,Tên FB: Trần Văn Nam

Gmail: inh.thpthauloc2@gmail.com

(Họ tên : Phạm Văn Bình,,Tên FB: Phạm văn Bình)

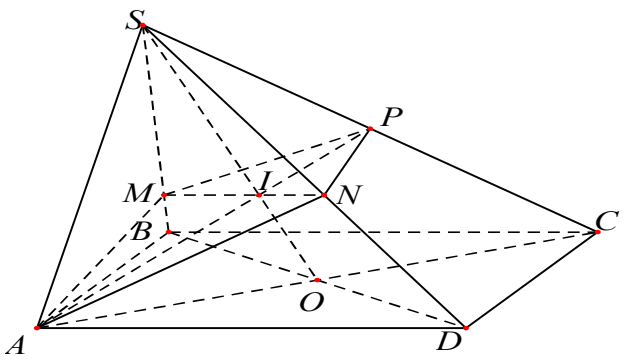
Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích là V. Điểm P là trung điểm của SC. Mặt phẳng (α) qua AP cắt hai cạnh SB và SD lần lượt tại M và N. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỷ số $\frac{V_1}{V}$?

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1



Đặt $a=\frac{SM}{SB}$, $b=\frac{SN}{SD}$, $(0<a;b\leq 1)$.

Ta có $\frac{V_1}{V}=\frac{V_{S.AMP}+V_{S.ANP}}{V}=\frac{V_{S.AMP}}{2V_{S.ABC}}+\frac{V_{S.ANP}}{2V_{S.ADC}}=\frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SB}.\frac{SP}{SC}+\frac{SN}{SD}.\frac{SP}{SC}\right)=\frac{1}{4}(a+b)$ (1)

Lại có $\frac{V_1}{V}=\frac{V_{S.AMN}+V_{S.PMN}}{V}=\frac{V_{S.AMN}}{2V_{S.ABD}}+\frac{V_{S.PMN}}{2V_{S.CBD}}=\frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}+\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}.\frac{SP}{SC}\right)=\frac{3}{4}ab$ (2).

Suy ra $\frac{1}{4}(a+b)=\frac{3}{4}ab \Leftrightarrow a+b=3ab \Rightarrow b=\frac{a}{3a-1}$. Từ điều kiện $(0<b\le 1)$, ta có $\frac{a}{3a-1}\le 1$, hay $a\ge\frac{1}{2}$.

Thay vào (2) ta được tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V}=\frac{3}{4}.\frac{a^2}{3a-1}$.

Đặt $f(a)=\frac{3}{4}.\frac{a^2}{3a-1};a\in\left[\frac{1}{2};1\right]$, ta có $f'(a)=\frac{3}{4}.\frac{3a^2-2a}{(3a-1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0(L)\\ a=\frac{2}{3}\end{array}\right.$.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)=\frac{3}{8};f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$, do đó $Min\frac{V_1}{V}=\underset{a\in\left[\frac{1}{2};1\right]}{Min}f(a)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

Cách 2 : (Tham khảo ý kiến Cô Lưu Thêm)

Từ giả thiết và cách dựng thiết diện ta có :

$a=\frac{SA}{SA}=1;b=\frac{SB}{SM};c=\frac{SC}{SP}=2;d=\frac{SD}{SN}\Rightarrow a+c=b+d=3$

Khi đó $\frac{V_1}{V}=\frac{a+b+c+d}{4a.b.c.d}=\frac{6}{4.1.2.bd}=\frac{3}{4b.d}\ge\frac{3}{4\left(\frac{b+d}{2}\right)^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{V_1}{V}\ge\frac{1}{3}$

$\Rightarrow Min\frac{V_1}{V}=\frac{1}{3}$

Email: lamdienan@gmail.com

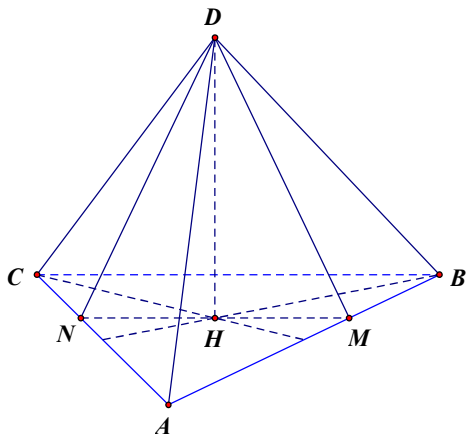
Câu 24. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi S là diện tích toàn phần của tứ diện $DAMN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của S ?

A. $\frac{\sqrt{3}(4+\sqrt{2})}{9}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}+2}{4}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}{9}$.

Lời giải

Tác giả : Lâm Điền An,Tên FB: Lâm Điền An

Chọn A



Kẻ $DH \perp MN$, do $(DMN) \perp (ABC)$ suy ra $DH \perp (ABC)$.

Mà $ABCD$ là tứ diện đều, nên suy ra H là trọng tâm của tam giác đều ABC.

Diện tích toàn phần của tứ diện $DAMN$:

$$S = S_{AMD} + S_{AND} + S_{DMN} + S_{AMN} = \frac{1}{2}AD.AM.\sin 60^0 + \frac{1}{2}AD.AN.\sin 60^0$$

$$+ \frac{1}{2}DH.MN + \frac{1}{2}AM.AN.\sin 60^0 = \sqrt{3}xy + \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{3xy(3xy-1)}$$

Mặt khác: $S_{AMN} = \frac{1}{2}.AM.AN.\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{4}xy$;

$$S_{AMN} = S_{AMH} + S_{ANH} = \frac{1}{2}AM.AH.\sin 30^0 + \frac{1}{2}AN.AH.\sin 30^0 = \frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3}(x+y).$$

Suy ra $\frac{\sqrt{3}}{4}xy = \frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3}(x+y) \Rightarrow x+y = 3xy$; $0 \le x, y \le 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \sqrt{3}xy + \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{3xy(3xy-1)}$; $x+y = 3xy, (0 \le x; y \le 1)$

Từ $3xy = x+y \ge 2\sqrt{xy} \Rightarrow \sqrt{xy} \ge \frac{2}{3} \Rightarrow xy \ge \frac{4}{9}$.

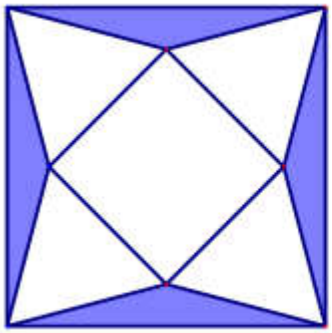
$$\Rightarrow 3xy - 1 \ge 3.\frac{4}{9} - 1 = \frac{1}{3}$$

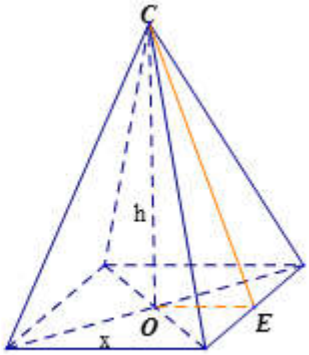
$$\Rightarrow S = \sqrt{3}xy + \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{3xy(3xy-1)} \ge \frac{4}{9}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{3.\frac{4}{9}.\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}(4+\sqrt{2})}{9}$$

Suy ra $\min S = \frac{\sqrt{3}(4+\sqrt{2})}{9}$, khi $x = y = \frac{2}{3}$.

Email: Quachthuy.tranphu@gmail.com.

Câu 25. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 1 (m) như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt phần đậm của tấm nhôm rồi gập lại thành một hình chóp tứ giác đều cạnh đáy bằng x (m) sao cho bốn đỉnh của hình vuông gập lại thành đỉnh của hình chóp. Tìm giá trị của x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất.



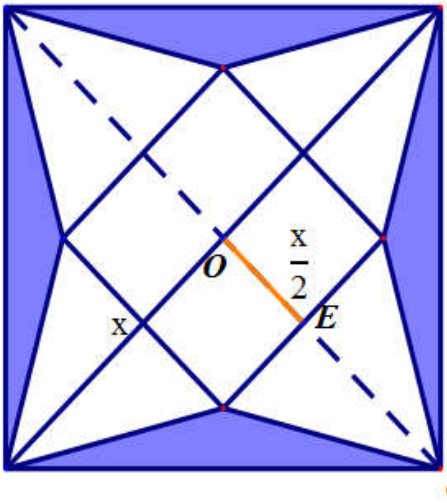


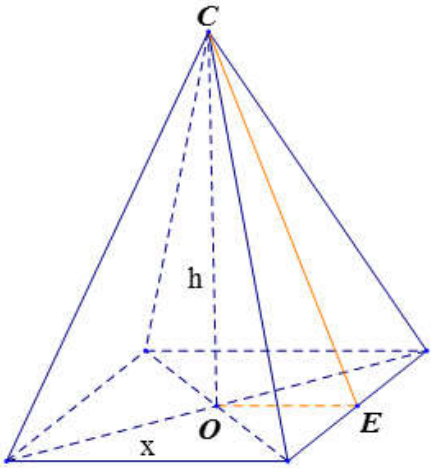
A. $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $x=\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $x=\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **D.** $x=\frac{1}{2}$

Lời giải

Tác giả: Quách Phương Thúy Tên FB: Phương Thúy

Chọn C





Đường chéo hình vuông cạnh 1 là $\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} OC=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ OE=\frac{x}{2} \\ EC=OC-OE=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{x}{2} \end{cases}$

Khi đó $h=\sqrt{CE^2-OE^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$

$$V=\frac{1}{3}x^2h=\frac{1}{3}x^2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{3}x^2\sqrt{\frac{2-2\sqrt{2}x}{4}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{x^4\left(1-\sqrt{2}x\right)}{2}}$$

Xét hàm số $f(x)=x^4\left(1-x\sqrt{2}\right)$ trên $\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$f'(x)=4x^3-5x^4\sqrt{2}$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{2\sqrt{2}}{5} \end{array}\right.$$

x	0		$\frac{2\sqrt{2}}{5}$		2
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	$f\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$	$\searrow$	

Hàm số $f(x)$ lớn nhất khi $x=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

Email: ngonguyenanhvu@gmail.com.

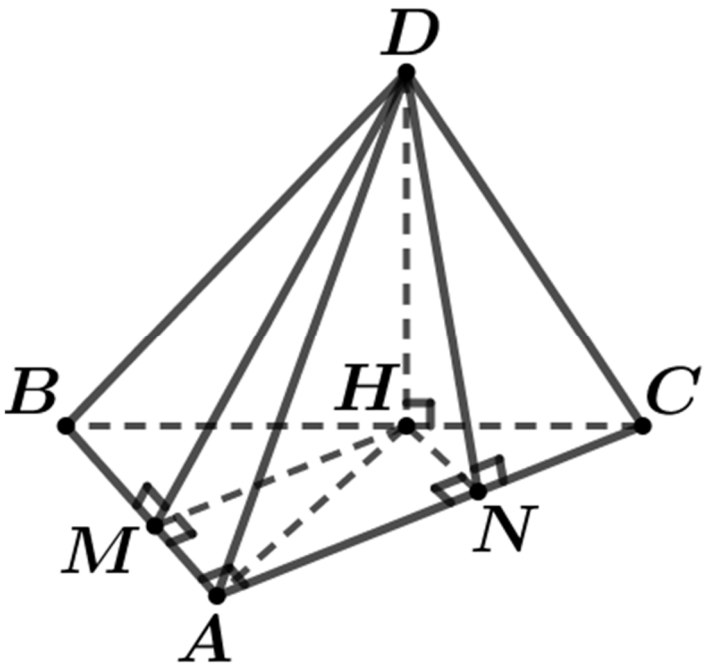
Câu 26. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=3a$, $AC=a$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa BC và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Điểm D di động trên (Q) sao cho tam giác DBC nhọn và hai mặt phẳng (DAB) và (DAC) lần lượt hợp với mặt phẳng (ABC) hai góc phụ nhau. Thể tích lớn nhất của khối chóp $D.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.. **B.** $\dfrac{3a^3}{8}$.. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{10}$.. **D.** $\dfrac{3a^3}{13}$.

Lời giải.

Tác giả: Ngô Nguyễn Anh Vũ TênFB: Euro Vũ

Chọn A



Kẻ $DH \perp BC$ với $H \in BC$. Suy ra $DH \perp (ABC)$. Vì diện tích tam giác ABC không đổi nên thể tích khối chóp $D.ABC$ lớn nhất khi DH lớn nhất.

Kẻ $HM \perp AB$ với $M \in AB$, $HN \perp AC$ với $N \in AC$.

Khi đó theo giả thiết, ta có $\widehat{(DAB),(ABC)}=\widehat{DMH}=\alpha$ và $\widehat{(DAC),(ABC)}=\widehat{DNH}=90°-\alpha$.

Ta có $S_{AHC}+S_{AHB}=S_{ABC}\Leftrightarrow \frac{1}{2}.DH\cot(90-\alpha).a+\frac{1}{2}.DH\cot\alpha.3a=\frac{3a^2}{2}$

$\Rightarrow DH=\frac{3a}{\tan\alpha+3\cot\alpha}$

Đặt $\tan\alpha=x\ \Rightarrow DH=\frac{3ax}{x^2+3}$

Xét $f(x)=\frac{x}{x^2+3}$ trên $(0;+\infty)$, được $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Khi đó $DH_{\max}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $V_{\max}=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Email: luuthedung1982@gmail.com

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a; $SA=SB=SC=a$. Khi đó thể tích của khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất bằng

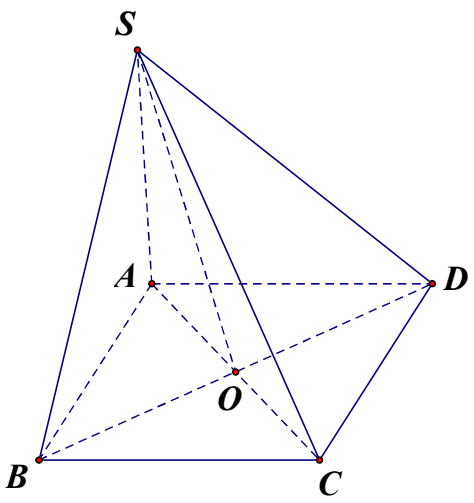
A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $\frac{3a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3}{4}$. **D.** $\frac{3a^3}{2}$.

Lời giải

Tác giả : Lưu Thế Dũng,Tên FB: Lưu Thế Dũng

Chọn C

Cách 1.



Gọi O là giao điểm của AC và BD. Theo giả thiết suy ra SAC là tam giác cân tại S nên $SO\perp AC$, đáy $ABCD$ là hình thoi nên $AC\perp BD$.

Xét tam giác SOC và BOA ta thấy $SC=BA=a; OC=OA; \widehat{SOC}=\widehat{BOA}=90^0$

Suy ra $\Delta SOC=\Delta BOA\Rightarrow SO=BO\Rightarrow \Delta BSD$ vuông tại S.

Đặt $SD=x$, $(x>0)$, suy ra $BD=\sqrt{a^2+x^2}$; $OB=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+x^2}$;

$AO=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}(a^2+x^2)}=\frac{1}{2}\sqrt{3a^2-x^2}$

Ta có: $\left.\begin{matrix}AO\perp SO\\ AO\perp BD\end{matrix}\right\}\Rightarrow AO\perp(SBD)$.

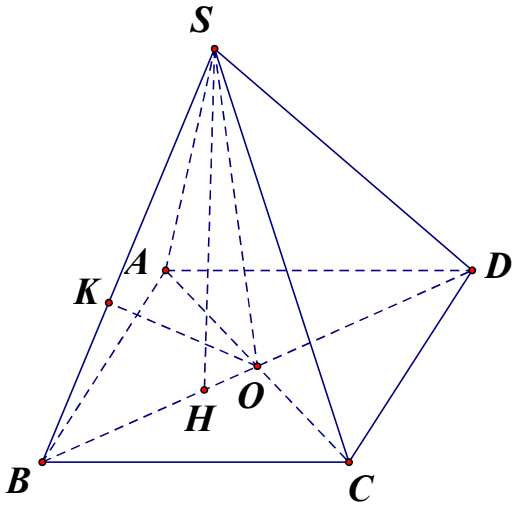
$V_{S.ABCD} = 2.V_{S.ABD} = 2.\frac{1}{3}AO.S_{\Delta SBD} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}\sqrt{3a^2 - x^2}.\frac{1}{2}a.x = \frac{1}{6}ax\sqrt{3a^2 - x^2}$

Áp dụng bất đẳng thức $ab \le \frac{a^2 + b^2}{2}; \forall a, b \in \mathbb{R}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ ta có:

$V_{S.ABCD} \le \frac{a}{6}.\frac{x^2 + \left(3a^2 - x^2\right)}{2} = \frac{a^3}{4}$; dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy GTLN của $V_{S.ABCD}$ bằng $\frac{a^3}{4}$ khi $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Cách 2



Đặt $BO = x, (x > 0)$, dựng $SH \perp (ABCD) \Rightarrow H \in BD.$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD}$

Ta có $S_{ABCD} = 2x\sqrt{a^2 - x^2}$

Kẻ $OK \perp SB$ tại K, $SO = BO = a.$

Khi đó $SH.BO = OK.SB \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}}}{x}$.

Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{2}{3}a.\sqrt{a^2 - x^2}.\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}} \le \frac{2a}{3}.\frac{a^2 - x^2 + x^2 - \frac{a^2}{4}}{2} = \frac{a^3}{4}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a^2 - x^2 = x^2 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{10}}{4}$

Vậy GTLN của $V_{S.ABCD}$ bằng $\frac{a^3}{4}$ khi $x = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Email: phamcongdung2010@gmail.com

Câu 28. Cho tứ diện $OABC$ vuông tại O, gọi α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OAC) với mặt phẳng (ABC). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

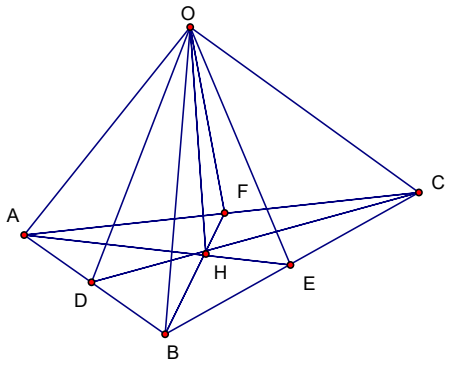
$M = \tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma + \cot^2\alpha + \cot^2\beta + \cot^2\gamma$

A. 6. **B.** $\frac{15}{2}$ **C.** 10. **D.** $\frac{27}{2}$.

Lời giải

Tác giả : Phạm Công Dũng,Tên FB:Phạm Công Dũng

Chọn B



Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC) ta có $OH \perp (ABC)$ và H là trực tâm tam giác ABC.

Gọi AE, BF, CD là các đường cao trong tam giác ABC.

Ta có $\widehat{ODC} = \alpha, \widehat{OEA} = \beta, \widehat{OFB} = \gamma$.

Ta có : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Đặt $\cos^2\alpha = a,\ \cos^2\beta = b,\ \cos^2\gamma = c \Rightarrow a+b+c = 1$.

$\tan^2\alpha = \frac{1}{a} - 1,\ \tan^2\beta = \frac{1}{b} - 1,\ \tan^2\gamma = \frac{1}{c} - 1;\ \cot^2\alpha = \frac{a}{1-a};\ \cot^2\beta = \frac{b}{1-b},\ \cot^2\gamma = \frac{c}{1-c}$

$M = (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) - 3 + \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} = (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) + (\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c}) - 6.$

Hay $M \geq \frac{9}{a+b+c} + \frac{9}{3-(a+b+c)} - 6 = \frac{15}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ hay $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Email: doanphunhu@gmail.com

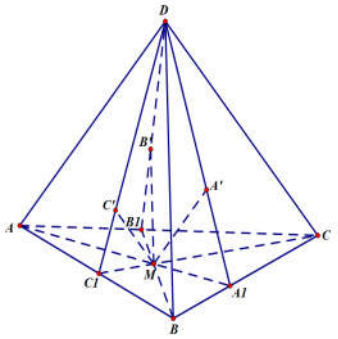
Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng V. Điểm M di động trong tam giác ABC. Qua M kẻ các đường thẳng song song với DA, BD, DC lần lượt cắt các mặt $(DBC), (DCA), (DAB)$ tại A', B', C'. Giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $MA'B'C'$ bằng

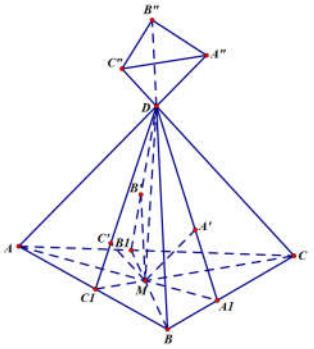
A. $\frac{V}{27}$. **B.** $\frac{V}{9}$. **C.** $\frac{V}{18}$. **D.** $\frac{V}{4}$.

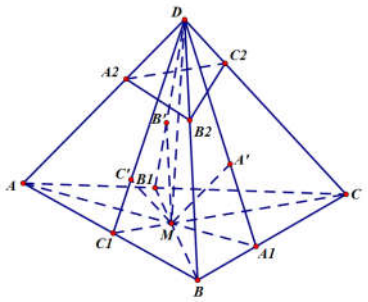
Lời giải

Tác giả :Đoàn Phú Như,Tên FB: Như Đoàn

Chọn A







Gọi $A_1 = AM \cap BC, B_1 = BM \cap CA, C_1 = CM \cap AB$ thì

$$\frac{MA'}{DA} + \frac{MB'}{DB} + \frac{MC'}{DC} = \frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} = 1$$

Phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{MD}$ biến $M \to D, A' \to A", B' \to B", C' \to C"$, biến tứ diện $MA'B'C'$ thành tứ diện $DA"B"C"$

Phép đối xứng tâm D biến $A" \to A_2, B" \to B_2, C" \to C_2$, biến tứ diện $DA"B"C"$ thành tứ diện $DA_2B_2C_2$. Do đó $MA' = DA_2, MB' = DB_2, MC' = DC_2$

Ta có $1 = \frac{MA'}{DA} + \frac{MB'}{DB} + \frac{MC'}{DC} = \frac{DA_2}{DA} + \frac{DB_2}{DB} + \frac{DC_2}{DC} \geq 3\sqrt[3]{\frac{DA_2}{DA} \cdot \frac{DB_2}{DB} \cdot \frac{DC_2}{DC}} = 3\sqrt[3]{\frac{V(DA_2B_2C_2)}{V(DABC)}}$

$\Rightarrow V(DA_2B_2C_2) \leq \frac{V}{27} \Rightarrow V(MA'B'C') \leq \frac{V}{27}$

$MaxV(MA'B'C') = \frac{V}{27}$ khi $\frac{DA_2}{DA} = \frac{DB_2}{DB} = \frac{DC_2}{DC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{MA_1}{AA_1} = \frac{MB_1}{BB_1} = \frac{MC_1}{CC_1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABC.

Email: trandotoanbk35@gmail.com

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân $(AD//BC)$, $BC = 2a$, $AB = AD = DC = a, (a > 0)$. Mặt bên SBC là tam giác đều. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Biết SD vuông góc với AC.

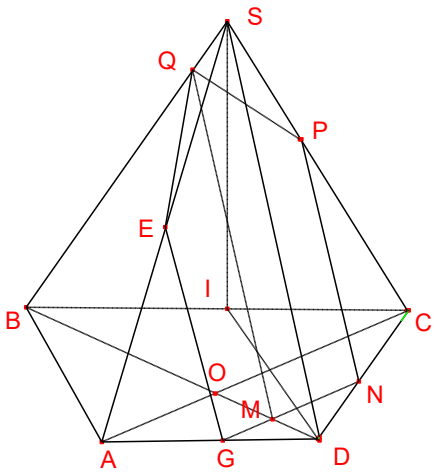
Mặt phẳng (α) đi qua điểm M thuộc đoạn thẳng OD (M khác O và D) và song song với đường thẳng SD và AC. Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) biết $MD = x$. Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

A. $x = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $x = \frac{a\sqrt{3}}{8}$. **D.** $x = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Tác giả : Trần Thế Độ,Tên FB: Trần Độ

Chọn A



Gọi I là trung điểm của BC nên tứ giác ADCI là hình thoi cạnh a nên IA = IB = IC = a thì tam giác ABC vuông tại A, suy ra AC vuông góc DI

$AC \perp ID(ID//AB), AC \perp SD \Rightarrow AC \perp (SID)$

$\Rightarrow AC \perp SI$

Do $AC \perp SI, BC \perp SI \Rightarrow SI \perp (ABCD) \Rightarrow (ABCD) \perp (SBC)$

Ta có: $SD = \sqrt{SI^2 + ID^2} = 2a$

Từ M kẻ hai đường thẳng lần lượt song song với SD, AC chúng cắt theo thứ tự SB tại Q và AB tại G, AC tại N. Từ G kẻ đường thẳng song song SD, cắt SA tại E,từ N kẻ đường thẳng song song với SD cắt SC tại P. Ta được thiết diện là ngũ giác GNPQE.

Ta có $BD = a\sqrt{3}$ nên tính được $EG = NP = 2\left(a - x\sqrt{3}\right), QM = 2\left(a - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)$, $GN = 3x$

Tứ giác EGMQ và MNPQ là hai hình thang vuông đường cao lần lượt là GM và NM nên

$S_{MNPQE} = 4x\left(3a - 2\sqrt{3}x\right)$

Max $S_{MNPQE} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ tại $x = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Email : luongvanhuydhsphn@gmail.com

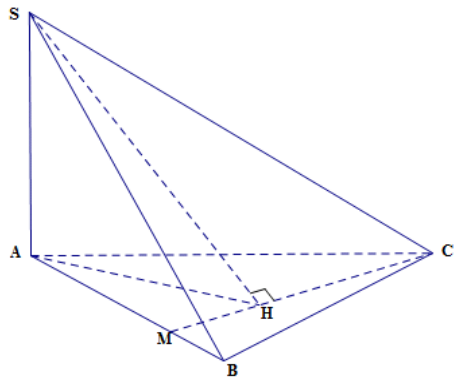
Câu 31. Cho hình chóp tam giác $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. M là một điểm thuộc cạnh AB. Kẻ $SH \perp CM$ tại H. Giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $S.AHC$ là

A. $\frac{a^3}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{12}$.

Lời giải

Tác giả :Lương Văn Huy FB: Lương Văn Huy

Chọn D



Ta có $V_{S.AHC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta AHC}$.

Do $SA = a$ không đổi nên $V_{S.AHC}$ lớn nhất khi và chỉ khi $S_{\Delta AHC}$ lớn nhất.

Mà $S_{\Delta AHC}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ ΔAHC vuông cân tại H

$\Rightarrow V_{Max} = \frac{1}{3}a.\frac{a^2}{4} = \frac{a^3}{12}$

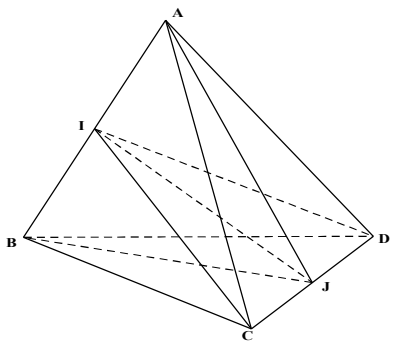
Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2a$, $CD = 2b$ và các cạnh còn lại đều có độ dài bằng 1. Giá trị lớn nhất của diện tích toàn phần tứ diện $ABCD$ là

A. $\frac{(ab)^3}{12}$. **B.** $\frac{(ab)^3}{6}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Tác giả :Lương Văn Huy FB: Lương Văn Huy

Chọn C



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Ta có

Hai tam giác cân ACD và BCD bằng nhau.

Hai tam giác cân ABC và ABD bằng nhau.

$CI \perp AB$ và $DI \perp AB$ và $IC = ID = \sqrt{1-a^2}$.

$JA \perp CD$ và $JB \perp CD$ và $JA = JB = \sqrt{1-b^2}$.

Khi đó $S_{tp} = 2S_{\Delta ABC} + 2S_{\Delta BCD} = a\sqrt{1-a^2} + b\sqrt{1-b^2} \le \frac{a^2+1-a^2}{2} + \frac{b^2+1-b^2}{2} = 1$.

Dấu $=$ xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 33. Hình hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có đường chéo $AC' = d$ hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc α, hợp với mặt bên $(BCC'B')$ góc β. Biết d không đổi, $A'D'CB$ là hình vuông và thể tích khối hộp lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $\alpha + \beta$ bằng:

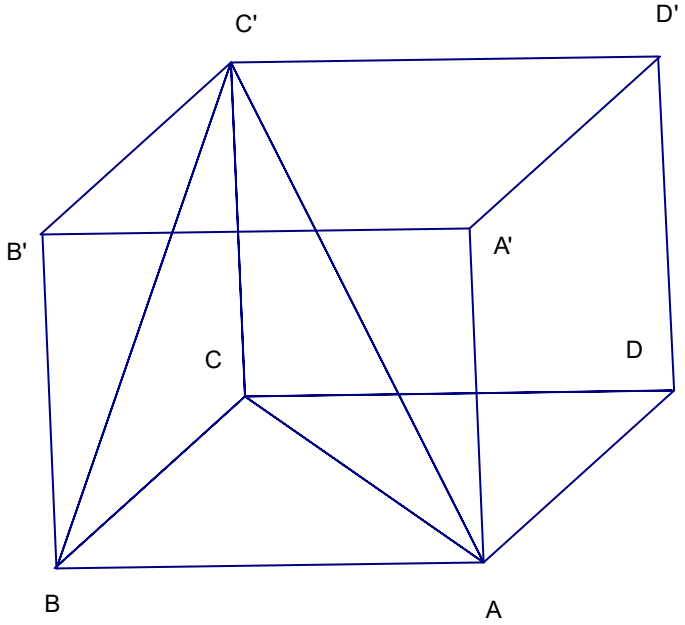
A. 60^0. **B.** 90^0 . **C.** 120^0. **D.** 75^0.

Lời giải

Tác giả : Phùng Văn Thân,Tên FB:Thân Phùng

Chọn A

Lời giải



Ta có $\widehat{CAC'} = \alpha$, $\widehat{AC'B} = \beta$, $CC' = AC'\sin\alpha = d\sin\alpha$, $AC = AC'\cos\alpha = d\cos\alpha$

$AB = AC'\sin\beta = d\sin\beta$,

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$

Thể tích khối lăng trụ là $V = AB.BC.CC' = d^3\sin\alpha.\sin\beta.\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$

Tứ giác $A'D'CB$ là hình chữ nhật để $A'D'CB$ là hình vuông thì $A'C^2 = 2CB^2$

$$\Leftrightarrow 2\left(\cos^2\alpha - \sin^2\beta\right) = 1 \Rightarrow \sin\beta = \sqrt{\cos^2\alpha - \frac{1}{2}}$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{2}.d^3.\sin\alpha.\sqrt{\cos^2\alpha - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.d^3.\sqrt{\sin^2\alpha\left(\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\right)}$$

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có

$$V \le \frac{\sqrt{2}}{2}.d^3.\left(\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \frac{1}{2}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{32}.d^3$$

Đẳng thức xảy ra khi $\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 30^0 \Rightarrow \beta = 30^0$

Vậy $\alpha + \beta = 60^0$

Daothihongxuandhsphnk55b@gmail.com

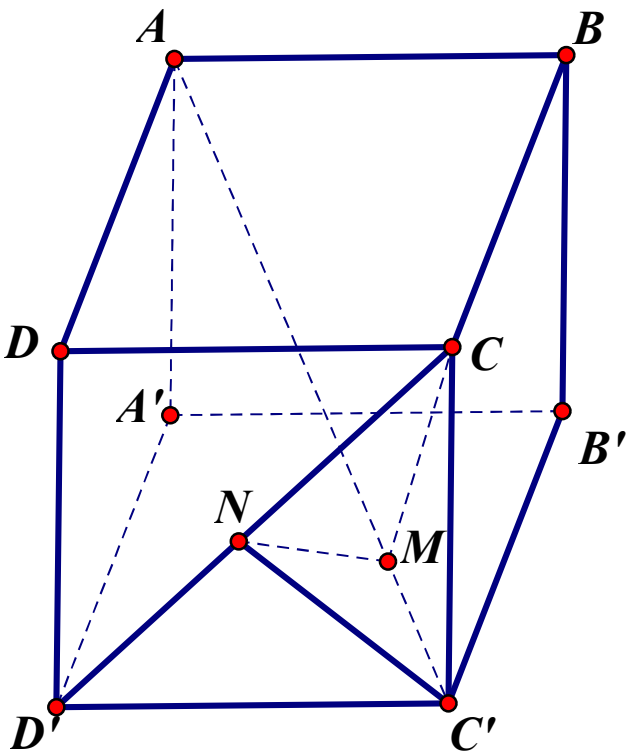
Câu 34. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. M thuộc đoạn thẳng $AC': C'M = x.C'A$, N thuộc đoạn thẳng $CD': D'N = 2x.CD'$. Giá trị của x để tứ diện $CC'NM$ có thể tích lớn nhất là:

A $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

(Tác giả: Đào Thị Hồng Xuân,,Tên FB: Hong Xuan)

Lời giải

Chọn C



Dễ thấy: $0 < x \le \frac{1}{2}$ Ta có.

$CD' = a\sqrt{2} \Rightarrow D'N = 2x.a\sqrt{2} \Rightarrow CN = a\sqrt{2} - 2x.a\sqrt{2} = a\sqrt{2}(1-2x)$

$AC' = a\sqrt{3} \Rightarrow C'M = x.a\sqrt{3}$

$V_{CC'NM} = \frac{1}{6}.C'M.CN.d(C'M, CN).\sin(C'M, CN)$

$= \frac{1}{6}xa\sqrt{3}.a\sqrt{2}(1-2x).d(C'A, CD').\sin(C'A, CD')$

Tứ diện $CC'NM$ có lớn nhất khi

$g(x) = \frac{1}{6.2}.a^2\sqrt{6}.2x(1-2x) \le \frac{1}{6.2}.a^2\sqrt{6}.\frac{(2x+1-2x)^2}{4} = \frac{a^2\sqrt{6}}{48}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 2x = 1-2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

Email: xuanmda@gmail.com

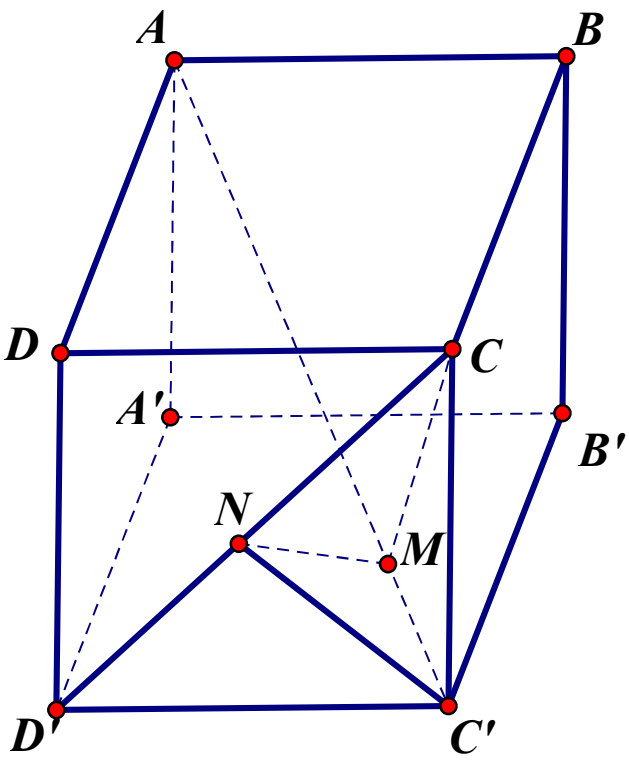
Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. M thuộc đoạn thẳng $AC': C'M = x.C'A$, N thuộc đoạn thẳng $CD': D'N = 2x.CD'$. Giá trị của x để tứ diện $CC'NM$ có thể tích lớn nhất là:

A $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Tác giả: Đào Thị Xuân, face: Hong Xuan

Chọn C



Dễ thấy: $0 < x < \frac{1}{2}$ Ta có.

$CD' = a\sqrt{2} \Rightarrow D'N = 2x.a\sqrt{2} \Rightarrow CN = a\sqrt{2} - 2x.a\sqrt{2} = a\sqrt{2}(1-2x)$

$AC' = a\sqrt{3} \Rightarrow C'M = x.a\sqrt{3}$

$$V_{CC'NM} = \frac{1}{6}.C'M.CN.d(C'M, CN).\sin(C'M, CN)$$

$$= \frac{1}{6}xa\sqrt{3}.a\sqrt{2}(1-2x).d(C'A, CD').\sin(C'A, CD')$$

$$= \frac{1}{6.2}.a^2\sqrt{6}.2x(1-2x).d(C'A, CD').\sin(C'A, CD')$$

Tứ diện $CC'NM$ có lớn nhất khi $(0 < 2x < 1) \Rightarrow g(x) = 2x(1-2x) \le \frac{(2x+1-2x)^2}{4} = \frac{1}{4}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 2x = 1 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

Email: **manhluonghl4@gmail.com**

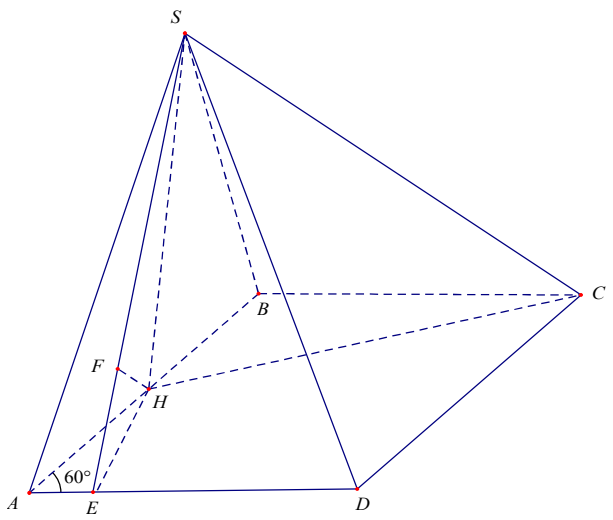
Câu 36. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^0, AB = 2a$. Gọi H là trung điểm AB, trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại H lấy điểm S thay đổi khác H. Biết rằng góc giữa SC và (SAD) có số đo lớn nhất khi $SH = a.\sqrt[4]{\frac{m}{n}}$ (với m, n là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Khi đó tổng $m+n$ bằng:

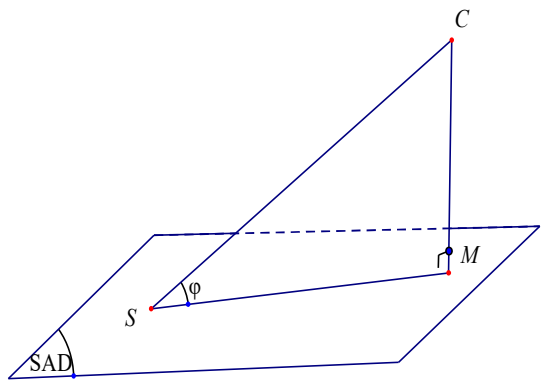
A. 7 B. 25 C. 23 D. 5

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Văn Mạnh,Tên FB: Nguyễn Văn Mạnh

Chọn B





Gọi M là hình chiếu của C lên (SAD) và φ là góc giữa SC và (SAD).

Ta có $\sin\varphi = \dfrac{CM}{SC} = \dfrac{d\left(C;(SAD)\right)}{SC}$. Vì

$BC//(SAD) \Rightarrow d\left(C;(SAD)\right) = d\left(\mathrm{B};(SAD)\right) = 2d\left(\mathrm{H};(SAD)\right)$

Gọi E là hình chiếu của H trên AD, Gọi F là hình chiếu của H trên SE ta có $d\left(\mathrm{H};(SAD)\right) = HF$

Khi đó $\sin\varphi = \dfrac{2HF}{SC}$. Đặt $SH = x(x>0)$ vì tam giác SHC vuông tại H nên

$SC = \sqrt{SH^2 + CH^2} = \sqrt{SH^2 + BC^2 + BH^2 - 2BC.BH.\cos\widehat{CBH}} = \sqrt{x^2 + 7a^2}$

Tam giác vuông EHA có $\sin\widehat{HAE} = \dfrac{HE}{AH} \Rightarrow HE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do HF là đường cao của tam giác vuông HSE nên $\dfrac{1}{HF^2} = \dfrac{1}{HE^2} + \dfrac{1}{HS^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow HF = \dfrac{ax\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4x^2}}$. Khi đó

$$\sin\varphi = \frac{2HF}{SC} = \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{(4x^2+3a^2)(x^2+7a^2)}} = \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{(4x^4+21a^4)+31a^2x^2}}.$$

$\Rightarrow \sin\varphi \le \dfrac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{4\sqrt{21}.a^2x^2 + 31.a^2x^2}} \Rightarrow \sin\varphi \le \sqrt{\dfrac{12}{4\sqrt{21}+31}}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = \sqrt[4]{\dfrac{21}{4}}.a$.

Vậy φ lớn nhất khi và chỉ khi $\sin\varphi$ lớn nhất khi và chỉ khi $SH=\sqrt[4]{\frac{21}{4}}.a \Rightarrow m=21, n=4$

Khi đó $m+n=21+4=25$

Email: huonghieptb@gmail.com

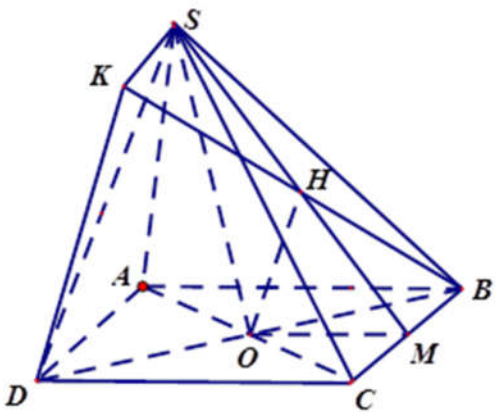
Câu 37. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, AD=4a, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{6}$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) khi thể tích của chóp S.ABCD lớn nhất bằng:

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **B.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$ **C.** $\sqrt{\frac{2}{5}}$ **D.** $\sqrt{\frac{3}{5}}$

Lời giải

Chọn C

Tác giả : Đào Thị Hương,Tên FB: Hương Đào



Gọi O là hình chiếu của S trên (ABCD)

Do SA=SB=SC=SD nên OA=OB=OC=OD $\Rightarrow$ ◊ABCD là hình chữ nhật

Đặt $DC=x\ (x>0) \Rightarrow AC=\sqrt{x^2+16a^2} \Rightarrow OA=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+16a^2}$

$$\Rightarrow SO=\sqrt{6a^2-\frac{1}{4}\left(x^2+16a^2\right)}=\sqrt{2a^2-\frac{x^2}{4}}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.\sqrt{2a^2-\frac{x^2}{4}}.4a.x=\frac{1}{3}.8a.\sqrt{2a^2-\frac{x^2}{4}}.\frac{x}{2}\le\frac{1}{3}.8a\frac{2a^2-\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{4}}{2}=\frac{8a^3}{3}.$$

Vậy thể tích S.ABCD đạt giá trị lớn nhất khi $\frac{x^2}{4}=2a^2-\frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x^2=4a^2 \Leftrightarrow x=2a$

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của O,D trên (SBC)

Do SO=OM nên H là trung điểm SM

Do OD=OB nên H là trung điểm KB $\Rightarrow \Delta SKC$ là hình chiếu của ΔSDC trên (SBC)

$$x=2a \Rightarrow \begin{cases} SO=a \\ OM=a \end{cases} \Rightarrow SM=a\sqrt{2} \Rightarrow S_{\Delta SKC}=\frac{1}{2}S_{\Delta SBC}=\frac{1}{4}.a\sqrt{2}.4a=a^2\sqrt{2}$$

Gọi N là trung điểm DC $\Rightarrow SN=\sqrt{6a^2-a^2}=a\sqrt{5} \Rightarrow S_{\Delta SCD}=\frac{1}{2}.a\sqrt{5}.2a=a^2.\sqrt{5}$

Theo công thức hình chiếu ta có $\Rightarrow S_{\Delta SKC}=S_{\Delta SDC}.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{5}}$

Email: dunghung22@gmail.com

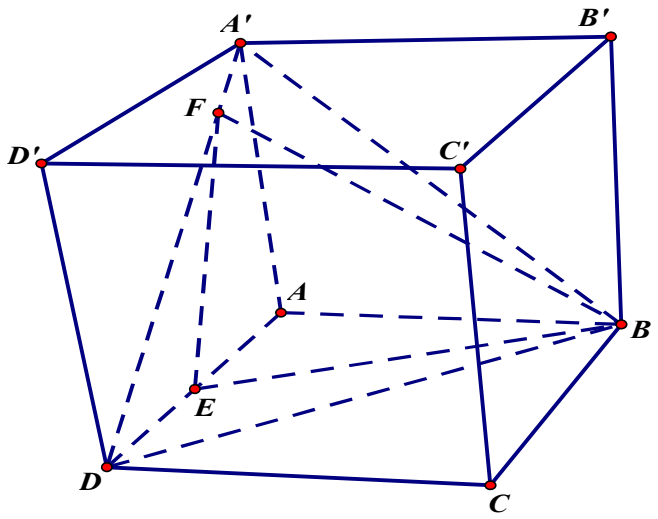
Câu 38. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Lấy các điểm E,F lần lượt trên các đoạn AB,DA' thỏa mãn $\frac{3}{7}.\frac{DA}{DE}+\frac{7}{27}.\frac{DA'}{DF}=6$. Gọi V, V' lần lượt là thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ và khối tứ diện $BDEF$. Khi đó GTNN của tỉ số $\frac{V'}{V}$ bằng

A. $\frac{1}{81}$ **B.** $\frac{1}{468}$ **C.** $\frac{1}{486}$ **D.** $\frac{1}{9}$

Lời giải

Tác giả : Hoàng Dũng,Tên FB: HoangDung

Chọn C



Ta có:

$$\frac{V'}{V_{D.ABA'}}=\frac{DE}{DA}.\frac{DF}{DA'}\Rightarrow\frac{6V'}{V}=\frac{DE}{DA}.\frac{DF}{DA'}$$

$$\Rightarrow\frac{V'}{V}=\frac{1}{6}.\frac{DE}{DA}.\frac{DF}{DA'}$$

Theo bài ra :

$$6=\frac{3}{7}.\frac{DA}{DE}+\frac{7}{27}.\frac{DA'}{DF}\geq 2\sqrt{\frac{3}{7}.\frac{7}{27}.\frac{DA}{DE}.\frac{DA'}{DF}}$$

$$\Rightarrow\frac{DE}{DA}.\frac{DF}{DA'}\geq\frac{1}{81}$$

Dấu "=" khi $\frac{3}{7}\frac{DA}{DE}=\frac{7}{27}\frac{DA'}{DF}$

Suy ra: $\frac{V'}{V}=\frac{1}{6}.\frac{DE}{DA}.\frac{DF}{DA'}\geq\frac{1}{6}.\frac{1}{81}=\frac{1}{486}$

Email: thienhuongtth@gmail.com

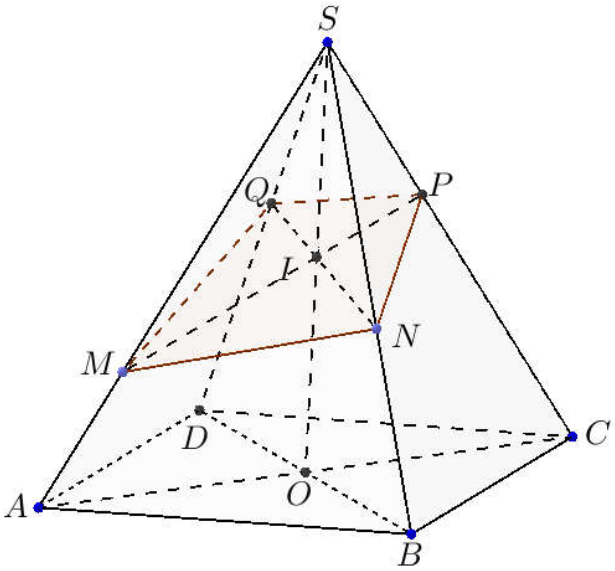
Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích là V, $ABCD$ là hình bình hành có tâm O. Gọi I là trung điểm của SO, (P) là mặt phẳng qua I sao cho (P) cắt các cạnh SA,SB,SC,SD lần lượt tại các điểm M,N,P,Q. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích của khối chóp $S.MNPQ$.

A. $\frac{V}{4}$. **B.** $\frac{V}{2}$. **C.** $\frac{V}{12}$. **D.** $\frac{V}{8}$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Văn Thanh,Tên FB: Thanh Văn Nguyễn

Chọn D



Đặt $a=\frac{SA}{SM}, b=\frac{SB}{SN}, c=\frac{SC}{SP}, d=\frac{SD}{SQ}$

$V_{SABD}=V_{SBCD}=V_0=\frac{1}{2}V$

$V_{SMNQ}=V_1$, $V_{SNPQ}=V_2$

Ta có kết quả: $a+c=b+d=2\frac{SO}{SI}=4$

$\frac{V_0}{V_1}=a.b.d$; $\frac{V_0}{V_2}=c.b.d$

$\Rightarrow \frac{V_0}{V_1}+\frac{V_0}{V_2}=b.d\left(a+c\right)=4b\left(4-b\right)\le 16$ với $0<b\le 3$

Mặt khác: $\frac{V_0}{V_1}+\frac{V_0}{V_2}\ge 2\sqrt{\frac{V_0}{V_1}.\frac{V_0}{V_2}}=\frac{V}{\sqrt{V_1.V_2}}\ge \frac{2V}{V_1+V_2}=\frac{2V}{V_{S.MNPQ}}$

Do đó: $\frac{2V}{V_{S.MNPQ}}\le 16 \Rightarrow V_{S.MNPQ}\ge \frac{V}{8}$

Email: ngbdai@gmail.com

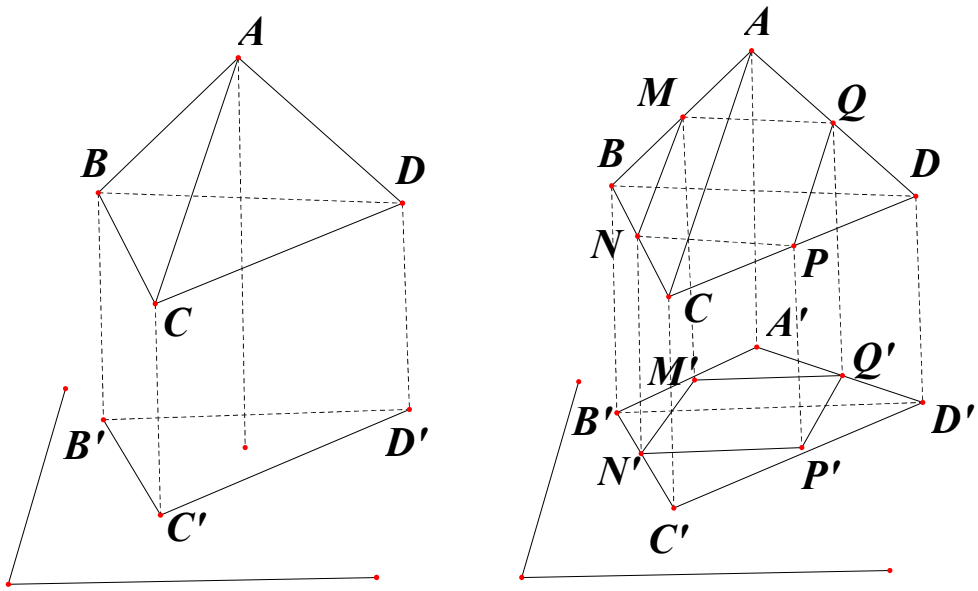
Câu 40. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi S là diện tích hình chiếu của tứ diện lên các mặt phẳng khác nhau. Khi đó S lớn nhất bằng?

A. $S=a^2$. **B.** $S=\frac{a^2}{2}$. **C.** $S=\frac{a^2}{4}$. **D.** $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Bá Đại,Tên FB: Dai NB

Chọn B



Nếu hình chiếu là tam giác, giả sử là tam giác $B'C'D'$, khi đó $S_{B'C'D'} \le S_{BCD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Nếu hình chiếu là tứ giác, giả sử là $A'B'C'D'$. Gọi M,N,P,Q, M',N',P',Q' lần lượt là trung điểm các cạnh $AB,BC,CD,DA,A'B',B'C',C'D',D'A'$, khi đó

$S_{A'B'C'D'} = 2S_{M'N'P'Q'} \le 2S_{MNPQ} = \dfrac{a^2}{2}$.

Vậy $S = \dfrac{a^2}{2}$.

Email: tranthithuyht@gmail.com

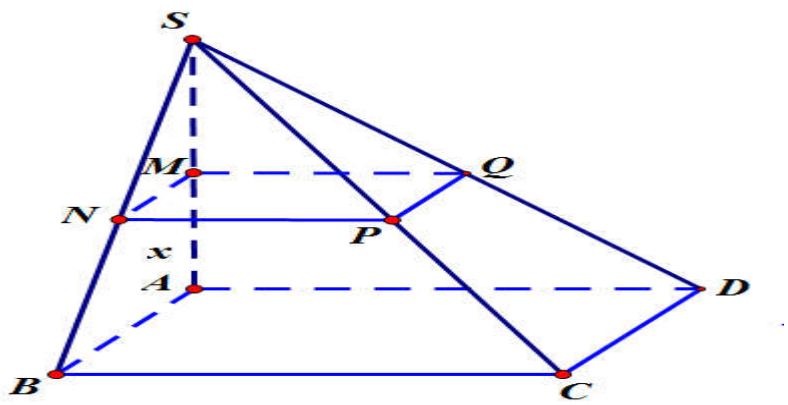
Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và đường cao $SA = 2a$. $MNPQ$ là thiết diện song song với đáy, $M \in SA$ và $AM = x$. Xét hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ và đường sinh MA . Giá trị của x để thể tích khối trụ lớn nhất là

A. $x = \dfrac{a}{3}$. **B.** $x = \dfrac{2a}{3}$. **C.** $x = \dfrac{a}{2}$. **D.** $x = \dfrac{3a}{4}$.

Lời giải

Tác giả : Trần Thị Thủy,Tên FB: Trần Thủy

Chọn B



Ta có $MNPQ$ là thiết diện song song với đáy do đó $MNPQ$ đồng dạng với đáy. Suy ra $MNPQ$ là hình vuông.

Theo định lý talét ta có: $\frac{MN}{AB}=\frac{SM}{SA}=\frac{2a-x}{2a}\Rightarrow MN=\frac{2a-x}{2}$

Đường tròn đáy trụ (T) là đường tròn (C) ngoại tiếp hình vuông $MNPQ$ nên ta có bán kính đáy của trụ là $R=\frac{MN}{\sqrt{2}}=\frac{2a-x}{2\sqrt{2}}$.

Khi đó ta có thể tích khối trụ là: $V=\pi R^2h=\pi\left(\frac{2a-x}{2\sqrt{2}}\right)^2x=\frac{1}{8}\pi\left(2a-x\right)^2x$

Theo bất đẳng thức cauchy ta có

$$V=\frac{1}{8}\pi\left(2a-x\right)^2x=\frac{1}{16}\pi(2a-x)(2a-x)2x\le\frac{1}{16}\pi\left(\frac{2a-x+2a-x+2x}{3}\right)^3=\frac{4\pi a^3}{27}$$

$$\Rightarrow V\le\frac{4\pi a^3}{27}$$

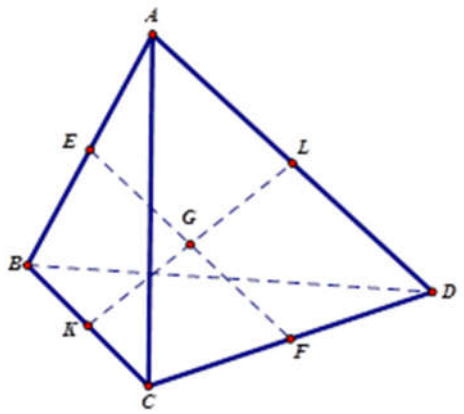
$$V=\frac{4\pi a^3}{27}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(0;2a\right)\\2a-x=2x\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{2a}{3}$$

Vậy $V_{Max}=\frac{4\pi a^3}{27}\Leftrightarrow x=\frac{2a}{3}$

Email: buikhanhas3@gmail.com

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp trong một mặt cầu bán kính R và thỏa mãn điều kiện $AB=CD$, $BC=AD$, $AC=BD$. M là một điểm thay đổi trong không gian.

Đặt $P=MA+MB+MC+MD$, giá trị nhỏ nhất của P là:



A. $P_{\min}=2R\sqrt{3}$. **B.** $P_{\min}=4R$. **C.** $P_{\min}=3R$. **D.** $P_{\min}=\frac{16R}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi G là trọng tâm của tứ diện; E, F, K, L lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, AD. Ta có tam giác ACD bằng tam giác BCD nên $AF=BF$ suy ra $EF\perp AB$, tương tự ta chứng minh được $EF\perp CD$ và đường thẳng PQ vuông góc với cả hai đường thẳng BC, AD. Từ đó suy $GA=GB=GC=GD=R$.

Ta có $MA+MB+MC+MD=\frac{MA.GA+MB.GB+MC.GC+MD.GD}{GA}$

$$\ge\frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{GD}}{GA}$$

$$=\frac{\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)+4.GA^2}{GA}=4GA=4R.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M trùng với điểm G.

Vậy $P_{\min}=4R$.

Tác giả : Bùi Văn Khánh,Tên FB: Khánh Bùi Văn

Email: nhungcvp95@gmail.com

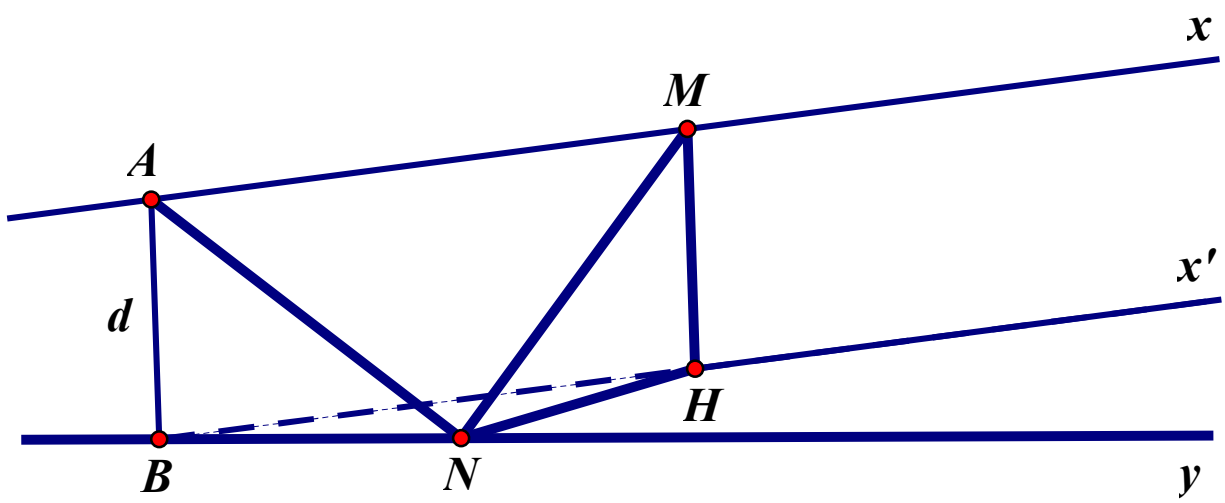
Câu 43. AB là đường vuông góc chung của hai đường thẳng x, y chéo nhau, A thuộc x, B thuộc y. Đặt độ dài $AB=d$. M là điểm thay đổi thuộc x, N là điểm thay đổi thuộc y. Đặt $AM=m$, $BN=n$ $(m\ge 0,n\ge 0)$. Giả sử luôn có: $m^2+n^2=k>0$, k không đổi. Với giá trị nào của m, n thì độ dài MN nhỏ nhất?

A. $m=n=\sqrt{k}$ **B.** $m=\sqrt{\frac{k}{2}},n=\sqrt{k}$. **C.** $m=n=\sqrt{\frac{k}{2}}$. **D.** $m=\sqrt{k},n=\sqrt{\frac{k}{2}}$.

Lời giải

Tác giả : Phùng Nhung,Tên FB: Phùng Nhung

Chọn C



Kẻ $Bx' // Ax$ và $MH // AB$.

$\Rightarrow MH\perp\left(Byx'\right)$.

$\Rightarrow MH\perp\left(Byx'\right)$.

Gọi α là góc giữa x và y.

Ta có : $MN^2=MH^2+HN^2=d^2+n^2+m^2-2m.n\cos\alpha=d^2+k-2m.n\cos\alpha$

Vì d, k, α không đổi và $k=m^2+n^2\ge 2m.n$ nên MN nhỏ nhất

$\Leftrightarrow m.n$ lớn nhất $\Leftrightarrow m=n=\sqrt{\frac{k}{2}}$.

***Email: :* trichinhsp@gmail.com**

Câu 44. Cho hình chóp có đáy là tam giác vuông cân tại B, BA=BC=2a, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm E của AB, SE=2a. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của EC, SC,

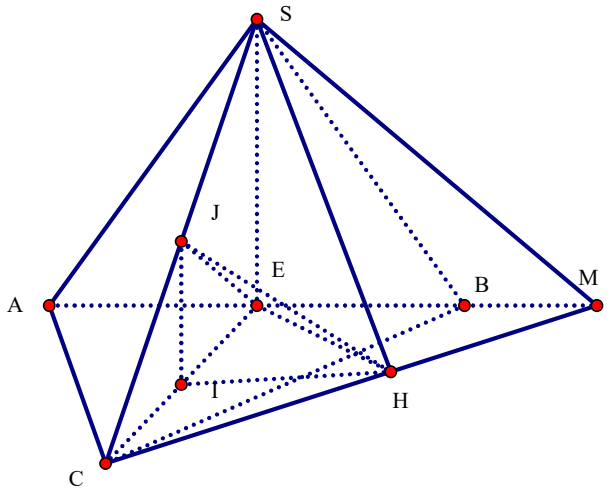
điểm M di động trên tia đối của tia BA sao cho $\widehat{ECM} = \alpha$ $\left(\alpha < 90^0\right)$ và H là hình chiếu vuông góc của S trên MC. Khi thể tích của khối tứ diện EHIJ đạt giá trị lớn nhất. Thì thể tích của khối cầu ngoại tiếp tứ diện EHIJ là?

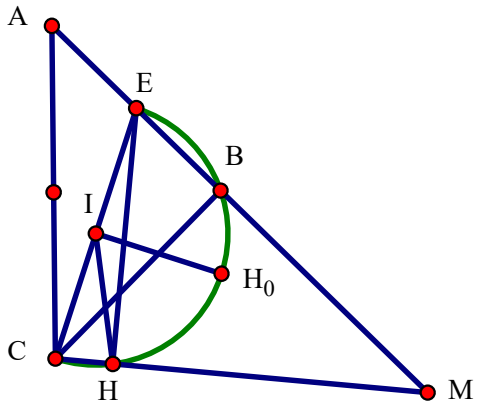
A. $V = \dfrac{11\pi a^3\sqrt{11}}{48}$. **B.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{10}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{10}}{16}$. **D.** $V = \dfrac{11\pi a^3\sqrt{11}}{24}$.

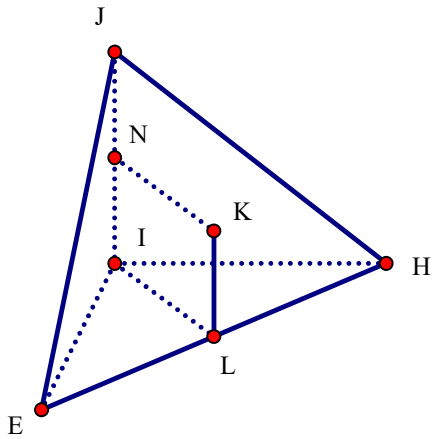
Lời giải

Tác giả : Nguyễn Trí Chính, Face: : Nguyễn Trí Chính

Chọn A







Có I, J lần lượt là trung điểm của EC, SC. Nên IJ là đường trung bình ΔSCE

Suy ra IJ//SE, $SE \perp \left(ABC\right)$. Suy ra $IJ \perp \left(ABC\right)$, và $IJ = \dfrac{SE}{2} = a$

Có $SH \perp MC$, mà EH là hình chiếu của SH. Suy ra $EH \perp MC$

Có $CE = \sqrt{CB^2 + EB^2} = a\sqrt{5}$ không đổi. Suy ra H thuộc đường tròn $\left(I\right)$ đường kính CE

Gọi V_1 là thể tích khối tứ diện J.EIH. Tứ diện J.EIH có chiều cao IJ

Có $V_1 = \dfrac{1}{3}IJ.dt\left(EIH\right)$, IJ không đổi

Có ΔECH vuông tại H, I là trung điểm CE. Suy ra $IH = IC = IE$

Nên $dt\left(EIH\right) = \dfrac{1}{2}dt\left(CEH\right)$

Có $dt\left(CEH\right)=\frac{1}{2}d\left(H;CE\right).CE$, có CE không đổi

$V_1=\frac{1}{6}IJ.CE.d\left(H;CE\right)$ đạt GTLN

$\Leftrightarrow$ $d\left(H;CE\right)$ đạt GTLN , mà H thuộc đường tròn $\left(I\right)$ đường kính CE

$\Leftrightarrow$ H là điểm chính giữa của cung CE trong đường tròn $\left(I\right)$

$\Leftrightarrow \alpha=45^0$

Gọi V_2 là thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp J.EHI

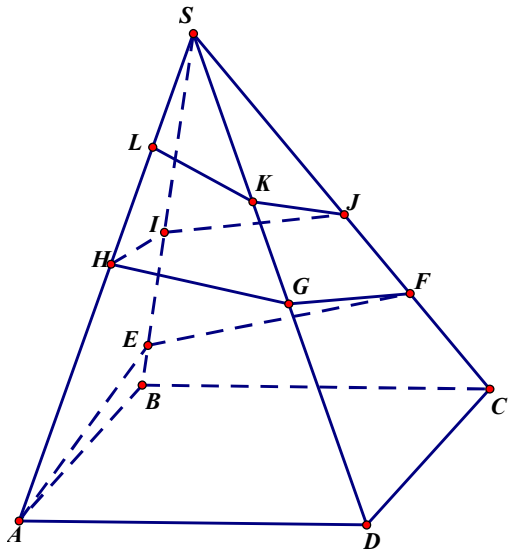
Khối chóp $J.IEH$ có IJ, IE,IH đôi một vuông góc. Nên

$V_2=\frac{4}{3}\pi R^3$, $R=\sqrt{\left(\frac{IJ}{2}\right)^2+\left(\frac{EH}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{11}}{4}$, $EH=\frac{CE}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$

$V_3=\frac{4}{3}\pi\frac{a^3 11\sqrt{11}}{4^3}=\frac{11\pi a^3\sqrt{11}}{48}$.

Email : Oanhhlqt@gmail.com

Câu 45. Người ta cần trang trí một kim tự tháp hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh bên bằng $200\,\text{m}$, góc $\widehat{ASB}=15°$ bằng đường gấp khúc dây đèn led vòng quanh kim tự tháp $AEFGHIJKLS$. Trong đó điểm L cố định và $LS=40\,\text{m}$ (tham khảo hình vẽ)



Hỏi khi đó cần dung ít nhất bao nhiêu mét dây đèn led để trang trí?

A. $40\sqrt{67}+40$ mét. **B.** $20\sqrt{111}+40$ mét. **C.** $40\sqrt{31}+40$ mét. **D.** $40\sqrt{111}+40$ mét.

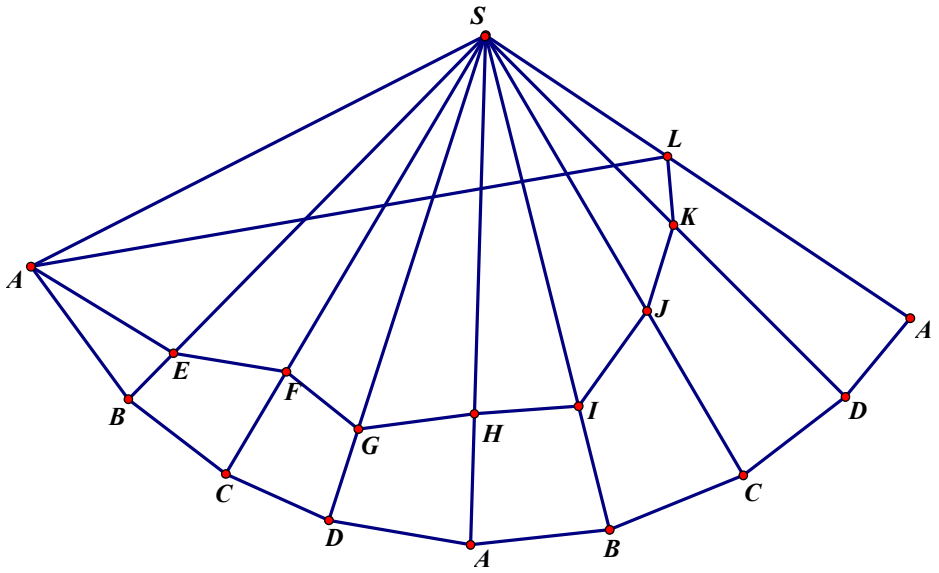
Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Oánh ***Tên FB: Nguyễn Văn Oánh***

Chọn C

Ta sử dụng phương pháp trải đa diện

Cắt hình chóp theo cạnh bên SA rồi trải ra mặt phẳng hai lần, ta có hình vẽ sau



Từ đó suy ra chiều dài dây đèn led ngắn nhất là bằng $AL + LS$.

Từ giả thiết về hình chóp đều $S.ABCD$ ta có $\widehat{ASL} = 120°$.

Ta có $AL^2 = SA^2 + SL^2 - 2SA.SL.\cos\widehat{ASL} = 200^2 + 40^2 - 2.200.40.\cos 120° = 49600$.

Nên $AL = \sqrt{49600} = 40\sqrt{31}$.

Vậy, chiều dài dây đèn led cần ít nhất là $40\sqrt{31} + 40$ mét.

Email: tuannvcbn@gmail.com

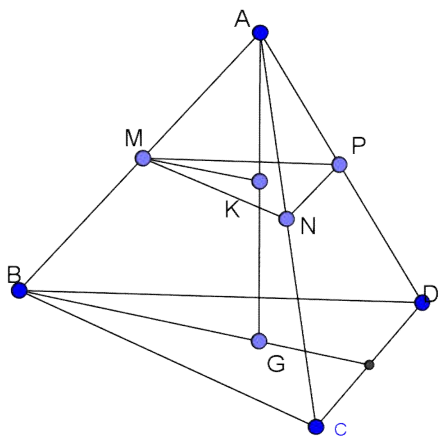
Câu 46. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Một mặt phẳng (Q) thay đổi luôn song song với mặt (BCD) cắt các cạnh AB, AC, AD thứ tự tại M, N, P. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $MNPG$ nhỏ nhất là:

A. $\frac{a}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}-1}{3}a$ **C.** $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}a$ **D.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}a$

Bài giải:

Tác giả: Nguyễn Văn Tuấn, facebook: Tuấn Nguyễn.

Chọn C



Gọi K là tâm tam giác đều MNP. Đặt $KG = x, AG = h$. Khi đó $AK = h - x$.

Suy ra $\frac{MK}{BG} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow MK = \frac{h-x}{h}.BG = \frac{(h-x)a}{\sqrt{3}h}$

Ta có $MG=\sqrt{GK^2+MK^2}=\sqrt{x^2+\dfrac{(h-x)^2a^2}{3h^2}}$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp MNPG có công thức $r=\dfrac{MG^2}{2.GK}=\dfrac{x^2+\dfrac{(h-x)^2a^2}{3h^2}}{2x}$

Ta có $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow r=\dfrac{x^2+\dfrac{(h-x)^2a^2}{3h^2}}{2x}=\dfrac{2x^2+(h-x)^2}{4x}=\dfrac{1}{4}\left(3x+\dfrac{h^2}{x}-2h\right)$

Suy ra r nhỏ nhất khi $x=\dfrac{h}{\sqrt{3}}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. Khi đó $Min\,r=\dfrac{\left(3\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{6}a$

Email: vanphu.mc@gmail.com

Câu 47. Cho tứ diện $ABCD$ có $CA=CB=CD=a$. Gọi *I, J* lần lượt là trung điểm của CB, AD. Gọi *G* là trung điểm của *IJ*. Một mặt phẳng (α) thay đổi đi qua *G* sao cho mặt phẳng (α) cắt các cạnh CA, CB, CD lần lượt tại các điểm *K*, *E*, *F*. Tìm theo *a* giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

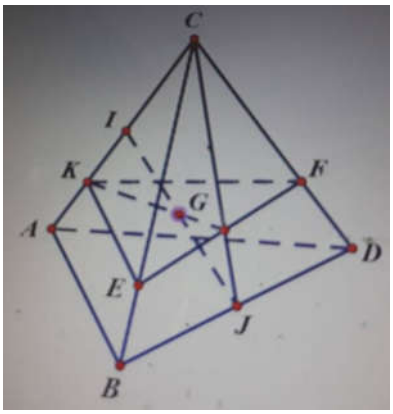
$\dfrac{1}{CK^2}+\dfrac{1}{CE^2}+\dfrac{1}{CF^2}$.

A. $\dfrac{4}{a^2}$. **B.** $\dfrac{16}{3a^2}$. **C.** $\dfrac{16}{a^2}$. **D.** $\dfrac{4}{3a^2}$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Văn Phu,Tên FB: Nguyễn Văn Phu

Chọn B



Gọi G là trọng tâm tứ diện $CABD$ ta có $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\overrightarrow{CG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{CA}{CK}\overrightarrow{CK}+\dfrac{CB}{CE}\overrightarrow{CE}+\dfrac{CD}{CF}\overrightarrow{CF}\right)$

Đặt $x=CK,\ y=CE,\ z=CF\quad (x,y,z>0)$

$\Rightarrow \dfrac{4}{a}\overrightarrow{CG}=\dfrac{1}{x}\overrightarrow{CK}+\dfrac{1}{y}\overrightarrow{CE}+\dfrac{1}{z}\overrightarrow{CF}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{4}{a}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}\right)\overrightarrow{A_1G}=\dfrac{1}{x}\overrightarrow{GK}+\dfrac{1}{y}\overrightarrow{GE}+\dfrac{1}{z}\overrightarrow{GF}=\alpha\overrightarrow{GE}+\beta\overrightarrow{GF}$

(do 3 vectơ $\overrightarrow{GK}$, $\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng)

Nếu $\frac{4}{a}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\neq 0$ thì 3 vectơ $\overrightarrow{CG},\overrightarrow{GE},\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng (vô lí)

Vậy $\frac{4}{a}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{a}$

Ta có $a^2+b^2+c^2\geq\frac{(a+b+c)^2}{3}$ nên

$$\frac{1}{CK^2}+\frac{1}{CE^2}+\frac{1}{CF^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=\frac{16}{3a^2}$$

Email: lecamhoa474@gmail.com

Câu 48. Cho một hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều.Thể tích của hình lăng trụ là V. Để diện tích toàn phần của hình lăng trụ nhỏ nhất thì cạnh đáy của lăng trụ là:

A. $\sqrt[3]{4V}$. **B.** $\sqrt[3]{V}$. **C.** $\sqrt[3]{2V}$. **D.** $\sqrt[3]{6V}$.

Lời giải

Tác giả : Lê Cẩm Hoa

Chọn A

Gọi cạnh đáy của lăng trụ là a, chiều cao lăng trụ là h.

Theo bài ra ta có $V=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.h\Rightarrow h=\frac{4V}{a^2\sqrt{3}}$

Diện tích toàn phần của lăng trụ là $S_{tp}=S_{xq}+S_{2\ đáy}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+\frac{4\sqrt{3}V}{a}$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có $S_{tp}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{3}V}{a}+\frac{2\sqrt{3}V}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{2\sqrt{3}V}{a}.\frac{2\sqrt{3}V}{a}}$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}V}{a}$ hay $a=\sqrt[3]{4V}$

Email: ducnoids1@gmail.com

Câu 49. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng a. Trên đường thẳng AA' lấy điểm M, trên đường thẳng BC lấy điểm N sao cho đường thẳng MN cắt đoạn thẳng $D'C'$ tại điểm I. Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN.

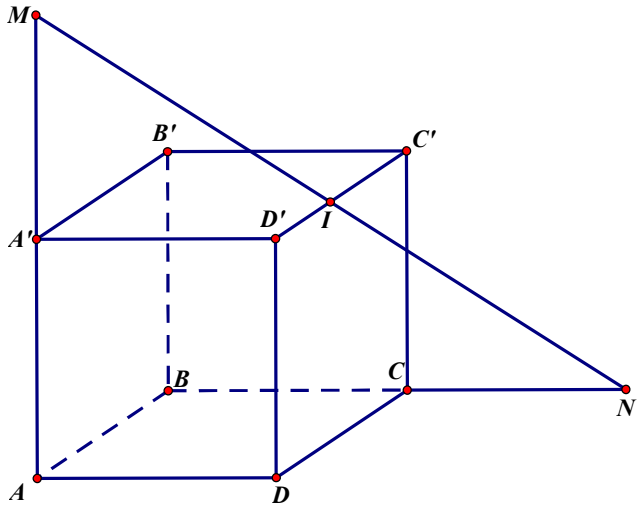
A. $\min MN=2a$. **B.** $\min MN=2\sqrt{2}a$.

C. $\min MN=3a$. **D.** $\min MN=2\sqrt{3}a$.

Lời giải

Họ và tên: **Trần Đức Nội.** Facebook: **Trần Đức Nội**

Chọn C



Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{AD},\vec{c}=\overrightarrow{AA'}\Rightarrow|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=a$, $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=\vec{c}.\vec{a}=0$

$M\in AA'\Rightarrow\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AA'}=m\vec{c}$

$N\in BC\Rightarrow\overrightarrow{BN}=n\overrightarrow{BC}\ \Rightarrow\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=n\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AN}=\vec{a}+n\vec{b}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}+n\vec{b}-m\vec{c}\Rightarrow MN^2=a^2+n^2a^2+m^2a^2=a^2\left(m^2+n^2+1\right)$

+) Do I là giao của đường thẳng MN với cạnh $D'C'$ nên $\overrightarrow{ID'}=-k\overrightarrow{IC'}(k\ge 0)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AD'}-\overrightarrow{AI}=-k\left(\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AI}\right)\Leftrightarrow\vec{c}+\vec{b}-\overrightarrow{AI}=-k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\overrightarrow{AI})\ \Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\dfrac{k}{1+k}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

$\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AM}=\dfrac{k}{1+k}\vec{a}+\vec{b}+(1-m)\vec{c}$

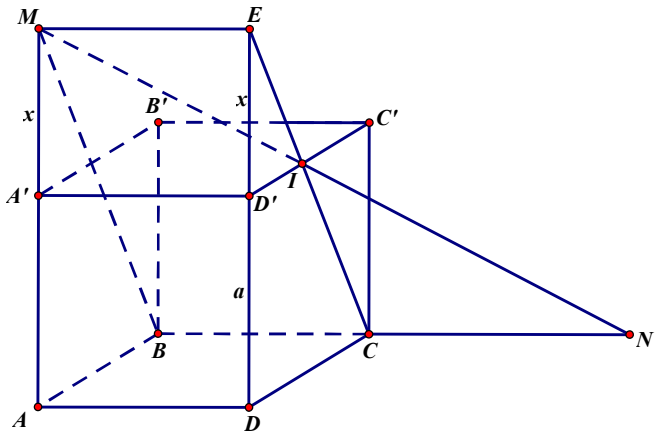
+) Do $I\in MN\Rightarrow\overrightarrow{MI}=t\overrightarrow{MN}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{k}{k+1}=t\\1=nt\\1-m=-mt\end{cases}\Rightarrow\dfrac{k}{1+k}=\dfrac{1}{n}=\dfrac{1-m}{-m}\Leftrightarrow\begin{cases}mn=m+n\\n=\dfrac{1+k}{k}>1\\m>0\end{cases}$

Ta có $mn=m+n\ge 2\sqrt{mn}\Rightarrow\sqrt{mn}\ge 2\Leftrightarrow mn\ge 4$

+) Do đó $MN^2=a^2\left(m^2+n^2+1\right)\ge a^2\left(2mn+1\right)\ge 9a^2\ \Rightarrow MN\ge 3a$.

Vậy $\min MN=3a$ khi $m=n=2$ tức là $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{BC}$.

Cách 2: (Của thầy **Nguyễn Viết Sơn**)



Gọi E là hình chiếu của M lên DD', khi đó E, I, C thẳng hàng (vì cùng thuộc hình chiếu vuông góc của MN lên mặt phẳng $(CDD'C')$).

Đặt $AM' = x$, do $ME // CN$, $C'D' // CD$ nên $\frac{ME}{CN} = \frac{EI}{IC} = \frac{ED'}{DD'} = \frac{x}{a}$, suy ra $CN = \frac{a^2}{x}$.

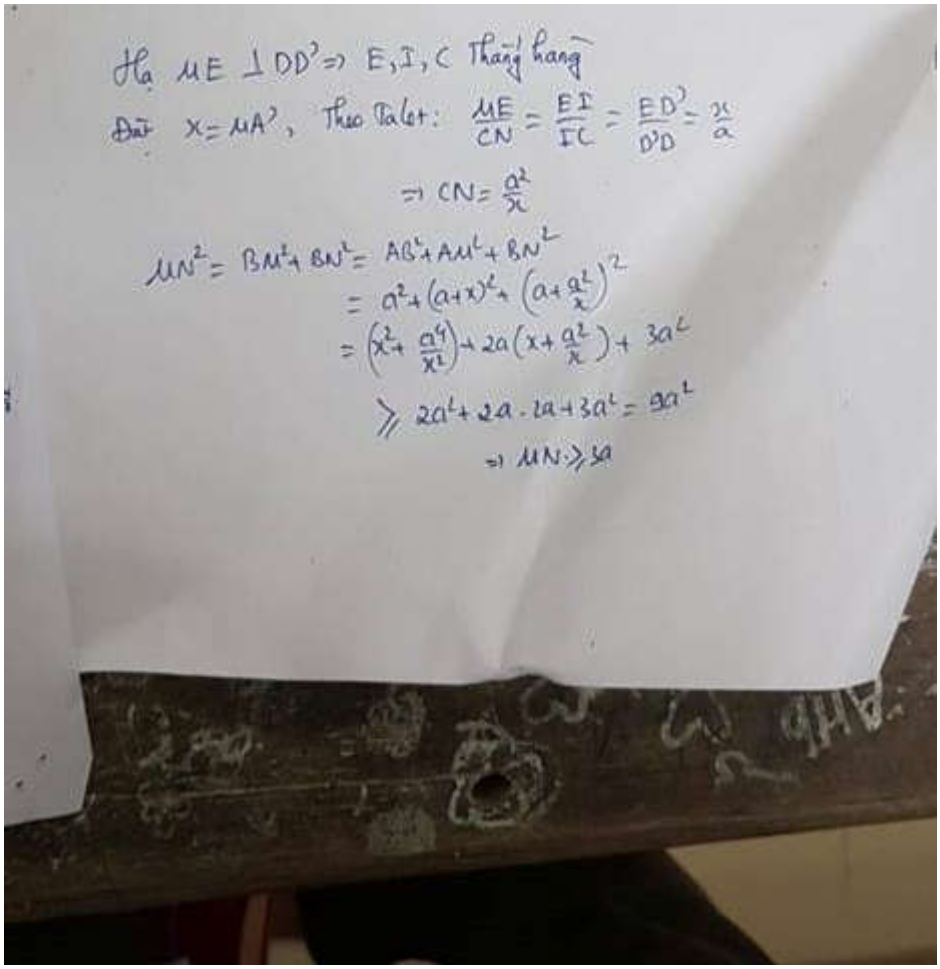
Do tam giác MBN vuông tại B nên $MN^2 = MB^2 + BN^2 = AB^2 + AM^2 + BN^2$

$$= a^2 + (a+x)^2 + \left(a + \frac{a^2}{x}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{a^4}{x^2}\right) + 2a\left(x + \frac{a^2}{x}\right) + 3a^2$$

$$\geq 2\sqrt{x^2.\frac{a^4}{x^2}} + 2a.2\sqrt{x.\frac{a^2}{x}} + 3a^2 = 9a^2$$

Suy ra $MN \geq 3a$.

Vậy $\min MN = 3a$ khi $x = a$ tức là $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BC}$.



Email: binhlt.thpttinhgia1@thanhhoa.edu.vn

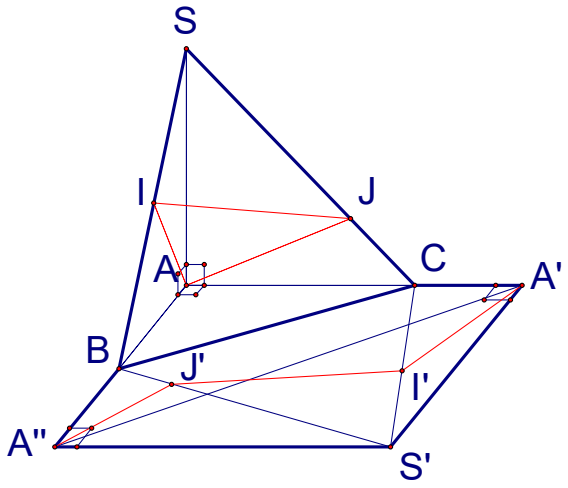
Câu 50. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC vuông tại A, $SA \perp (ABC)$ và $SA = h$ không đổi; hai điểm B, C thay đổi sao cho $AB + AC = h$. Gọi I, J là các điểm lần lượt di động trên các cạnh SB và SC. Tính chu vi ngắn nhất của tam giác AIJ.

A. h. **B.** $h\sqrt{2}$. **C.** $h\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}h$.

Lời giải

Tác giả : Lê Thanh Bình, ***Tên FB:*** Lê Thanh Bình

Chọn B



Trên tia AC và tia AB lần lượt lấy các điểm $A', A"$ sao cho $AA' = AA" = SA = h$.

Gọi S' là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $AA'S'A"$. Khi đó $AA'S'A"$ là hình vuông cạnh

bằng h.

Dễ thấy $\Delta SAB = \Delta S'A'C$, $\Delta SAC = \Delta S'A"B$

và $\Delta SBC = \Delta S'CB\ (c-c-c)$.

Như vậy mặt xung quanh của hình chóp đã được

trải ra trên mặt phẳng chứa đáy.

Gọi I', J' lần lượt thuộc các đoạn $S'C$ và

$S'B$ sao cho $S'I' = SI$, $S'J' = SJ$.

Khi đó chu vi tam giác AIJ bằng độ dài đường gấp khúc $A'I' + I'J' + J'A"$.

Ta có $A'I' + I'J' + J'A" \geq A'A" = h\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $A', I', J', A"$ thẳng hàng.

Vậy chu vi tam giác AIJ nhỏ nhất bằng $h\sqrt{2}$.

Email: thuyhung8587@gmail.com

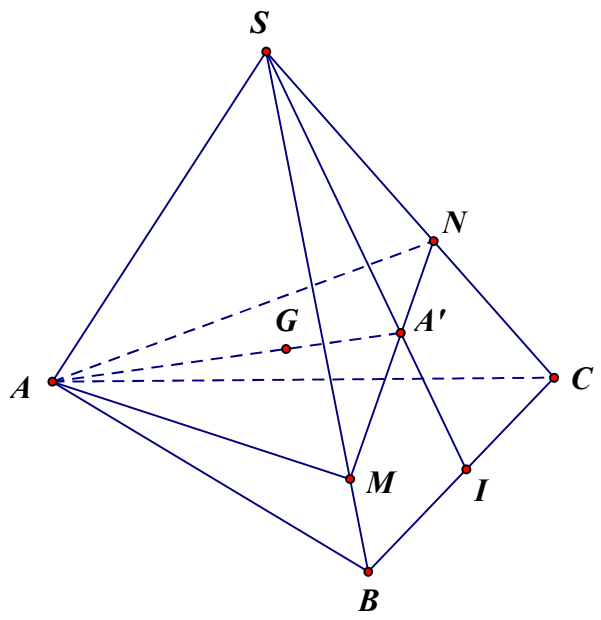
Câu 51. Cho tứ diện $SABC$ và G là trọng tâm của tứ diện. Một mp (α) quay quanh AG, cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M và N (M, N không trùng S). Gọi V là thể tích tứ diện $SABC$, V_1 là thể tích tứ diện $SAMN$ và gọi m, n lần lượt là GTLN và GTNN của $\frac{V_1}{V}$. Hãy tính $m+n$.

A. $m+n=1$. **B.** $m+n=\frac{17}{18}$. **C.** $m+n=\frac{18}{19}$. **D.** $m+n=\frac{19}{20}$.

Lời giải

Tác giả : Cấn Việt Hưng,Tên FB: Viet Hung

Chọn B



+)Gọi A' là trọng tâm $\triangle SBC$, I là trung điểm BC Ta có A, G, A' thẳng hàng, S, A', I thẳng hàng

+)Đặt $\frac{SM}{SB} = x, \frac{SN}{SC} = y,$ với $0 < x, y \le 1$

+)Ta có: $\frac{V_1}{V} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = xy$

+)Mặt khác: $\frac{SB}{SM} + \frac{SC}{SN} = 2\frac{SI}{SA'} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \Rightarrow y = \frac{x}{3x-1}$

+)Vì $0 < y \le 1$ nên ta có : $\frac{1}{2} \le x \le 1$.

+) Khi đó : $\frac{V_1}{V} = xy = \frac{x^2}{3x-1}$. Xét $f(x) = \frac{x^2}{3x-1}, \frac{1}{2} \le x \le 1$

$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

+) Bảng biến thiên:

x	$1/2$		$2/3$		1
$f'(x)$			0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$4/9$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

+) Từ bảng biến thiên suy ra : $m = \frac{1}{2}, \mathrm{n} = \frac{4}{9} \Rightarrow m + n = \frac{17}{18}$.

Email: vungatoannvx@gmail.com

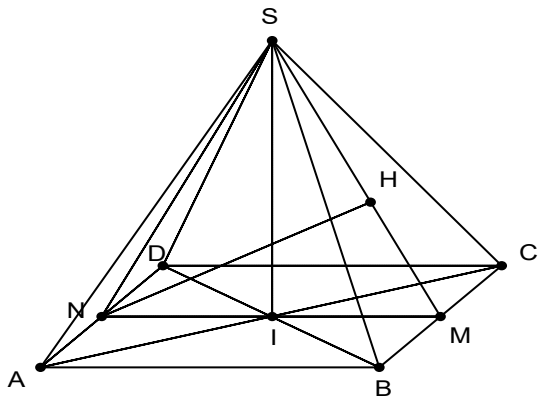
Câu 52. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 2, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng α. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ nhỏ nhất khi $\cos\alpha = \sqrt{\frac{a}{b}}$ với $a; b \in \mathbb{N}$ và $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ là phân số tối giản. Tính $\mathrm{P} = 2018\mathrm{a} - 2019\mathrm{b}$.

A. $P=-2020$. **B.** $P=-2022$. **C.** $P=-4039$. **D.** $P=-8077$.

Lời giải

Tác giả : Vũ Nga,Tên FB: Nga Vu

Chọn C



Gọi M,N lần lượt là trung điểm BC và AD, H là hình chiếu vuông góc của N trên SM, I là giao điểm của AC và BD. Ta có: $SI\perp(ABCD)$, $BC\perp(SMN)\Rightarrow\widehat{SMN}=\alpha$.

Do AD song song với mặt phẳng (SBC) nên $d(A;(SBC))=d(N;(SBC))=NH=2$.

$$MN=\frac{NH}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\Rightarrow S_{ABCD}=MN^2=\frac{4}{\sin^2\alpha}.$$

$$SI=MI.\tan\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.\tan\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SI.S_{ABCD}=\frac{4}{3\sin^2\alpha.\cos\alpha}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sin^4\alpha.2\cos^2\alpha=\sin^2\alpha.\sin^2\alpha.2\cos^2\alpha\le\left(\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{3}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow\sin^2\alpha.\cos\alpha\le\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

$$\left(V_{S.ABCD}\right)_{\min}\Leftrightarrow\left(\sin^2\alpha.\cos\alpha\right)_{\max}$$

$$\Leftrightarrow\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha\Leftrightarrow\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}\Rightarrow P=2018a-2019b=-4039.$$

Mail: congnhangiang2009@gmail.com

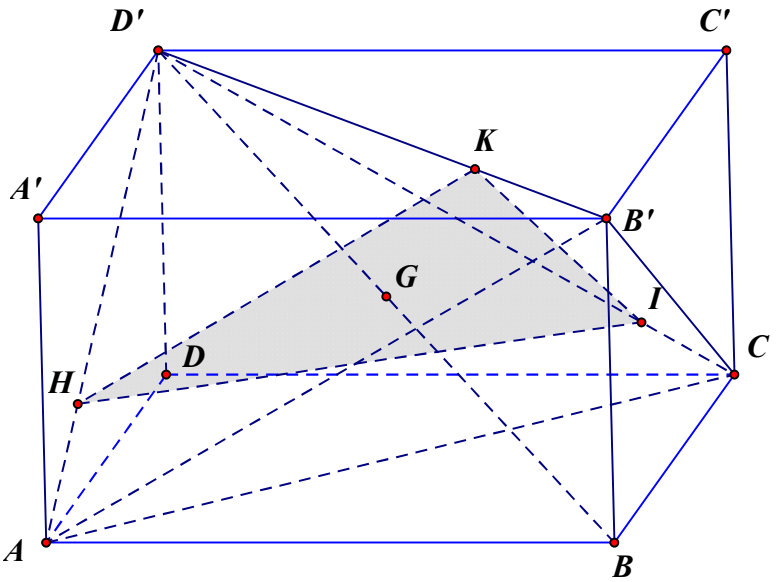
Câu 53. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = a\sqrt{2}, AA' = a\sqrt{3}$. Gọi G là trung điểm của BD', mặt phẳng (P) đi qua G và cắt các tia $AD', CD', D'B'$ tương ứng tại ba điểm phân biệt H, I, K. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{1}{D'H^2} + \frac{1}{D'K^2} + \frac{1}{D'I^2}$.

A. $T = \frac{1}{3a^2}$. **B.** $T = \frac{4}{a^2}$. **C.** $T = \frac{4}{3a^2}$. **D.** $T = \frac{1}{12a^2}$.

Họ và tên: Hoàng Nhàn, fb: Hoàng Nhàn

Lời giải

Chọn C



Đặt $\frac{D'H}{D'A} = x, \frac{D'I}{D'C} = y, \frac{D'K}{D'B'} = z$.

ta có $\overrightarrow{D'G} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D'B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D'A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{D'C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{D'D}$

Ta có $\overrightarrow{D'H} = x\overrightarrow{D'A} = x\left(\overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{D'A}\right) \Rightarrow \frac{1}{x}\overrightarrow{D'H} = \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{D'A}$

$\overrightarrow{D'I} = y\overrightarrow{D'C} = y\left(\overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{D'C'}\right) \Rightarrow \frac{1}{y}\overrightarrow{D'I} = \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{D'C'}$

$\overrightarrow{D'K} = z\overrightarrow{D'A} = z\left(\overrightarrow{D'A'} + \overrightarrow{D'C'}\right) \Rightarrow \frac{1}{z}\overrightarrow{D'K} = \overrightarrow{D'A'} + \overrightarrow{D'C'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{D'G} = \frac{1}{4x}\overrightarrow{D'H} + \frac{1}{4y}\overrightarrow{D'I} + \frac{1}{4z}\overrightarrow{D'K}$

Do $\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DK}$ không đồng phẳng nên $\frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{4z} = 1$.

$\Rightarrow \frac{D'A}{D'H} + \frac{D'C}{D'I} + \frac{D'B}{D'K} = 4$

$\Rightarrow 4^2 = \left(\frac{D'A}{D'H} + \frac{D'C}{D'I} + \frac{D'B}{D'K}\right)^2 \le \left(\frac{1}{D'H^2} + \frac{1}{D'I^2} + \frac{1}{D'K^2}\right)\left(D'A^2 + D'C^2 + D'B'^2\right)$

$\Rightarrow T \ge \frac{16}{D'A^2 + D'C^2 + D'B'^2} = \frac{16}{12a^2} = \frac{4}{3a^2}$

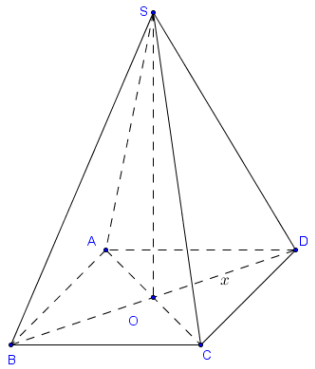
Email: Tanbaobg@gmail.com

Câu 54. Gọi V là thể tích của khối chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng b. Tìm giá trị lớn nhất của V?

A. $\dfrac{4b^3}{9\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{b^3}{3\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{b^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{2b^3\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$.

Lời giải

Họ và tên: Đỗ Tấn Bảo ***Tên FB: Đỗ Tấn Bảo***



Chọn A

Giả sử hình chóp đều S.ABCD có O là tâm hình vuông ABCD. Suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Đặt $OD = x \Rightarrow SO = \sqrt{b^2 - x^2}, 0 < x < b$.

Do đó thể tích S.ABCD là $V_{S.ABCD} = \dfrac{2}{3}x^2\sqrt{b^2 - x^2}$.

Đặt $t = \sqrt{b^2 - x^2}, 0 < t < b$ thì $V_{S.ABCD} = \dfrac{2}{3}(b^2 - t^2)t = \dfrac{2}{3}f(t)$ với $f(t) = b^2t - t^3$.

Cách 1. Dùng bất đẳng thức Cosi (Cô Lưu Thêm)

Ta có $V = \dfrac{2}{3}x^2\sqrt{b^2 - x^2} = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^4(b^2 - x^2)} \le \dfrac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\dfrac{x^2 + x^2 + 2b^2 - 2x^2}{3}\right)^3} = \dfrac{4b^3}{9\sqrt{3}}$.

Vậy $V_{\max} = \dfrac{4b^3}{9\sqrt{3}}$.

Cách 2. Dùng hàm số

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\frac{b}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{b}{\sqrt{3}}$		b		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(t)$					0	↗	$\frac{2b^3}{3\sqrt{3}}$	↘	0		

Dựa vào bảng biến thiên thì $V_{S.ABCD}$ nhỏ nhất $V_{\max} = \dfrac{2}{3}\underset{(0;b)}{\text{Max}}\, f(t) = \dfrac{2}{3}.\dfrac{2b^3}{3\sqrt{3}} = \dfrac{4b^3}{9\sqrt{3}}$ (ddvtt).

Phương án B là đoán tam giác SOD vuông cân.

Phương án C là đoán góc giữa cạnh bên với đáy bằng 60^0.

Phương án D là do nhầm lẫn $x = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$.

Email: chuviettan@gmail.com

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang cân $(AD//BC)$ và $BC = 2a$, $AB = AD = DC = a\,(a > 0)$. Mặt bên SBC là tam giác đều. Biết SD vuông góc với AC. Mặt phẳng (α) qua điểm M thuộc đoạn BD (M khác B, D) và song song với hai đường thẳng SD và AC. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) có diện tích lớn nhất là.

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. **C.** $2a^2$. **D.** a^2.

Lời giải

Tác giả : Chu Viết Tấn,Tên FB: Chu Viết Tấn

Chọn A

Lời giải

Dễ thấy đáy $ABCD$ là nữa hình lục giác đều cạnh a.

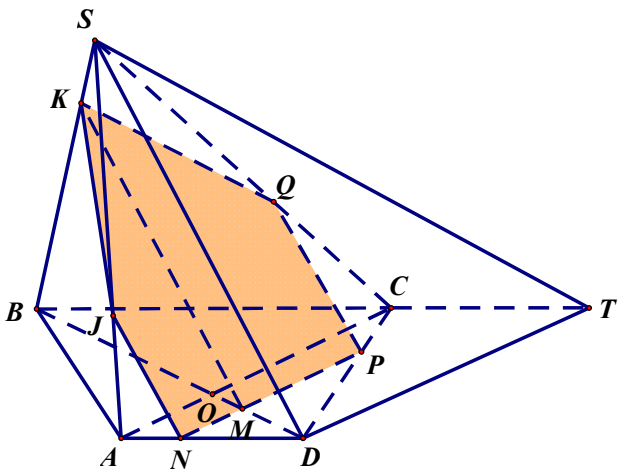
Kẻ DT song song AC (T thuộc BC). Suy ra $CT = AD = a$ và DT vuông góc SD.

Ta có: $DT = AC = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SCT có $SC = 2a, CT = a,\ \widehat{SCT} = 120^0 \Rightarrow ST = a\sqrt{7}$

Xét tam giác vuông SDT có $DT = a\sqrt{3}$, $ST = a\sqrt{7} \Rightarrow SD = 2a$

TH1: M thuộc đoạn OD



Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt AD, DC lần lượt tại N, P. Qua M, N, P kẻ các đường thẳng song song với SD cắt SB, SA, SC lần lượt tại K, J, Q. Thiết diện là ngũ giác $NPQKJ$.

Ta có: NJ, MK, PQ cùng vuông góc với NP.

$$dt(NPQKJ) = dt(NMKJ) + dt(MPQK) = \frac{1}{2}(NJ + MK)MN + \frac{1}{2}(MK + PQ)MP$$

$$= \frac{1}{2}(NJ + MK).NP \text{ (do } NJ = PQ\text{).}$$

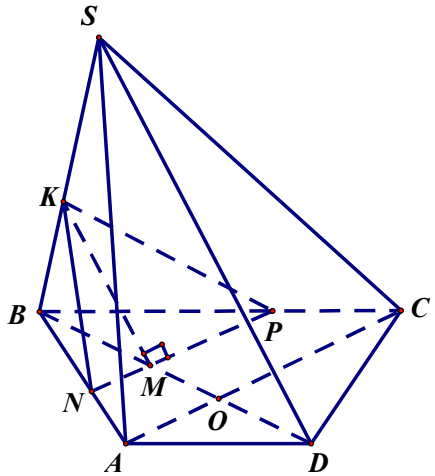
Đặt $MD = x$, $0 < x < \frac{a\sqrt{3}}{3} = OD$ Ta có: $\frac{NP}{AC} = \frac{MD}{OD} \Rightarrow NP = \frac{AC.MD}{OD} = \frac{x.a\sqrt{3}}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = 3x$

$$\frac{NJ}{SD} = \frac{AN}{AD} = \frac{OM}{OD} \Rightarrow NJ = \frac{SD.OM}{OD} = \frac{2a.\left(\frac{a}{\sqrt{3}} - x\right)}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = 2(a - x\sqrt{3})$$

$$\frac{KM}{SD} = \frac{BM}{BD} \Rightarrow KM = \frac{SD.BM}{BD} = \frac{2a.\left(a\sqrt{3} - x\right)}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3} - x)$$

Suy ra: $dt\left(NPQKJ\right)=\frac{1}{2}\left(2(a-x\sqrt{3})+\frac{2}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3}-x)\right)3x=2(3a-2\sqrt{3}x)x$

TH2: M thuộc đoạn OB



Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB, BC lần lượt tại N, P.
Qua M cắt SB, SA, SC lần lượt tại K . Thiết diện là tam giác NPK .

Ta có: MK vuông góc với NP nên $S_{NPK}=\frac{1}{2}MK.NP$

Đặt $MD=x$ nên $x\in\left[\frac{a\sqrt{3}}{3};a\sqrt{3}\right)$

Ta có:

$$\frac{NP}{AC}=\frac{MB}{BO}\Rightarrow NP=\frac{AC.MB}{BD}=\frac{a\sqrt{3}\left(a\sqrt{3}-x\right)}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}=\frac{3\left(a\sqrt{3}-x\right)}{2}$$

$$\frac{KM}{SD}=\frac{BM}{BD}\Rightarrow KM=\frac{SD.BM}{BD}=\frac{2a.\left(a\sqrt{3}-x\right)}{a\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3}-x)$$

Suy ra: $dt\left(NPK\right)=\frac{3}{2}(\sqrt{3}a-x)^2$

Vậy diện tích thiết diện

$$S(x)=f\left(x\right)=\begin{cases}2(3a-2\sqrt{3}x)x & \text{khi } x\in\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)\\ \frac{3}{2}(\sqrt{3}a-x)^2 & \text{khi } x\in\left[\frac{a\sqrt{3}}{3};a\sqrt{3}\right)\end{cases}$$

Từ bảng biến thiên ta có diện tích thiết diện lớn nhất bằng $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ khi $x=\frac{\sqrt{3}}{4}a$

Email: **dmathtxqt@gmail.com**

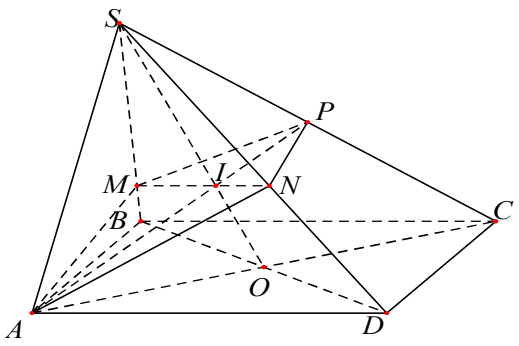
Câu 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Điểm P là trung điểm của SC . Một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SB và SD lần lượt tại M và N . Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Tác giả: **Lê Cảnh Dương,Tên FB: Cảnh Dương Lê**

Chọn A



Đặt $x=\frac{SM}{SB}$, $y=\frac{SN}{SD}$, $(0<x,y\le 1)$.

Ta có $\frac{V_1}{V}=\frac{V_{S.AMP}+V_{S.ANP}}{V}=\frac{V_{S.AMP}}{2V_{S.ABC}}+\frac{V_{S.ANP}}{2V_{S.ADC}}=\frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SB}.\frac{SP}{SC}+\frac{SN}{SD}.\frac{SP}{SC}\right)=\frac{1}{4}(x+y)$ (1)

Lại có $\frac{V_1}{V}=\frac{V_{S.AMN}+V_{S.PMN}}{V}=\frac{V_{S.AMN}}{2V_{S.ABD}}+\frac{V_{S.PMN}}{2V_{S.CBD}}=\frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}+\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}.\frac{SP}{SC}\right)=\frac{3}{4}xy$ (2).

Suy ra $\frac{1}{4}(x+y)=\frac{3}{4}xy\Rightarrow x+y=3xy\Rightarrow y=\frac{x}{3x-1}$. Từ điều kiện $0<y\le 1$, ta có $\frac{x}{3x-1}\le 1$, hay $x\ge\frac{1}{2}$. Thay vào (2) ta được tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V}=\frac{3}{4}.\frac{x^2}{3x-1}$.

Đặt $f(x)=\frac{3}{4}.\frac{x^2}{3x-1}, x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$, ta có $f'(x)=\frac{3}{4}.\frac{3x^2-2x}{(3x-1)^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0 & (L)\\ x=\frac{2}{3} & (N)\end{array}\right.$.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)=\frac{3}{8}$, $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$, do đó $\min\frac{V_1}{V}=\min\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};1\right]}f(x)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

Email: chuviettan@gmail.com

Câu 57. Trong các hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp hình cầu bán kính a, thể tích khối chóp nhỏ nhất là

A. $\frac{32}{3}a^3$. **B.** $10a^3$. **C.** $\frac{10\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $\frac{16}{3}a^3$.

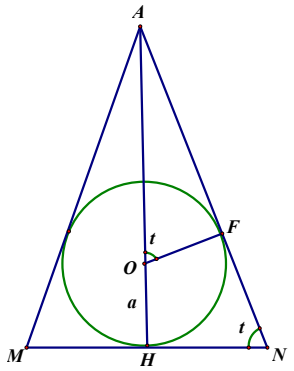
Lời giải

Tác giả : Chu Viết Tấn,Tên FB: Chu Viết Tấn

Chọn A

Giải:

Xét mặt phẳng đi qua đường cao SH của hình chóp và trung điểm M của 1 cạnh đáy cắt hình chóp theo tam giác cân SMN và cắt hình cầu theo đường tròn tâm O bán kính a nội tiếp tam giác SMN.



Đặt $\widehat{SNH} = t, SH = x$ ta có $HN = x\cot t, MN = 2x\cot t$

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}MN^2.SH = \frac{4}{3}x^3\cot^2 t$

Ta có

$$SH = OH + SO \Leftrightarrow x = a + \frac{a}{\cos t} \Leftrightarrow \cos t = \frac{a}{x-a}$$

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \left(\frac{a}{x-a}\right)^2 = \frac{x^2 - 2ax}{(x-a)^2}, \cot^2 t = \frac{a^2}{x(x-a)}$$

Vậy $V = \frac{4a^2x^2}{3(x-2a)}$ rõ ràng $x > 2a$ thì thể tích đó mới tồn tại.

Ta xét hàm số $f(x) = \frac{4a^2x^2}{3(x-2a)}$ khi đó $f'(x) = \frac{4a^2x(x-4a)}{3(x-2a)^2}$

Vậy khối chóp có thể tích nhỏ nhất bằng $\frac{32a^3}{3}$ khi $x = 4a$ và cạnh đáy bằng $2a\sqrt{2}$

Câu 58. Email: mhiepHD@gmail.com

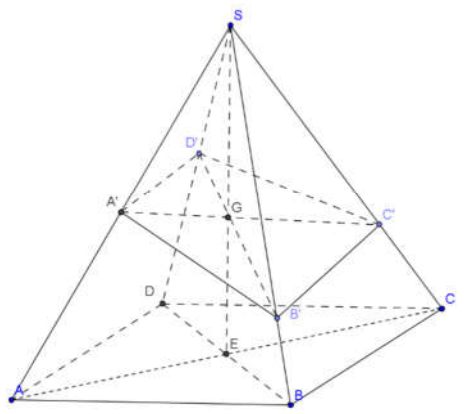
Câu 59. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên bằng 1, các mặt bên là các tam giác có góc ở đỉnh S bằng 45^0. Cho A' là trung điểm SA, C' thuộc cạnh SC sao cho $\frac{SC}{SC'} = \frac{3}{2}$. Mặt phẳng (P) đi qua A', C' cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D'. Số nào gần với giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác A'B'C'D' .

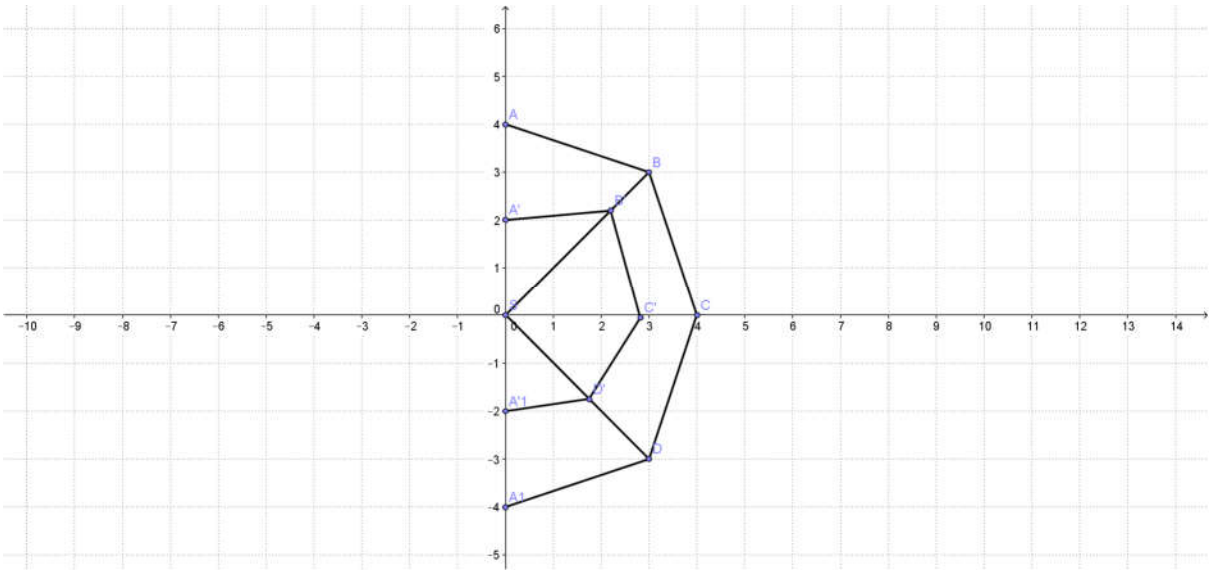
A. 1.79 **B.** 3.3 **C.** 2.05 **D.** 1.3

Lời giải.

Tác giả: Vương Mạnh Hiệp.,Tên FB: HiepVuong

Chọn A





Từ giả thiết của bài toán ta có: $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} \Rightarrow \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{7}{2}(1)$

Trải phẳng 4 mặt bên của hình chóp và ghép lại sao cho thu được một nửa lục giác đều với cạnh SA tách thành SA và SA' và đặt vào hệ Oxy(hình vẽ)

Khi đó ta có: $S(0;0); A(0;1); A'(0;-1); A'\left(0;\frac{1}{2}\right); A'_1\left(0;-\frac{1}{2}\right); C'\left(\frac{2}{3};0\right)$; và $B'(a;a); D'(b;-b); a;b \in \left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{7}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{2}} \geq \frac{4}{a+b} \Rightarrow a + b \geq \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Chu vi cần A'B'C'D' là $c = A'B' + B'C' + C'D' + D'A'_1$

$$\Leftrightarrow c=\sqrt{a^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(a-\frac{2}{3}\right)^2+a^2}+\sqrt{b^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(b-\frac{2}{3}\right)^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow c=\left[\sqrt{a^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{b^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2}\right]+\left[\sqrt{\left(a-\frac{2}{3}\right)^2+a^2}+\sqrt{\left(b-\frac{2}{3}\right)^2+b^2}\right]$$

$$\Rightarrow c\geq\sqrt{(a+b)^2+(a+b-1)^2}+\sqrt{(a+b)^2+\left(a+b-\frac{4}{3}\right)^2}\geq$$

$$\Rightarrow \min(c)\approx 1.79$$

Dấu "=" xẩy ra khi $a=b=\frac{2\sqrt{2}}{7}\Rightarrow B'D'\parallel BD$.

Email: nvthang368@gmail.com

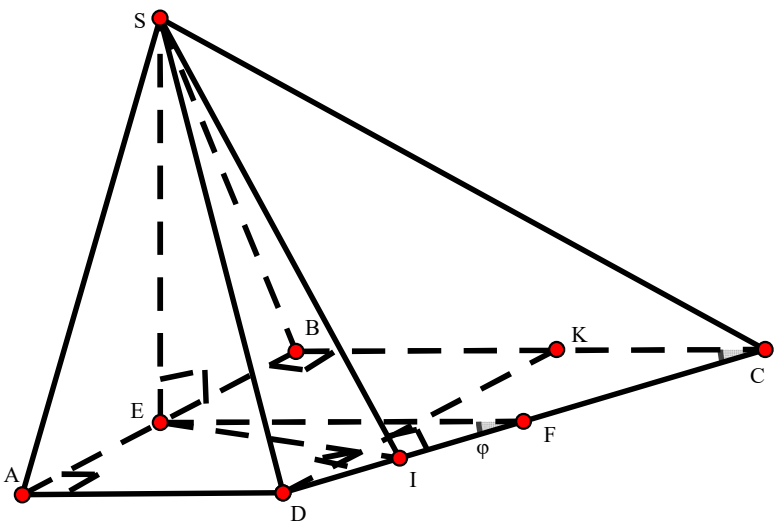
Câu 60. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có mặt bên SAB là tam giác đều cạnh bằng a nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, đáy là hình thang vuông tại A và B, và $AD+BC=2b$, với a, b là các số dương cho trước không đổi, C, D là 2 điểm thay đổi. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của diện tích toàn phần của hình chóp $S.ABCD$ (diện tích toàn phần bằng tổng diện tích tất cả các mặt của hình chóp). Khi đó giá trị $\frac{4m}{a}$ có dạng: $\sqrt{x}.a+y.b+\sqrt{z.a^2+t.b^2}$, với x, y, z, t là các số nguyên dương. Tính tổng $x+y+z+t$

A. 16 . **B.** 18. **C.** 14 **D.** 13 .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Thắng; FB: Nguyễn Thắng

Chọn B



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD ⇒ Ta có SE là đường cao của hình chóp và EF là đường trung bình của hình thang vuông ABCD

Hạ $EI\perp CD$ ta chứng minh được $CD\perp(SEI)\Rightarrow SI\perp CD$

Ta cũng chứng minh được $SA\perp AD$, $SB\perp BC$

Ta tính được $SE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $EF=b$; $S_{SAB}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{ABCD}=ab$; $S_{SAD}+S_{SBC}=ab$

Và: $S_{SCD} = \frac{1}{2} SI.CD$

Vì tổng $S_{SAB} + S_{ABCD} + S_{SAD} + S_{SBC}$ không đổi nên diện tích toàn phần của hình chóp $S.ABCD$ đạt GTNN $\Leftrightarrow$ S_{SCD} đạt GTNN

Gọi $\widehat{IFE} = \varphi$ thì: $EI = EF.\sin\varphi = b\sin\varphi$. Theo ĐL Pytago ta tính được:

$$SI = \sqrt{SE^2 + EI^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 4b^2\sin^2\varphi}$$

Kẻ $DK // AB \Rightarrow DK = AB = a \Rightarrow CD = \frac{a}{\sin\varphi}$

$\Rightarrow S_{SCD} = \frac{1}{2}.\frac{a}{\sin\varphi}.\frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 4b^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{4}a\sqrt{\frac{3a^2}{\sin^2\varphi} + 4b^2} \Rightarrow S_{SCD}$ đạt GTNN $\Leftrightarrow$

$\sin\varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = 90^0$ và GTNN của S_{SCD} bằng: $\frac{1}{4}a\sqrt{3a^2 + 4b^2}$

Vậy $m = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 2ab + \frac{1}{4}a\sqrt{3a^2 + 4b^2} \Rightarrow \frac{4m}{a} = a\sqrt{3} + 8b + \sqrt{3a^2 + 4b^2}$

$\Rightarrow x = 3,\ y = 8,\ z = 3,\ t = 4 \Rightarrow x + y + z + t = 18$

tongtuetam2112@gmail.com

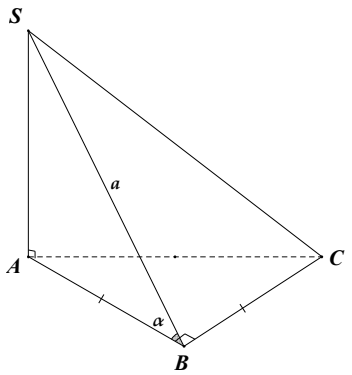
Câu 61. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$, $SA \perp (ABC)$. Đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, $SB = a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (ABC). Xác định giá trị của $\sin\alpha$ để thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất.

A. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\sin\alpha = 1$. **D.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Tác giả : Tống Tuệ Tâm, FB: Tâm Tâm Tuệ

Chọn A



Ta có : $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow ((SBC),(ABC)) = \alpha = \widehat{SBA}.$

$\Rightarrow AB = a.\cos\alpha = BC; SA = a.\sin\alpha$. Nên $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{6}.SA.AC.BC = \frac{1}{6}a^3.\sin\alpha.\cos^2\alpha.$

Suy ra $V_{S.ABC}$ max $\Leftrightarrow \left(\sin\alpha.\cos^2\alpha\right)$max

Đặt $x=\sin\alpha\left(0<x<1\right)$, khi đó $\sin\alpha.\cos^2\alpha = x\left(1-x^2\right)=x-x^3$

Xét hàm số $y=x-x^3$ với $0<x<1$ ta có $y'=1-3x^2$,

lập bảng biến thiên ta có $y_{\max}=y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Vậy $V_{\max} \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Phongvathao@gmail.com

Câu 62. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. G là trung điểm BD', mặt phẳng (P) thay đổi qua G cắt $AD';CD';D'B'$ tương ứng tại H,I,K. Khi đó giá trị lớn nhất biểu thức

$$T=\frac{1}{D'H.D'I}+\frac{1}{D'I.D'K}+\frac{1}{D'K.D'H}$$

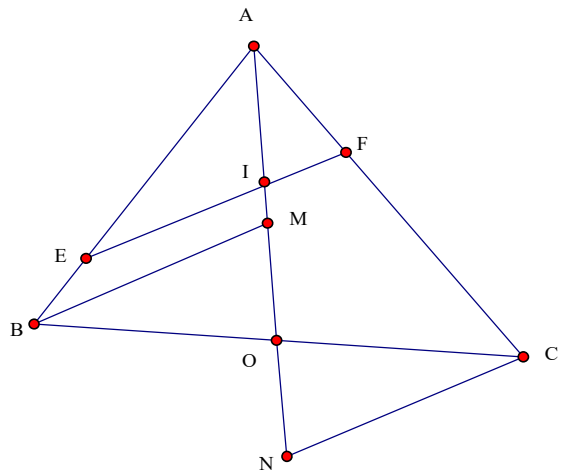
A. $\frac{8}{3a^2}$ **B.** $\frac{16a^2}{3}$ **C.** $\frac{16}{3a^2}$ **D.** $\frac{8a^2}{3}$

Lời giải

Chọn A

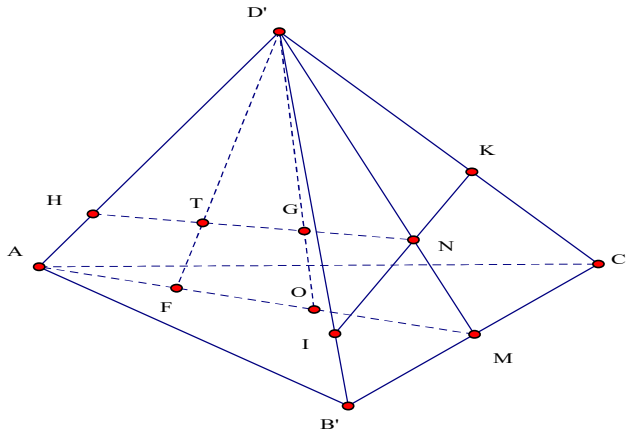
Vì G là trung điểm BD' nên G là trọng tâm của tứ diện $D'ACB'$

Xét bài toán phụ: Trong tam giác ABC, O là trung điểm của BC; đường thẳng bất kì cắt AB,AO,AC lần lượt tại E,I,F. Khi đó ta có: $\frac{AB}{AE}+\frac{AC}{AF}=2\frac{AO}{AI}$.



Từ B,C kẻ các đường song song với EF cắt AO lần lượt tại M,N. Suy ra $OM=ON$ và theo Talet ta có:

$$\frac{AB}{AE}+\frac{AC}{AF}=\frac{AM}{AI}+\frac{AN}{AI}=\frac{AO-OM+AO+ON}{AI}=2\frac{AO}{AI}$$



Áp dụng kết quả trên vào bài toán ta được:

$$\frac{D'B'}{D'I}+\frac{D'C}{D'K}+\frac{D'A}{D'H}=2\frac{D'M}{D'N}+2\frac{D'F}{D'T}-\frac{D'O}{D'G}=3\frac{D'O}{D'G}$$

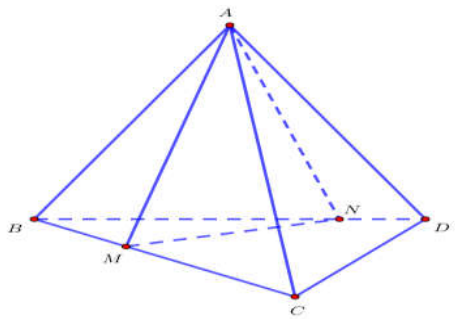
Hay ta có: $\frac{a\sqrt{2}}{4D'I}+\frac{a\sqrt{2}}{4D'K}+\frac{a\sqrt{2}}{4D'H}=1$. Ta chứng minh được $(ab+bc+ca)\le\frac{1}{3}(a+b+c)^2$ nên

$$T=\frac{1}{D'H.D'I}+\frac{1}{D'I.D'K}+\frac{1}{D'K.D'H}\le\frac{1}{3}(\frac{1}{D'I}+\frac{1}{D'H}+\frac{1}{D'K})^2=\frac{8}{3a^2}$$

Dấu bằng xảy ra khi (P) đi qua G và song song với mp(ABC). Vậy chọn A.

Mail: lenhan42a2@gmail.com

Câu 63. Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M,N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng BC và BD sao cho $2\frac{BC}{BM}+3\frac{BD}{BN}=10$. Gọi V_1,V_2 lần lượt là thể tích của các khối tứ diện $ABMN$ và $ABCD$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{2}{7}$. **D.** $\frac{6}{25}$.

Người giải: Lê Văn Nhân Tên FB: le van nhan

Lời giải

Chọn D

Ta có $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}d\left(A;(BMN)\right).S_{\Delta BMN}}{\frac{1}{3}d\left(A;(BCD)\right).S_{\Delta BCD}}=\frac{S_{\Delta BMN}}{S_{\Delta BCD}}$.

Gọi H là hình chiếu của M lên BD và K là hình chiếu của C lên BD, khi đó ta có

$$\frac{S_{\Delta BMN}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{MH.BN}{CK.BD}=\frac{BM}{BC}.\frac{BN}{BD}$$

$10=2\frac{BC}{BM}+3\frac{BD}{BN}\ge 2\sqrt{6.\frac{BC}{BM}.\frac{BD}{BN}}\Rightarrow \frac{BC}{BM}.\frac{BD}{BN}\le \frac{25}{6}\Rightarrow \frac{BM}{BC}.\frac{BN}{BD}\ge \frac{6}{25}$.

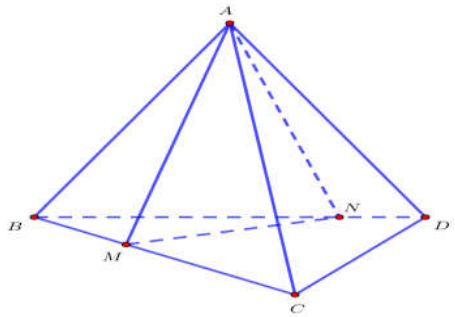
Dấu "=" xảy ra khi $BM=\frac{2}{5}BC, BN=\frac{3}{5}BD$

Suy ra $\frac{S_{\Delta BMN}}{S_{\Delta BCD}}\ge \frac{6}{25}$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2}$ nhỏ nhất bằng $\frac{6}{25}$.

Mail: lenhan42a2@gmail.com

Câu 64. Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M,N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng BC và BD sao cho $2\frac{BC}{BM}+3\frac{BD}{BN}=10$. Gọi V_1,V_2 lần lượt là thể tích của các khối tứ diện $ABMN$ và $ABCD$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{2}{7}$. **D.** $\frac{6}{25}$.

Người giải: Lê Văn Nhân Tên FB: le van nhan

Lời giải

Chọn D

Ta có $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}d\left(A;(BMN)\right).S_{\Delta BMN}}{\frac{1}{3}d\left(A;(BCD)\right).S_{\Delta BCD}}=\frac{S_{\Delta BMN}}{S_{\Delta BCD}}$.

Gọi H là hình chiếu của M lên BD và K là hình chiếu của C lên BD, khi đó ta có

$\frac{S_{\Delta BMN}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{MH.BN}{CK.BD}=\frac{BM}{BC}.\frac{BN}{BD}$

$10=2\frac{BC}{BM}+3\frac{BD}{BN}\ge 2\sqrt{6.\frac{BC}{BM}.\frac{BD}{BN}}\Rightarrow \frac{BC}{BM}.\frac{BD}{BN}\le \frac{25}{6}\Rightarrow \frac{BM}{BC}.\frac{BN}{BD}\ge \frac{6}{25}$.

Dấu "=" xảy ra khi $BM=\frac{2}{5}BC, BN=\frac{3}{5}BD$

Suy ra $\frac{S_{\Delta BMN}}{S_{\Delta BCD}}\ge \frac{6}{25}$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2}$ nhỏ nhất bằng $\frac{6}{25}$.

Email: lanntn.c3tk@nghean.edu.vn

Câu 65. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$. có cạnh bên $AA' = a\sqrt{3}$, đáy là hình thoi cạnh $a, \widehat{BAD} = 60^0$ .Trên cạnh *AB* lấy điểm *M* khác *A* và *B*. Gọi (*P*) là mặt phẳng đi qua *M* và song song với mặt phẳng (ACD').

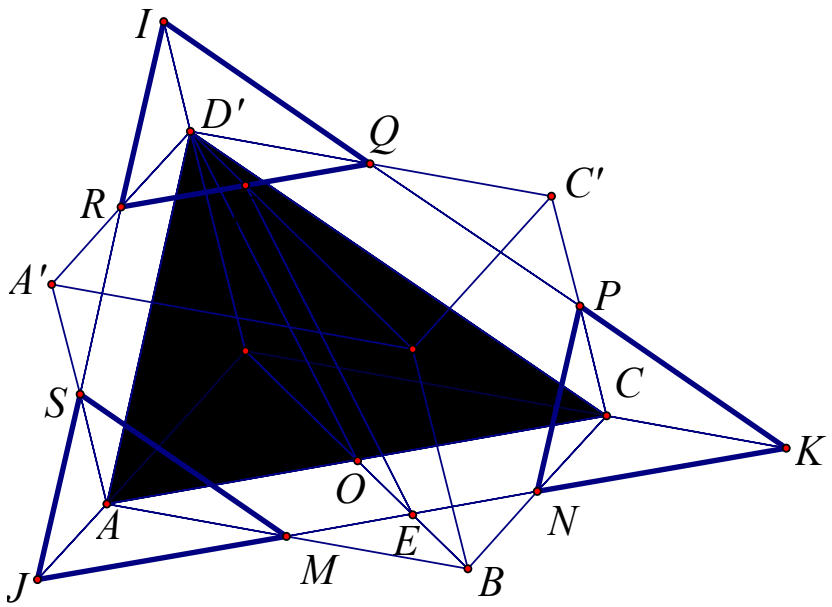
Khi thiết diện của hình hộp và mặt phẳng (*P*) có diện tích lớn nhất thì diện tích của $\Delta ACD'$ là :

A. $\frac{3a^2\sqrt{39}}{8}$ **B.** $\frac{3a^2\sqrt{39}}{4}$ **C.** $\frac{3a^2\sqrt{39}}{2}$ **D.** $\frac{a^2\sqrt{13}}{8}$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Thị Ngọc Lan

Chọn A



Trong mp(*ABCD*), qua *M* vẽ đường thẳng song song với *AC* cắt *DB, BC* lần lượt tại *E, N*.

Trong mp(*BDD'B'*), qua *E* vẽ đường thẳng song song với *D'O* (*O=AC∩BD*) cắt *B'D'* tại *F*.

Trong mp(*A'B'C'D'*), qua *F* vẽ đường thẳng song song với *AC* cắt *A'D', D'C'* lần lượt tại *R, Q*.

Trong mp(*AA'D'D*), qua *R* vẽ đường thẳng song song với *AD'* cắt *AA'* tại *S*.

Trong mp(*CC'D'D*), qua *Q* vẽ đường thẳng song song với *CD'* cắt *CC'* tại *P*.

Thiết diện là lục giác *MNPQRS*Do các mặt đối diên của hình hộp song song nên các cạnh đối của lục giác thiết diên *MNPQRS* song song và 3 cặp cạnh đó lần lượt song song với các cạnh tam giác *ACD'*.

$\Rightarrow$ Các tam giác *JKI*, *ACD'*, *RQI*, *JMS*, *NKP* đồng dạng$\Rightarrow$ $\frac{MJ}{MN} = \frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NB} = \frac{NK}{NM} = \frac{PC}{PC'} = \frac{PK}{PQ} = \frac{QD'}{QC'} = \frac{QI}{QP} \Rightarrow MJ=NK$ và $PK=QI$

$\Rightarrow$ Các tam giác *RQI*, *JMS*, *NKP* bằng nhau (gọi diện tích của chúng là S_1 và gọi diện tích các tam giác *JKI*, *ACD'* lần lượt là S_2, *S*)

Đặt $\frac{AM}{AB} = k$; ta có điều kiện $0 < k < 1$ và có:

$\frac{S_1}{S}=\left(\frac{JM}{AC}\right)^2=\left(\frac{AM}{DC}\right)^2=\left(\frac{AM}{AB}\right)^2=k^2 \Rightarrow S_1=k^2S$

$\frac{S_2}{S}=\left(\frac{JK}{AC}\right)^2=\left(\frac{JM+MK}{AC}\right)^2=\left(\frac{JM}{AC}+\frac{MK}{AC}\right)^2=(k+1)^2 \Rightarrow S_2=(k^2+2k+1)S$

$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện: $S_{td}=S_2-3S_1$

$S_{td}=2S(-k^2+k+\frac{1}{2})=2S\left[\frac{3}{4}-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right]\le\frac{3S}{2}$ (dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$)

S lớn nhất $\Leftrightarrow k=\frac{1}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB

Ta có : $\Delta ACD'$ cân tại D', $AD'=2a \Rightarrow S_{\Delta ACD'}=\frac{a^2\sqrt{39}}{4}$,

Email:datltt09@gmail.com

Câu 66. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích của tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối hộp ?

A. 8. **B.** $8\sqrt{2}$. **C.** $16\sqrt{2}$. **D.** $24\sqrt{3}$.

Lời giải

Tác giả :Vũ Thị Hằng,Tên FB:Đạt Lâm Huy

Chọn B

Đặt a,b,c là kích thước của khối hộp thì ta có hệ $\begin{cases}a^2+b^2+c^2=36\\2(ab+bc+ac)=36\end{cases}(1)$.

$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b+c)^2-2(a+b+c)=36\\2(ab+bc+ac)=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b+c)^2=72\\ab+bc+ca=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=6\sqrt{2}\\ab+bc+ca=18\end{cases}$.

Cần tìm GTLN của $V=abc$.

Cách 1.

Ta có $\begin{cases}b+c=6\sqrt{2}-a\\bc=18-a(b+c)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+c=6\sqrt{2}-a\\bc=18-a(6\sqrt{2}-a)\end{cases}$

Do $(b+c)^2\ge 4bc$ nên suy ra $\left(6\sqrt{2}-a\right)^2\ge 4\left[18-a\left(6\sqrt{2}-a\right)\right]$

$\Leftrightarrow 3a^2-12\sqrt{2}a\le 0\Rightarrow 0<a\le 4\sqrt{2}$.

Do đó $V=abc=a\left[18-a\left(6\sqrt{2}-a\right)\right]=a^3-6\sqrt{2}a^2+18a$.Lập bảng biến thiên của hàm số $f(a)=a^3-6\sqrt{2}a^2+18a$ trên $\left(0;4\sqrt{2}\right]$ ta tìm được GTLN của V là $8\sqrt{2}$ đạt được khi $a=4\sqrt{2},b=c=\sqrt{2}$ và các hoán vị.

Cách 2.

Đk tạm thời $a,b,c\in(0;6\sqrt{2})$

Ta thấy a,b,c là 3 nghiệm của phương trình $x^3-6\sqrt{2}x^2+18x-V=0(2)$

$(2)\Leftrightarrow x^3-6\sqrt{2}x^2+18x=V$ .Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)=x^3-6\sqrt{2}x^2+18x$ và tìm V lớn nhất để phương trình có 3 nghiệm(không nhất thiết phân biệt) thuộc khoảng $(0;6\sqrt{2})$ thì ra đáp số tương tự cách 1.

Sai lầm mắc phải là học sinh dùng bđt Côsi tìm GTLN của V nhưng dấu '=' không xảy ra.

Ta có $AC'^2=a^2+b^2+c^2=36; S=2ab+2bc+2ca=36\Rightarrow(a+b+c)^2=72\Rightarrow a+b+c=6\sqrt{2}$

$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\left(\frac{6\sqrt{2}}{3}\right)^3=16\sqrt{2}$. Vậy $V_{Max}=16\sqrt{2}$

Họ và tên: Phạm Thanh My

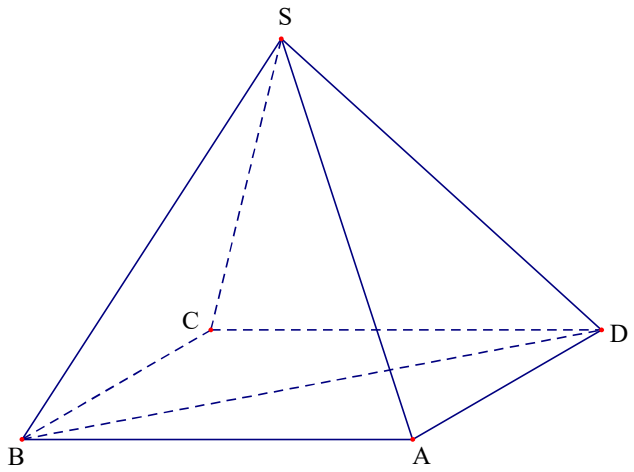
Email: phamthanhmy@gmail.com

Facebook: Pham Thanh My

Câu 67. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, các tam giác SBC và SCD đều là các tam giác vuông cân đỉnh S. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

Lời giải



Chọn C

ΔSBC và ΔSCD đều là các tam giác vuông cân đỉnh S $\Rightarrow CS=\frac{a\sqrt{2}}{2}, \widehat{BCS}=\widehat{DCS}=45^0$

Đặt $\widehat{BCD}=\alpha$

$$V_{S.ABCD}=2V_{S.BCD}=\frac{1}{3}CB.CD.CS\sqrt{1+2\cos\widehat{BCS}.\cos\widehat{DCS}.\cos\widehat{BCD}-\cos^2\widehat{BCS}-\cos^2\widehat{DCS}-\cos^2\widehat{BCD}}$$

$$=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\sqrt{\cos\alpha-\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\cos\alpha\right)^2}\leq\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ khi và chỉ khi $\cos\widehat{BCD}=\frac{1}{2}$.

***Email:* anhtu82t@gmail.com**

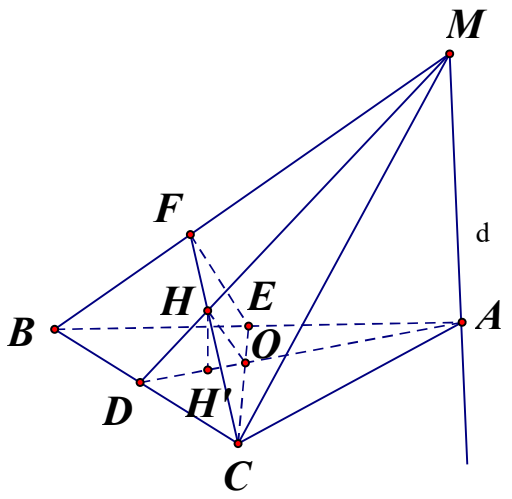
Câu 68. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Một điểm M thay đổi trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A (M khác A). Gọi H, O lần lượt là trực tâm tam giác MBC và ABC. Giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $OHBC$ bằng:

A. $\frac{a^3}{121}$. **B.** $\frac{a^3}{144}$. **C.** $\frac{a^3}{145}$. **D.** $\frac{a^3}{112}$.

Lời giải

Tác giả : Đồng Anh Tú,Tên FB: Anhtu

Chọn B



Ta có $CE \perp (MAB) \Rightarrow MB \perp (CEF) \Rightarrow MB \perp OH$

Tương tự $MC \perp OH \Rightarrow OH \perp (MBC) \Rightarrow \widehat{DHO} = 90^0$. Kẻ $HH' \perp (OBC) \Rightarrow H'$ thuộc DO. Ta có $S_{OBC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{12}$ nên thể tích $OHBC$ lớn nhất khi HH' lớn nhất; H chạy trên đường tròn đường kính OD nên HH' lớn nhất khi $HH' = \frac{1}{2}DO$, khi đó $HH' = \frac{1}{6}AD \Rightarrow HH' = \frac{\sqrt{3}a}{12}$ và $V_{H.OBC} = \frac{1}{3}HH'.S_{OBC} = \frac{a^3}{144}$. Suy ra $V_{\max} = \frac{a^3}{144}$.

Email: nghianguyennhan78@gmail.com

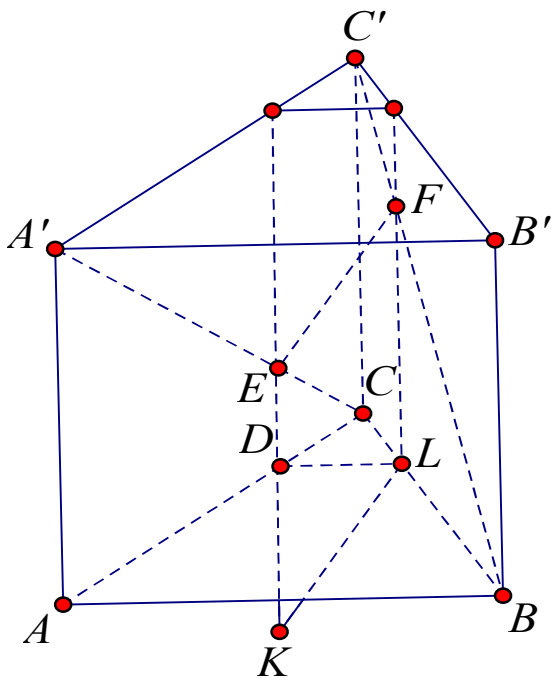
Câu 69. Cho lăng trụ tam giác đều $ABCA'B'C'$ với độ dài tất cả các cạnh bằng a. Xét tất cả các đoạn thẳng song song với mặt bên $ABB'A'$ và có một đầu E nằm trên đường chéo $A'C$ của mặt bên $AA'C'C$, còn đầu kia F nằm trên đường chéo BC' của mặt bên $BB'C'C$. Hãy tìm độ dài ngắn nhất của các đoạn thẳng này.

A. $\frac{2a}{5}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{5}}$ **C.** $\frac{a}{5}$. **D.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$

Tác giả : Nguyễn Thị Thanh Thảo,Tên FB: Nguyễn Thanh Thảo

Lời giải

Chọn B



Dựng $mp(P)$ chứa EF và song song $mp(AA'B'B)$ cắt AC và BC tại D và L

Tromg $mp(P)$ từ L kẻ đường thẳng song song với EF, cắt DE tại K .

Đặt $CL = x, (0 < x < a)$.

Khi đó ta có: $EK = FL; CL = LD = CD = x$ và $BL = a - x$

$BB'C'C$ là hình vuông, suy ra ΔFLB vuông cân tại L nên $EK = FL = LB = a - x$ (1)

$AA'C'C$ là hình vuông, suy ra ΔDEC vuông cân tại D nên $ED = DC = x$ (2)

Từ (1) và (2) có: $KD = |ED - EK| = |x - (a - x)| = |2x - a|$.

Suy ra độ dài $EF = KL = \sqrt{KD^2 + DL^2} = \sqrt{x^2 + (2x - a)^2} = \sqrt{(\sqrt{5}x - \frac{2a}{\sqrt{5}})^2 + \frac{a^2}{5}}$

Suy ra EF ngắn nhất bằng $\frac{a}{\sqrt{5}}$ khi $x = \frac{2a}{5}$, tức là $CL = \frac{2}{5}BC$.

Email: lethuhang2712@gmail.com

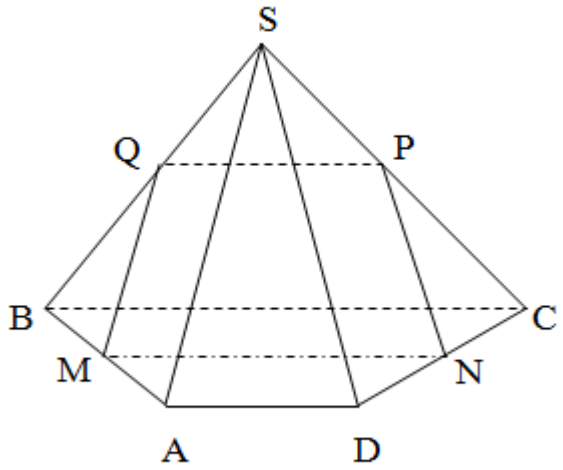
Câu 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang, đáy lớn $BC = 2a$, $AD = a$, $AB = b$. Mặt bên (SAD) là tam giác đều. Mặt phẳng (α) qua điểm M trên cạnh AB và song song với các cạnh SA, BC. (α) cắt CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q. Đặt $x = AM$ $(0 < x < b)$. Giá trị lớn nhất của diện tích thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Họ và tên người sưu tầm : Lê Thị Thu Hằng,Tên FB: Lê Hằng

Chọn C



Hình 2

$(\alpha) \parallel SA$ vµ BC nªn $(\alpha) \parallel (SAD) \Rightarrow MQ \parallel SA, NP \parallel SD$

Ta có $MN \parallel PQ \parallel AD \parallel BC$

Theo ĐL Talét trong hình thang ABCD: $\frac{BM}{BA} = \frac{CN}{CD}$ (1)

Theo ĐL Talét trong ΔSAB: $\frac{BM}{BA} = \frac{BQ}{BS} = \frac{MQ}{SA}$ (2)

Theo ĐL Talét trong ΔSCD: $\frac{CN}{CD} = \frac{CP}{CS} = \frac{PN}{SD}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $MQ = NP = \frac{b-x}{b}a;\ PQ = \frac{x}{b}2a;\ MN = a + \frac{x}{b}a$

$\Rightarrow$ Thiết diện là hình thang cân và

$$S_{td} = \frac{1}{2}(MN + PQ)\sqrt{MQ^2 - \left(\frac{MN - PQ}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{ab + ax}{b} + \frac{2ax}{b}\right)\sqrt{\frac{a^2(b-x)^2}{b^2} - \frac{a^2(b-x)^2}{4b^2}} = \frac{1}{2}.\frac{a(b+3x)}{b}.\frac{a\sqrt{3}(b-x)}{2b}$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{12b^2}(3x+b)(3b-3x) \le \frac{a^2\sqrt{3}}{12b^2}\left(\frac{3x+b+3b-3x}{2}\right)^2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Vậy diện tích lớn nhất của thiết diện là $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ khi $x = \frac{b}{3}$.

Email: danhduoc@gmail.com

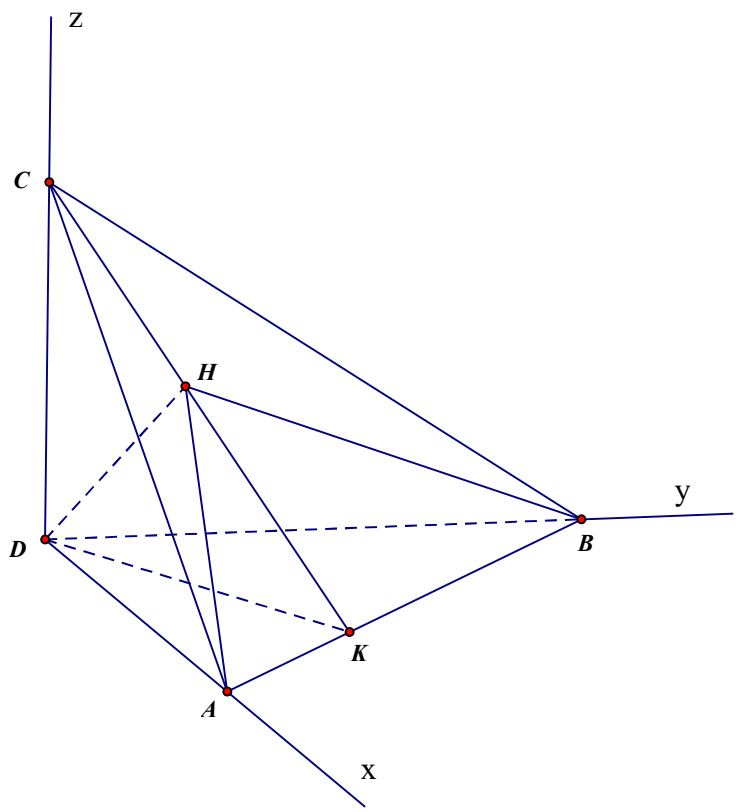
Câu 71. Cho ba nửa đường thẳng Dx, Dy, Dz đôi một vuông góc. Trên Dx, Dy, Dz lần lượt lấy ba điểm A, B, C sao cho $A, B, C \ne D$ và $S_{\Delta ABC} = s$ ($s > 0$, s không đổi). Giá trị lớn nhất của diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$ là

A. $\sqrt{3}.s$. **B.** $3s$. **C.** $\left(\sqrt{3}+1\right).s$. **D.** $2\sqrt{3}.s$.

Lời giải

Tác giả : Vũ Danh Được,Tên FB: Danh Được Vũ

Chọn C



Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên (ABC), trên (ABC) gọi $K = CH \cap AB$

Dễ dàng chứng minh được $AB \perp (CDH) \Rightarrow CH \perp AB$ tại K và $DK \perp AB$.

Trong tam giác CDK vuông tại D, có DH là đường cao nên $HK.CK = DK^2$

Suy ra

$$AB^2.HK.CK = DK^2.AB^2 \Rightarrow \frac{1}{2}HK.AB.\frac{1}{2}CK.AB = \left(\frac{1}{2}DK.AB\right)^2 \Rightarrow S_{\Delta HAB}.S_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta DAB}$$

Chứng minh tương tự có $S_{\Delta HBC}.S_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta DBC}$ và $S_{\Delta HAC}.S_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta DAC}$

Từ đó $(S_{\Delta HAB} + S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HAC}).S_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta DAB} + S^2_{\Delta DBC} + S^2_{\Delta DAC}$

Suy ra $S^2_{\Delta DAB} + S^2_{\Delta DBC} + S^2_{\Delta DAC} = S^2_{\Delta ABC} = s^2$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$(S_{\Delta DAB} + S_{\Delta DBC} + S_{\Delta DAC})^2 \le (1+1+1).\left(S^2_{\Delta DAB} + S^2_{\Delta DBC} + S^2_{\Delta DAC}\right) = 3s^2$$

Do đó $S_{\Delta DAB} + S_{\Delta DBC} + S_{\Delta DAC} \le \sqrt{3}.s$

Suy ra $S_{tp} = S_{\Delta DAB} + S_{\Delta DBC} + S_{\Delta DAC} + S_{\Delta ABC} \le \left(\sqrt{3}+1\right).s$

Dấu bằng khi $S_{\Delta DAB} = S_{\Delta DBC} = S_{\Delta DAC} \Rightarrow DA = DB = DC$

Email: tranquocan1980@gmail.com

Câu 72. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C và $SA \perp (ABC), SC = a$ .Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (ABC) để thể tích khối chóp S.ABC lớn nhất..

A. $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\arccos\frac{\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\arctan\frac{\sqrt{6}}{3}$ **D.** $arc\cot\frac{\sqrt{6}}{3}$

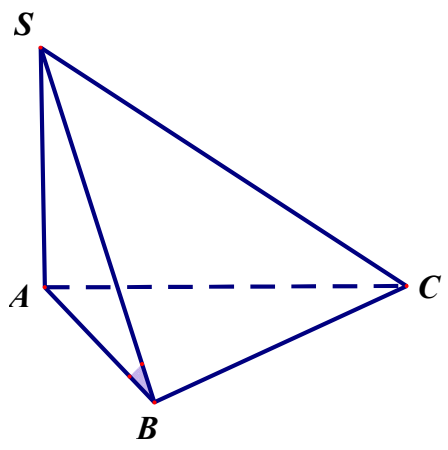
Lời giải

Tác giả : Trần Quốc An,Tên FB: Tran Quoc An

Chọn A

Ta có : $\left.\begin{array}{l} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \widehat{SCA} = \alpha \ (0 < \alpha < 90^0)$

Xét tam giác SAC vuông tại A, ta có:



$SA = SC \sin \widehat{SCA} = a \sin \alpha; AC = SC.\cos \widehat{SCA} = a \cos \alpha$

Do đó :

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} AC^2.SA = \frac{1}{6} a^2 \cos^2 \alpha.a \sin \alpha = \frac{1}{6} a^3 \cos^2 \alpha.\text{si}$

Xét hàm số $f(\alpha) = \cos^2 \alpha.\sin \alpha$ trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có :

$f'(\alpha) = 3\cos^3 \alpha - 2\cos \alpha = \cos \alpha(\sqrt{3}\cos \alpha - \sqrt{2})(\sqrt{3}\cos$

Vì $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos \alpha > 0, \sqrt{3}\cos \alpha + \sqrt{2} > 0$.

Do đó : $f'(\alpha) = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow \alpha = \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Bảng biến thiên :

α	0		$\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$	0	$\nearrow$	f_{max}	$\searrow$	0

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất khi $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Email: dovancuongthptln@gmail.com

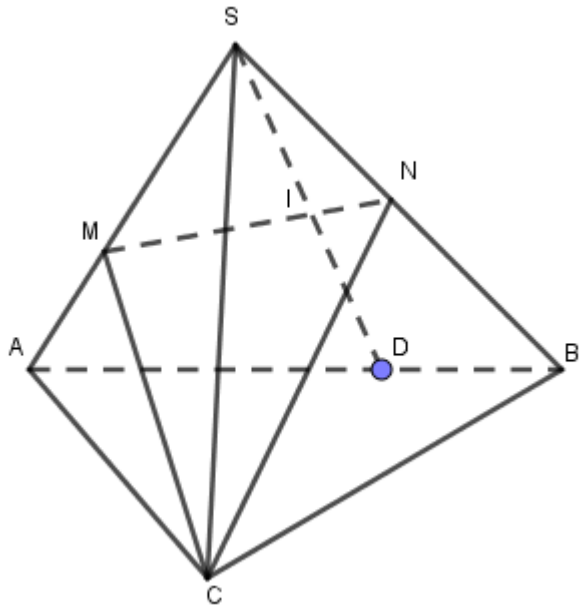
Câu 73. Cho tứ diện đều $SABC$ cạnh $AB = 2a$, D là điểm thuộc cạnh AB sao cho $BD = 2AD$. Gọi I là trung điểm của SD. Một đường thẳng d thay đổi đi qua điểm I cắt các cạnh SA, SB tại M, N. Khi đường thẳng d thay đổi thì thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.CMN$ bằng $\left(\frac{m}{n}\right)^3 \frac{a^3}{\sqrt{m}}$, với $(m,n) = 1, m, n \in \mathbb{N}$. Tính $m + n$

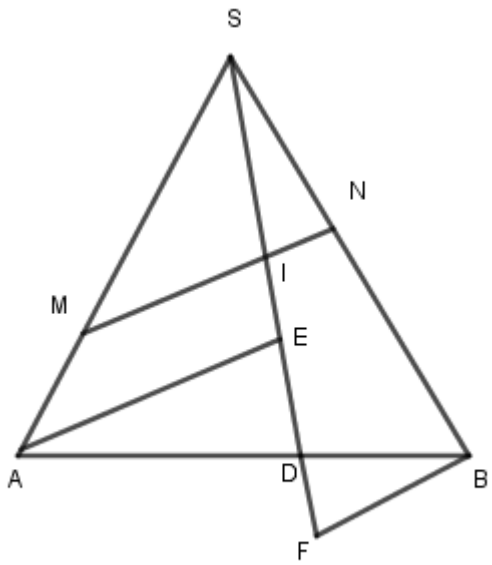
A. $m + n = 4$. **B.** $m + n = 6$. **C.** $m + n = 7$. **D.** $m + n = 5$.

Lời giải

Tác giả :Đỗ Văn Cường,Tên FB: Cường Đỗ Văn

Chọn D





Trong tam giác SAB kẻ AE, BF lần lượt song song với MN

Ta có $\frac{SM}{SA}=\frac{SI}{SE},\frac{SN}{SB}=\frac{SI}{SF}, ED=2FD$

Suy ra $\frac{SA}{SM}+2\frac{SB}{SN}=3\frac{SD}{SI}=6$

Đặt $\frac{SB}{SN}=x>1$

$\frac{SA}{SM}=6-2x, x<3$

Từ đó $\frac{SM}{SA}=\frac{1}{6-2x};\frac{SN}{SB}=\frac{1}{x}$

$\Rightarrow V_{S.MNC}=\frac{1}{6x-2x^2}V_{S.ABC}$

Vì $6x-2x^2$ đạt giá trị lớn nhất khi $x=\frac{3}{2}$ nên $\min V_{S.MNC}=\frac{2}{9}V_{S.ABC}=\frac{2}{9}\frac{(2a)^3\sqrt{2}}{12}=\left(\frac{2}{3}\right)^3\frac{a^3}{\sqrt{2}}$

Vậy $m=2, n=3\Rightarrow m+n=5$

Email: <u>builoiyka@gmail.com</u>

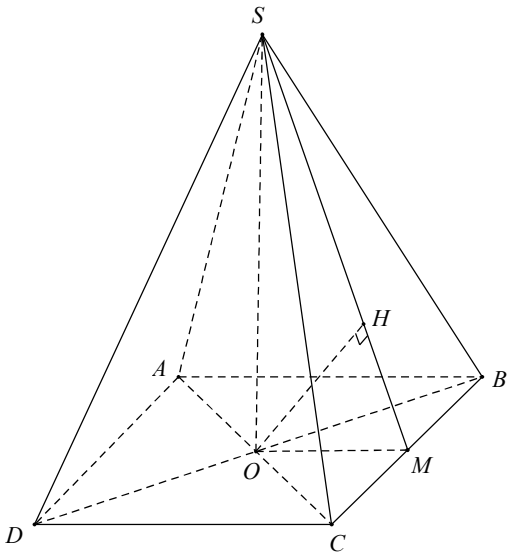
Câu 74. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có diện tích tam giác SAC bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ A đến (SBC).

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Thị Lợi Facebook: LoiBui

Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} SO \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOM)$

$\Rightarrow (SBC) \perp (SOM); (SBC) \cap (SOM) = SM$

OH Trong mặt phẳng (SOM), kẻ $OH \perp SM$ $(H \in SM)$ thì $OH \perp (SBC)$.

$d(A,(SBC)) = 2d(O,(SBC)) = 2OH$.

Gọi cạnh hình vuông là x $(x > 0)$. Ta có $AC = x\sqrt{2}$.

$S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}SO.AC = \frac{1}{2}SO.x\sqrt{2} \Rightarrow SO = \frac{2S_{\Delta SAC}}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{x}$.

Tam giác SOM vuông tại O có đường cao OH nên

$$OH = \frac{SO.OM}{SM} = \frac{\frac{1}{x}.\frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{4}}}.$$

Mà $\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x^2}.\frac{x^2}{4}} = 1$ nên $OH \leq \frac{1}{2} \Rightarrow d(O;(SBC)) \leq 1$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của OH bằng 1 khi $x = \sqrt{2}$.

Email: Samnk.thptnhuthanh@gmail.com

Câu 75. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, có đáy ABCD là hình bình hành, $AD = 4a\,(a > 0)$, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{6}$. Thể tích của khối chóp S.ABCD lớn nhất thì cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng:

A. $\frac{1}{\sqrt{10}}$ **B.** $\frac{2}{\sqrt{10}}$ **C.** $\frac{1}{2\sqrt{10}}$ **D.** $\frac{2}{3\sqrt{10}}$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Khắc Sâm,Tên FB: Nguyễn Khắc Sâm

Chọn B

Gọi O là giao điểm của AC và BD do ΔSAC, ΔSBD cân tại S nên

$SO \perp AC,\ SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$. Từ giả thiết suy ra $OA = OB = OC = OD \Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.

Đặt $AB = x, x > 0 \Rightarrow AC = \sqrt{16a^2 + x^2}$

$\Rightarrow AO = \dfrac{\sqrt{16a^2 + x^2}}{2} \Rightarrow SO = \dfrac{\sqrt{8a^2 - x^2}}{2} \Rightarrow V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}4a.x.\dfrac{\sqrt{8a^2 - x^2}}{2}$

$\le \dfrac{a}{3}.\left(x^2 + 8a^2 - x^2\right) = \dfrac{8a^3}{3} \Rightarrow V_{ABCD}\max = \dfrac{8a^3}{3}$ khi $x = 2a$. Suy ra, SO=a.

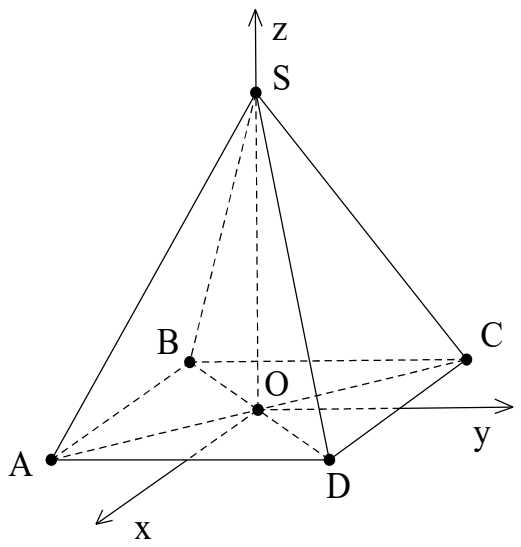
Chọn hệ tọa độ sao cho $O(0;0;0)$, $S(0;0;a)$, $B(-a;-2a;0)$, $C(-a;2a;0)$, $D(a;2a;0)$

Tìm được vtpt của mp(SBC) là $\overrightarrow{n_{SBC}}(1;0;-1)$,

vtpt của mp(SCD) là $\overrightarrow{n_{SCD}}(0;1;2)$.

$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$, với φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Vậy cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$.



buichithanh1987@gmail.com

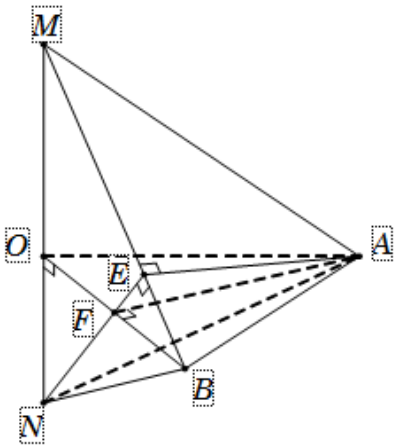
Câu 76. Cho tam giác OAB đều cạnh a. Trên đường thẳng d qua O và vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy điểm M sao cho $OM = x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên MB và OB. Gọi N là giao điểm của EF và d. Thể tích tứ diện $ABMN$ có giá trị nhỏ nhất là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Lời giải

Tác giả: Bùi Chí Thanh Faceebook: Thanhbui

Chọn C



Do tam giác OAB đều cạnh $a \Rightarrow F$ là trung điểm $OB \Rightarrow OF = \frac{a}{2}$.

Ta có $\begin{cases} AF \perp OB \\ AF \perp MO \end{cases} \Rightarrow AF \perp (MOB) \Rightarrow AF \perp MB.$

Mặt khác, $MB \perp AE$ Suy ra $MB \perp (AEF) \Rightarrow MB \perp EF$.

Suy ra $\Delta OBM \backsim \Delta ONF$ nên $\frac{OB}{ON} = \frac{OM}{OF} \Rightarrow ON = \frac{OB.OF}{OM} = \frac{a^2}{2x}$.

Ta có $V_{ABMN} = V_{ABOM} + V_{ABON}$

$$= \frac{1}{3} S_{\Delta OAB}(OM + ON) = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.(x + \frac{a^2}{2x}) = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\left(x + \frac{a^2}{2x}\right) \geq \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.2\sqrt{x.\frac{a^2}{2x}} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{a^2}{2x} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Email: trungthuong2009@gmail.com

Câu 77. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng cạnh bên và bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (SMN) luôn vuông góc với mặt phẳng (ABC). Đặt $AM = x$, $AN = y (0 \leq x; y \leq 1)$. Gọi M, m là các giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác SMN. Tổng $F = M + m$ là:

A. $\frac{4\sqrt{6} + 9\sqrt{2}}{36}$. **B.** $\frac{4\sqrt{6} + 9\sqrt{2}}{18}$. **C.** $\frac{4\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{18}$. **D.** $\frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Tác giả : Phạm Thành Trung,Tên FB: Phạm Thành Trung

Chọn A

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó có $SH \perp (ABC); SH = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Do mặt phẳng $(SMN) \perp (ABC) \Rightarrow SH \subset (SMN)$

Vậy $S(SMN) = \frac{1}{2} SH.MN = \frac{\sqrt{6}}{6} MN$.

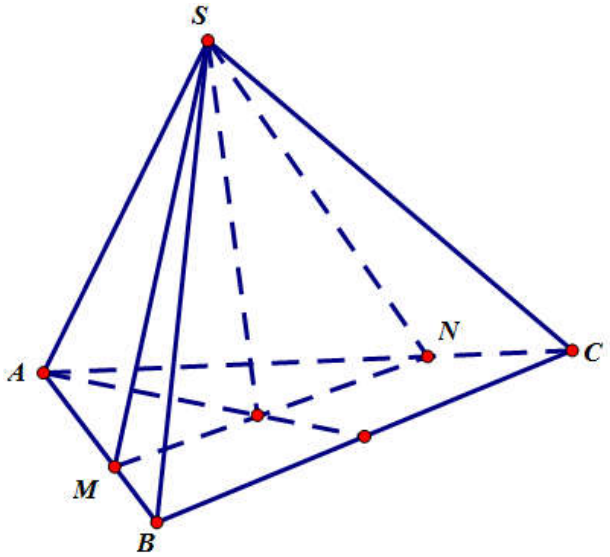
Gọi K là trung điểm BC khi đó có $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 2\frac{AK}{AH} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \Leftrightarrow x + y = 3xy$

Lại có $MN^2 = x^2 + y^2 - xy = (x + y)^2 - 3xy = 9(xy)^2 - 3xy$

Do $x+y=3xy \Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \le 3.xy \Leftrightarrow xy \ge \frac{4}{9}$. Vì $x;y \le 1 \Rightarrow (x-1)(y-1) \ge 0 \Leftrightarrow xy \le \frac{1}{2}$

Xét hàm số $f(t)=9t^2-3t(\frac{4}{9} \le t \le \frac{1}{2})$ ta có $\begin{cases} \min f(t)=\frac{4}{9} \\ \max f(t)=\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min MN=\frac{2}{3} \\ \max MN=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} \min S(SMN)=\frac{2\sqrt{6}}{9} \\ \max S(SMN)=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow F=\frac{4\sqrt{6}+9\sqrt{2}}{18}$



hoatoank15@gmail.com

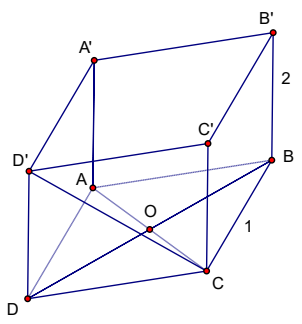
Câu 78. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D', ABCD là hình vuông cạnh bằng 1, $A'A=2$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa CD', tạo với mặt phẳng (BDD'B') một góc 30^0 và cắt cạnh BB' tại K. (P) chia khối lăng trụ ACD.A'C'D' thành hai phần, tỉ số phần nhỏ và phần lớn bằng $\frac{a}{b}$ $(a \in N, b \in N, (a;b)=1)$. Tổng $a+b$ bằng

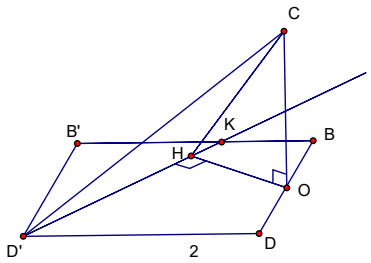
A. 8 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 9

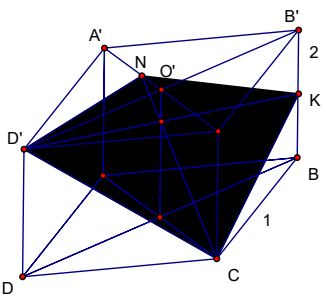
Lời giải

Tác giả: Nguyễn Viết Hòa, FB: Hòa Nguyễn Viết

Chọn D







□ Gọi $O=AC \cap BD \Rightarrow CO \perp (B'D'DB)$.

□ Gọi H là hình chiếu của O trên D'K, suy ra góc giữa (P) và (B'D'DB) là $\widehat{CHO} = 30^0$.

□ $CO = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OH = CO.\cos 30^0 = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm của BB', ta có

$BB' = \sqrt{2}, D'I \perp OI, OI = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow (CD'I) \equiv (P) \Rightarrow H \equiv K \equiv I$.

□ Xác định thiết diện của (P) và lăng trụ ACD.A'C'D' là tam giác CD'N như hình vẽ.

□

$$MO' = \frac{1}{2}B'K = \frac{1}{4}BB' = \frac{1}{3}MO \Rightarrow NO' = \frac{1}{3}OC = \frac{1}{6}A'C' \Rightarrow C'N = \frac{2}{3}A'C' \Rightarrow S_{NC'D'} = \frac{2}{3}S_{A'C'D'}$$

$$V_{C.C'ND'} = \frac{1}{3}CC'.S_{NC'D'} = \frac{2}{9}CC'.S_{A'C'D'} = \frac{2}{9}.V_{ACD.A'C'D'} \Rightarrow a + b = 9.$$

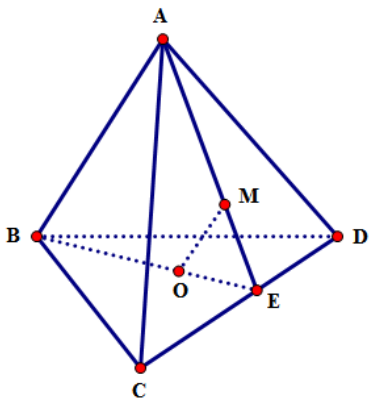
Email: kimngochn1981@gmail.com

Câu 79. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB.AC.AD = 3a^2$, O là một điểm bất kỳ thuộc miền trong của tam giác BCD. Từ O kẻ các đường thẳng lần lượt song song với AB, AC, AD cắt các mặt phẳng $(ACD), (ABD), (ABC)$ lần lượt tại M, N, P. Giá trị lớn nhất của tích $OM.ON.OP$

A. $\frac{3a^3}{8}$. **B.** a^3. **C.** $\frac{a^3}{9}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Thị Kim Ngọc,Tên FB: Kim Ngọc Nguyễn



Gọi $BO \cap CD = E$. Trong (ABE) kẻ đường thẳng qua O song song với AB cắt AE tại M

Tương tự với N, P.

Ta có $\frac{OM}{AB} = \frac{OE}{BE} = \frac{S_{\Delta OCD}}{S_{\Delta BCD}}$.

Tương tự: $\frac{ON}{AC} = \frac{S_{\Delta OBD}}{S_{\Delta BCD}}, \frac{OP}{AD} = \frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta BCD}}$

$$\Rightarrow \frac{OM}{AB} + \frac{ON}{AC} + \frac{OP}{AD} = 1$$

$$\frac{OM}{AB} + \frac{ON}{AC} + \frac{OP}{AD} \geq 3\sqrt[3]{\frac{OM.ON.OP}{AB.AC.AD}} \Rightarrow OM.ON.OP \leq \frac{AB.AC.AD}{27} = \frac{a^3}{9}$$

max(OM.ON.OP)=$\frac{a^3}{9}$ khi $\frac{OM}{AB}=\frac{ON}{AC}=\frac{OP}{AD}=\frac{1}{3}$ hay O là trọng tâm tam giác BCD .

Email :Binh.thpthauloc2@gmail.com

Câu 80. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích là V . Điểm P là trung điểm của SC . Mặt phẳng (α) qua AP cắt hai cạnh SB và SD lần lượt tại M và N . Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỷ số $\frac{V_1}{V}$?

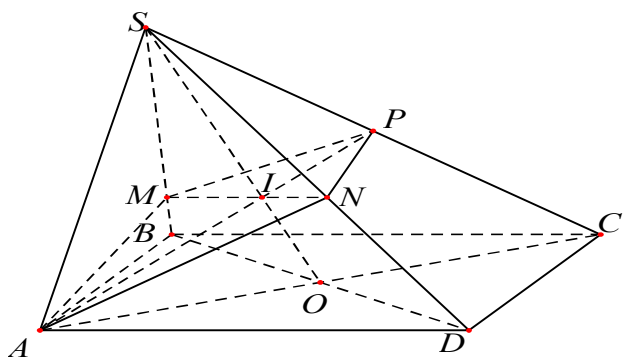
A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải

(Họ tên : Phạm Văn Bình,,Tên FB: Phạm văn Bình)

Chọn C

Cách 1



Đặt $a=\frac{SM}{SB}$, $b=\frac{SN}{SD}$, $(0<a;b\le 1)$.

Ta có $\frac{V_1}{V}=\frac{V_{S.AMP}+V_{S.ANP}}{V}=\frac{V_{S.AMP}}{2V_{S.ABC}}+\frac{V_{S.ANP}}{2V_{S.ADC}}=\frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SB}.\frac{SP}{SC}+\frac{SN}{SD}.\frac{SP}{SC}\right)=\frac{1}{4}(a+b)$ (1)

Lại có $\frac{V_1}{V}=\frac{V_{S.AMN}+V_{S.PMN}}{V}=\frac{V_{S.AMN}}{2V_{S.ABD}}+\frac{V_{S.PMN}}{2V_{S.CBD}}=\frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}+\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}.\frac{SP}{SC}\right)=\frac{3}{4}ab$ (2).

Suy ra $\frac{1}{4}(a+b)=\frac{3}{4}ab \Leftrightarrow a+b=3ab \Rightarrow b=\frac{a}{3a-1}$. Từ điều kiện $(0<b\le 1)$, ta có $\frac{a}{3a-1}\le 1$, hay $a\ge\frac{1}{2}$.

Thay vào (2) ta được tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V}=\frac{3}{4}.\frac{a^2}{3a-1}$.

Đặt $f(a)=\frac{3}{4}.\frac{a^2}{3a-1};a\in\left[\frac{1}{2};1\right]$, ta có $f'(a)=\frac{3}{4}.\frac{3a^2-2a}{(3a-1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0(L)\\a=\frac{2}{3}\end{array}\right.$.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)=\frac{3}{8};f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$, do đó $Min\frac{V_1}{V}=\underset{a\in\left[\frac{1}{2};1\right]}{Min}f(a)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

Cách 2 : (Tham khảo ý kiến Cô Lưu Thêm)

Từ giả thiết và cách dựng thiết diện ta có :

$a=\frac{SA}{SA}=1; b=\frac{SB}{SM}; c=\frac{SC}{SP}=2; d=\frac{SD}{SN}\Rightarrow a+c=b+d=3$

Khi đó $\frac{V_1}{V}=\frac{a+b+c+d}{4a.b.c.d}=\frac{6}{4.1.2.bd}=\frac{3}{4b.d}\geq\frac{3}{4\left(\frac{b+d}{2}\right)^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{V_1}{V}\geq\frac{1}{3}$

$\Rightarrow Min\frac{V_1}{V}=\frac{1}{3}$

Email: phuongnamthptqx1@gmail.com

Câu 81. Một người thợ gò làm một cái thùng đựng nước dạng hình hộp chữ nhật có nắp bằng tôn. Biết rằng đường chéo hình hộp bằng $6dm$ và chỉ được sử dụng vừa đủ $36dm^2$ tôn.Với yêu cầu như trên người thợ làm được cái thùng có thể tích lớn nhất là Vdm^3. Giá trị của V gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A. $11,3$. **B.** $11,32$. **C.** $11,31$. **D.** $11,33$.

Lời giải.

Tác giả: Trần Văn Nam,Tên FB: Trần Văn Nam

Chọn C

Gọi kích thước của khối hộp là $x,y,z\,(x,y,z\geq 0)$ theo bài ra ta có

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=36\\xy+yz+zx=18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=6\sqrt{2}\\xy+yz+zx=18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=6\sqrt{2}-z\\xy=18-\left(6\sqrt{2}-z\right)z\end{cases}$$

Ta có $\left(6\sqrt{2}-z\right)^2\geq 72-4\left(6\sqrt{2}-z\right)z\Rightarrow z\in\left[0;4\sqrt{2}\right]$

Thể tích: $xyz=z^3-6\sqrt{2}z^2+18z=f(z)$

$f'(z)=3z^2-12\sqrt{2}z+18; f'(z)=0\Leftrightarrow z=\sqrt{2}; z=3\sqrt{2}$

Khi đó $\underset{\left[0;4\sqrt{2}\right]}{Max}f(x)=Max\left\{f(0),f(\sqrt{2}),f(3\sqrt{2}),f(4\sqrt{2})\right\}=\left\{f(\sqrt{2}),f(4\sqrt{2})\right\}=8\sqrt{2}\approx 11,31$

Vậy thể tích lớn nhất của thùng $8\sqrt{2}\approx 11,31$ khi $(x;y;z)=(\sqrt{2};\sqrt{2};4\sqrt{2})$ và các hoán vị của nó.

Email: phuongnamthptqx1@gmail.com

Câu 82. Gọi V là thể tích nhỏ nhất của khối chóp tứ giác đều trong số các khối chóp tứ giác đều có khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau gồm một đường thẳng chứa một đường chéo của đáy và đường thẳng chứa một cạnh bên hình chóp bằng $\sqrt{3}$.Khi đó V bằng bao nhiêu?

A. $V=3$. **B.** $V=9$. **C.** $V=9\sqrt{3}$. **D.** $V=27$.

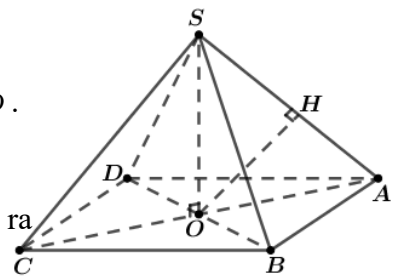
Lời giải.

Tác giả: Trần Văn Nam,Tên FB: Trần Văn Nam

Chọn B

Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đặt $AB=x$, $SO=h$. Với O là tâm của hình vuông $ABCD$ $\Rightarrow SO\perp(ABCD)$. Qua O kẻ đường thẳng OH vuông góc với SA với $H\in SA$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OH.$



Suy ra OH là đoạn vuông góc chung của SA và BD.

Theo bài ra, ta có $d = d(SA, BD) = OH \longrightarrow OH = \sqrt{3}$.

Tam giác SAO vuông tại O, có đường cao OH suy ra

$\frac{1}{3} = \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OA^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{2}{x^2}$.

Lại có $\frac{1}{3} = \frac{1}{h^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \underset{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{1}{h^2}.\frac{1}{x^4}} \Leftrightarrow hx^2 \geq 27$.

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}hx^2 \geq 9 \Rightarrow V = 9$

Tác giả: Trần Văn Nam,Tên FB: Trần Văn Nam

Email: nguyenhang15401@gmail.com

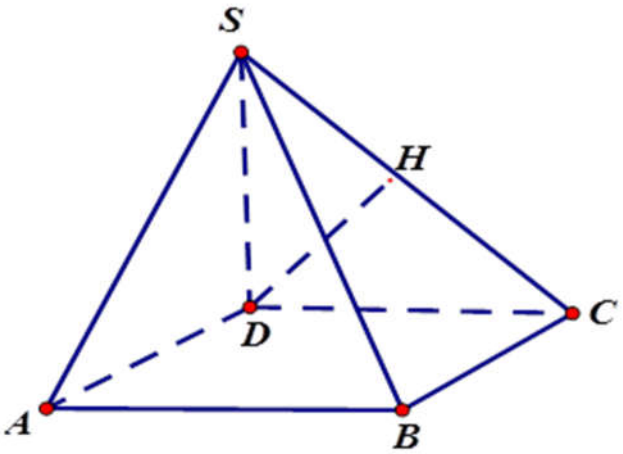
Cho khối chóp $S.\text{ABC}$ có đáy là tam giác vuông cân tại B . khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. Xác định độ dài cạnh AB để thể tích khối chóp $S.\text{ABC}$ nhỏ nhất.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $2a$. **C.** $\frac{a\sqrt{10}}{2}$. **D.** $3a\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn A

Tên tác giả: Nguyễn Thúy Hằng Tên FB: Hằng-Ruby-Nguyễn



Dựng hình vuông ABCD, cạnh bằng x, ta có $SD \perp (ABCD)$; đặt $SD = h$.

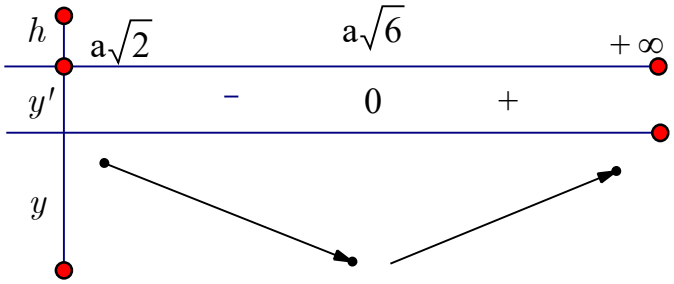
Dựng $DH \perp SC \Rightarrow DH \perp (SBC)$ Ta có $d(A;(SBC)) = d(D;(SBC)) = DH = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{1}{2a^2} (*)$

$\Rightarrow V = \frac{1}{6}h.x^2 = \frac{a^2}{3}.\frac{h^3}{h^2 - 2a^2}$

Xét $f(h) = \frac{h^3}{h^2 - 2a^2}; \left(h > a\sqrt{2}\right)$

$$f'(h)=\frac{h^2\left(h^2-6a^2\right)}{3\left(h^2-2a^2\right)^2}$$



Vậy $f(h)$ nhỏ nhất khi $h=a\sqrt{6}\xrightarrow{(*)}x=a\sqrt{3}$

Email: honghacma@gmail.com

Câu 83. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, có đáy ABCD là hình bình hành, AD=4a (a>0), các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{6}$. Khi thể tích của khối chóp S.ABCD đạt giá trị lớn nhất thì cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là

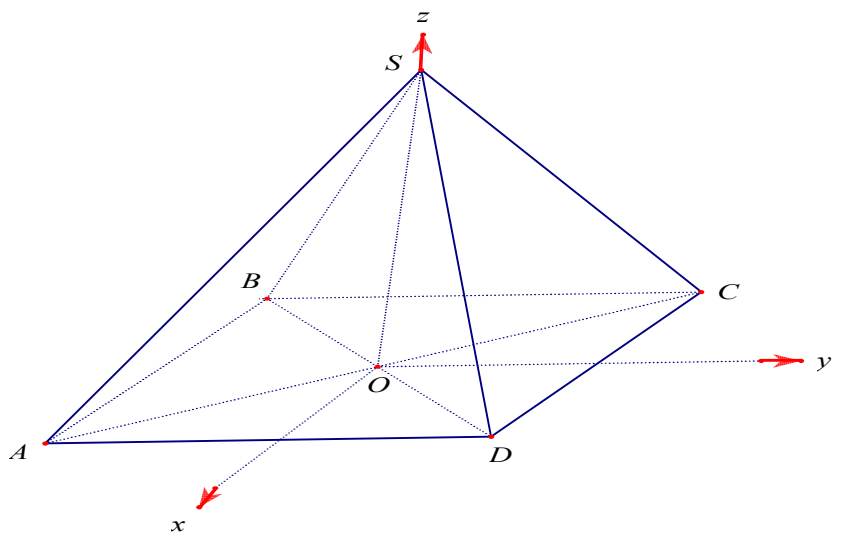
A. $-\frac{2}{\sqrt{10}}$ **B.** $\frac{2}{\sqrt{10}}$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $-\frac{1}{5}$

Lời giải

Tác giả : Trương Hồng Hà,Tên FB: Trương Hồng Hà

Chọn B

Dựng hình



x

Gọi O là giao điểm của AC và BD, Do ΔSAC và ΔSBD cân tại S nên

$$\begin{cases}SO\perp AC\\SO\perp BD\end{cases}\Rightarrow SO\perp(ABCD)$$

Từ giả thiết $\Rightarrow$ ABCD là hình chữ nhật

Đặt $AB=x\ (x>0)\Rightarrow AC=\sqrt{16a^2+x^2}\Rightarrow AO=\frac{1}{2}\sqrt{16a^2+x^2}\Rightarrow SO=\frac{\sqrt{8a^2-x^2}}{2}$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}4a.x.\frac{\sqrt{8a^2-x^2}}{2}=\frac{a}{3}.2x.\sqrt{8a^2-x^2}$$

Áp dụng bđt cosi ta được $V_{S.ABCD} \le \frac{a}{3}(x^2 + 8a^2 - x^2) = \frac{8a^3}{3}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD}$ Max khi $x = 2a \Rightarrow SO = a$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được O(0; 0; 0) , S(0; 0; a), B(-a; -2a; 0), C(-a; 2a; 0), D(a; 2a; 0)

VTPT của mp(SBC) là $\overrightarrow{n_{SBC}} = (1;0;-1)$

VTPT của mp(SCD) là $\overrightarrow{n_{SCD}} = (0;1;2) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{10}}$

Email: Nguyenvandieupt@gmail.com

Câu 84. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Hai điểm M, N di động trên các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) vuông góc với mặt phẳng (ABC).

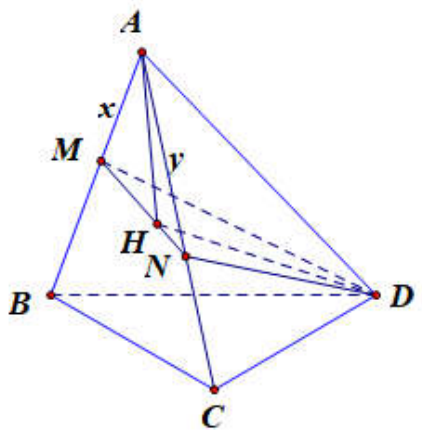
Gọi S_1 là diện tích lớn nhất của tam giác AMN. S_2 là diện tích nhỏ nhất của tam giác AMN. Tính $T = \frac{S_1}{S_2}$.

A. $T = \frac{11}{9}$. **B.** $T = \frac{9}{8}$. **C.** $T = \frac{8}{7}$. **D.** $T = \frac{9}{7}$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Văn Diệu,Tên FB: dieupt Nguyễn

Chọn B



Ta có $(ABC) \cap (DMN) = MN$ và $(ABC) \perp (DMN)$ nên kẻ $DH \perp MN$ thì $DH \perp (ABC)$.

Do $DA = DB = DC \Rightarrow HA = HB = HC$, $\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC.

Đặt $AM = x, AN = y$ $(0 \le x, y \le 1)$, ta có $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}AM.AN.\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}xy$ (1).

Mặt khác, $S_{\Delta AMN} = S_{\Delta AMH} + S_{\Delta ANH} = \frac{1}{2}AH.AM.\sin 30° + \frac{1}{2}AH.AN.\sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{12}(x+y)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x + y = 3xy$.

Đặt $xy = t \Rightarrow x + y = 3t \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình $X^2 - 3tX + t = 0$ $(*)$.

Cần tìm t để phương trình (*) có 2 nghiệm X_1, X_2 thoả mãn $0 \le X_1 \le X_2 \le 1$.

$(*) \Leftrightarrow (3X - 1)t = X^2 \Leftrightarrow t = \frac{X^2}{3X - 1}$ (do $X = \frac{1}{3}$ không phải là nghiệm của (*)).

Xét hàm số $f(X)=\dfrac{X^2}{3X-1}$ trên $[0;1]\setminus\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ có bảng biến thiên như sau:

X	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(X)$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(X)$	0 ↘	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ ↘	$\frac{4}{9}$	↗	$\frac{1}{2}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{4}{9}\le t\le\dfrac{1}{2}$.

$S_{AMN}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}xy=\dfrac{\sqrt{3}}{4}t\le\dfrac{\sqrt{3}}{8}\Rightarrow S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$, đạt khi $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

$S_{AMN}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}xy=\dfrac{\sqrt{3}}{4}t\ge\dfrac{\sqrt{3}}{9}\Rightarrow S_2=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$, đạt khi $x=y=\dfrac{2}{3}$.

Vậy $T=\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{9}{8}$. Đáp án B.

Email: **nguyenminhduc.hl@gmail.com**

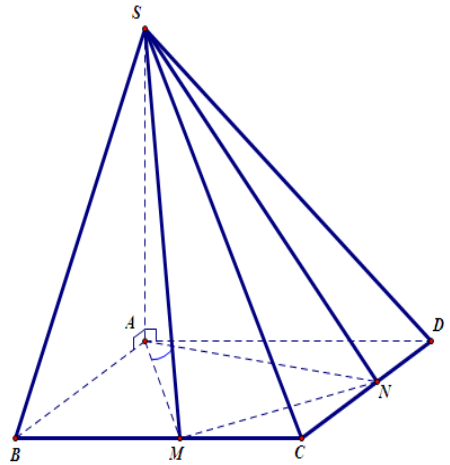
Câu 85. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. M và N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc các cạnh BC và DC sao cho $\widehat{MAN}=45^0$. Tìm theo a giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.AMN$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Tác giả : Nguyễn Minh Đức,Tên FB: Duc Minh

Lời giải

Chọn A



Ta có $V_{S.AMN}=\frac{1}{3}SA.S_{AMN}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.S_{AMN}$.

Đặt $BM=x, DN=y; x,y\in[0;a]$.

Tam giác CMN vuông tại C nên

$$MN^2=CM^2+CN^2 \text{ hay}$$

$$MN^2=(a-x)^2+(a-y)^2.$$

Áp dụng định lý hàm số cosin cho tam giác AMN ta có

$MN^2=AM^2+AN^2-2AM.AN\cos\widehat{MAN}$

$\Rightarrow MN^2=2a^2+x^2+y^2-\sqrt{2(a^2+x^2)(a^2+y^2)}$

Suy ra $(a-x)^2+(a-y)^2=2a^2+x^2+y^2-\sqrt{2(a^2+x^2)(a^2+y^2)}$

$\Leftrightarrow (ax+ay)^2=(a^2-xy)^2 \Leftrightarrow ax+ay=a^2-xy \Leftrightarrow y=\frac{a^2-ax}{a+x}$.

Diện tích tam giác AMN là

$$S_{AMN}=S_{ABCD}-S_{ABM}-S_{ADN}-S_{CMN}=\frac{1}{2}(a^2-xy)=\frac{a}{2}.\frac{a^2+x^2}{x+a}.$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{x^2+a^2}{x+a}$ trên đoạn $[0;a]$.

Ta có $f'(x)=\frac{x^2+2ax-a^2}{(x+a)^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=(\sqrt{2}-1)a$.

Ta lại có $f(0)=f(a)=a; f((\sqrt{2}-1)a)=2(\sqrt{2}-1)a$.

Suy ra $\max\limits_{[0;a]} f(x)=a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.AMN$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$.

Email: thienhuongtth@gmail.com

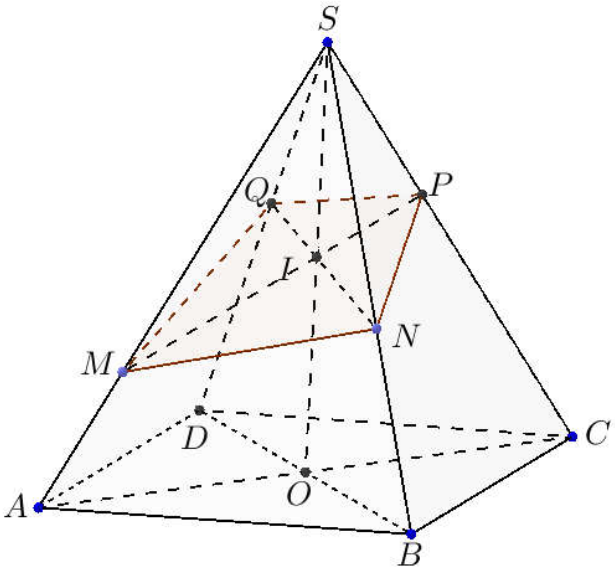
Câu 86. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích là V, $ABCD$ là hình bình hành có tâm O. Gọi I là trung điểm của SO, (P) là mặt phẳng qua I sao cho (P) cắt các cạnh SA,SB,SC,SD lần lượt tại các điểm M,N,P,Q. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích của khối chóp $S.MNPQ$.

A. $\frac{V}{4}$. **B.** $\frac{V}{2}$. **C.** $\frac{V}{12}$. **D.** $\frac{V}{8}$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Văn Thanh,Tên FB: Thanh Văn Nguyễn

Chọn D



Đặt $a=\frac{SA}{SM}, b=\frac{SB}{SN}, c=\frac{SC}{SP}, d=\frac{SD}{SQ}$

$V_{SABD}=V_{SBCD}=V_0=\frac{1}{2}V$

$V_{SMNQ}=V_1$, $V_{SNPQ}=V_2$

Ta có kết quả: $a+c=b+d=2\frac{SO}{SI}=4$

$\frac{V_0}{V_1}=a.b.d$; $\frac{V_0}{V_2}=c.b.d$

$\Rightarrow \frac{V_0}{V_1}+\frac{V_0}{V_2}=b.d(a+c)=4b(4-b)\le 16$ với $0<b\le 3$

Mặt khác: $\frac{V_0}{V_1}+\frac{V_0}{V_2}\ge 2\sqrt{\frac{V_0}{V_1}.\frac{V_0}{V_2}}=\frac{V}{\sqrt{V_1.V_2}}\ge \frac{2V}{V_1+V_2}=\frac{2V}{V_{S.MNPQ}}$

Do đó: $\frac{2V}{V_{S.MNPQ}}\le 16 \Rightarrow V_{S.MNPQ}\ge \frac{V}{8}$

Email: tranducphuong.rb@gmail.com

Câu 87. Cho $OABC$ là tứ diện vuông có $OA=a, OB=b, OC=c$ và chiều cao $OH=h$. Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{h}{a+b+c}$.

A. $3\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{1}{3\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}$, $(a+b+c)^2\ge 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

$\Rightarrow\ \frac{(a+b+c)^2}{h^2}\ge 27\ \Rightarrow\ \frac{h}{a+b+c}\le\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Tác giả: Trần Đức Phương,Tên FB: Trần Đức Phương

Email: tranducphuong.rb@gmail.com

Câu 88. Cho $OABC$ là tứ diện vuông có $OA=a, OB=b, OC=c$ và chiều cao $OH=h$, $S_{\Delta OAB}=S_1, S_{\Delta OBC}=S_2, S_{\Delta OCA}=S_3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{S_1+S_2+S_3}{h^2}$.

A. 9. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{9}$.

Lời giải Ta có $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$, $S_1+S_2+S_3=\dfrac{1}{2}(ab+bc+ca)$

Vậy $\dfrac{S_1+S_2+S_3}{h^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)(ab+bc+ca)\geq\dfrac{1}{2}.3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2b^2c^2}}.3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\dfrac{9}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Tác giả: Trần Đức Phương,Tên FB: Trần Đức Phương

Email: dongpt@c3phuctho.edu.vn

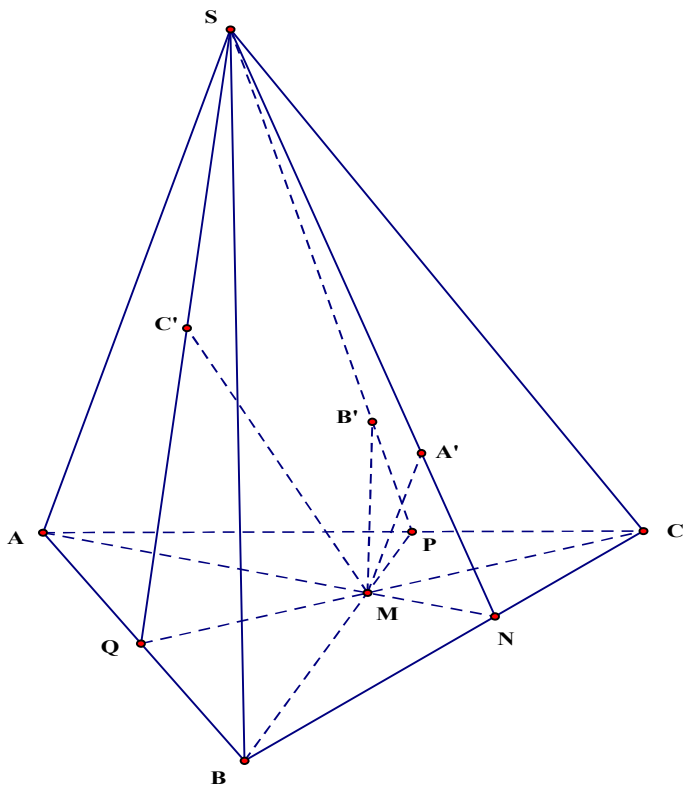
Câu 89. Cho tứ diện $S.ABC$ và M là một điểm di động, nằm bên trong tam giác ΔABC. Qua M kẻ các đường thẳng song song với SA, SB, SC cắt các mặt phẳng tương ứng $(SBC), (SAC), (SAB)$ lần lượt tại A', B', C'. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\dfrac{MA'}{SA}+\dfrac{MB'}{SB}+\dfrac{MC'}{SC}+\dfrac{MA'}{SA}.\dfrac{MB'}{SB}.\dfrac{MC'}{SC}$ là

A. $\dfrac{9}{8}$. **B.** $\dfrac{28}{27}$. **C.** $\dfrac{62}{27}$. **D.** $\dfrac{13}{8}$.

Lời giải

Tác giả : Hoàng Tiến Đông,Tên FB: Hoàng Tiến Đông

Chọn B



Trong (ABC) gọi $N=AM\cap BC$; $P=BM\cap AC$; $Q=CM\cap AB$.

Trong (SAN) kẻ $MA'//SA;\ A'\in SN$.

Trong (SBP) kẻ $MB'//SB;\ B'\in SP$.

Trong (SCQ) kẻ $MC'//SC;\ C'\in SQ$.

Theo đinh lý Thales ta có : $\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}=\frac{NM}{NA}+\frac{PM}{PB}+\frac{QM}{QC}=\frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta BAC}}+\frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta CAB}}=1$

Theo Bất đẳng thức AM-GM lại có $1=\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}\ge 3\sqrt[3]{\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}}$

$\Leftrightarrow \frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}\le\frac{1}{27}\Rightarrow T\le 1+\frac{1}{27}=\frac{28}{27}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{MA'}{SA}=\frac{MB'}{SB}=\frac{MC'}{SC}=\frac{1}{3}$.

Khi đó M là trọng tâm tam giác ABC. Vậy giá trị lớn nhất của T là $\frac{28}{27}$.

Email: duckhanh0205@gmail.com

Câu 90. Cho mặt cầu (S) có bán kính R không đổi, hình nón (N) bất kì nội tiếp mặt cầu (S) như hình vẽ. Thể tích khối nón (N) là V_1; thể tích phần còn lại là V_2. Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{32}{49}$. **B.** $\frac{32}{76}$. **C.** $\frac{49}{81}$. **D.** $\frac{32}{81}$.

Lời giải

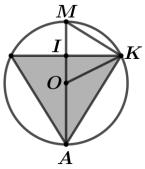
Tác giả : Huỳnh Đức Khánh,Tên FB: Huỳnh Đức Khánh

Chọn B

Thể tích khối cầu: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. Ta có $V_2=V-V_1\longrightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{V_1}{V-V_1}=\frac{1}{\frac{V}{V_1}-1}$.

Suy ra $\frac{V_1}{V_2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow\frac{V}{V_1}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow V_1$ đạt giá trị lớn nhất.

Xét phần mặt cắt và kí hiệu các điểm như hình vẽ.



Tam giác AKM vuông tại K nên $IK^2=AI.IM\longrightarrow r^2=h(2R-h)$.

Thể tích khối nón: $V_1=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi h^2(2R-h)$

$=\frac{1}{6}\pi h.h.(4R-2h)\le\frac{1}{6}\pi.\left(\frac{h+h+4R-2h}{3}\right)^3=\frac{32\pi R^3}{81}$.

Ta có $\frac{1}{3}\pi h^2(2R-h)=\frac{1}{6}\pi h.h.(4R-2h)\le\frac{1}{6}\pi.\left(\frac{h+h+4R-2h}{3}\right)^3=\frac{32\pi R^3}{81}$.

Vậy GTLN của V_1 bằng $\frac{32\pi R^3}{81}$. Khi đó $\frac{V_1}{V_2}=\frac{32}{76}$.

Email: thinhvanlamha@gmail.com

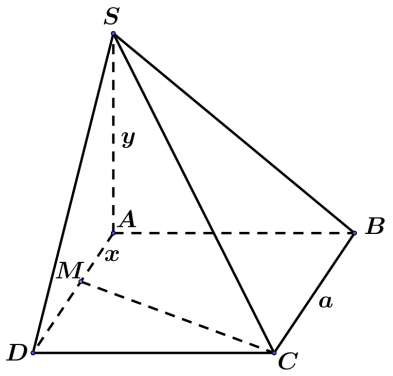
Câu 91. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại A lấy điểm S (S không trùng với A) và trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $SA^2+AM^2=a^2$. Tính giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối chóp $S.ABCM$ khi S và M thay đổi.

A. $V_{\max}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V_{\max}=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $V_{\max}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V_0=\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Thịnh ***Tên FB: Thịnh Nguyễn Văn***

Chọn B



Đặt $AM=x,\ SA=y\ (0\le x\le a, y>0)$.

Ta có $V_{S.ABCM}=\frac{1}{3}S_{ABCM}.SA=\frac{1}{6}(a+x)ay$.

Do $SA^2+AM^2=a^2$ hay $x^2+y^2=a^2\Rightarrow y=\sqrt{a^2-x^2}$.

Khi đó $V_{S.ABCM}=\frac{a}{6}(a+x)\sqrt{a^2-x^2}=\frac{a}{6}\sqrt{(a+x)^3(a-x)}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho bốn số $(a+x),(a+x),(a+x),(3a-3x)$, ta có

$$(a+x)^3(3a-3x)\le\left[\frac{3(a+x)+3a-3x}{4}\right]^4=\left(\frac{3}{2}\right)^4.a^4\Rightarrow(a+x)^3(a-x)\le\frac{27}{16}a^4.$$

Suy ra $V_{S.ABCM}\le\frac{a}{6}\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Vậy $V_{\max}=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$, đạt được khi $a+x=3a-3x\Leftrightarrow x=\frac{a}{2}$; $y=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Email:kientoanhl2@gmail.com

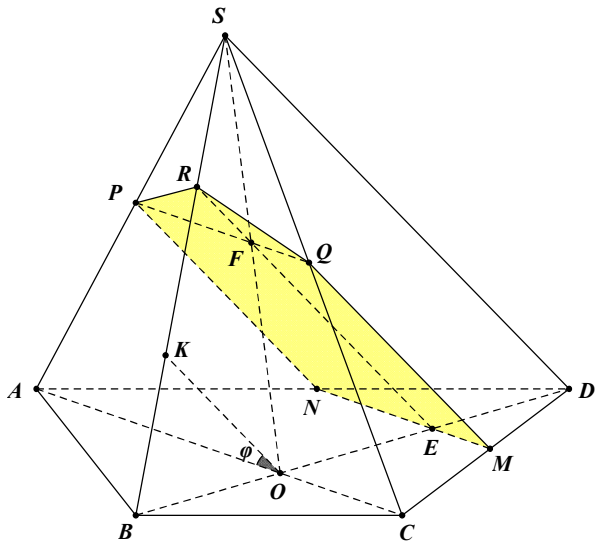
Câu 92. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AD=2a$; $SD=a\sqrt{3}$, góc giữa SD và AC là φ với $\sin\varphi=\frac{2}{3}$. Gọi M là điểm thay đổi trên CD, gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, song song với AC và SD. Xác định và tính diện tích thiết diện khi (α) cắt hình chóp $S.ABCD$. Tìm giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của diện tích thiết diện đó.

A. $S_{\max}=\dfrac{3a^2}{5}$. **B.** $S_{\max}=\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{5}$. **C.** $S_{\max}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{5}$. **D.** $S_{\max}=\dfrac{4a^2}{5}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trung Kiên.,Tên FB: Nguyễn Trung Kiên

Chọn A



- Kẻ $MN//AC\ (N\in AB)$; $NP//SD\ (P\in SA)$; $MQ//SD\ (Q\in SC)$.

Gọi $O=AC\cap BD$; $E=MN\cap BD$; $F=PQ\cap SO$; $R=EF\cap SD$.

Khi đó thiết diện cần tìm là ngũ giác $MNPRQ$, trong đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

- Nhận thấy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AD=2a$

$\Rightarrow\begin{cases}\widehat{ACD}=90^\circ\\ BC=CD=a\end{cases}\Rightarrow AC=a\sqrt{3}$ và $\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{BO}{BD}=\dfrac{1}{3}$.

- Đặt $x=\dfrac{DM}{DC}\ (0<x<1)$. Khi đó $MN=x.AC$, $MQ=(1-x).SD$.

Suy ra $S_{MNPQ}=MN.MQ.\sin\varphi=x(1-x).SD.AC.\sin\varphi$

- Dựng $OK//SD\ (K\in SB)\Rightarrow\dfrac{OK}{SD}=\dfrac{BO}{BD}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow OK=\dfrac{1}{3}SD$.

Lại có: $\dfrac{FR}{OK}=\dfrac{SF}{SO}=\dfrac{DE}{DO}=\dfrac{DM}{DC}=x\Rightarrow FR=x.OK=\dfrac{x}{3}SD$

Do góc giữa RE và PQ bằng φ nên

$$S_{PRQ}=\frac{1}{2}PQ.RF.\sin\varphi=\frac{1}{2}MN.RF.\sin\varphi=\frac{x^2}{6}SD.AC.\sin\varphi$$

Vậy $S_{MNPRQ}=S_{MNPQ}+S_{PRQ}=x\left(1-\dfrac{5x}{6}\right).SD.AC.\sin\varphi\quad(*)$.

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy*, ta có

$$\frac{5x}{6}\left(1-\frac{5x}{6}\right)\le\frac{1}{4}\left(\frac{5x}{6}+1-\frac{5x}{6}\right)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x\left(1-\frac{5x}{6}\right)\le\frac{3}{10}$$

Từ $(*)$ suy ra $S_{MNPRQ}\le\dfrac{3}{10}.SD.AC.\sin\varphi=\dfrac{3}{10}.a\sqrt{3}.a\sqrt{3}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{3a^2}{5}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{5x}{6}=1-\frac{5x}{6}\Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$.

Vậy $S_{\max}=\frac{3a^2}{5}$

Email: huunguyen1979@gmail.com

Câu 93. Cho tứ diện đều có cạnh bằng a. M là một điểm thuộc miền trong của khối tứ diện tương ứng.

Tính giá trị lớn nhất của tích các khoảng cách từ điểm M đến bốn mặt của tứ diện đã cho.

A. $\frac{a^4}{521}$. **B.** $\frac{a^4}{576}$. **C.** $\frac{a^4\sqrt{6}}{81}$. **D.** $\frac{a^4\sqrt{6}}{324}$.

Họ tên: Đào Hữu Nguyên Fb: Đào Hữu Nguyên

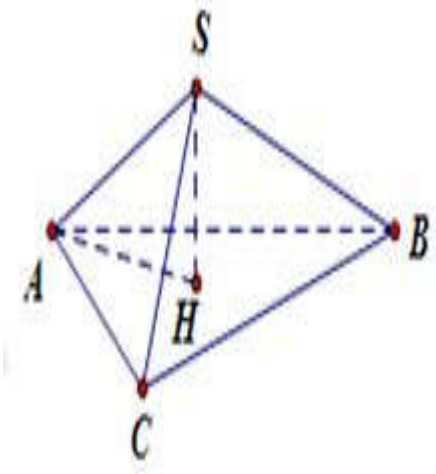
Lời giải

Gọi r_1, r_2, r_3, r_4 là khoảng cánh từ điểm M đến bốn mặt của tứ diện.

Gọi S là diện tích một mặt của tứ diện

Thể tích của tứ diện là

$V=\frac{1}{3}.S.h=\frac{1}{3}.S.(r_1+r_2+r_3+r_4)\Leftrightarrow r_1+r_2+r_3+r_4=h$.



Đường cao của tứ diện là $h=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Suy ra $\frac{a\sqrt{6}}{3}=r_1+r_2+r_3+r_4\geq 4\sqrt[4]{r_1.r_2.r_3.r_4}\Leftrightarrow r_1.r_2.r_3.r_4\leq\frac{a^4}{576}$.

Dáu "=" xảy ra khi $r_1=r_2=r_3=r_4=\frac{h}{4}=\frac{a\sqrt{6}}{12}$

Khi đó M là trọng tâm của tứ diện.

Email: diephd02@gmail.com

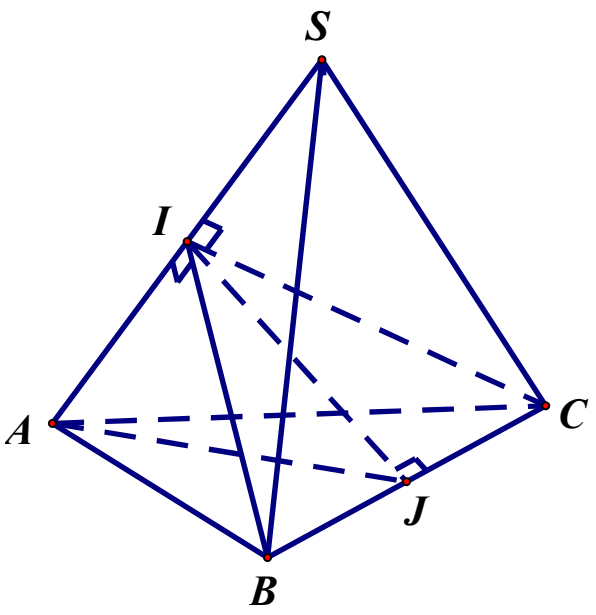
Câu 94. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a$ $\left(0<a<\sqrt{2}\right)$, các cạnh còn lại của hình chóp đều bằng 1. Khi $V_{S.ABC}$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị biểu thức $P=4a^4+a^2-2$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{15}{2};8\right)$. **B.** $\left(\frac{33}{4};\frac{35}{4}\right)$. **C.** $\left(9;\frac{37}{4}\right)$. **D.** $\left(8;\frac{33}{4}\right)$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Ngọc Diệp,,Tên FB: Nguyễn Ngọc Diệp

Chọn B



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA và BC.

ΔSAC cân tại $C \Rightarrow SA \perp IC$

ΔSAB cân tại $B \Rightarrow SA \perp IB \Rightarrow SA \perp (IBC)$.

ΔIAB vuông tại I, $IA = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}, AB = 1 \Rightarrow IB = \sqrt{AB^2 - IA^2} = \frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$.

ΔIJB vuông tại J, $JB = \frac{1}{2} \Rightarrow IJ = \sqrt{IB^2 - BJ^2} = \frac{\sqrt{3-a^2}}{2}$.

$S_{\Delta IBC} = \frac{1}{2}\text{IJ}.BC = \frac{\sqrt{3-a^2}}{4}$

$V_{S.ABC} = V_{S.IBC} + V_{A.IBC} = \frac{1}{3}\text{SI}.\text{S}_{\Delta IBC} + \frac{1}{3}\text{AI}.\text{S}_{\Delta IBC} = \frac{1}{3}(\text{SI}+\text{AI}).\text{S}_{\Delta IBC} = \frac{1}{3}\text{SA}.\text{S}_{\Delta IBC} = \frac{a\sqrt{3-a^2}}{12}$

$= \frac{1}{12}.\sqrt{a^2(3-a^2)} \le \frac{1}{12}.\frac{a^2+3-a^2}{2} = \frac{1}{8}$

Dấu "=" xảy ra khi $a^2 = 3 - a^2 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow P = \frac{17}{2}$. Chọn đáp án **B**.

Email: dactuandhsp@gmail.com

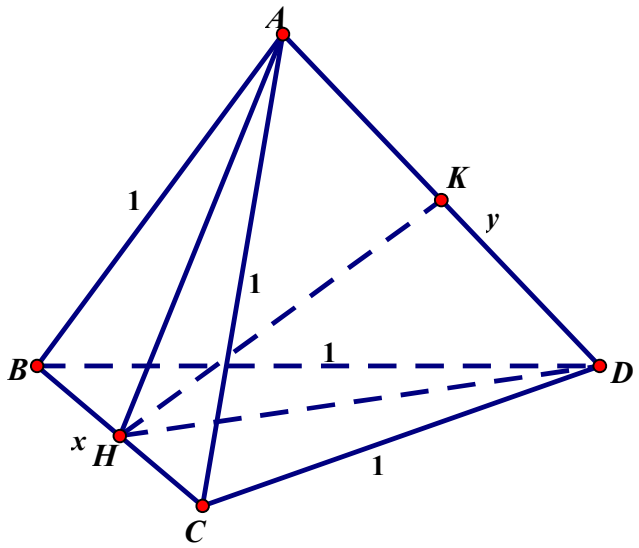
Câu 95. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = BD = CD = 1$. Khi thể tích của khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất thì khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Đắc Tuấn Face: Đỗ Đại Học

Chọn D



- Đặt $BC = x$, $AD = y$ $(x, y > 0)$.

- Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BC và AD. Do các tam giác ABC và DBC cân tại A và D nên $AH \perp BC$, $DH \perp BC \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp HK$.

Lại do các tam giác ABC và DBC bằng nhau nên $AH = DH \Rightarrow HK \perp AD$ hay $HK = d(AD, BC)$.

- Ta có : $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \Rightarrow HK = \sqrt{AH^2 - AK^2} = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta HAD} = \frac{1}{2} HK.AD \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}.BC.S_{\Delta HAD} = \frac{1}{3}.BC.\frac{1}{2}.HK.AD = \frac{1}{12}x.y.\sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Áp dụng BĐT ***Côsi*** ta có :

$$V_{ABCD} = \frac{1}{12}xy\sqrt{4 - x^2 - y^2} = \frac{1}{12}\sqrt{x^2.y^2.(4 - x^2 - y^2)} \le \frac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + 4 - x^2 - y^2}{3}\right)^3} = \frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = y^2 = 4 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Do đó $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{27} \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Khi đó : $HK = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

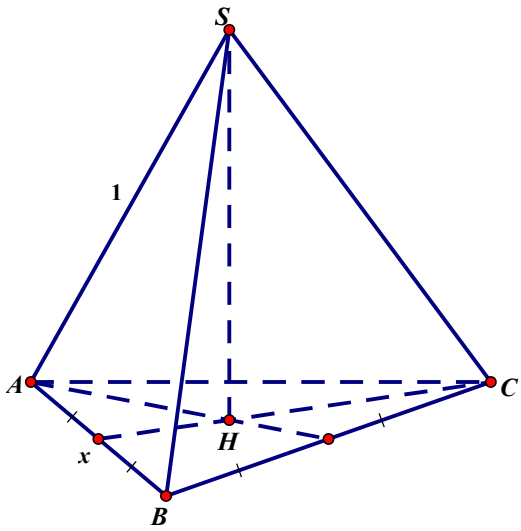
Vậy $d(AD, BC) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và có $SA = SB = SC = 1$. Tính thể thích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

A. $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V_{\max} = \frac{1}{6}$. **C.** $V_{\max} = \frac{1}{12}$ **D.** $V_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn B



- Gọi H là trọng tâm tam giác đều ABC, theo giả thiết suy ra $SH \perp (ABC)$.

- Đặt $AB = x \Rightarrow AH = \dfrac{x\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SH = \sqrt{1 - \dfrac{3x^2}{9}} = \dfrac{\sqrt{9-3x^2}}{3}$; $S_{\Delta ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{9-3x^2}}{3}.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{12}.x^2.\sqrt{3-x^2}$.

Áp dụng BĐT ***Côsi*** ta được:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{12\sqrt{2}}\sqrt{x^2.x^2.(6-2x^2)} \le \frac{1}{12\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{x^2+x^2+6-2x^2}{3}\right)^3} = \frac{1}{6}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Vậy $V_{\max} = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow AB = \sqrt{2}$.

Email: doantv.toan@gmail.com

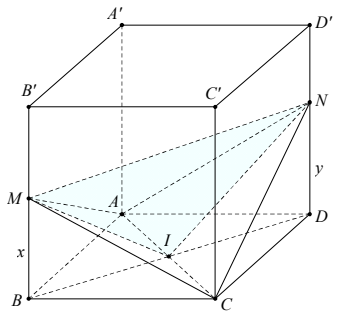
Câu 97. Cho hình lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Điểm M và N lần lượt thay đổi trên các cạnh BB' và DD' sao cho $(MAC) \perp (NAC)$ và $BM = x$, $DN = y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $ACMN$.

A. $\dfrac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{a^3}{2\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2\sqrt{3}}$.

Lời giải

Tác giả : Trần Văn Đoàn,Tên FB: Trần Văn Đoàn

Chọn A



$V_{ACMN} = V_{AMNI} + V_{CMNI} = \frac{1}{3}AC.S_{IMN}$

$= \frac{1}{3}a\sqrt{2}.(S_{BDD'B'} - S_{MND'B'} - S_{BIM} - S_{IDN})$

$= \frac{1}{3}a\sqrt{2}.\left(ab\sqrt{2} - \frac{(2b-x-y)a\sqrt{2}}{2} - \frac{x.a\sqrt{2}}{4} - \frac{y.a\sqrt{2}}{4}\right)$

$= \frac{1}{3}a\sqrt{2}.\left(\frac{x.a\sqrt{2}}{4} + \frac{y.a\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{6}a^2(x+y)$

mp(MAC) $\perp$ mp(NAC).

$\Leftrightarrow \widehat{MIN} = 1v \Leftrightarrow IM^2 + IN^2 = MN^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{a^2}{2} + y^2 + \frac{a^2}{2} = 2a^2 + (x-y)^2 \Leftrightarrow xy = \frac{a^2}{2}$

Từ đó, $V_{ACMN} = \frac{1}{6}a^2(x+y) \geq \frac{1}{3}a^2\sqrt{xy} = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}$

Cách 2. Tính trực tiếp $V_{ACMN} = \frac{1}{6}AC.IM.IN$ hoặc $V_{ACMN} = \frac{1}{12}AC.S_{BDNM}$ (Đều coi AC là đường cao).

Cách 3. Chứng minh được $\frac{1}{IM^2} + \frac{1}{IN^2} = \frac{1}{IB^2}$ là hằng số, từ đó dùng bất đẳng thức suy ra giá trị nhỏ nhất của $V_{ACMN} = \frac{1}{6}AC.IM.IN$

.

Email: ngbdai@gmail.com

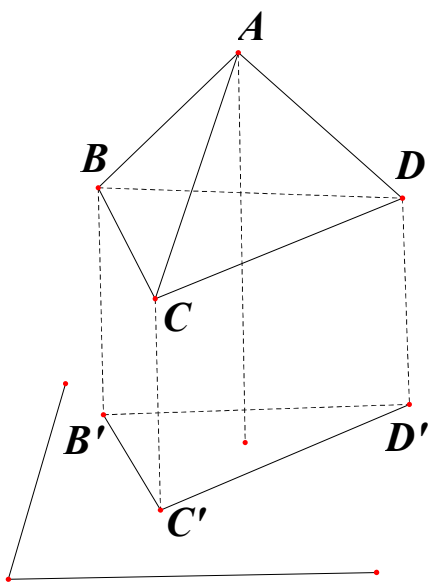
Câu 98. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi S là diện tích hình chiếu của tứ diện lên các mặt phẳng khác nhau. Khi đó S lớn nhất bằng?

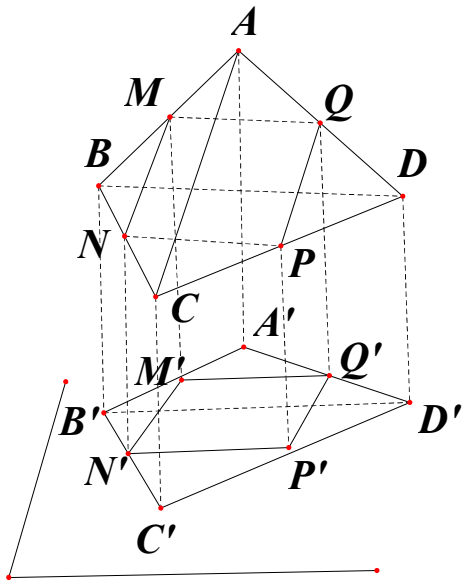
A. $S = a^2$. **B.** $S = \frac{a^2}{2}$. **C.** $S = \frac{a^2}{4}$. **D.** $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Bá Đại,Tên FB: Dai NB

Chọn B





Nếu hình chiếu là tam giác, giả sử là tam giác $B'C'D'$, khi đó $S_{B'C'D'} \le S_{BCD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Nếu hình chiếu là tứ giác, giả sử là $A'B'C'D'$. Gọi M,N,P,Q, M',N',P',Q' lần lượt là trung điểm các cạnh $AB,BC,CD,DA,A'B',B'C',C'D',D'A'$, khi đó

$S_{A'B'C'D'} = 2S_{M'N'P'Q'} \le 2S_{MNPQ} = \dfrac{a^2}{2}$.

Vậy $S = \dfrac{a^2}{2}$.

Gmail: nvanphu1981@gmail.com

Câu 99. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là α. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC bằng a và thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của $\cos\alpha$ bằng:

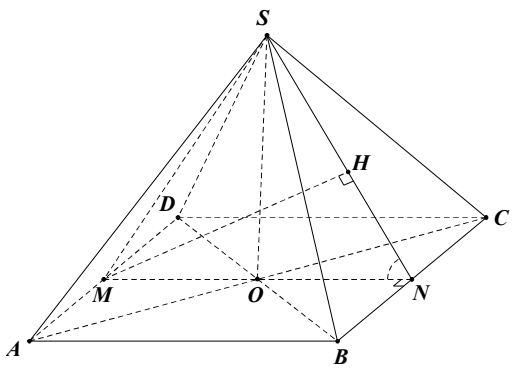
A. $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Tên fb: Nguyễn Văn Phú

Lời giải

Do $AD//BC$ mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow AD//(SBC) \Rightarrow d(AD;SC) = d(AD;(SBC)) = d(M;(SBC))$.

Trong tam giác SMN kẻ $MH \perp SN, H \in SN$, ta có:



$$\begin{cases} MH \perp BC \ \ (\text{do BC} \perp (SBN)) \\ MH \perp SN \end{cases} \Rightarrow MH \perp (SBC)$$

$\Rightarrow d(M;(SBC)) = MH = a$

Tam giác vuông HMN có

$MN = \dfrac{a}{\sin\alpha} = AB \Rightarrow S_{ABCD} = AB^2 = \dfrac{a^2}{\sin^2\alpha}$

Tam giác vuông SON có

$SO = ON.\tan\alpha = \dfrac{1}{2}MN.\tan\alpha = \dfrac{a}{2\sin\alpha}.\tan\alpha$

Khi đó $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a}{2\sin\alpha}.\tan\alpha.\frac{a^2}{\sin^2\alpha}=\frac{a^3}{6}.\frac{1}{\sin^2\alpha.\cos\alpha}$

Đặt $t=\cos\alpha$ với $0<t<1$. Ta có : $V_{S.ABCD}=\frac{a^3}{6}.\frac{1}{t(1-t^2)}$, $0<t<1$

$V_{S.ABCD}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow f(t)=t(1-t^2)=t-t^3$ lớn nhất trên khoảng $(0;1)$.

Ta có $f'(t)=1-3t^2; f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Lập BBT ta có $f(t)$ lớn nhất $\Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Chọn B

Email: mp01100207@gmail.com

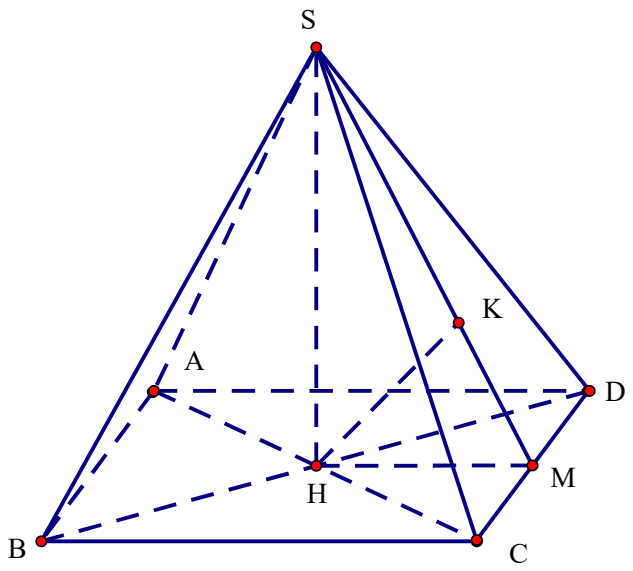
Câu 100. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng a, góc hợp bởi đường cao SH của hình chóp và mặt bên bằng α. Tìm α để thể tích $S.ABCD$ là lớn nhất.

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 75^0

Lời giải

Chọn B

Tác giả : Phúc Minh Anh,Tên FB: Phúc Minh Anh



Do hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên H là giao điểm của AC và BD

Gọi M là trung điểm của CD ta có $CD\perp(SHM)$ nên $(SHM)\perp(SCD)$ mà $(SHM)\cap(SCD)=SM$ nên từ H dựng $HK\perp SM$ tại K thì $HK\perp(SCD)$

Hay SK là hình chiếu của SH lên mặt phẳng (SCD) suy ra $(SH,(SCD))=\widehat{(SH,SK)}=\widehat{HSK}$ do tam giác SHK vuông tại K theo giả thiết ta có $\widehat{HSM}=\alpha$ với $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

Đặt $SH=h\Rightarrow HC^2=a^2-h^2\Rightarrow HM=\sqrt{\frac{a^2-h^2}{2}}$ và $BC=\sqrt{2(a^2-h^2)}$

Tam giác SHM vuông tại H : $\tan\alpha=\frac{HM}{SH}=\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{\sqrt{2}h}\Leftrightarrow 2h^2\tan^2\alpha=a^2-h^2$

$\Leftrightarrow h^2(1+2\tan^2\alpha)=a^2 \Rightarrow h=\dfrac{a}{\sqrt{1+2\tan^2\alpha}}$

$BC^2=2(a^2-h^2)=4h^2\tan^2\alpha=\dfrac{4a^2\tan^2\alpha}{1+2\tan^2\alpha} \Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}BC^2.SH=\dfrac{1}{3}\dfrac{4a^3\tan^2\alpha}{\sqrt{(1+2\tan^2\alpha)^3}}$

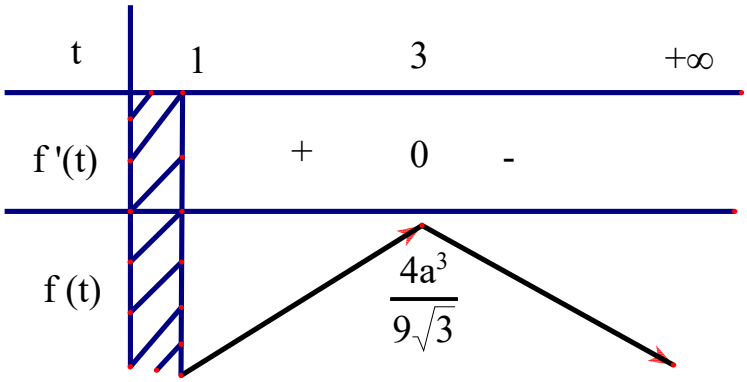
Đặt $t=1+2\tan^2\alpha$ Với $t\in(1;+\infty)\Rightarrow \tan^2\alpha=\dfrac{t-1}{2}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2a^3}{3}.\dfrac{t-1}{t\sqrt{t}}$ trên $D=(1;+\infty)$

$f'(t)=\dfrac{a^3}{3}.\dfrac{\left(t\sqrt{t}-\dfrac{3}{2}\sqrt{t}(t-1)\right)}{t^3}=\dfrac{a^3}{3}.\dfrac{(3-t)}{2t^2\sqrt{t}}$

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=3$

Bảng biến thiên



Vậy $\max f(t)=\dfrac{4a^3}{9\sqrt{3}}$ khi $t=3\Rightarrow \tan\alpha=1$ do $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ hay $\alpha=45^0$.

Email: lehongphivts@gmail.com

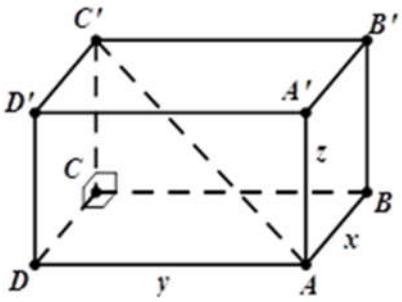
Câu 101. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của khối hộp chữ nhật lớn nhất là bao nhiêu?

A. $8\sqrt{2}$. **B.** $6\sqrt{6}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** $16\sqrt{2}$.

Lời giải

Người giải : Lê Hồng Phi,Tên FB: Lê Hồng Phi

Chọn A



Cách 1.

Gọi x, y, z lần lượt là độ dài của các cạnh AB, AD, AA'.

Diện tích tất cả các mặt là $S_{tp}=2(xy+yz+zx)=36\Leftrightarrow xy+yz+zx=18,\quad (1)$.

Độ dài đường chéo $AC' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 6 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

Suy ra $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 72 \Leftrightarrow x + y + z = 6\sqrt{2},\ (2)$.

Từ (2) ta có $y + z = 6\sqrt{2} - x$. Do đó, kết hợp với (1) ta được

$$yz = 18 - x(y+z) = 18 - x\left(6\sqrt{2} - x\right) = x^2 - 6\sqrt{2}x + 18.$$

Ta luôn có $(y+z)^2 \geq 4yz,\ \forall y, z$ nên

$$\left(6\sqrt{2} - x\right)^2 \geq 4\left(x^2 - 6\sqrt{2}x + 18\right) \Leftrightarrow 3x^2 - 12\sqrt{2}x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4\sqrt{2}.$$

Thể tích của khối hộp chữ nhật là $V = xyz = x\left(x^2 - 6\sqrt{2}x + 18\right) = x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 18x$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 18x$ trên đoạn $\left[0; 4\sqrt{2}\right]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 12\sqrt{2}x + 18$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \in \left[0; 4\sqrt{2}\right] \\ x = 3\sqrt{2} \in \left[0; 4\sqrt{2}\right]. \end{array}\right.$

Ta tính được $f(0) = 0;\ f\left(4\sqrt{2}\right) = 8\sqrt{2};\ f\left(\sqrt{2}\right) = 8\sqrt{2};\ f\left(3\sqrt{2}\right) = 0$.

Với $x = \sqrt{2}$ thì $\begin{cases} y + z = 5\sqrt{2} \\ yz = 8 \end{cases}$. Như thế $(x; y; z) \in \left\{\left(\sqrt{2}; 4\sqrt{2}; \sqrt{2}\right), \left(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 4\sqrt{2}\right)\right\}$.

Với $x = 4\sqrt{2}$ thì $\begin{cases} y + z = 2\sqrt{2} \\ yz = 2 \end{cases}$. Như thế $(x; y; z) = \left(4\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$.

Vậy thể tích của khối hộp chữ nhật lớn nhất là $8\sqrt{2}$ khi $(x; y; z) = \left(\sqrt{2}; 4\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ và các hoán vị của nó.

Cách 2.

Gọi x, y, z lần lượt là độ dài của các cạnh AB, AD, AA'.

Diện tích tất cả các mặt là $S_{tp} = 2(xy + yz + zx) = 36 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 18,\quad (1)$.

Độ dài đường chéo $AC' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 6 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

Suy ra $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 72 \Leftrightarrow x + y + z = 6\sqrt{2},\ (2)$.

Thể tích của khối hộp chữ nhật là $V = xyz,\ (3)$.

Từ (1), (2) và (3) suy ra x, y, z là 3 nghiệm của phương trình

$$X^3 - 6\sqrt{2}X^2 + 18X - V = 0 \Leftrightarrow V = X^3 - 6\sqrt{2}X^2 + 18X,\quad (4).$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(X) = X^3 - 6\sqrt{2}X^2 + 18X$ trên $\left(0; 6\sqrt{2}\right)$ như sau

X	0		$\sqrt{2}$		$3\sqrt{2}$		$6\sqrt{2}$
$f'(X)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(X)$	0	$\nearrow$	$8\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$108\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị lớn nhất của V để phương trình (4) có 3 nghiệm (không cần phân biệt) trên khoảng $\left(0;6\sqrt{2}\right)$ là $8\sqrt{2}$.

Vậy thể tích của khối hộp chữ nhật lớn nhất là $8\sqrt{2}$ khi $(x;y;z)=\left(\sqrt{2};4\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ và các hoán vị của nó.

Mail: **hunglxyl@gmail.com**

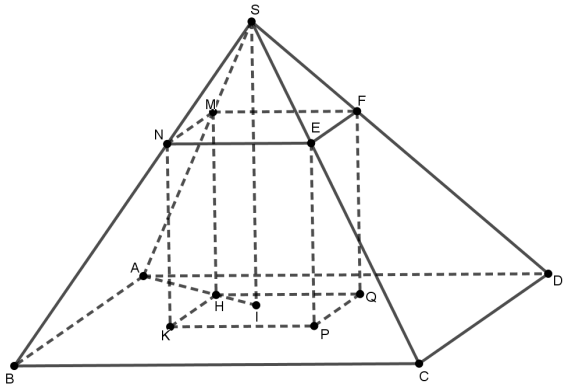
Câu 102. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng V, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ cắt các đoạn SA, SB, SC, SD tương ứng tại M, N, E, F (M, N, E, F khác S và không nằm trên $(ABCD)$). Các điểm H, K, P, Q tương ứng là hình chiếu vuông góc của M, N, E, F lên $(ABCD)$. Thể tích lớn nhất của khối đa diện $MNEFHKPQ$ là

A. $\frac{4}{9}V$. **B.** $\frac{2}{9}V$. **C.** $\frac{2}{3}V$. **D.** $\frac{4}{27}V$.

Lời giải

Tác giả: **Lê Xuân Hưng,Tên FB: Hưng Xuân Lê**

Chọn A



Đặt $k=\frac{SM}{SA}$, $(0<k<1)$.

Ta có $MNEF$ và $ABCD$ đồng dạng với tỉ số $k=\frac{SM}{SA}$.

Suy ra $S_{MNEF}=k^2S_{ABCD}$.

Gọi SI là đường cao của $S.ABCD$. Khi đó $\frac{MH}{SI}=\frac{MA}{SA}=\frac{SA-SM}{SA}=1-k$.

Ta có

$V_{MNEFHKPQ} = S_{MNEF}.MH = S_{ABCD}.k^2.(1-k).SI = 3V.k^2.(1-k)$

$= \frac{3V}{2}.k.k.(2-2k) \le \frac{3V}{2}.\left(\frac{k+k+2-2k}{3}\right)^3 = \frac{4}{9}V$.

Do đó thể tích lớn nhất của khối đa diện $MNEFHKPQ$ là $\frac{4}{9}V$ khi $k = 2-2k \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$.

Email: cvtung.lg2@bacgiang.edu.vn

Câu 103. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Trên $AB, CC', C'D'$ lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = C'N = C'P < a$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình lập phương có chu vi bé nhất bằng.

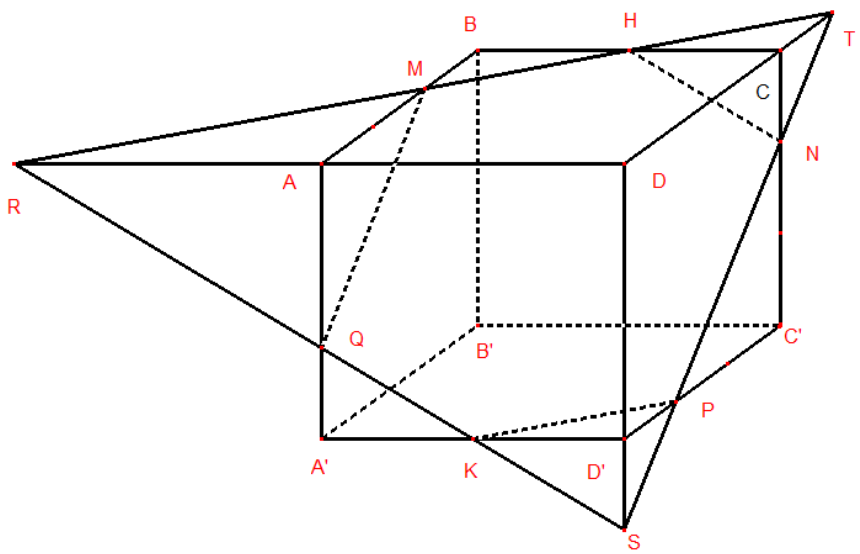
A. $4a\sqrt{2}$. **B.** $3a\sqrt{2}$. **C.** $2\left(1+\sqrt{2}\right)a$. **D.** $3a$.

Lời giải

Tác giả :Cao Văn Tùng,Tên FB: Cao Tung

Chọn B

***) Dựng thiết diện:** Kẻ $NP \cap DD' = S; NP \cap CD = T$; $MT \cap BC = H$; $MT \cap AD = R$; SR giao với AA' và $A'D'$ lần lượt tại Q, K. Khi đó thiết diện là lục giác $MHNPKQ$.



Đặt $C'N = C'P = x$, $(0 < x < a)$ ta có tam giác $C'NP$ vuông cân; suy ra góc $\widehat{PNC'} = \widehat{CNT} = 45^0$ suy ra ΔNCT vuông cân tại C ta được $NC = CT = a - x$, ta lại có $BM = a - x$ và $BM // CT$ nên H là trung điểm BC từ đó có $BH = CH = \frac{a}{2}$

Chứng minh tương tự ta có $A'K = D'K = \frac{a}{2}$.

Ta tính được $MQ = NP = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$;

$MH = HN = PK = KQ = \sqrt{(a-x)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - 2ax + \frac{5a^2}{4}}$

Chu vi thiết diện là $C_{MHNPKQ} = 2x\sqrt{2} + 4\sqrt{x^2 - 2ax + \frac{5a^2}{4}} = f(x)$.

$f'(x)=2\sqrt{2}+\dfrac{4(x-a)}{\sqrt{x^2-2ax+\dfrac{5a^2}{4}}}$; cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{a}{2} \\ x=\dfrac{3a}{2}\notin(0;a) \end{array}\right.$, ta có bảng biến thiên:

x	0		$a/2$		a
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$2a\sqrt{5}$	$\searrow$	$3a\sqrt{2}$	$\nearrow$	$2(1+\sqrt{2})a$

Kết quả là chu vi nhỏ nhất $\min C_{MHNPKQ}=3a\sqrt{2}$.

Email: ngvnho93@gmail.com

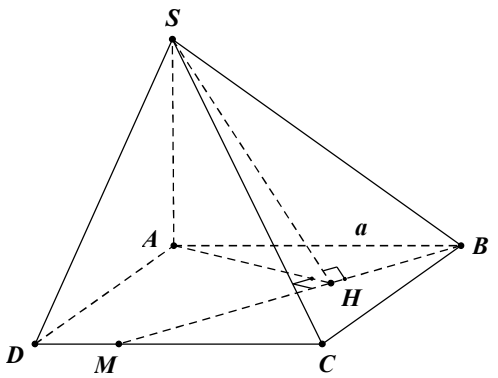
Câu 104. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Gọi M là điểm di động trên cạnh CD và H là hình chiếu vuông góc của S lên đường thẳng BM. Khi điểm M di động trên cạnh CD, thể tích khối chóp $S.ABH$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Văn Nho,Tên FB: Nguyễn Văn Nho

Chọn B



Cách 1

Đặt $CM=x\ (0<\alpha\le a)$, ta có

$$S_{\Delta ABH}=S_{ABCD}-S_{\Delta ADM}-S_{\Delta BCM}=a^2-\frac{1}{2}a(a-x)-\frac{1}{2}ax=\frac{a^2}{2}.$$

Mặt khác $S_{\Delta ABH}=\dfrac{1}{2}AH.BM$, với $BM=\sqrt{x^2+a^2}$

$$\Rightarrow AH=\frac{2S_{\Delta ABH}}{BM}=\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\Rightarrow BH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\frac{ax}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Do đó $V_{S.ABH}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABH}.SA=\dfrac{a^4x\sqrt{3}}{6(x^2+a^2)}$.

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$V_{S.ABH}=\frac{a^4\sqrt{3}}{6\left(x+\frac{a^2}{x}\right)}\le\frac{a^4\sqrt{3}}{6.2\sqrt{x.\frac{a^2}{x}}}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

$\Rightarrow \max V_{S.ABH}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$, đạt được khi $x=\frac{a^2}{x}\Rightarrow x=a\ \Rightarrow M\equiv D$.

Cách 2

Trong tam giác SBM kẻ đường cao SH, ta có

$$\begin{cases}BM\perp SH\\BM\perp SA\end{cases}\Rightarrow BM\perp(SAH)\Rightarrow BM\perp AH.$$

Đặt $\widehat{ABM}=\alpha\ \left(45^0\le\alpha<90^0\right)$, ta có

$AH=AB.\sin\alpha=a\sin\alpha$, $BH=AB.\cos\alpha=a\cos\alpha$.

Thể tích khối chóp $S.ABH$ là:

$$V_{S.ABH}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABH}.SA=\frac{1}{6}AH.BH.SA=\frac{1}{6}a\sin\alpha.a\cos\alpha.a\sqrt{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}\sin 2\alpha.$$

Ta có $V_{S.ABH}\le\frac{a^3\sqrt{3}}{12}\ \Rightarrow \max V_{S.ABH}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$, đạt được khi $\sin 2\alpha=1\Rightarrow\alpha=45^0$ hay $M\equiv D$.

Cách 3

Ta có $V_{S.ABH}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABH}.SA$.

Mà $SA=a\sqrt{3}$ không đổi nên $V_{S.ABH}$ lớn nhất khi $S_{\Delta ABH}$ lớn nhất.

Lại có $a^2=AB^2=AH^2+BH^2\overset{Cauchy}{\ge}2AH.BH$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABH}=\frac{1}{2}AH.BH\le\frac{a^2}{4}\Rightarrow V_{S.ABH}\le\frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

$\Rightarrow \max V_{S.ABH}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$, đạt được khi $AH=BH\ \Rightarrow\widehat{ABH}=45^0\Rightarrow M\equiv D$.

Email: chitoannd@gmail.com

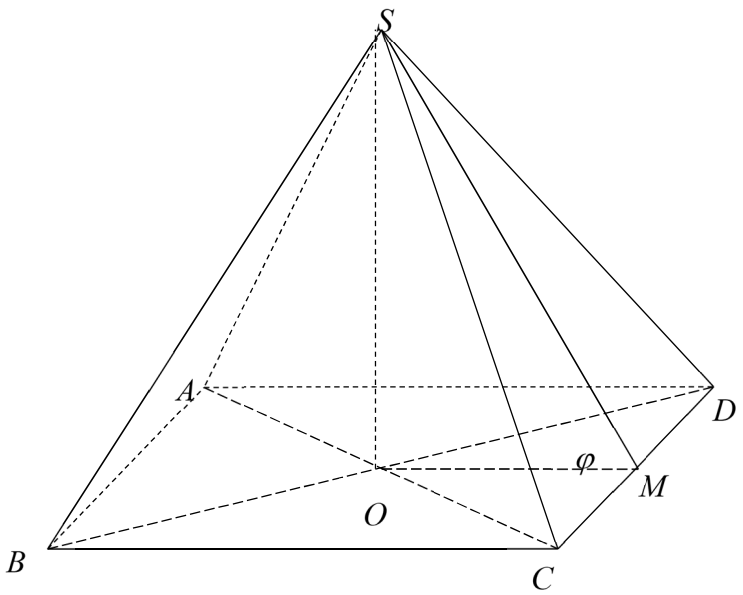
Câu 105. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng a, mặt bên tạo với đáy một góc bằng φ. Biết rằng khi $\varphi=\varphi_0$ thì thể tích của khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất. Chọn khẳng định đúng.

A. $\varphi_0\in\left(40^0;55^0\right)$. **B.** $\varphi_0\in\left(0^0;39^0\right)$. **C.** $\varphi_0\in\left(58^0;79^0\right)$. **D.** $\varphi_0\in\left(72^0;90^0\right)$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Văn Chí,Tên FB: Nguyễn Văn Chí

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có: $\begin{cases} OM \perp BC \\ SM \perp BC \\ (ABCD) \cap (SBC) = BC \end{cases} \longrightarrow \varphi = \widehat{SMO}$.

Đặt $BC = 2x$, ta có $OM = x$, Trong tam giác vuông SOM có $SO = OM \tan\varphi = x\tan\varphi$.

Trong tam giác vuông SOB có: $SO^2 = SB^2 - OB^2 = a^2 - 2x^2$.

Do vậy ta có phương trình: $a^2 - 2x^2 = x^2\tan^2\varphi \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{\sqrt{2+\tan^2\varphi}}$

$$\longrightarrow BC = \frac{2a}{\sqrt{2+\tan^2\varphi}};\ SO = \frac{a\tan\varphi}{\sqrt{2+\tan^2\varphi}}$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\tan\varphi}{\sqrt{2+\tan^2\varphi}}.\frac{4a^2}{2+\tan^2\varphi} = \frac{4a^3\tan\varphi}{3(2+\tan^2\varphi)\sqrt{2+\tan^2\varphi}} = \frac{4a^3}{3}.\sqrt{\frac{\tan^2\varphi}{(2+\tan^2\varphi)^3}}$$

Ta có:

$$\frac{\tan^2\varphi}{(2+\tan^2\varphi)^3} = \frac{\tan^2\varphi}{2+\tan^2\varphi}.\frac{1}{2+\tan^2\varphi}.\frac{1}{2+\tan^2\varphi} \overset{CAUCHY}{\le} \left[\frac{1}{3}\left(\frac{\tan^2\varphi}{2+\tan^2\varphi} + \frac{1}{2+\tan^2\varphi} + \frac{1}{2+\tan^2\varphi}\right)\right]^3 = \frac{1}{27}$$

Nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{4a^3}{3}.\sqrt{\dfrac{\tan^2\varphi}{(2+\tan^2\varphi)^3}} \le \dfrac{4a^3}{9\sqrt{3}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{\tan^2\varphi}{2+\tan^2\varphi} = \dfrac{1}{2+\tan^2\varphi} \Leftrightarrow \tan^2\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 45^0$.

Email: quangtqp@gmail.com

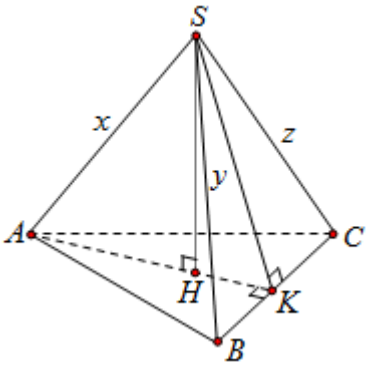
Câu 106. Cho hình tứ diện $SABC$ có độ dài các cạnh $SA = BC = x$, $SB = AC = y$, $SC = AB = z$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 27$. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $SABC$.

A. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Phí Văn Quang Tên FB: QuangPhi

Chọn C



Thể tích khối tứ diện $V=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(y^2+z^2-x^2\right)\left(z^2+x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2-z^2\right)}$.

Mà $x^2+y^2+z^2=27$ nên $V=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(27-2x^2\right)\left(27-2y^2\right)\left(27-2z^2\right)}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương $\left(27-2x^2\right)$, $\left(27-2y^2\right)$, $\left(27-2z^2\right)$ ta có

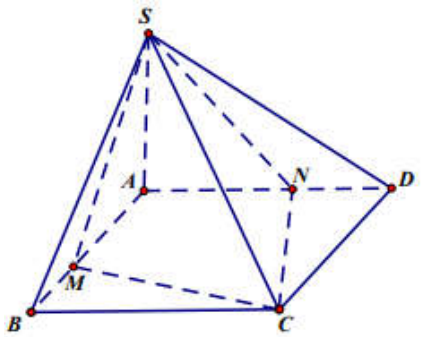
$$\left[\frac{\left(27-2x^2\right)+\left(27-2y^2\right)+\left(27-2z^2\right)}{3}\right]^3\geq\left(27-2x^2\right)\left(27-2y^2\right)\left(27-2z^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 729\geq\left(27-2x^2\right)\left(27-2y^2\right)\left(27-2z^2\right)\Rightarrow V\leq\frac{\sqrt{2}}{12}.\sqrt{729}\Leftrightarrow V\leq\frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy $V_{\max}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$, đạt được khi $x=y=z=3$ tức là tứ diện đã cho là tứ diện đều cạnh bằng 3.

Email: minhngau@gmail.com.

Câu 107. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA=2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC). Tính tổng $T=\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{AM^2}$ khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.

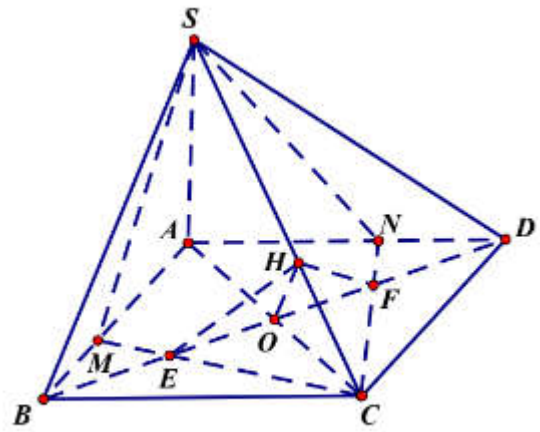


A. $T=2$. **B.** $T=\frac{5}{4}$. **C.** $T=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$. **D.** $T=\frac{13}{9}$.

Họ và tên: Châu Minh Ngẩu FB: Minhngau Chau

Lời giải

Chọn B



Cách 1: Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;2;0)$, $S(0;0;2)$.

Suy ra $C(2;2;0)$. Đặt $AM = x$, $AN = y$, $x, y \in [0;2]$, suy ra $M(x;0;0)$, $N(0;y;0)$.

$\overrightarrow{SM} = (x;0;-2)$, $\overrightarrow{SC} = (2;2;-2)$, $\overrightarrow{SN} = (0;y;-2)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC}\right] = (4;2x-4;2x)$, $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{SC}\right] = (4-2y;-4;-2y)$.

Do $(SMC) \perp (SNC)$ nên $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow 4(4-4y) - 4(2x-4) - 4xy = 0 \Leftrightarrow xy + 2(x+y) = 8$.

$\Leftrightarrow y = \dfrac{8-2x}{x+2}$, do $y \le 2$ nên $\dfrac{8-2x}{x+2} \le 2 \Leftrightarrow x \ge 1$.

$S_{AMCN} = S_{ABCD} - S_{BMC} - S_{DNC} = 4 - (2-x) - (2-y) = x + y$.

Do đó $V_{S.AMCD} = \dfrac{1}{3} SA.S_{AMCN} = \dfrac{2}{3}(x+y) = \dfrac{2}{3}\left(x + \dfrac{8-2x}{x+2}\right) = \dfrac{2}{3}\dfrac{x^2+8}{x+2}$.

Xét $f(x) = \dfrac{2}{3}\dfrac{x^2+8}{x+2}$ với $x \in [1;2]$, $f'(x) = \dfrac{2}{3}\dfrac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 + 2\sqrt{3}$; $x = -2 - 2\sqrt{3}$ (loại).

Lập BBT ta suy ra $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) = f(2) = 2$.

Vậy $\max V_{S.AMCN} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow T = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5}{4}$.

Cách 2: Đặt $AM = x$, $AN = y$. Gọi $O = AC \cap DB$; $E = BD \cap CM$; $F = BD \cap CN$.

H là hình chiếu vuông góc của O trên SC, khi đó: $HO = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Ta có: $\begin{cases} SC \perp OH \\ SC \perp BD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (HBD) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp HE \\ SC \perp HF \end{cases}$.

Do đó góc giữa (SCM) và (SCN) bằng góc giữa HE và HF. Suy ra $HE \perp HF$.

Mặt khác $V_{S.AMCN} = \frac{1}{3} SA.S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y)$.

Tính OE, OF:

Ta có: $x > 0$, $y > 0$ và nếu $x \neq 2$, $y \neq 2$ thì gọi K là trung điểm của AM, khi đó:

$$\frac{OE}{EB} = \frac{KM}{MB} = \frac{x}{4-2x} \Rightarrow \frac{OE}{x} = \frac{EB}{4-2x} = \frac{OB}{4-x} \Rightarrow OE = \frac{x\sqrt{2}}{4-x}.$$

Tương tự: $OF = \frac{y\sqrt{2}}{4-y}$. Mà $OE.OF = OH^2 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12$.

Nếu $x = 2$ hoặc $y = 2$ thì ta cũng có $OE.OF = OH^2 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12$.

Tóm lại: $(x+2)(y+2) = 12$.

Suy ra: $V_{S.AMCN} = \frac{1}{3} SA.S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y) = \frac{2}{3}\left[(x+2)+(y+2)-4\right] = \frac{2}{3}\left[(x+2)+\frac{12}{x+2}-4\right]$.

Do đó $\max V_{S.AMCN} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow T = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}$.

***Email:* hongvanlk69@gmail.com**

Câu 108. Cho tam giác ABC đều cạnh a ,trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm M bất kỳ khác A . Gọi H là trực tâm tam giác MBC , biết rằng đường thẳng (Δ) vuông góc với mặt phẳng MBC tại H luôn cắt đường thẳng d tại N .Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích toàn phần tứ diện $MNBC$

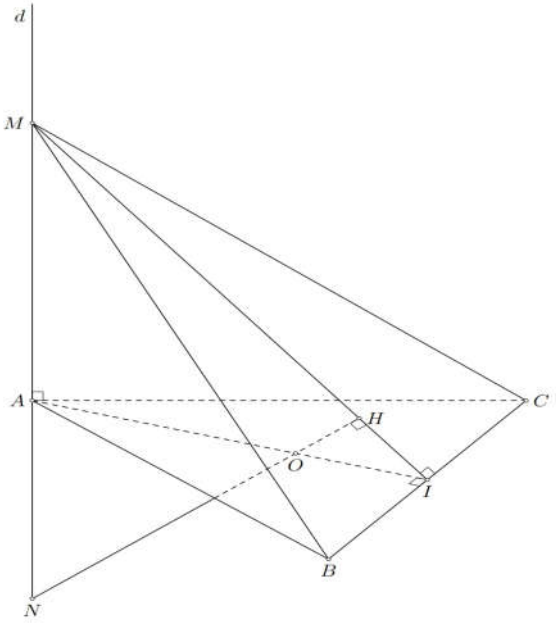
A. $\frac{a^2(2\sqrt{2}+\sqrt{5})}{2}$. **B..** $\frac{a^2(2\sqrt{5}+\sqrt{2})}{2}$ **C.** $\frac{a^2(2+\sqrt{5})}{2}$. **D.** $\frac{a^2(5+\sqrt{2})}{2}$.

Lời giải

Tác giả : Lê Thị Hồng Vân

Tên FB: Rosycloud

Chọn A



Gọi I là trung điểm BC ta dễ dàng chứng minh được $\begin{cases} BC \perp mp(MAI) \\ (\Delta) \subset mp(MAI) \end{cases}$

Gọi $O = (\Delta) \cap AI$, ta có O là trực tâm tam giác MNI

suy ra $AM.AN = AO.AI$ (do $\Delta AMO \sim \Delta AIN$)

$\Rightarrow MN \geq 2\sqrt{AO.AI}$ (BĐT cauchy)

Ta dễ dàng chứng minh được O là trọng tâm tam giác ABC

$\Rightarrow MN \geq a\sqrt{2}$ vì $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}; AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ do tam giác ABC đều cạnh a .

Rõ ràng $MN \perp AB; MI \perp BC; NI \perp BC$ nên

$S_{tp} = \dfrac{1}{2}(MN.AB + MI.BC + MN.AC + NI.BC) = \dfrac{1}{2}a(2MN + MI + NI)$ vì ABC đều cạnh a .

Ta có $MI = \sqrt{AM^2 + AI^2} = \sqrt{AM^2 + \dfrac{3a^2}{4}}$

Nên theo BĐT Bunhia ta có $MI \geq \dfrac{AM.\sqrt{2} + \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

Tương tự ta cũng có $NI \geq \dfrac{AN.\sqrt{2} + \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

Do đó $S_{tp} \geq \dfrac{1}{2}a(2MN + MN\sqrt{\dfrac{2}{5}} + \dfrac{3a}{\sqrt{5}})$

Mà $MN \geq a\sqrt{2}$ (cmt) nên $S_{tp} \geq \dfrac{a^2(2\sqrt{2} + \sqrt{5})}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $AM = AN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Chọn A

Gmail: tuonganh0209@gmail.com

Câu 109. Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = BC = x$, $SB = AC = y$, $SC = AB = z$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 12$. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ là

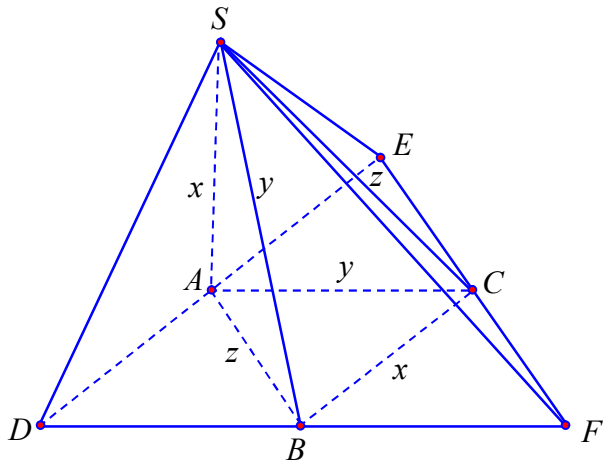
A. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $V = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Tác giả: Nguyễn Ngọc Thảo –,Tên FB: Nguyễn Ngọc Thảo

Lời giải

Chọn A

Cách 1



Trong mặt phẳng (ABC) dựng D, E, F sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của DE, DF, EF. Khi đó ta có $DE = 2SA = 2x$; $DF = 2SB = 2y$; $= 2SC = 2z$. Suy ra SD, SE, SF đôi một vuông góc.

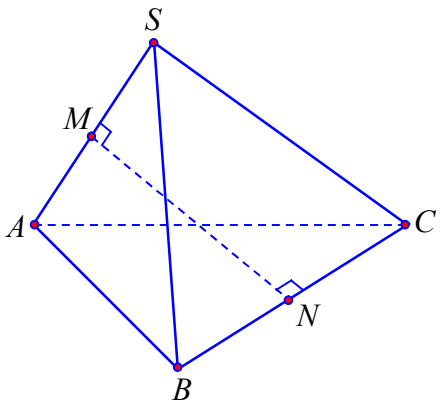
Ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{4}V_{S.DEF} = \frac{1}{4}.\frac{1}{6}.SD.SE.SF$.

Mặt khác $\begin{cases} SD^2 + SE^2 = 4x^2 \\ SD^2 + SF^2 = 4y^2 \\ SE^2 + SF^2 = 4z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SD^2 = 2(x^2 + y^2 - z^2) \\ SE^2 = 2(x^2 + z^2 - y^2) \\ SF^2 = 2(y^2 + z^2 - x^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SD = 2\sqrt{6 - z^2} \\ SE = 2\sqrt{6 - y^2} \\ SF = 2\sqrt{6 - x^2} \end{cases}$.

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{24}.8.\sqrt{(6 - x^2)(6 - y^2)(6 - z^2)} \le \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{6 - x^2 + 6 - y^2 + 6 - z^2}{3}\right)^3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABC}$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Cách 2



Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC.

Lúc đó MN là đường vuông góc chung của SA và BC.

ΔSMN ta có $MN=\sqrt{SN^2-SM^2}=\sqrt{\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2}}$.

$$V=\frac{1}{6}SA.BC.MN.\sin\left(SA,BC\right)=\frac{1}{6}x^2\sqrt{\frac{y^2+z^2-x^2}{2}}.\sqrt{1-\cos^2\left(SA,BC\right)}$$

$$=\frac{1}{6}x^2\sqrt{\frac{y^2+z^2-x^2}{2}}.\sqrt{1-\frac{\left(y^2-z^2\right)^2}{x^4}}=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(x^2+y^2-z^2\right)\left(y^2+z^2-x^2\right)\left(z^2+x^2-y^2\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(12-2z^2\right)\left(12-2x^2\right)\left(12-2y^2\right)}=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{8\left(6-z^2\right)\left(6-x^2\right)\left(6-y^2\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\left(6-z^2\right)\left(6-x^2\right)\left(6-y^2\right)}\le\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{6-z^2+6-y^2+6-x^2}{3}\right)^3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Dấu bằng xẩy ra khi $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=12\\x=y=z\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=2$.

Lúc đó $V=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Gmail: phuongthu081980@gmail.com

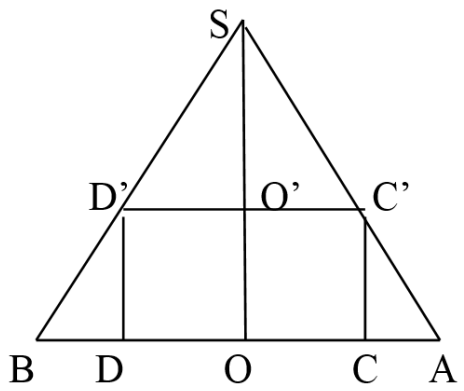
Câu 1. Cho hình trụ nội tiếp hình nón chiều cao h, bán kính đáy R , thể tích lớn nhất của hình trụ bằng:

A. $\frac{4\pi hR^2}{27}$ **B.** $\frac{\pi R^2 h}{9}$ **C.** $\frac{\pi R^2 h}{8}$ **D.** $\pi R^2 h$

Lời giải

Chọn A

Tác giả: Nguyễn Thị Phương Thu FB: Nguyễn Phương Thu



Mp qua trục của hình nón cắt hình nón theo thiết diện là tam giác cân SAB và cắt hình trụ nội tiếp theo thiết diện là hình chữ nhật nội tiếp tam giác SAB

Đặt $OC = x\left(0 < x < R\right); C'C = y\left(0 < y < h\right)$

ΔSOA có $C'C // SO \Rightarrow \frac{C'C}{SO} = \frac{AC}{AO} \Rightarrow \frac{y}{h} = \frac{R-x}{R} \Rightarrow y = \frac{h\left(R-x\right)}{R}$

Thể tích của hình trụ nội tiếp hình nón là : $V = \pi x^2 y = \frac{\pi h x^2\left(R-x\right)}{R}$

Theo bất đẳng thức Cosi ta có: $\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\left(R-x\right)} \le \frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+R-x}{3} = \frac{R}{3}$

Dấu "=" xảy ra $x = \frac{2}{3}R$

$\Rightarrow \frac{x^2\left(R-x\right)}{4} \le \frac{R^3}{27} \Rightarrow \frac{\pi h x^2\left(R-x\right)}{4} \le \frac{4\pi hR^3}{27R} \Rightarrow V \le \frac{4\pi hR^2}{27}$.

$\Rightarrow max V = \frac{4\pi hR^2}{27}$

Email: tuangenk@gmail.com

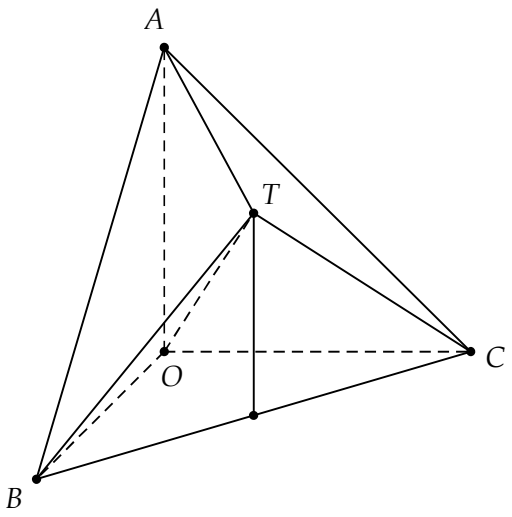
Câu 2. Cho tứ diện vuông O.ABC, gọi R và r lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp của tứ diện. Biết rằng $R = \frac{3}{2}r\left(1+\sqrt{3}\right)$ và $2OC + \sqrt{3OA^2 + 6OB^2} = 10$. Tính V_{OABC}?

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{5}{3}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Nguyễn Minh Tuấn ,Facebook: Minh Tuấn

Lời giải

Chọn **B**



Để đơn giản bài toán ta đặt $OA = a, OB = b, OC = c$.

Ta có công thức quen thuộc để tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện vuông là $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Công việc còn lại ta sẽ đi tính bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện này. Gọi T là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện *OABC,* ta có:

$$V_{OABC} = V_{TOAB} + V_{TOAC} + V_{TOBC} + V_{TABC} = \frac{1}{3}r(S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC} + S_{ABC}) = \frac{1}{3}r.S_{tp} \Rightarrow r = \frac{3V_{OABC}}{S_{tp}}$$

Vậy tóm lại ta có $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ và $r = \frac{3V_{OABC}}{S_{tp}}$, do đó:

$$\frac{2R}{r} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\frac{3V_{OABC}}{S_{tp}}} = \frac{S_{tp}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3V_{OABC}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\frac{1}{2}\left(ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}\right)}{3.\frac{abc}{6}}$$

$$\Rightarrow \frac{2R}{r} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\left(ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}\right)}{abc} \geq \frac{\sqrt{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}\left(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+\sqrt{3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}}\right)}{abc}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}abc + 3abc}{abc} = 3\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Vậy: $\frac{2R}{r} \geq 3\left(1+\sqrt{3}\right)$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$

Thay vào giả thiết thứ 2 ta tìm được $a = b = c = 2 \Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{6}.2.2.2 = \frac{4}{3}$.

Email: slowrock321@gmail.com

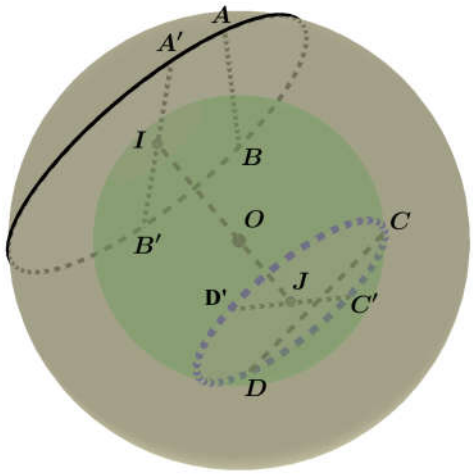
Câu 3. Cho hai hình cầu đồng tâm $O(0,0,0)$, bán kính $R_1 = 2, R_2 = \sqrt{10}$. Tứ diện $ABCD$ có $A, B \in (O, R_1); C, D \in (O, R_2)$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện *ABCD*.

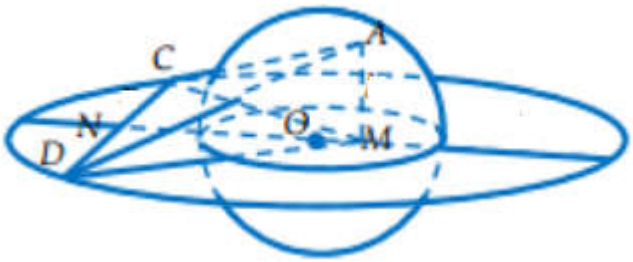
A. $6\sqrt{3}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Lời giải

Tác giả : Đỗ Minh Đăng,Tên FB: Johnson Do

Chọn B





+ Dựng mặt phẳng (*P*) chứa *AB* và song song *CD* cắt (O,R_1) theo giao tuyến là đường tròn tâm *I*.

+ Dựng mặt phẳng (*Q*) chứa *CD* và song song *AB* cắt (O,R_2) theo giao tuyến là đường tròn tâm *J*.

+ Lần lượt dựng 2 đường kính $A'B', C'D'$ vuông góc nhau.

Khi đó, $IJ = d(AB,CD) = d(A'B',C'D')$

Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.d(AB,CD).\sin(AB,CD) \le \frac{1}{6}A'B'.C'D'.IJ = V_{A'B'C'D'}$. Do đó chỉ cần xét các tứ diện dạng $A'B'C'D'$.

Vậy điều kiện cần để V_{ABCD} lớn nhất là $AB \perp CD$. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB* và *CD*.

Đặt $AM = x, CN = y.\ \left(x \in \left(0,\sqrt{10}\right], y \in (0,2]\right)$

$\Rightarrow ON = \sqrt{10-x^2}; OM = \sqrt{4-y^2};\ d(AB,CD) = MN = OM + ON = \sqrt{10-x^2} + \sqrt{4-y^2}$.

Khi đó:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.d(AB,CD) = \frac{1}{6}\cdot 2x.2y\left(\sqrt{10-x^2}+\sqrt{4-y^2}\right) = \frac{2}{3}xy\left(\sqrt{10-x^2}+\sqrt{4-y^2}\right)$$

Ta có: $V_{ABCD} = \frac{2}{3}xy\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{10-x^2}{2}} + \sqrt{1}.\sqrt{4-y^2}\right) \le \frac{2}{3}xy\sqrt{(2+1)\left(\frac{10-x^2}{2}+4-y^2\right)}$

$$\Rightarrow V_{ABCD} \le \frac{2}{3}xy\sqrt{\frac{3}{2}\left(18-\left(x^2+2y^2\right)\right)} \le \frac{2}{3}xy\sqrt{\frac{3}{2}\left(18-2\sqrt{2}xy\right)} = \frac{2}{3}xy\sqrt{3\left(9-\sqrt{2}xy\right)}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD}^2 \le \frac{4}{9}(xy)^2\left(3\left(9-\sqrt{2}xy\right)\right) = \frac{8}{3}\cdot\frac{xy}{\sqrt{2}}\cdot\frac{xy}{\sqrt{2}}\left(9-\sqrt{2}xy\right) \le \frac{8}{3}\left(\frac{\frac{xy}{\sqrt{2}}+\frac{xy}{\sqrt{2}}+9-\sqrt{2}xy}{3}\right)^3$$

$\Rightarrow V_{ABCD}^2 \le \frac{8}{3}\left(\frac{9}{3}\right)^3 = 72 \Rightarrow V_{ABCD} \le 6\sqrt{2}$. Vậy $V_{\max} = 6\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\dfrac{10-x^2}{2}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{4-y^2}}{1} \\ \dfrac{xy}{\sqrt{2}} = 9-\sqrt{2}xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}.$$

Email: vutoanpvd@gmail.com

SOẠN CHUYÊN ĐỀ VẬN DỤNG CAO –HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

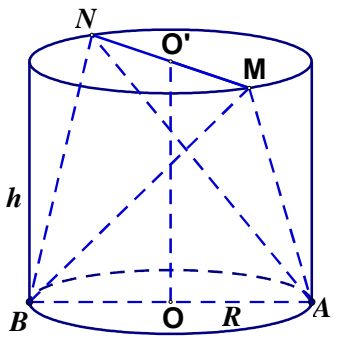
Câu 4. Cho hình trụ có chiều cao $h=2a$, các đường tròn đáy lần lượt là $(O;R)$ và $(O';R)$ với $R=a$. Biết AB là đường kính cố định của đường tròn $(O;R)$ và MN là một đường kính thay đổi trên đường tròn $(O';R)$ sao cho AB và MN không đồng phẳng. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABMN$.

A. $\frac{4a^3}{3}$ **B.** $\frac{2a^3}{3}$. **C.** a^3. **D.** $2a^3$

Lời giải

Tác giả: Vũ Huỳnh Đức. Tên facebook: Huỳnh Đức.

Chọn A



Với mọi tứ diện $ABCD$ ta có công thức tính thể tích $V=\frac{1}{6}AB.CD.d(AB;CD).\sin(\widehat{AB,CD})$

Áp dụng công thức trên ta có thể tích của khối tứ diện $ABMN$ là

$$V_{MNAB}=\frac{1}{6}.MN.AB.d(MN;AB).\sin(\widehat{MN,AB})$$

Vì $MN=AB=2R=2a$, $d(MN;AB)=h=2a$, $\sin(\widehat{MN,AB})\le 1$ nên

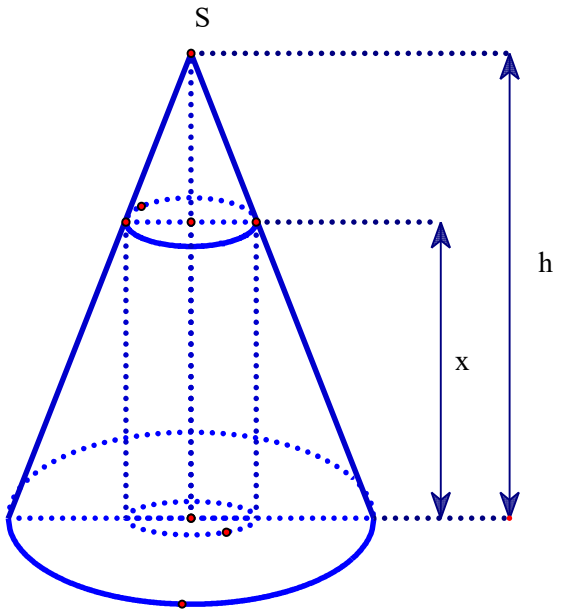
$V_{MNAB}=\frac{4a^3}{3}\sin(\widehat{MN,AB})\le\frac{4a^3}{3}$. Đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow \sin(\widehat{MN,AB})=1 \Leftrightarrow MN\perp AB.$

Vaäy thể tích khối tứ diện $ABMN$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{4}{3}a^3$ khi $MN\perp AB$.

***Email:* trichinhsp@gmail.com**

Câu 5. Cho hình nón đỉnh S chiều cao là h. Một khối trụ khác có tâm của đáy trùng với tâm đáy của hình nón và đáy còn lại là một thiết diện song song với đáy của hình nón đỉnh S đã cho (hình vẽ). Khi khối trụ này có thể tích lớn nhất, biết $0<x<h$ thì tỉ số k giữa thể tích của khối nón và khối trụ là?

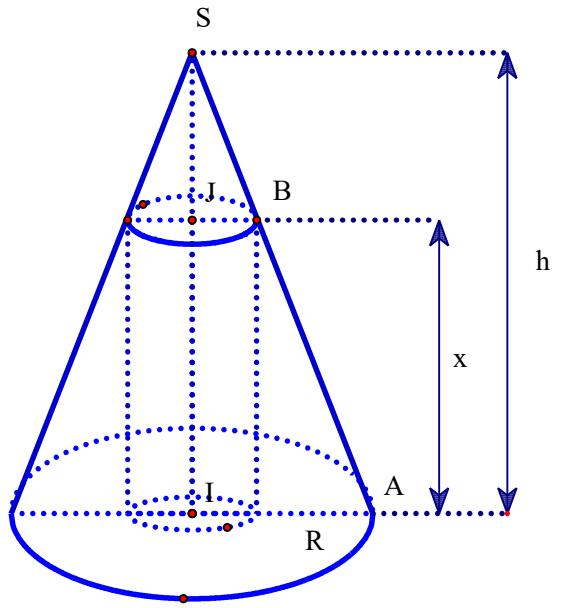


A. $k=\frac{5}{4}$. **B.** $k=\frac{9}{4}$. **C.** $k=\frac{3}{2}$. **D.** $k=\frac{7}{4}$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Trí Chính,Tên FB: Nguyễn Trí Chính

Chọn B



Thể tích khối nón là $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2h$

Từ hình vẽ ta có $\frac{JB}{IA}=\frac{SJ}{SI}=\frac{h-x}{h}\Rightarrow JB=\frac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích khối trụ cần tìm là: $V_2=\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2x$.

Xét hàm số $V(x)=\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2x$, $0\le x\le h$.

Ta có $V'(x)=\pi\frac{R^2}{h^2}\left[-2(h-x)x+(h-x)^2\right]$

$V'(x)=0\Leftrightarrow x=h$ hay $x=\frac{h}{3}$.

Có $V(0)=0; V(h)=0; V\left(\frac{h}{3}\right)=\frac{4\pi R^2 h}{27}$

Suy ra GTLN của V_2 là $V_2=\frac{4\pi R^2 h}{27}$

Lúc đó $k=\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\pi R^2 h}{\frac{4\pi R^2 h}{27}}=\frac{9}{4}$.

Email: ***quangtv.c3kl@gmail.com***

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $AC=1$, $AB=2+\sqrt{3}$, $\widehat{BAC}=\alpha$. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Với giá trị nào của α thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC'B'$ đạt giá trị nhỏ nhất?

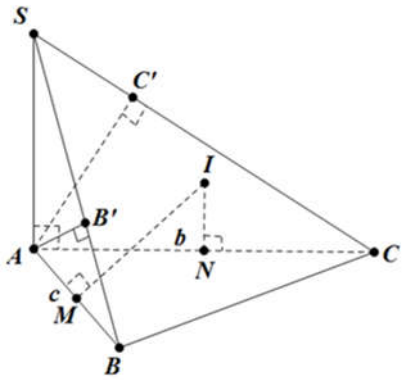
A. $\alpha=\arccos\left(2-\sqrt{3}\right)$ **B.** $\alpha=\arcsin\left(2-\sqrt{3}\right)$

C. $\alpha=75^0$ **D.** $\alpha=45^0$

Lời giải

Tác giả: Trương Văn Quắng ***Tên FB: OcQuang***

Chọn A



Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và AC.

Tam giác ABB' vuông tại B' nên M chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABB', suy ra trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABB' chính là đường trung trực Δ của AB (xét trong mp (ABC)).

Tam giác ACC' vuông tại C' nên N chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACC', suy ra trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ACC' chính là đường trung trực Δ_1 của AC (xét trong mp (ABC)).

Gọi $I=\Delta\cap\Delta_1$, ta suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp A. BCC'B'.

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp $A.BCC'B'$ thì R chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $R=\frac{BC}{2.\sin\alpha}=\frac{\sqrt{1^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2-2.1.\left(2+\sqrt{3}\right).\cos\alpha}}{2\sin\alpha}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}.\sqrt{2-\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$

Ta có $=\frac{\sqrt{2-\cos\alpha}}{\sin\alpha}=\sqrt{\frac{2-\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{2-t}{1-t^2}$ với $-1<t<1$

$$f'(t)=\frac{-t^2+4t-1}{\left(1-t^2\right)^2}$$

$$f'(t)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=2+\sqrt{3}(L)\\ t=2-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

x	-1		$2-\sqrt{3}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Ta suy ra: R đạt giá trị nhỏ nhất khi $t=\cos\alpha=2-\sqrt{3}$

Vậy $\alpha=\arccos\left(2-\sqrt{3}\right)$

Gmail:nguyentuanblog1010@gmail.com

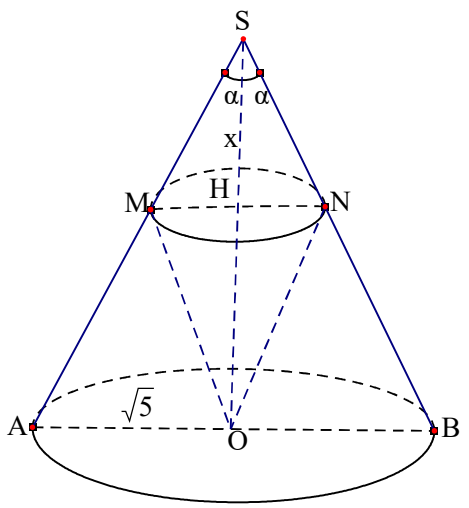
Câu 7. Cho một hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O, bán kính $R=\sqrt{5}$ và góc ở đỉnh là 2α với $\sin\alpha=\frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại H và cắt hình nón theo một đường tròn tâm H. Gọi V là thể tích của khối nón đỉnh O và đáy là đường tròn tâm H. Biết V đạt giá trị lớn nhất khi $SH=\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T=3a^2-2b^3$?

A. 12 **B.** 23 **C.** 21 **D.** 32

Lời giải

Tác giả: Phạm Chí Tuân Fb: Tuân Chí Phạm

Chọn C



Đặt $SH=x$. Gọi SAB là thiết diện qua trục SO và M,N lần lượt là giao điểm của SA,SB với (P).

Xét ΔSOA vuông tại O ta có $SO=OA\cot\alpha=R\cot\alpha\Rightarrow OH=SO-OH=R\cot\alpha-x$.

Xét ΔSHM vuông tại H ta có $HM=SH\tan\alpha=x\tan\alpha$.

Ta có $V=\frac{1}{3}\pi.HM^2.OH=\frac{1}{3}\pi x^2.\tan^2\alpha.\left(R\cot\alpha-x\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchuy ta có:

$$x^2\left(R\cot\alpha-x\right)=4.\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.\left(R\cot\alpha-x\right)\le 4.\left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+R\cot\alpha-x}{3}\right)^3=\frac{4}{27}R^3\cot^3\alpha$$

Vậy $V_{\text{Max}}=\frac{4\pi}{81}R^3\cot\alpha$ đạt được $\Leftrightarrow x=\frac{2R}{3}\cot\alpha=\frac{2R}{3}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}-1}=\frac{2}{3}.\sqrt{5}.\sqrt{\frac{3^2}{2^2}-1}=\frac{5}{3}$

Từ đây ta có $a=5,b=3\Rightarrow T=3.5^2-2.3^3=21$.

Email: chithanhlvl@gmail.com

Câu 8. Trong các khối trụ có thể tích là V (không đổi), hãy tìm diện tích toàn phần nhỏ nhất của hình trụ này.

A. $\min S_{tp}=3.\sqrt[3]{2\pi V^2}$. **B.** $\min S_{tp}=3\pi.\sqrt[3]{2V^2}$. **C.** $\min S_{tp}=3.\sqrt[3]{\pi V^2}$. **D.** $\min S_{tp}=3\pi.\sqrt[3]{V^2}$.

Lời giải

Tác giả : Trần Chí Thanh

Chọn A

+ Gọi x,y theo thứ tự là bán kính đáy, chiều cao của hình trụ $\left(x>0,y>0\right)$. Ta có $V=\pi x^2y$

và $S_{tp}=2\pi x^2+2\pi xy=2\pi\left(x^2+xy\right)=2\pi\left(x^2+\frac{xy}{2}+\frac{xy}{2}\right)$

+ AD BĐT AM–GM cho 3 số dương $x^2;\frac{xy}{2};\frac{xy}{2}$ ta có:

$$x^2+\frac{xy}{2}+\frac{xy}{2}\ge 3.\sqrt[3]{x^2\left(\frac{xy}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}.\sqrt[3]{2\left(x^2y\right)^2}\Rightarrow S_{tp}\ge 3\pi.\sqrt[3]{2\left(\frac{V}{\pi}\right)^2}=3.\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2=\frac{xy}{2};x^2y=\frac{V}{\pi}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$; $y=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

+ Vậy $\min S_{tp}=3.\sqrt[3]{2\pi V^2}$ khi chiều cao bằng với đường kính đáy.

Email: thuytrangmn@gmail.com

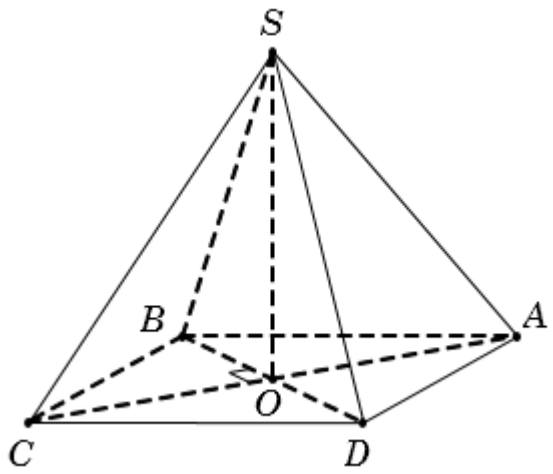
Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AD=2$. Các cạnh bên bằng nhau và bằng 3. Tìm độ dài cạnh AB để thể của khối chóp $S.ABCD$ tích lớn nhất.

A. $AB=2$. **B.** $AB=3$. **C.** $AB=6$. **D.** $AB=4$.

Lời giải

Tác giả : Lê Thùy Trang,Tên FB: Trangthuy

Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$ thì $SO \perp (ABCD)$.

Đặt $AB = x > 0$. Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{x^2 + 4}$.

Tam giác vuông SOA nên $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{SA^2 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{\sqrt{32 - x^2}}{2}$.

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.2x.\frac{\sqrt{32 - x^2}}{2} = \frac{1}{3}.\left(2x\sqrt{32 - x^2}\right) \le \frac{1}{3}.\left(x^2 + 32 - x^2\right) = \frac{32}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $x = \sqrt{32 - x^2} \Leftrightarrow x = 4$.

Email: thuytoanqx2@gmail.com

Câu 10. Cho mặt cầu tâm O và bán kính R. Từ một điểm S bất kỳ trên mặt cầu ta dựng ba cát tuyến bằng nhau, cắt mặt cầu tại các điểm A, B, C (khác với S) và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \alpha$. Khi α thay đổi, Tính thể tích lớn nhất khối chóp $S.ABC$

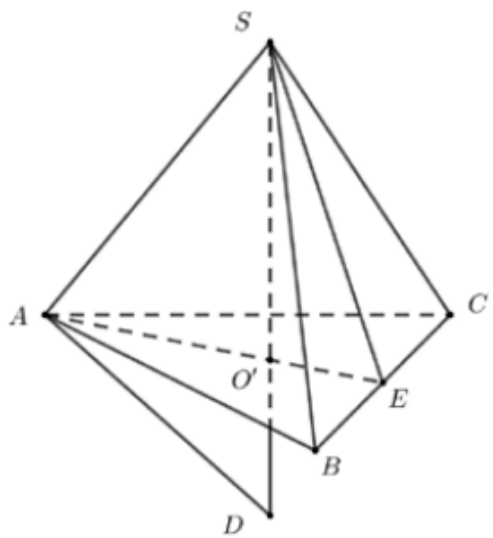
A. $V_{\max} = \frac{8\sqrt{3}R^3}{3}$ **B.** $V_{\max} = \frac{8\sqrt{3}R^3}{27}$ **C.** $V_{\max} = \frac{4\sqrt{3}R^3}{3}$

D. $V_{\max} = \frac{8\sqrt{3}R^3}{9}$

Lời giải

Tác giả:lê thị thúy,Tên FB: ThúyLê

Chọn B



Tam giác ABC đều, kẻ $SO' \perp (ABC)$ thì O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $O' \in SO$.

Giả sử SO' cắt mặt cầu tại D thì tam giác SAD vuông tại A.

Gọi $SA = SB = SC = l$

Trong tam giác SAD ta có $SO'.SD = SA^2 \Rightarrow SO' = \dfrac{SA^2}{SD} = \dfrac{l^2}{2R}$ (1).Gọi E là trung điểm của BC.

Ta có:

$$BC = 2BE = 2l\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow AO' = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{2l\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow SO' = \sqrt{SA^2 - O'A^2} = l\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{l^2}{2R} = l\sqrt{1 - \dfrac{4}{3}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow l = 2R\sqrt{1 - \dfrac{4}{3}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

$$\Rightarrow S_{ABC} = 4\sqrt{3}R^2\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$\Rightarrow SO' = 2R\left(1 - \dfrac{4}{3}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SO'.S_{ABC} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}R^3\left(1 - \dfrac{4}{3}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.Đặt

$x = \sin^2\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow 0 < x < 1$

Xét hàm số $y = x\left(1 - \dfrac{4}{3}x\right)^2 = \dfrac{1}{9}\left(16x^3 - 24x^2 + 9x\right) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{3}\left(16x^2 - 16x + 3\right) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4} \\ x = \dfrac{3}{4} \end{array}\right.$

x	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		1
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	$\frac{1}{9}$	$\searrow$		$\nearrow$	

Thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất khi $x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 60°$. $V_{\max} = \dfrac{8\sqrt{3}R^3}{27}$

hoxuandung1010@gmail.com

Câu 11. Gọi h là chiều cao của khối trụ (T) nội tiếp khối cầu $S(O;R)$. Thể tích của (T) đạt giá trị lớn nhất khi h bằng

A. $\dfrac{R}{\sqrt{3}}$. **B.** R. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$. **D.** $\dfrac{R}{3}$.

Lời giải

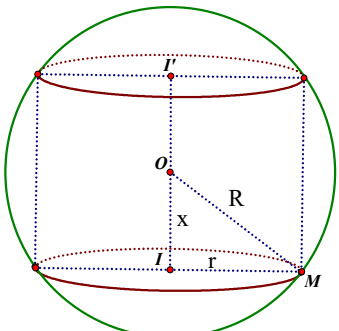
Tác giả : Hồ Xuân Dũng, FB: Dũng Hồ Xuân

Chọn C

Gọi $h = 2x$ là chiều cao của khối trụ (T).

Khi đó thể tích của khối trụ (T)

$V = \pi r^2.2x = 2\pi x\left(R^2 - x^2\right) = -2\pi x^3 + 2\pi R^2 x,\ 0 < x < R$.



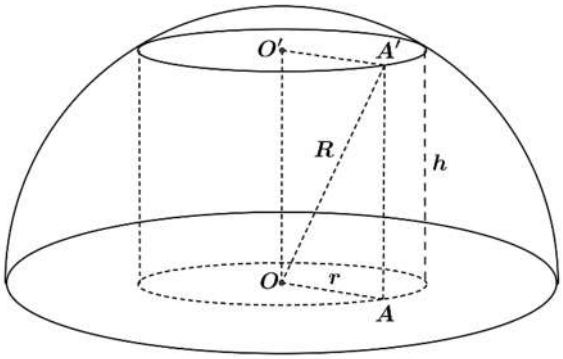
$V' = -6\pi x^2 + 2\pi R^2$.

$V' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$.

Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi $x = \dfrac{R}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = \dfrac{2R}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$.

Email: lanhoang0254@gmail.com

Câu 12. Khi cắt mặt cầu $(O;R)$ bởi một mặt kính, ta được hai nửa mặt cầu và hình tròn lớn của mặt kính đó gọi là mặt đáy của mỗi nửa cầu. Một hình trụ gọi là nội tiếp nửa mặt cầu $(O;R)$ nếu một đáy của hình trụ nằm trong đáy của nửa mặt cầu, còn đường tròn đáy kia là giao tuyến của hình trụ với nửa mặt cầu. Cho $R = 1$, hãy tính bán kính đáy của hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu $(O;R)$ để khối trụ đó có thể tích lớn nhất.



A. $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $r = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $r = \dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

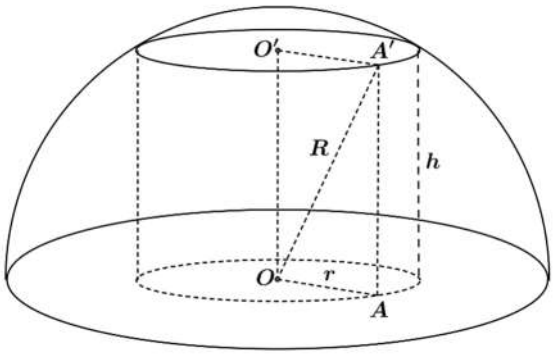
Tác giả: Nguyễn Thị Dung, face: dungbt nguyen

Chọn B

+ Hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu, nên theo giả thiết đường tròn đáy trên có tâm O' có hình chiếu là O xuống mặt đáy (O). Suy ra hình trụ và nửa mặt cầu cùng chung trục đối xứng và tâm của đáy dưới hình trụ trùng với tâm O của nửa mặt cầu.

+ Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ. Ta có

$h = OO' = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{1 - r^2}\ (0 < r < R = 1)$



Thể tích khối trụ là: $V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \sqrt{1 - r^2}$.

$$V'(r) = \pi\left[2r\sqrt{1-r^2} - \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}\right] = \frac{\pi r\left(2 - 3r^2\right)}{\sqrt{1-r^2}}$$

$(0 < r \le 1)$

$V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Bảng biến thiên:

r	0		$\frac{\sqrt{6}}{3}$		1
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	$\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	

Vậy: $\max\limits_{(0;1)} V(r) = V\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ khi $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Cách 2: tìm $V_{\max}$

$V = \pi r^2\sqrt{1-r^2} \Rightarrow V_{\max} \Leftrightarrow r^4\left(1-r^2\right)_{\max}$.

Ta có $r^4\left(1-r^2\right) = 4\left(\frac{1}{2}r^2\right)\left(\frac{1}{2}r^2\right)\left(1-r^2\right) \le 4\left(\frac{\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{2}r^2+1-r^2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{2}r^2 = 1-r^2 \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\Rightarrow V_{\max} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Email: Thanhdungtoan6@gmail.com

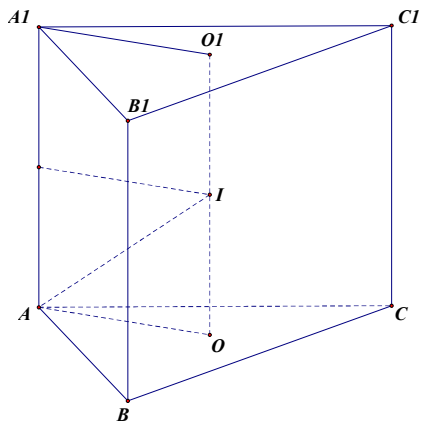
Câu 13. Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$. Giả sử $BC = a, AA_1 = h$. Khi R ngắn nhất thì tam giác ABC là

A. tam giác đều.
B. tam giác cân tại A.
C. tam giác vuông tại A.
D. tam giác nhọn.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Thanh Dũng,Tên FB: Nguyễn Thanh Dũng

Chọn C



Gọi O, O_1 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $A_1B_1C_1$. Khi đó, OO_1 là trục của đường tròn ngoại tiếp đáy. Trong mặt phẳng (AOO_1A_1), đường trung trực cạnh AA_1 cắt OO_1 tại I. Ta chứng minh được I là trung điểm OO_1 và cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$. Do đó, $R = IA$.

Ta có $IA^2 = OA^2 + OI^2 = OA^2 + \left(\frac{OO_1}{2}\right)^2 = OA^2 + \frac{h^2}{4}$ (1)

Mặt khác, áp dụng định lý hàm sin trong tam giác ABC, ta được

$$\frac{BC}{\text{Sin}\left(\widehat{BAC}\right)} = 2OA \Rightarrow OA = \frac{BC}{2\text{Sin}\left(\widehat{BAC}\right)} = \frac{a}{2\text{Sin}\left(\widehat{BAC}\right)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $IA^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{\sin^2\left(\widehat{BAC}\right)} + h^2\right)$.

Do đó, $R = IA$ ngắn nhất $\Leftrightarrow$ IA^2 bé nhất

$\Leftrightarrow$ $\sin^2\left(\widehat{BAC}\right)$ lớn nhất

$\Leftrightarrow \sin^2\left(\widehat{BAC}\right) = 1 \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 90^o$

Hay tam giác ABC vuông tại A.

Email: Duyhungprudential@gmail.com

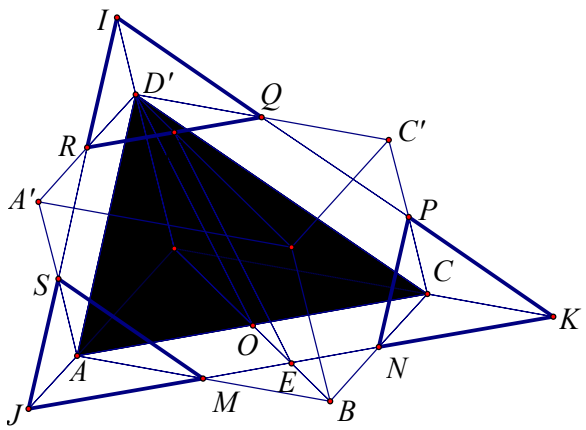
Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên cạnh AB lấy điểm M khác A và B. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ACD'). Đặt $\frac{AM}{AB} = k\left(0 < k < 1\right)$. Tìm k để thiết diện của hình hộp và mặt phẳng (P) có diện tích lớn nhất.

A. $k = \frac{1}{2}$ **B.** $k = \frac{3}{4}$ **C.** $k = \frac{1}{4}$ **D.** $k = \frac{2}{5}$

Lời giải

Tác giả : Đặng Duy Hùng và Facebook : Duy Hùng

Chọn A



Trong mp($ABCD$), qua M vẽ đường thẳng song song với AC cắt DB, BC lần lượt tại E, N.

Trong mp($BDD'B'$), qua E vẽ đường thẳng song song với $D'O$ ($O = AC \cap BD$) cắt $B'D'$ tại F.

Trong mp($A'B'C'D'$), qua F vẽ đường thẳng song song với AC cắt $A'D'$, $D'C'$ lần lượt tại R, Q.

Trong mp($AA'D'D$), qua R vẽ đường thẳng song song với AD' cắt AA' tại S.

Trong mp($CC'D'D$), qua Q vẽ đường thẳng song song với CD' cắt CC' tại P.

Vậy thiết diện là lục giác ***MNPQRS***

Do các mặt đối diên của hình hộp song song nên các cạnh đối của lục giác thiết diện $MNPQRS$ song song và 3 cặp cạnh đó lần lượt song song với các cạnh tam giác ACD'.

$\Rightarrow$ Các tam giác *JKI*, *ACD'*, *RQI*, *JMS*, *NKP* đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{MJ}{MN}=\frac{MA}{MB}=\frac{NC}{NB}=\frac{NK}{NM}=\frac{PC}{PC'}=\frac{PK}{PQ}=\frac{QD'}{QC'}=\frac{QI}{QP} \Rightarrow MJ=NK \text{ và } PK=QI$$

$\Rightarrow$ Các tam giác *RQI*, *JMS*, *NKP* bằng nhau (gọi diện tích của chúng là S_1 và gọi diện tích các tam giác *JKI*, *ACD'* lần lượt là S_2, S)

$\frac{AM}{AB}=k\ (0<k<1)$. Ta có: $\frac{S_1}{S}=\left(\frac{JM}{AC}\right)^2=\left(\frac{AM}{DC}\right)^2=\left(\frac{AM}{AB}\right)^2=k^2 \to S_1=k^2S$

$$\frac{S_2}{S}=\left(\frac{JK}{AC}\right)^2=\left(\frac{JM+MK}{AC}\right)^2=\left(\frac{JM}{AC}+\frac{MK}{AC}\right)^2=(k+1)^2 \to S_2=(k+1)^2S$$

$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện: $S_{td}=S_2-3S_1$

$S_{td}=2S(-k^2+k+\frac{1}{2})=2S\left[\frac{3}{4}-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right]\le\frac{3S}{2}$ (dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$)

Email: mihawkdaculamihawkdacula@gmail.com

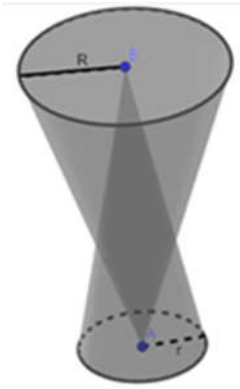
Câu 15. Khối (H) được tạo thành là phần chung khi giao nhau hai khối nón có cùng chiều cao h, có các bán kính đường tròn đáy lần lượt là R và r sao cho đỉnh của khối nón này trùng với tâm đường tròn đáy của khối nón kia. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối (H), biết rằng R và r thoả mãn phương trình $X^2-(x+y)^2X+xy=0$ $\left(x,y>\frac{1}{2}\right)$.

A. $\frac{1}{48}\pi h$. **B.** $\frac{1}{16}\pi h$. **C.** πh. **D.** $\frac{1}{12}\pi h$.

Lời giải

Tác giả : Trần Tín Nhiệm,Tên FB: Trần Tín Nhiệm

Chọn A



Giả sử R > r. Ta có hình minh hoạ như trên.

Gọi a là bán kính đường tròn giao tuyến, b là khoảng cách từ tâm đường tròn giao tuyến đến tâm đường tròn có bán kính R.

Sử dụng các tam giác đồng dạng, ta suy ra

$$\begin{cases}\frac{a}{r}=\frac{b}{h}\\ \frac{a}{R}=\frac{h-b}{h}\end{cases} \Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{b}{h-b} \Rightarrow b=\frac{Rh}{R+r};$$

$$\Rightarrow a=\frac{r}{h}b=\frac{Rr}{R+r}.$$

Mặc khác $V_{(H)}=\frac{1}{3}\pi a^2b+\frac{1}{3}\pi a^2(h-b)=\frac{1}{3}\pi a^2h$.

Xét phương trình ẩn X : $X^2-(x+y)^2X+xy=0 \quad (x,y>0)$ có

$\Delta_X=(x+y)^4-4xy\ge(2\sqrt{xy})^4-4xy>0, \forall x,y>\frac{1}{2}$. Theo vi-ét: $\begin{cases} S_X=(x+y)^2>0 \\ P_X=xy>0 \end{cases}, \quad \forall x,y>\frac{1}{2}$

.

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm dương phân biệt là R và r.

Theo bất đẳng thức Cô-si, $a=\frac{Rr}{R+r}=\frac{xy}{(x+y)^2}\le\frac{\frac{(x+y)^2}{4}}{(x+y)^2}=\frac{1}{4}, \forall x,y>\frac{1}{2}$. Suy ra

$V_{(H)}=\frac{1}{3}\pi ha^2\le\frac{1}{3}\pi h\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{48}\pi h, \ \forall x,y>\frac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y>\frac{1}{2}$. Vậy $\max V_{(H)}=\frac{1}{48}\pi h$. Chọn phương án **A**.

Email: nguyentinh050690@gmail.com

Câu 16. Cho tứ diện ABCD có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và nội tiếp mặt cầu có bán kính R. Tứ diện ABCD có thể tích bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4\sqrt{3}R^3}{27}$. **B.** $4\sqrt{3}R^3$. **C.** $\frac{8\sqrt{3}}{9}R^3$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3$.

Lời giải

Tác giả : Bùi Văn Khánh,Tên FB: Khánh Bùi Văn

Chọn A

Thể tích tứ diện ABCD là: $V=\frac{1}{6}AB.\mathrm{AC}.\mathrm{AD}$.

Vì ABCD là tứ diện vuông tại A nên:

$$R^2=\frac{AB^2+AC^2+AD^2}{4}\ge\frac{3\sqrt[3]{AB^2.AC^2.AD^2}}{4}\Leftrightarrow AB^2.AC^2.AD^2\le\frac{64R^6}{27}\Rightarrow\frac{1}{6}AB.AC.AD\le\frac{4\sqrt{3}}{27}R^3$$

$$\Rightarrow V\le\frac{4\sqrt{3}}{27}R^3\Rightarrow V_{max}=\frac{4\sqrt{3}}{27}R^3$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AB=AC=AD=\sqrt[3]{\frac{8\sqrt{3}}{9}}R$.

Email: buikhanhas3@gmail.com

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp trong một mặt cầu bán kính R và thỏa mãn điều kiện $AB=CD$, $BC=AD$, $AC=BD$. M là một điểm thay đổi trong không gian.

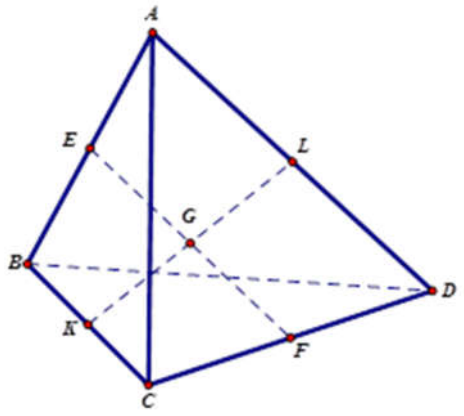
Đặt $P=MA+MB+MC+MD$, giá trị nhỏ nhất của P là:

A. $P_{\min}=2R\sqrt{3}$. **B.** $P_{\min}=4R$. **C.** $P_{\min}=3R$. **D.** $P_{\min}=\frac{16R}{3}$.

Lời giải

Tác giả : Bùi Văn Khánh,Tên FB: Khánh Bùi Văn

Chọn B



Gọi G là trọng tâm của tứ diện; E, F, K, L lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, AD. Ta có tam giác ACD bằng tam giác BCD nên $AF = BF$ suy ra $EF \perp AB$, tương tự ta chứng minh được $EF \perp CD$ và đường thẳng PQ vuông góc với cả hai đường thẳng BC, AD. Từ đó suy $GA = GB = GC = GD = R$.

Ta có $MA + MB + MC + MD = \dfrac{MA.GA + MB.GB + MC.GC + MD.GD}{GA}$

$$\geq \frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{GD}}{GA}$$

$$= \frac{\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right) + 4.GA^2}{GA} = 4GA = 4R.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M trùng với điểm G.

Vậy $P_{\min} = 4R$.

Email: chautrieu75@gmail.com

Câu 18. Cắt một khối trụ có chiều cao h bởi một mặt phẳng song song với hai mặt đáy, ta thu được hai khối trụ nhỏ. Một trong hai khối đó ngoại tiếp một lăng trụ đứng thể tích V có đáy là tam giác có chu vi là p. Khối còn lại ngoại tiếp một khối nón (H) có bán kính đáy là R (R thay đổi). Tìm giá trị của R sao cho thể tích của khối nón là lớn nhất?

A. $R = \dfrac{\pi p^3}{162V}$. **B.** $R = \dfrac{hp^3}{162V}$. **C.** $R = \dfrac{\pi p^3}{162}$. **D.** $R = \dfrac{p^3}{162V}$.

Lời giải

Tác giả : Châu Cẩm Triều,Tên FB: Châu Cẩm Triều

Chọn B

Hình lăng trụ có đáy là tam giác với độ dài 3 cạnh là a,b,c và có chiều cao là x.

Khi đó $S_\Delta = \dfrac{abc}{4R}$ và thể tích của hình lăng trụ là $V = x.\dfrac{abc}{4R}$. Suy ra $R = \dfrac{x.abc}{4V}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương a,b,c, ta có $R \leq \dfrac{x.(a+b+c)^3}{27.4.V} = \dfrac{x.p^3}{108V}$

Mặt khác $V_{(H)} = \dfrac{1}{3}.(h-x).\pi.R^2 \leq \dfrac{1}{3}.(h-x).\pi.\dfrac{x^2p^6}{(108V)^2}$

Mà $(h-x)x^2 = 4.(h-x).\frac{x}{2}.\frac{x}{2} \le 4.\frac{\left(h-x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)^3}{27} = \frac{4}{27}h^3$ (Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số $h-x, \frac{x}{2}, \frac{x}{2}$)

.

Do đó $V_{(H)} \le \frac{1}{3}\pi.\frac{4}{27}h^3.\frac{p^6}{(108V)^2}$ (không đổi).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} h-x=\frac{x}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2h}{3} \\ a=b=c \end{cases}$

Vậy $V_{(H)}(\max) = \frac{1}{3}\pi.\frac{4}{27}h^3.\frac{p^6}{(108V)^2}$ khi $x=\frac{2h}{3}$ và $a=b=c$

Khi đó $R=\frac{2h}{3}.\frac{p^3}{108V}=\frac{hp^3}{162V}$ Chọn phương án **B**.

Email: lucminhtan@gmail.com

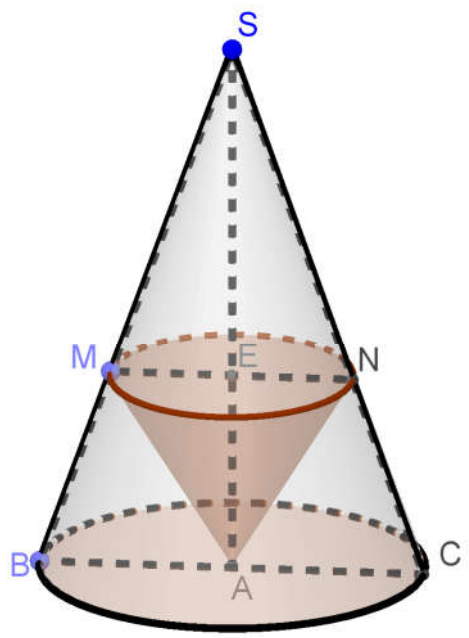
Câu 19. Cho hình nón (H) đỉnh O, chiều cao là h và mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng đáy của khối nón. Một khối nón (T) có đỉnh là tâm của đường tròn đáy của (H) và đáy của (T) là thiết diện của (P) với hình nón. Thể tích lớn nhất của (T) là bao nhiêu?

A. $\frac{4\pi R^2 h}{81}$ **B.** $\frac{4\pi R^2 h}{27}$ **C.** $\frac{\pi R^2 h}{24}$ **D.** $\frac{\pi R^2 h^2}{3}$

Lời giải

Tác giả : Minh Tân,Tên FB: thpt tuyphong

Chọn A



Đặt: $AE = x\,(0<x<h), AC = R.$

* Xét ΔSAC, có: $\frac{SE}{SA}=\frac{EN}{AC}\Leftrightarrow\frac{h-x}{h}=\frac{EN}{R}\Rightarrow EN=\frac{R(h-x)}{h}$

Thể tích khối nón (T) là $V=\frac{1}{3}\pi.EN^2.x=\frac{1}{3}\pi.\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2.x$

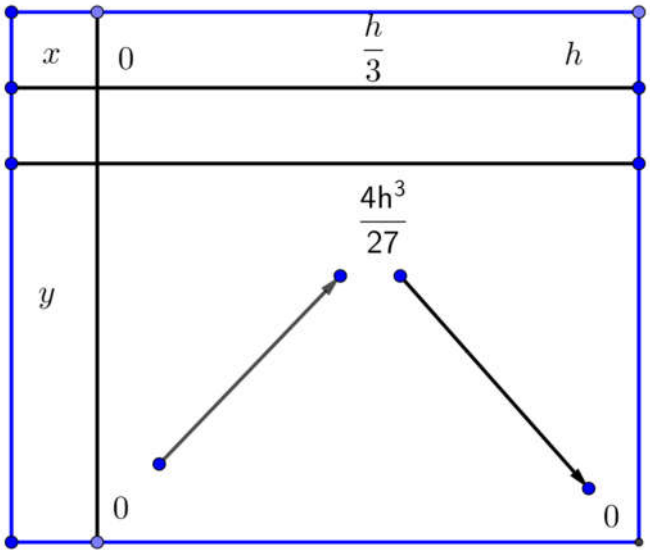
* Đặt $f(x)=(h-x)^2.x, x\in(0;h)$

Ta có:

$f'(x)=3x^2-4hx+h^2$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=h\notin(0;h)\\ x=\frac{h}{3}\Rightarrow f\left(\frac{h}{3}\right)=\frac{4h^3}{27}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của $f(x)$



Vậy $V_{max}=\frac{1}{3}\pi.\frac{R^2}{h^2}.\frac{4}{27}h^3=\frac{4\pi.R^2h}{81}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}h$

Email: chithanhlvl@gmail.com

Câu 20. Trong các khối trụ có thể tích là V (không đổi), hãy tìm diện tích toàn phần nhỏ nhất của hình trụ này.

A. $\min S_{tp}=3.\sqrt[3]{2\pi V^2}$. **B.** $\min S_{tp}=3\pi.\sqrt[3]{2V^2}$. **C.** $\min S_{tp}=3.\sqrt[3]{\pi V^2}$. **D.** $\min S_{tp}=3\pi.\sqrt[3]{V^2}$.

Lời giải

Tác giả : Trần Chí Thanh

Chọn A

+ Gọi x, y theo thứ tự là bán kính đáy, chiều cao của hình trụ $(x>0, y>0)$. Ta có $V=\pi x^2y$

và $S_{tp}=2\pi x^2+2\pi xy=2\pi(x^2+xy)=2\pi\left(x^2+\frac{xy}{2}+\frac{xy}{2}\right)$

+ AD BĐT AM–GM cho 3 số dương $x^2;\frac{xy}{2};\frac{xy}{2}$ ta có:

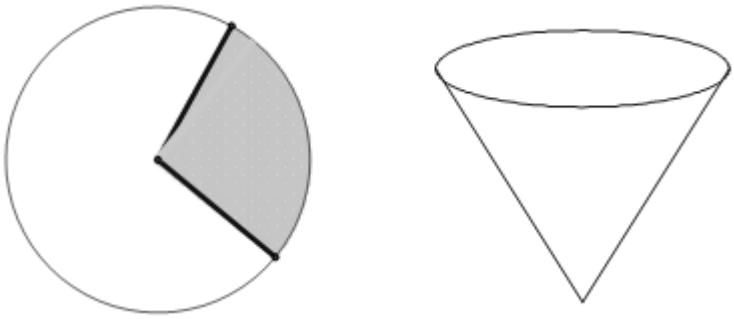
$$x^2+\frac{xy}{2}+\frac{xy}{2}\ge 3.\sqrt[3]{x^2\left(\frac{xy}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}.\sqrt[3]{2\left(x^2y\right)^2}\Rightarrow S_{tp}\ge 3\pi.\sqrt[3]{2\left(\frac{V}{\pi}\right)^2}=3.\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2=\frac{xy}{2};x^2y=\frac{V}{\pi}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$; $y=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

+ Vậy $\min S_{tp}=3.\sqrt[3]{2\pi V^2}$ khi chiều cao bằng với đường kính đáy.

Email: hoainam2732003@gmail.com

Câu 21. Hai bạn A và B chơi một trò chơi như sau: Mỗi người lấy 1 miếng tôn hình tròn bán kính như nhau, sau đó cắt bỏ đi 1 hình quạt rồi cuộn lại, dùng keo gắn lại thành 1 chiếc phễu như hình vẽ. Sau đó A dùng chiếc phễu của mình múc đầy nước rồi trút sang phễu của B. Nếu phễu của B đầy mà của A vẫn còn nước thì A thắng. Ngược lại, nếu phễu của A hết nước mà phễu của B chưa đầy thì B thắng. Hãy chỉ giúp A cắt miếng tôn của mình có góc ở tâm hình quạt là bao nhiêu để khi chơi không thua B.



A. $\frac{(6-2\sqrt{6})\pi}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{6}\pi}{9}$. **C.** $\frac{2\sqrt{6}\pi}{27}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$.

Lời giải

Tác giả : Trình Hoài Nam,Tên FB: Trình Hoài Nam

Chọn A

Gọi x là góc ở tâm cần cắt (rad, $0<x<2\pi$); R, r là bán kính miếng tôn và bán kính miệng phễu.

Diện tích phần còn lại của miếng tôn là $S=\frac{(2\pi-x)R^2}{2}$

Diện tích xung quanh phễu là $S=\pi rR\Rightarrow \pi rR=\frac{(2\pi-x)R^2}{2}\Rightarrow r=\frac{(2\pi-x)R}{2\pi}$

Đường cao của phễu là $h=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi x-x^2}$

$\Rightarrow$ Thể tích phễu là

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\frac{(2\pi-x)^2R^2}{4\pi^2}\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi x-x^2}=\frac{R^3}{24\pi^2}.t\sqrt{4\pi^2-t},t=(2\pi-x)^2>0$$

Áp dụng Côsi : $t\sqrt{4\pi^2-t}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{t.t.\left(8\pi^2-2t\right)}\le\frac{16\pi^3\sqrt{3}}{9}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t=\frac{8\pi^2}{3}$

Từ đó ta tìm được $V_{\max}\Leftrightarrow\left(t\sqrt{4\pi^2-t}\right)_{\max}\Leftrightarrow t=\frac{8\pi^2}{3}\Leftrightarrow x=\frac{6-2\sqrt{6}}{3}\pi$

Email: cunconsieuquay1408@gmail.com

Câu 22. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc

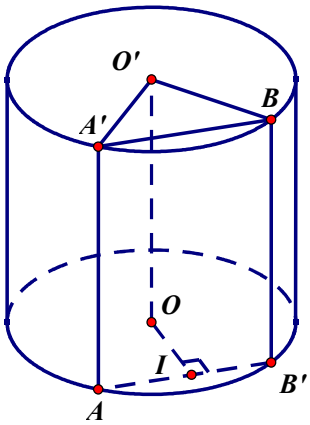
giữa AB và đáy. Biết rằng thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **B.** $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\tan\alpha = \frac{1}{2}$. **D.** $\tan\alpha = 1$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Thị Thanh Mai Tên facebook: Thanh Mai Nguyen

Chọn B



+ Gọi A' là hình chiếu của A lên mặt phẳng chứa đường tròn tâm O'.

+ Gọi B' là hình chiếu của B lên mặt phẳng chứa đường tròn tâm O.

+ Gọi R là bán kính của đường tròn tâm O, suy ra: $R = 2a$. Ta có: $\alpha = \widehat{BAB'}$.

Suy ra: $AB' = 2R\tan\alpha$. Gọi I là trung điểm của $AB' \Rightarrow OI \perp AB'$.

+ Ta có: $OI = \sqrt{OB'^2 - IB'^2} = \sqrt{R^2 - R^2\tan^2\alpha} = R\sqrt{1-\tan^2\alpha}$.

Và: $S_{\Delta OAB'} = \frac{1}{2}OI.AB' = \frac{1}{2}R.\sqrt{1-\tan^2\alpha}.2R\tan\alpha = R^2\tan\alpha.\sqrt{1-\tan^2\alpha}$.

Suy ra: $V_{OO'AB} = \frac{1}{3}V_{OAB'.O'A'B} = \frac{1}{3}OO'.S_{\Delta OAB'} = \frac{1}{3}.2R.R^2\tan\alpha.\sqrt{1-\tan^2\alpha}$.

+ Ta có: $V_{OO'AB}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\tan\alpha.\sqrt{1-\tan^2\alpha}$ đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số $f(t) = t.\sqrt{1-t^2}$ với $t \in [-1;1]$

$f'(t) = \sqrt{1-t^2} + \frac{t.(-t)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}$ với $t > 0$.

Xét $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1-2t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-\infty$	
$f(t)$	$+\infty$	↘	y_{CT}	↗	y_{CD}	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $V_{\max}$ khi $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ hay $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.