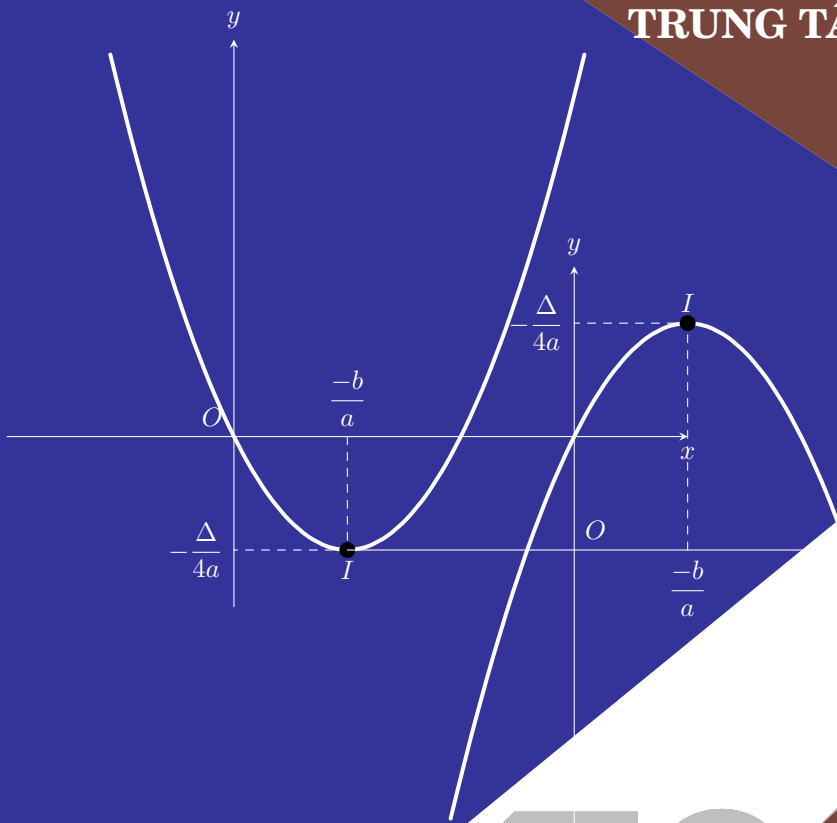
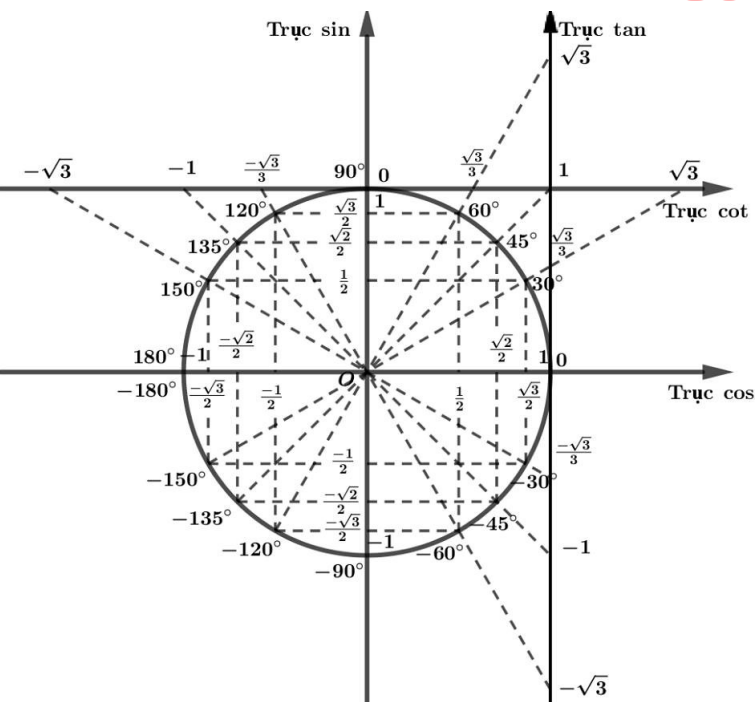




TOÁN

10

LÝ THUYẾT & TRẮC NGHIỆM



Hữu chí cánh thành!

LƯU HÀNH NỘI BỘ



BÌNH DƯƠNG - 2021

MỤC LỤC

PHẦN I ĐẠI SỐ	3
CHƯƠNG 1 MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP	5
1 MỆNH ĐỀ- MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN	5
2 TẬP HỢP- CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP	21
CHƯƠNG 2 HÀM SỐ	39
1 ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ	39
2 HÀM SỐ BẬC NHẤT	48
3 HÀM SỐ BẬC HAI	60
CHƯƠNG 3 PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH	73
1 ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH	73
2 PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI	85
3 PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN	101
CHƯƠNG 4 BẤT ĐẲNG THỨC - BẤT PHƯƠNG TRÌNH	111
1 BẤT ĐẲNG THỨC	111
2 BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN	121
3 DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT	130
4 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	140
5 DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI	148
CHƯƠNG 5 THỐNG KÊ	165
1 MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ THỐNG KÊ	165
2 PHƯƠNG SAI. ĐỘ LỆCH CHUẨN	190

CHƯƠNG 6	CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	201
1	CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC	201
2	GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG	209
3	CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	232
PHẦN II HÌNH HỌC		259
CHƯƠNG 1	VECTƠ	261
1	VECTƠ - CÁC ĐỊNH NGHĨA	261
2	TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTƠ	270
3	TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI VECTƠ	282
4	HỆ TRỤC TỌA ĐỘ	297
CHƯƠNG 2	TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG	313
1	GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ TỪ 0° ĐẾN 180°	313
2	TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ	318
3	CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC	329
CHƯƠNG 3	PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG	343
1	PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG	343
2	PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN	367
3	PHƯƠNG TRÌNH ELIP	388

PHẦN



ĐẠI SỐ

CHƯƠNG 1

MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

BÀI 1. MỆNH ĐỀ- MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 MỆNH ĐỀ

✍ **Mệnh đề** là một câu khẳng định Đúng hoặc Sai.

✍ Một mệnh đề không thể vừa đúng hoặc vừa sai.

2 MỆNH ĐỀ PHỦ ĐỊNH

✍ Cho mệnh đề P . Mệnh đề “Không phải P ” gọi là **mệnh đề phủ định** của P .

✍ Ký hiệu là $\bar{P}$.

✍ Nếu P đúng thì $\bar{P}$ sai, nếu P sai thì $\bar{P}$ đúng.

3 MỆNH ĐỀ KÉO THEO

Cho hai mệnh đề P và Q .

✍ Mệnh đề "nếu P thì Q " gọi là **mệnh đề kéo theo**. Ký hiệu là $P \Rightarrow Q$.

✍ Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P **đúng** Q **sai**.

✍ Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ gọi là **mệnh đề đảo** của $Q \Rightarrow P$.

4 MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG

Cho hai mệnh đề P và Q .

✍ Mệnh đề " P nếu và chỉ nếu Q " gọi là **mệnh đề tương đương**. Ký hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.

✍ Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ cùng đúng.



Chú ý: "Tương đương" còn được gọi bằng các thuật ngữ khác như "điều kiện cần và đủ", "khi và chỉ khi", "nếu và chỉ nếu".

5 MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

Mệnh đề chứa biến là một câu khẳng định chứa biến nhận giá trị trong một tập X nào đó mà với mỗi giá trị của biến thuộc X ta được một mệnh đề.

6 CÁC KÍ HIỆU $\forall, \exists$.

- ✍ Kí hiệu $\forall$: đọc là với mọi.
- ✍ Kí hiệu $\exists$: đọc là tồn tại.
- ✍ Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in X, P(x)$ " là mệnh đề " $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ".
- ✍ Phủ định của mệnh đề " $\exists x \in X, P(x)$ " là mệnh đề " $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ".

7 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Nhận biết mệnh đề, mệnh đề chứa biến

Phương pháp: Một câu mà chắc chắn là đúng hay chắc chắn là sai thì đó là một mệnh đề.

! Câu cảm thán, câu hỏi không phải là mệnh đề.

Ví dụ 1. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

- ① $7 + 5 = 3$.
- ② $7 + x > 0$.
- ③ $\sqrt{2} > 1$.
- ④ 15 không chia hết cho 3.
- ⑤ $\frac{3}{2}$ có phải số nguyên không?
- ⑥ Ôi! Xinh quá!.
- ⑦ Bangkok là thủ đô Campuchia.

Lời giải:

.....

.....

Dạng 2. Xét tính đúng - sai của mệnh đề

Phương pháp: Một câu khẳng định đúng là mệnh đề đúng, một câu khẳng định sai là mệnh đề sai.

Ví dụ 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng, mệnh đề nào sai?

- ① Tổng của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.
- ② Tích của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.
- ③ Nếu một tam giác có một góc bằng 60° thì tam giác đó đều.
- ④ Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3.
- ⑤ Tổng của độ dài hai cạnh một tam giác lớn hơn độ dài cạnh thứ ba.
- ⑥ 15 là số nguyên tố.
- ⑦ Bạn có chăm học không?

Lời giải:

.....

📁 Dạng 3. Phủ định mệnh đề

Phương pháp: Thêm (hoặc bớt) từ “không” (hoặc “không phải”) vào trước vị ngữ của mệnh đề đó.

 **Ví dụ 1.** Phủ định các mệnh đề sau.

- ① Phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$ có nghiệm.
- ② Con thì thấp hơn cha.
- ③ $5 + 4 = 10$.
- ④ 10 chia hết cho 3.
- ⑤ 5 là số hữu tỉ.
- ⑥ Pa-ri là thủ đô nước Anh.
- ⑦ Có vô số số nguyên tố.

Lời giải:

📁 Dạng 4. Mệnh đề kéo theo

Phương pháp:

- ✍ Xét mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Khi đó P là giả thiết, Q là kết luận.
- ✍ P là điều kiện đủ để có Q hoặc Q là điều kiện cần để có P .

 **Ví dụ 1.** Phát biểu mệnh đề $A \Rightarrow B$ và xét tính đúng sai của nó.

- ① $A: " \pi > 3 "; B: "-2\pi > -6 "$.
- ② $A: "252 \text{ chia hết cho } 2 \text{ và } 3 "; B: "252 \text{ chia hết cho } 6 "$.

Lời giải:

📁 Dạng 5. Mệnh đề đảo

Phương pháp: Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ gọi là **mệnh đề đảo** của $Q \Rightarrow P$.

 **Ví dụ 1.** Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề sau.

- ① Nếu 2 góc ở vị trí so le trong thì hai góc đó bằng nhau.
- ② $ABCD$ là hình bình hành thì AB song song với CD .

Lời giải:

Dạng 6. Mệnh đề tương đương

Phương pháp: Kiểm tra từng mệnh đề kéo theo để xác định một mệnh đề có phải là mệnh đề tương đương hay không ?

Ví dụ 1. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề tương đương?

- ① Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi $ABCD$ có ba góc vuông.
- ② Tứ giác $ABCD$ là hình vuông khi và chỉ khi $ABCD$ có bốn góc vuông.
- ③ Tứ giác $ABCD$ là hình thoi khi và chỉ khi $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường.

Lời giải:

Dạng 7. Phủ định mệnh đề chứa kí hiệu $\forall, \exists$

Phương pháp:

✍ Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in X, P(x)$ " là mệnh đề " $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ".

✍ Phủ định của mệnh đề " $\exists x \in X, P(x)$ " là mệnh đề " $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ".

Ví dụ 1. Phủ định các mệnh đề sau.

- ① Mọi động vật đều di chuyển.
- ② Có ít nhất một số vô tỷ là số thập phân vô hạn tuần hoàn.
- ③ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.
- ④ $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 = x$.

Lời giải:

B TỰ LUẬN

Câu 1. Trong các câu dưới đây, câu nào là mệnh đề, câu nào là mệnh đề chứa biến:

- ① Số 11 là số chẵn.
- ② Bạn có chăm học không ?
- ③ Huế là một thành phố của Việt Nam.
- ④ $2x + 3$ là một số nguyên dương.
- ⑤ $2 - \sqrt{5} < 0$.
- ⑥ $4 + x = 3$.
- ⑦ Hãy trả lời câu hỏi này!.
- ⑧ Paris là thủ đô nước Ý.
- ⑨ Phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ có nghiệm.
- ⑩ 13 là một số nguyên tố.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng? Giải thích?

- | | |
|--|---|
| ① Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3. | ⑤ 2 và 3 là hai số nguyên tố cùng nhau. |
| ② Nếu $a \geq b$ thì $a^2 \geq b^2$. | ⑥ 81 là một số chính phương. |
| ③ Nếu a chia hết cho 3 thì a chia hết cho 6. | ⑦ $5 > 3$ hoặc $5 < 3$. |
| ④ Số π lớn hơn 2 và nhỏ hơn 4. | ⑧ Số 15 chia hết cho 4 hoặc cho 5. |

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng? Giải thích? Phát biểu các mệnh đề đó thành lời:

- | | |
|--|---|
| ① $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$. | ⑦ $\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \leq 1$ |
| ② $\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$ | ⑧ $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 + 2x + 5$ là hợp số. |
| ③ $\exists x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 = 0$. | ⑨ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3. |
| ④ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$. | ⑩ $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)$ là số lẻ. |
| ⑤ $\forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$. | ⑪ $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 6. |
| ⑥ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 5 \Rightarrow x < \sqrt{5}$ | |

Câu 4. Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$, với $x \in \mathbb{R}$. Tìm x để $P(x)$ là mệnh đề đúng:

- | | | |
|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| ① $P(x): "x^2 - 5x + 4 = 0"$ | ③ $P(x): "x^2 - 3x > 0"$ | ⑤ $P(x): "2x + 3 \leq 7"$ |
| ② $P(x): "x^2 - 5x + 6 = 0"$ | ④ $P(x): "\sqrt{x} \geq x"$ | ⑥ $P(x): "x^2 + x + 1 > 0"$ |

Câu 5. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

- | | |
|--|--|
| ① $\forall x \in R : x^2 > 0.$ | ⑥ $\exists x \in R : x^2 = 3.$ |
| ② $\exists x \in R : x > x^2.$ | ⑦ $\forall n \in N, n^2 + 1$ không chia hết cho 3. |
| ③ $\exists x \in Q : 4x^2 - 1 = 0.$ | ⑧ $\forall n \in N, n^2 + 2n + 5$ là số nguyên tố. |
| ④ $\forall x \in R : x^2 - x + 7 > 0.$ | ⑨ $\forall n \in N, n^2 + n$ chia hết cho 2. |
| ⑤ $\forall x \in R : x^2 - x - 2 < 0.$ | ⑩ $\forall n \in N, n^2 - 1$ là số lẻ. |

🔥 **Câu 6.** Phát biểu các mệnh đề sau, bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện cần", "điều kiện đủ":

- ① Nếu một số tự nhiên có chữ số tận cùng là chữ số 5 thì nó chia hết cho 5.
- ② Nếu $a + b > 0$ thì một trong hai số a và b phải dương.
- ③ Nếu một số tự nhiên chia hết cho 6 thì nó chia hết cho 3.
- ④ Nếu $a = b$ thì $a^2 = b^2$.
- ⑤ Nếu a và b cùng chia hết cho c thì $a + b$ chia hết cho c.

🔥 **Câu 7.** Phát biểu các mệnh đề sau, bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện cần và đủ":

- ① Một tam giác là vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng hai góc còn lại.
- ② Một tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi nó có ba góc vuông.
- ③ Một tứ giác là nội tiếp được trong đường tròn khi và chỉ khi nó có hai góc đối bù nhau.
- ④ Một số chia hết cho 6 khi và chỉ khi nó chia hết cho 2 và cho 3.
- ⑤ Số tự nhiên n là số lẻ khi và chỉ khi n^2 là số lẻ.

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

- a) Hãy mở cửa ra!
- b) Số 20 chia hết cho 8.

- c) Số 17 là một số nguyên tố.
d) Bạn có thích chơi bóng đá không?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 2. Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

- a) Đắk Lắk là một thành phố của Việt Nam.
b) Sông Hương chảy ngang qua thành phố Huế.
c) Hãy trả lời câu hỏi này!
d) $5 + 19 = 24$.
e) $6 + 81 = 25$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 3. Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề **sai**?

- (1) Hãy cố gắng học thật tốt!
(2) Số 20 chia hết cho 6.
(3) Số 5 là số nguyên tố.
(4) Số 15 là một số chẵn.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 4. Trong các câu sau, câu nào không phải là mệnh đề?

- A. Paris có phải là thủ đô của nước Pháp không?
B. Paris là thủ đô của nước Pháp.
C. $\sqrt{3}$ là một số vô tỉ.
D. Tam giác ABC có một góc tù.

🔥 **Câu 5.** Câu nào trong các câu sau không phải là mệnh đề?

- A. Mọi số tự nhiên đều là số nguyên.
- B. Số 2017 là số nguyên tố.
- C. Tổng các góc trong của một tam giác bằng 90° .
- D. $x^2 - 3x + 2 > 0$.

🔥 **Câu 6.** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề đúng?

- A. π là một số hữu tỉ.
- B. Tổng hai cạnh của một tam giác luôn lớn hơn cạnh thứ ba.
- C. Bạn có chăm học không? .
- D. Con thì thấp hơn cha.

🔥 **Câu 7.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $7 \leq 7$.
- B. $7 \leq 10$.
- C. $\pi^2 \geq 10$.
- D. $\pi \leq \sqrt{10}$.

🔥 **Câu 8.** Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề phủ định của mệnh đề "Hôm nay, trời nắng to"?

- A. Hôm qua, trời nắng to.
- B. Hôm nay, trời nắng không to.
- C. Hôm nay, trời không nắng to.
- D. Hôm nay, trời mưa to.

D. Dơi không phải là một loài chim.

D. Tổng 3 góc trong của một tam giác bằng 180^0 .

D. Có ít nhất một động vật di chuyển.

D. Tam giác ABC là tam giác đều khi và chỉ khi nó thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $AB = AC$ và $\hat{A} = 60^\circ$.

🔥 **Câu 13.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu $a \geq b$ thì $a^2 \geq b^2$. B. Nếu $a^2 \geq b^2$ thì $a \geq b$.
C. Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3. D. Nếu a chia hết cho 3 thì a chia hết cho 9.

🔥 **Câu 14.** Biết A là mệnh đề sai, còn B là mệnh đề đúng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $B \Rightarrow A$. B. $B \Leftrightarrow A$. C. $\overline{A} \Leftrightarrow \overline{B}$. D. $B \Rightarrow \overline{A}$.

🔥 **Câu 15.** Cho a, b là hai số tự nhiên. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Nếu a, b là các số lẻ thì ab lẻ. B. Nếu a chẵn và b lẻ thì ab lẻ.
C. Nếu a và b lẻ thì $a + b$ chẵn. D. Nếu a^2 lẻ thì a lẻ.

🔥 **Câu 16.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Nếu m, n là các số vô tỉ thì $m.n$ cũng là số vô tỉ.
B. Nếu ABC là một tam giác vuông thì đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.
C. Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều khác vectơ $\vec{0}$, nếu $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.
D. Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

🔥 Câu 17. Cho các mệnh đề P : “5 chia hết cho 2” và Q : ”11 là số nguyên tố”. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $Q \Rightarrow P$.

B. $\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$.

C. $P \Leftrightarrow Q$.

D. $P \Rightarrow Q$.

🔥 Câu 18. Xét mệnh đề chứa biến $P(n)$: “ n chia hết cho 12”. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P(48)$.

B. $P(4)$.

C. $P(3)$.

D. $P(88)$.

🔥 Câu 19. Cho các mệnh đề P : “ $\forall n \in \mathbb{N}, n:2$ và $n:3$ thì $n:6$ ”, Q : “ $\forall n \in \mathbb{Z}, n:6$ thì $n:3$ và $n:2$ ”.

Khẳng định nào dưới đây đúng về tính đúng - sai của các mệnh đề P và Q ?

A. P đúng, Q sai.

B. P sai, Q đúng.

C. P và Q cùng sai.

D. P và Q cùng đúng.

🔥 Câu 20. Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề? Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

a) Tam giác cân có hai góc bằng nhau phải không?

b) Hai vectơ có độ dài bằng nhau thì bằng nhau.

c) Một tháng có tối đa 5 ngày chủ nhật.

d) 23 là một số nguyên tố.

e) Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ là một đường parabol.

A. Có 5 mệnh đề; 4 mệnh đề đúng.

B. Có 4 mệnh đề; 3 mệnh đề đúng.

C. Có 3 mệnh đề; 2 mệnh đề đúng.

D. Có 4 mệnh đề; 2 mệnh đề đúng.

🔥 **Câu 21.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai** ?

A. $-\pi < -2 \Leftrightarrow \pi^2 < 4$.

B. $\pi < 4 \Leftrightarrow \pi^2 < 16$.

C. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow 2\sqrt{23} < 2 \cdot 5$.

D. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow -2\sqrt{23} > -2 \cdot 5$.

🔥 **Câu 22.** Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. π là số không nhỏ hơn 4.

B. Nếu a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $a + b > c + d$ thì $a > c$ và $b > d$.

C. Nếu $a > 3$ thì $a > 0$.

D. $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 = 2$.

🔥 **Câu 23.** Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề phủ định của mệnh đề "An nói Bình tặng hoa cho mẹ vào ngày 8 - 3" ?

A. Cường nói Bình tặng hoa cho mẹ vào ngày 8 - 3.

B. An nói Bình không tặng hoa cho mẹ vào ngày 8 - 3.

C. An không nói Bình tặng hoa cho mẹ vào ngày 8 - 3.

D. An nói Bình tặng hoa cho mẹ vào ngày sinh nhật.

🔥 **Câu 24.** Cho A, B là hai điểm trên đường tròn (C) tâm O , và I là một điểm trên đoạn AB (đây AB không đi qua tâm O). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. "Nếu I là trung điểm AB thì $OI = AB$ ".

B. "Nếu I là trung điểm AB thì $OI \perp AB$ ".

C. "Nếu I là trung điểm AB thì $OI \parallel AB$ ".

D. "Nếu I là trung điểm AB thì $OI = \frac{1}{2}AB$ ".

Câu 25. Cho P và Q là hai mệnh đề. P : "Tuần này tôi mua một vé xổ số vietlott", Q : "Tôi sẽ trúng 100 tỉ đồng". Mệnh đề nào dưới đây không là mệnh đề $P \iff Q$.

- A. "Tuần này tôi mua một vé xổ số vietlott nếu và chỉ nếu tôi sẽ trúng 100 tỉ đồng".
- B. "Tuần này tôi mua một vé xổ số vietlott khi và chỉ khi tôi sẽ trúng 100 tỉ đồng".
- C. "Nếu tuần này tôi mua một vé xổ số vietlott thì tôi sẽ trúng 100 tỉ đồng".
- D. "Tuần này tôi mua một vé xổ số vietlott là điều kiện cần và đủ để tôi sẽ trúng 100 tỉ đồng".

Câu 26. Cho P là mệnh đề đúng, Q là mệnh đề sai. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\overline{Q}$.
- B. $Q \Rightarrow P$.
- C. $P \iff Q$.
- D. $P \iff \overline{Q}$.

Câu 27. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\forall z \in \mathbb{Z} : z^2 + z > z^4 + 10$ ".

- A. " $\exists z \in \mathbb{Z} : z^2 + z \leq z^4 + 10$ ".
- B. " $\exists z \in \mathbb{Z} : z^2 + z < z^4 + 10$ ".
- C. " $\exists z \in \mathbb{Z} : z^2 + z \geq z^4 + 10$ ".
- D. " $\exists z \in \mathbb{Z} : z^2 + z > z^4 + 10$ ".

Câu 28. Cách phát biểu nào sau đây không dùng để phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$?

- A. P khi và chỉ khi Q .
- B. P tương đương Q .
- C. P kéo theo Q .
- D. P là điều kiện cần và đủ để có Q .

🔥 **Câu 29.** Tìm mệnh đề đúng.

A. $\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$.

B. $\exists m \in \mathbb{Z} : 2m = m$.

C. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$.

D. $\exists k \in \mathbb{Q} : k^2 = 2$.

🔥 **Câu 30.** Mệnh đề "Bình phương mọi số thực đều không âm" mô tả mệnh đề nào dưới đây?

A. " $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq 0$ ".

B. " $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ ".

C. " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ ".

D. " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ ".

🔥 **Câu 31.** Mệnh đề "Có ít nhất một số tự nhiên khác 0" mô tả mệnh đề nào dưới đây?

A. " $\forall n \in \mathbb{N} : n \neq 0$ ".

B. " $\exists x \in \mathbb{N} : x = 0$ ".

C. " $\exists x \in \mathbb{Z} : x \neq 0$ ".

D. " $\exists x \in \mathbb{N} : x \neq 0$ ".

🔥 **Câu 32.** Phủ định của mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - n$ là số chẵn?

A. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - n$ là số lẻ.

B. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - n$ là số chẵn.

C. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 - n$ là số chẵn.

D. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 - n$ là số lẻ.

🔥 **Câu 33.** Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\exists x \in \mathbb{Z}, \frac{x^2}{x+2} \in \mathbb{Z}$.

B. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 2ab$.

C. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 = 0$.

D. $\forall y \in \mathbb{Z}, y^3 > y$.

🔥 **Câu 34.** Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = n.$

C. $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 - 2 = 0.$

B. $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 > 0.$

D. $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ là số lẻ.

🔥 **Câu 35.** Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0.$

B. $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x - 1.$

C. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 3x.$

D. $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} > x.$

🔥 **Câu 36.** Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề $\forall m \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{Z} : m^2 - n^2 = 1.$

A. $\exists m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z} : m^2 - n^2 \neq 1.$

B. $\exists m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z} : m^2 - n^2 = 1.$

C. $\exists m \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{Z} : m^2 - n^2 \neq 1.$

D. $\forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z} : m^2 - n^2 = 1.$

🔥 **Câu 37.** Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x^2 - y^2 > 10^{1000}.$

A. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x^2 - y^2 < 10^{1000}.$

B. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^2 - y^2 > 10^{1000}.$

C. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^2 - y^2 < 10^{1000}.$

D. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^2 - y^2 \leq 10^{1000}.$

🔥 **Câu 38.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P: " \exists x \in \mathbb{R} : x - 3 > 0 "$ là :

A. $\bar{P}: " \exists x \in \mathbb{R} : x - 3 \leq 0 "$.

B. $\bar{P}: " \forall x \in \mathbb{R} : x - 3 \leq 0 "$.

C. $\bar{P}: " \forall x \in \mathbb{R} : x - 3 > 0 "$.

D. $\bar{P}: " \exists x \notin \mathbb{R} : x - 3 > 0 "$.

🔥 **Câu 39.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P: " \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0 "$ là :

A. $\bar{P}: " \exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0 "$. B. $\bar{P}: " \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0 "$. C. $\bar{P}: " \exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0 "$. D. $\bar{P}: " \forall x \notin \mathbb{R} : x^2 \geq 0 "$.

🔥 **Câu 40.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề $Q: " \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0 "$ là :

A. $\bar{Q}: " \exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0 "$.

B. $\bar{Q}: " \forall x \notin \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0 "$.

C. $\bar{Q}: " \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0 "$.

D. $\bar{Q}: " \exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0 "$.

BÀI 2. TẬP HỢP- CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

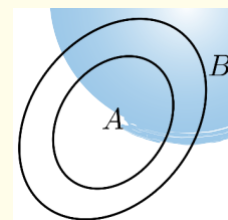
1 ĐỊNH NGHĨA

- ✎ **Tập hợp** là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa.
- ✎ **Cách xác định tập hợp:**
 - (a) Liệt kê các phần tử: viết các phần tử của tập hợp trong hai dấu móc $\{ \dots \}$.
 - (b) Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.
- ✎ **Tập rỗng:** là tập hợp không chứa phần tử nào, kí hiệu $\emptyset$.

2 TẬP HỢP CON – TẬP HỢP BẰNG NHAU.

- ✎ $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$.
- ✎ $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ và } B \subset A) \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

- ☑ $A \subset A, \forall A$.
- ☑ $\emptyset \subset A, \forall A$.
- ☑ $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.



3 MỘT SỐ TẬP CON CỦA TẬP HỢP SỐ THỰC.

Tên gọi và kí hiệu	Tập hợp	Biểu diễn trên trục số (phần không bị gạch chéo)
Tập số thực, khoảng $(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$	
Đoạn $[a; b]$	$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	
Khoảng $(a; b)$	$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	
Khoảng $(-\infty; b)$	$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$	
Khoảng $(a; +\infty)$	$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	
Nửa khoảng $[a; b)$	$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	
Nửa khoảng $(a; b]$	$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	
Nửa khoảng $[a; +\infty)$	$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	
Nửa khoảng $(-\infty; b]$	$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$	

4 CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP.

- ① Giao của hai tập hợp: $A \cap B \Leftrightarrow \{x|x \in A \text{ và } x \in B\}$.
- ② Hợp của hai tập hợp: $A \cup B \Leftrightarrow \{x|x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.
- ③ Hiệu của hai tập hợp: $A \setminus B \Leftrightarrow \{x|x \in A \text{ và } x \notin B\}$.
- ④ Phần bù: Cho $B \subset A$ thì $C_A B = A \setminus B$.

5 CÁC DẠNG TOÁN

📁 Dạng 1. Xác định tập hợp

- ✍️ Xác định tập hợp bằng cách liệt kê.
- ✍️ Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

 **Ví dụ 1.** Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau.

- ① $X = \{x \in \mathbb{R} | 2x^2 - 7x + 5 = 0\}$.
- ② $Y = \{x \in \mathbb{N} | 3x - 5 < x\}$.
- ③ $Z = \{x \in \mathbb{Z} | (x^2 - 10x + 21)(x^3 - x) = 0\}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Xác định tập hợp bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng.

- ① $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.
- ② $Y = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.
- ③ $Z = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots \right\}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

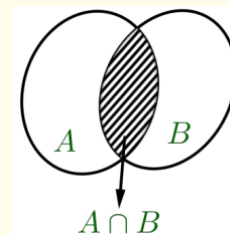
.....

.....

Dạng 2. Tìm giao của các tập hợp

Giao hai tập hợp của A và B là một tập hợp gồm các phần tử chung của A và B .

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$



Ví dụ 1. Tìm $A \cap B$.

① $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 20\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x < 30\}$.

② $A = \{-7; 0; 6; 7; 8\}$, $B = \{-3; 5; 7; 10; 12\}$.

③ $A = (0; 3)$, $B = (2; 7)$.

④ $A = (1; 5)$, $B = [-2; 4]$.

⑤ $A = (-\infty; 3)$, $B = [-2; 8)$.

⑥ $A = [-1; 6)$, $B = [-2; +\infty)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

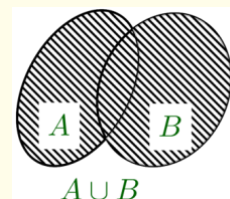
.....

.....

Dạng 3. Tìm hợp của các tập hợp

Hợp hai tập hợp của A và B là một tập hợp gồm các phần tử chung và riêng của A và B .

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$



Ví dụ 1. Tìm $A \cup B$.

① $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 20\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x < 30\}$.

② $A = \{-7; 0; 6; 7; 8\}$, $B = \{-3; 5; 7; 10; 12\}$.

③ $A = (0; 3)$, $B = (2; 7)$.

④ $A = (1; 5)$, $B = [-2; 4]$.

⑤ $A = (-\infty; 3)$, $B = [-2; 8)$.

⑥ $A = [-1; 6)$, $B = [-2; +\infty)$.

Lời giải:

.....

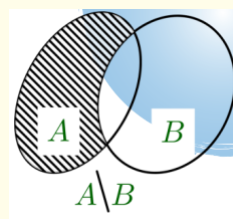
.....

.....

📁 Dạng 4. Tìm hiệu của các tập hợp

Hiệu hai tập hợp của A và B là một tập hợp gồm các phần tử thuộc A và không thuộc B .

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$$



Ví dụ 1. Tìm $A \setminus B$.

- ① $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 20\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x < 30\}$.
 ② $A = \{-7; 0; 6; 7; 8\}$, $B = \{-3; 5; 7; 10; 12\}$.
 ③ $A = (0; 3)$, $B = (2; 7)$.

- ④ $A = (1; 5)$, $B = [-2; 4]$.
 ⑤ $A = (-\infty; 3)$, $B = [-2; 8)$.
 ⑥ $A = [-1; 6)$, $B = [-2; +\infty)$.

Lời giải:

📁 Dạng 5. Tìm tập con của tập hợp

A được gọi là tập con của tập B và kí hiệu là $A \subset B$ nếu mọi phần tử của tập A đều thuộc B .

Ví dụ 1. Tìm tất cả các tập hợp con của tập

- ① $A = \{1; 2; 3\}$.
 ② $A = \{a; b\}$, $B = \{a; b; c; d\}$.

Lời giải:

.....

.....

B TỰ LUẬN

🔥 Câu 1. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó:

① $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x^2 - 5x + 3)(x^2 - 4x + 3) = 0\}$

② $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 10x + 21)(x^3 - x) = 0\}$

③ $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (6x^2 - 7x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 0\}$

④ $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$

⑤ $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 3 < 4 + 2x \text{ và } 5x - 3 < 4x - 1\}$

⑥ $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x + 2| \leq 1\}$

⑦ $G = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$

⑧ $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 3 = 0\}$

_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____

🔥 Câu 2. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách chỉ rõ tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó:

① $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

② $B = \{0; 4; 8; 12; 16\}$

③ $C = \{-3; 9; -27; 81\}$

④ $D = \{9; 36; 81; 144\}$

⑤ $E = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

⑥ $F = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____

🔥 Câu 3. Trong các tập hợp sau đây, tập nào là tập rỗng:

① $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$

② $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 1 = 0\}$

③ $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$

④ $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 = 0\}$

⑤ $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 7x + 12 = 0\}$

⑥ $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$

_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____

Câu 4. Tìm tất cả các tập con, các tập con gồm hai phần tử của các tập hợp sau:

- | | |
|------------------------|---|
| ① $A = \{1, 2\}$ | ④ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 2 = 0\}$ |
| ② $B = \{1, 2, 3\}$ | ⑤ $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$ |
| ③ $C = \{a, b, c, d\}$ | |

Câu 5. Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$ với:

- ① $A = \{2, 4, 7, 8, 9, 12\}, B = \{2, 8, 9, 12\}$
- ② $A = \{2, 4, 6, 9\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$
- ③ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| = 1\}$.
- ④ $A =$ Tập các ước số của 12, $B =$ Tập các ước số của 18.
- ⑤ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x + 1)(x - 2)(x^2 - 8x + 15) = 0\}, B =$ Tập các số nguyên tố có một chữ số.
- ⑥ $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 4\}, B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (5x - 3x^2)(x^2 - 2x - 3) = 0\}$.

Câu 6. Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$ với:

- | | |
|------------------------------|---|
| ① $A = [-4; 4], B = [1; 7]$ | ④ $A = (-\infty; -2], B = [3; +\infty)$ |
| ② $A = [-4; -2], B = (3; 7]$ | ⑤ $A = [3; +\infty), B = (0; 4)$ |
| ③ $A = [-4; -2], B = (3; 7)$ | ⑥ $A = (1; 4), B = (2; 6)$ |

Câu 7. Tìm $A \cup B \cup C, A \cap B \cap C$ với:

- | | |
|---|--|
| ① $A = [1; 4], B = (2; 6), C = (1; 2)$ | ③ $A = [0; 4], B = (1; 5), C = (-3; 1]$ |
| ② $A = (-\infty; -2], B = [3; +\infty), C = (0; 4)$ | ④ $A = (-\infty; 2], B = [2; +\infty), C = (0; 3)$ |

-------	-------

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq n \leq 10\}$. Dạng liệt kê của tập hợp A là

A. $A = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

B. $A = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

C. $A = \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

D. $A = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Câu 2. Cho tập hợp $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid -2 < n \leq 5\}$. Tập hợp A bằng tập hợp nào sau đây?

A. $M = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

B. $N = \{-1; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

C. $P = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

D. $Q = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Câu 3. Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 7 = 0\}$ có bao nhiêu phần tử?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 4. Cho tập hợp $F = \{-10; -5; 0; 5; 10\}$. Tập hợp F được viết bằng cách chỉ rõ các tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó là

A. $F = \{n \in \mathbb{Z} \mid n:5 \text{ và } -10 \leq n \leq 10\}$.

B. $F = \{n \in \mathbb{Z} \mid n:5\}$.

C. $F = \{n \in \mathbb{Z} \mid -10 \leq n \leq 10\}$.

D. $F = \{n \in \mathbb{Z} \mid n:5 \text{ và } -11 < n \leq 15\}$.

🔥 **Câu 5.** Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$.
 B. $(A \subset B) \text{ và } (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$.
 C. $\emptyset$ không phải tập hợp con của A với mọi tập hợp A .
 D. $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ và } B \subset A)$.

🔥 **Câu 6.** Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 4 = 0\}$. Dùng phương pháp liệt kê phần tử, xác định tập hợp B .

- A. $B = \{-1\}$. B. $B = \{4\}$. C. $B = (-1; 4)$. D. $B = \{-1; 4\}$.

🔥 **Câu 7.** Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 8x + 15 = 0\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $A = \{-3; -5\}$. B. $A = \emptyset$. C. $A = \{\emptyset\}$. D. $A = \{0\}$.

🔥 **Câu 8.** Cho tập hợp $C = \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$. B. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$. C. $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 4\}$. D. $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 4\}$.

Câu 9. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 4\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $A = (-1; 4]$. **B.** $A = \{-1; 4\}$. **C.** $A = (-1; 4)$. **D.** $A = [-1; 4]$.

Câu 10. Cho tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $X = (-2; 5)$. **B.** $X = \{-2; 5\}$. **C.** $X = [-2; 5)$. **D.** $X = [-2; 5]$.

Câu 11. Tập hợp $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 7x + 6 = 0\}$ có bao nhiêu phần tử?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 12. Tập hợp $X = [-1; 4]$ có bao nhiêu phần tử?

- A.** 2. **B.** 1. **C.** 5. **D.** Vô số.

Câu 13. Cho tập hợp $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid 6 \vdots n\}$. Hãy viết tập hợp A dưới dạng liệt kê?

- A.** $A = \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$. **B.** $A = \{-6; -3; -2; -1\}$.
C. $A = \{1; 2; 3; 6\}$. **D.** $A = \{-6; -1; 1; 6\}$.

🔥 **Câu 14.** Cho A là một tập hợp, hãy tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- A.** $A \in A$. **B.** $\emptyset \subset A$. **C.** $A \subset A$. **D.** $A \in \{A\}$.

🔥 **Câu 15.** Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | 2 > x > 0\}$ bằng tập hợp nào dưới đây?

- A.** $(0; 2]$. **B.** $(0; 2)$. **C.** $[0; 2]$. **D.** $\{0; 2\}$.

🔥 **Câu 16.** Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | 2x^2 - 7x + 1 = 0\}$ có bao nhiêu phần tử?

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

🔥 **Câu 17.** Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | 2x^2 - x + 1 = 0\}$ có bao nhiêu phần tử?

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

🔥 **Câu 18.** Tập hợp $A = (1; 5)$ có bao nhiêu phần tử?

- A.** 2. **B.** vô số. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 19. Hãy viết tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\}$ dưới dạng liệt kê các phần tử.

- A. $A = \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$. B. $A = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. C. $A = \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$. D. $A = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Câu 20. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào khác tập $\emptyset$?

- A. $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n + 1 = 0\}$. B. $B = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ và } x^2 + y^2 = 0\}$.
C. $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 2\}$. D. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + x - 1 = 0\}$.

Câu 21. Cho tập hợp $A = [-2; 1)$. A là tập con của tập hợp nào sau đây?

- A. $B = [-1; 2)$. B. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1\}$.
C. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 1\}$. D. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid -2 \leq x < 1\}$.

Câu 22. Cho tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$. Tập hợp nào trong các tập hợp sau đây **không** chứa tập hợp X ?

- A. $A = [-3; 7)$. B. $\mathbb{R}$. C. $B = [-3; +\infty)$. D. $C = [-1; +\infty)$.

🔥 **Câu 23.** Cho tập hợp $K = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + x + 18 = 0\}$. Kết luận nào sau đây **đúng**?

- A. $K = \{0\}$. B. $K = 0$. C. $K = \emptyset$. D. $K = \{\emptyset\}$.

🔥 **Câu 24.** Cho tập hợp $A \neq \emptyset$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

- A. $A \cup \emptyset = A$. B. $A \cup \emptyset = \emptyset$. C. $A \cup A = \emptyset$. D. $\emptyset \cup A = \emptyset$.

🔥 **Câu 25.** Cho hai tập hợp $X = \{7, 2, 8, 4, 9, 12\}$ và $Y = \{1, 3, 7, 4\}$. Tìm tập hợp $X \cap Y$.

- A. $\{1, 2, 3, 4, 8, 9, 7, 12\}$. B. $\{2, 8, 9, 12\}$. C. $\{4, 7\}$. D. $\{1, 3\}$.

🔥 **Câu 26.** Cho hai tập hợp $X = \{2, 4, 6, 9\}$ và $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Tìm tập hợp $X \cup Y$.

- A. $\{1, 3\}$. B. $\{6, 9\}$. C. $\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$. D. $\{2, 4\}$.

🔥 **Câu 27.** Cho hai tập hợp $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ và $Y = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Tìm tập hợp $X \setminus Y$.

- A. $\{0\}$. B. $\{0, 1\}$. C. $\{1, 2\}$. D. $\{1, 5\}$.

🔥 Câu 28. Cho hai tập hợp $M = \left\{\frac{1}{2}, 1, 5, 7, 9\right\}$ và $N = \{-2, 0, 5, 7, 8\}$. Tìm tập hợp $M \cup N$.

A. $\{-2, 0, 5, 9\}$.

B. $\left\{-2, 0, \frac{1}{2}, 9\right\}$.

C. $\left\{-2, 0, \frac{1}{2}, 1, 5, 7, 8, 9\right\}$.

D. $\left\{\frac{1}{2}, 1, 9\right\}$.

🔥 Câu 29. Cho hai tập hợp $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ và $B = \{0, 2, 4\}$. Tìm tập hợp $C_A B$.

A. $\{0, 2, 4, 6\}$.

B. $\{0, 2, 4, 8\}$.

C. $\{2, 4\}$.

D. $\{6, 8\}$.

🔥 Câu 30. Cho hai tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

A. $\{1, 2, 3\}$.

B. $\{1, 3\}$.

C. $\{6, 8\}$.

D. $\{2, 4, 6\}$.

🔥 Câu 31. Cho hai tập hợp $X = (-\infty; 3]$ và $Y = (2; +\infty)$. Tìm tập hợp $X \cup Y$.

A. $[2; +\infty)$.

B. $(-3; 2]$.

C. $\mathbb{R}$.

D. $\emptyset$.

🔥 Câu 32. Cho hai tập hợp $X = (-\infty; 1]$ và $Y = (1; +\infty)$. Tìm tập hợp $X \cap Y$.

A. $[3; +\infty)$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $\emptyset$.

D. $\{3\}$.

🔥 **Câu 33.** Cho hai tập hợp $X = [-2; 3]$ và $Y = (1; 5]$. Tìm tập hợp $X \setminus Y$.

A. $[-2; 1]$.

B. $(3; 5]$.

C. $[-2; 1)$.

D. $(-2; 1]$.

🔥 **Câu 34.** Cho tập hợp $A = (2; +\infty)$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$.

A. $[2; +\infty)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(-\infty; 2]$.

D. $(-\infty; -2]$.

🔥 **Câu 35.** Cho các tập hợp sau $A = (-1; 5]$, $B = (2; 7)$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

A. $(-1; 2]$.

B. $(2; 5]$.

C. $(-1; 7)$.

D. $(-1; 2)$.

🔥 **Câu 36.** Cho các tập hợp $A = [-2; 3]$, $B = (1; 5]$. Tìm tập hợp $A \cup B$.

A. $[-2; 5]$.

B. $(1; 3]$.

C. $[-2; 1]$.

D. $(3; 5]$.

🔥 **Câu 37.** Cho các tập hợp $A = (-\infty; 3]$, $B = [3; +\infty)$. Tìm tập hợp $B \cap A$.

A. $\mathbb{R}$.

B. $\{3\}$.

C. $\emptyset$.

D. $[3; +\infty)$.

🔥 Câu 38. Cho các tập hợp $A = [-2; 3], B = (1; 5]$. Tìm tập hợp $B \setminus A$.

- A.** $(3; 5]$. **B.** $[-2; 5]$. **C.** $(1; 3]$. **D.** $[-2; 1]$.

🔥 Câu 39. Cho tập hợp $A = (2; +\infty)$. Tìm phần bù của tập hợp A trong tập hợp các số thực $\mathbb{R}$.

- A.** $[2; +\infty)$. **B.** $(2; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 2]$. **D.** $(-\infty; -2]$.

🔥 Câu 40. Cho các tập hợp $A = (-\infty; 3], B = (2; +\infty)$. Tìm tập hợp $B \cap A$.

- A.** $[3; +\infty)$. **B.** $(2; 3]$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\emptyset$.

🔥 Câu 41. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; 3], B = (2; +\infty)$. Tìm tập hợp $B \cup A$.

- A.** $[2; +\infty)$. **B.** $(2; 3]$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\emptyset$.

🔥 **Câu 42.** Cho hai tập hợp $A = (-5; 3)$ và $B = (0; 7)$. Tìm tập hợp $A \cap B$.

- A. $(0; 3)$. B. $[0; 3]$. C. $(-5; 0)$. D. $(3; 7)$.

🔥 **Câu 43.** Cho hai tập hợp $A = (-1; 5)$ và $B = (3; 7)$. Tìm tập hợp $A \cup B$.

- A. $(3; 5)$. B. $(5; 7)$. C. $(-1; 7)$. D. $(-1; 3)$.

🔥 **Câu 44.** Cho hai tập hợp $A = \{x | x \in \mathbb{R}\}$ và $B = (0; +\infty)$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

- A. $(-\infty; 0]$. B. $[0; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

🔥 **Câu 45.** Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x + 2 \geq 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} | 5 - x \geq 0\}$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

- A. $[-2; 5]$. B. $[-2; 6]$. C. $(5; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.

🔥 **Câu 46.** Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | (x^2 - 1)(x^2 - 3x + 4) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} | |x| \leq 2\}$. Tìm tập hợp $A \cup B$.

- A. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$. B. $\{-2, -1, 0, 1, 2, -4\}$. C. $\{-1, 1\}$. D. $\{-2, 0, 2\}$.

🔥 Câu 47. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0\}$ và tập hợp $B = \{x \in \mathbb{Z} | |x| \leq 2\}$. Khi đó, tập $A \cup B$ là

A. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

B. $\{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$.

C. $\{-2, -1, 1, 2\}$.

D. $\{-2, 0, 2\}$.

🔥 Câu 48. Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{N}^* | x \leq 4\}$ và tập hợp A gồm những số tự nhiên lẻ không lớn hơn 8. Tìm tập hợp $A \cap B$.

A. $\{1, 3\}$.

B. $\{1, 2, 3, 4\}$.

C. $\{0, 1, 3, 5\}$.

D. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

🔥 Câu 49. Cho các tập hợp $M = [1; 4]$, $N = (2; 6)$ và $P = (1; 2)$. Tìm tập hợp $M \cap N \cap P$.

A. $[0; 4]$.

B. $[5; +\infty)$.

C. $(-\infty; 1)$.

D. $\emptyset$.

🔥 Câu 50. Cho hai tập hợp $X = [-4; 7]$ và $Y = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. Tìm tập hợp $X \cap Y$.

A. $[-4; -2) \cup (3; 7]$.

B. $[-4; -2) \cup (3; 7)$.

C. $(-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$.

D. $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

CHƯƠNG 2

HÀM SỐ

BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Cho $D \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Hàm số f xác định trên $\mathcal{D}$ là một qui tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in \mathcal{D}$ với một và chỉ một số $y \in \mathbb{R}$.

x được gọi là biến số (đối số), y được gọi là giá trị của hàm số f tại x .

Kí hiệu: $y = f(x)$.

$\mathcal{D}$ được gọi là tập xác định của hàm số f .

2 CÁCH CHO HÀM SỐ

- ① Cho bằng bảng.
- ② Cho bằng biểu đồ.
- ③ Cho bằng công thức $y = f(x)$.
- ④ **Tập xác định** của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

3 ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ với mọi $x \in \mathcal{D}$.

4 SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số f xác định trên K .

- ① Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- ② Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

5 TÍNH CHẴN LẺ CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$.

- ① Hàm số f được gọi là hàm số chẵn nếu với $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(x) = f(-x)$.
- ② Hàm số f được gọi là hàm số lẻ nếu với $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(x) = -f(-x)$.

Chú ý:

- ☑ Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- ☑ Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

6 CÁC DẠNG BÀI TẬP.

📁 Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Phương pháp giải.

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập các giá trị của x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Chú ý: Nếu $P(x)$ là một đa thức thì:

- ☑ $\frac{1}{P(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow P(x) \neq 0$.
- ☑ $\sqrt{P(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow P(x) \geq 0$.
- ☑ $\frac{1}{\sqrt{P(x)}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow P(x) > 0$.

 **Ví dụ 1.** Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

① $y = x^4 + x^3 - 2x + 5.$

④ $y = \sqrt{3x-5}.$

⑦ $y = \frac{2x\sqrt{3x+7}}{x^2+2x-3}.$

② $y = \frac{x+3}{x^2+2x-3}.$

⑤ $y = \frac{2x-3}{\sqrt{x-2}}.$

⑧ $y = \sqrt{4x+2} + \frac{3x}{\sqrt{1-x}}.$

③ $y = \frac{x+\sqrt{5}}{x^2+4x}.$

⑥ $y = \sqrt{2+x} + \sqrt{6-3x}.$

Lời giải:

Dạng 2. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số.

Phương pháp giải.

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathcal{D}$:

☑ Hàm số chẵn $\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D} \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

☑ Hàm số lẻ $\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D} \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

☑ **Chú ý:** Một hàm số có thể không chẵn cũng không lẻ.

Quy trình xét hàm số chẵn, lẻ.

① Tìm tập xác định của hàm số.

② Kiểm tra

☑ Nếu $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$. Chuyển qua bước ba

☑ Nếu $\exists x_0 \in \mathcal{D} \Rightarrow -x_0 \notin \mathcal{D}$ kết luận hàm không chẵn cũng không lẻ.

③ Xác định $f(-x)$ và so sánh với $f(x)$.

☑ Nếu bằng nhau thì kết luận hàm số là chẵn.

☑ Nếu đối nhau thì kết luận hàm số là lẻ.

☑ Nếu tồn tại một giá trị $x_0 \in \mathcal{D}$ mà $f(-x_0) \neq f(x_0), f(-x_0) \neq -f(x_0)$ kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

Ví dụ 1. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số

① $y = x^2 + 3x^4$.

② $y = x^3 + 3x$.

③ $y = \frac{-x^4 + x^2 + 5}{3x}$.

④ $y = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

Câu 1. Tìm tập xác định của các hàm số

$$\textcircled{1} \quad y = \frac{x+1}{(x+1)(x^2+3x+4)}$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{2x^2+x+1}{x^3+x^2-5x-2}$$

$$\textcircled{3} \quad y = \frac{x}{(x^2-1)^2-2x^2}$$

$$\textcircled{4} \quad y = \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2+2x+3}$$

$$\textcircled{5} \quad y = \frac{2\sqrt{x-1}}{|x|-2}$$

$$\textcircled{6} \quad y = \sqrt{x+2} - \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

$$\textcircled{7} \quad y = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-x-6}$$

$$\textcircled{8} \quad y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2+x+1}$$

$$\textcircled{9} \quad y = \frac{\sqrt{6-3x}-\sqrt{x-1}}{2x+9}$$

$$\textcircled{10} \quad y = \frac{(x+4)\sqrt{x+3}}{\sqrt{3x-2}+6x}$$

$$\textcircled{11} \quad y = \frac{\sqrt{4-3x}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}}$$

$$\textcircled{12} \quad y = \frac{\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}}{x}$$

🔥 Câu 2. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{x^3+5x}{x^2+4}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{x^2+5}{x^2-1}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$\textcircled{6} \quad f(x) = \frac{x-5}{x-1}$$

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔥 Câu 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x+2}{3-x}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

D. $\mathcal{D} = (-\infty; 3)$.

🔥 Câu 2. Hàm số nào sau đây luôn xác định với mọi x thuộc tập $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{1}{x^2}$.

B. $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$.

C. $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$.

D. $y = \frac{x}{x^2-1}$.

🔥 **Câu 3.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x-3}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

B. $\mathcal{D} = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

C. $\mathcal{D} = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

D. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

🔥 **Câu 4.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2-x^2}$.

A. $\mathcal{D} = [-2; 2]$.

B. $\mathcal{D} = (-\infty; \sqrt{2}]$.

C. $\mathcal{D} = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

D. $\mathcal{D} = (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

🔥 **Câu 5.** Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x-a}}{2x-a}$, với a là hằng số. Tập xác định của hàm số đã cho là

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{2}\right\}$.

B. $\mathcal{D} = [a; +\infty) \setminus \left\{\frac{a}{2}\right\}$.

C. $\mathcal{D} = [a; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = (a; +\infty) \setminus \left\{\frac{a}{2}\right\}$.

🔥 **Câu 6.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-9}}$. Hàm số nào sau đây có cùng tập xác định với hàm số $f(x)$?

A. $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x+2}$.

B. $h(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}$.

C. $k(x) = \frac{1}{(x+4)\sqrt{x^2-9}}$.

D. $t(x) = \sqrt{x^2-9}$.

🔥 **Câu 7.** Hàm số nào sau đây luôn đồng biến trên tập $\mathbb{R}$?

- A. $y = x^2$. B. $y = 2x + 1$. C. $y = -x^2 + 3x - 1$. D. $y = \frac{1}{x}$.

🔥 **Câu 8.** Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2-x} + \frac{2017}{\sqrt{x-1}}$ là

- A. $\mathcal{D} = [1; 2]$. B. $\mathcal{D} = (1; 2]$.
C. $\mathcal{D} = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$.

🔥 **Câu 9.** Tập xác định của hàm số $y = \frac{x-3}{\sqrt[3]{x}}$ là

- A. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = [0; +\infty)$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

🔥 **Câu 10.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{3-x}{9-x^2}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

🔥 **Câu 11.** Hàm số nào sau đây có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$?

- A. $y = \frac{2x+1}{x-4}$. B. $y = \frac{x+1}{x^2+1}$. C. $y = \frac{\sqrt{2+x}}{x-3}$. D. $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-3x+2}$.

🔥 **Câu 12.** Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$ gọi là hàm số chẵn nếu

- A. $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $f(-x) = -f(x)$.
 B. $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $f(-x) = f(x)$.
 C. $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = -f(x)$.
 D. $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = f(x)$.

🔥 **Câu 13.** Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$ gọi là hàm số lẻ nếu

- A. $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $f(-x) = -f(x)$.
 B. $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $f(-x) = f(x)$.
 C. $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = -f(x)$.
 D. $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = f(x)$.

🔥 **Câu 14.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x) = -2x^3 + x$.

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn.
 B. $f(x)$ là hàm số lẻ.
 C. $f(x)$ không phải là hàm số chẵn cũng không phải là hàm số lẻ.
 D. $f(x)$ vừa là hàm số chẵn vừa là hàm số lẻ.

🔥 **Câu 15.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$.

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn.
 B. $f(x)$ là hàm số lẻ.
 C. $f(x)$ không phải là hàm số chẵn cũng không phải là hàm số lẻ.
 D. $f(x)$ vừa là hàm số chẵn vừa là hàm số lẻ.

❖ **Câu 16.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x) = x^2|x|$.

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn.
- B. $f(x)$ là hàm số lẻ.
- C. $f(x)$ không phải là hàm số chẵn cũng không phải là hàm số lẻ.
- D. $f(x)$ vừa là hàm số chẵn vừa là hàm số lẻ.

❖ **Câu 17.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn.
- B. $f(x)$ là hàm số lẻ.
- C. $f(x)$ không phải là hàm số chẵn cũng không phải là hàm số lẻ.
- D. $f(x)$ vừa là hàm số chẵn vừa là hàm số lẻ.

❖ **Câu 18.** Hàm số nào dưới đây là hàm số lẻ?

- A. $y = 2$.
- B. $y = x^3 + 2x^2$.
- C. $y = \frac{-x^4 + 2x^2 + 1}{x}$.
- D. $y = x^4 - 4x^2$.

❖ **Câu 19.** Hàm số nào dưới đây là hàm số chẵn?

- A. $y = x^3 + x$.
- B. $y = 3$.
- C. $y = \frac{x+4}{2x-2}$.
- D. $y = \frac{x^4 + 2x^2 - 5}{x}$.

☛ **Câu 20.** Xét tính chất chẵn lẻ của hàm số $y = f(x) = 2x^3 + 3x + 1$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $y = f(x)$ là hàm số chẵn.

B. $y = f(x)$ là hàm số lẻ.

C. $y = f(x)$ là hàm số không có tính chẵn lẻ.

D. $y = f(x)$ là hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

BÀI 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Hàm số bậc nhất là hàm số có dạng $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

2 SỰ BIẾN THIÊN

- ① TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
- ② Hàm số số đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$
- ③ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax + b$ ($a > 0$)	$-\infty$	$+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax + b$ ($a < 0$)	$+\infty$	$-\infty$

3 ĐỒ THỊ.

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng có hệ số góc bằng a , cắt trục hoành tại $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ và trục tung tại $B(0; b)$

Chú ý:

- ✓ Nếu $a = 0 \Rightarrow y = b$ là hàm số hằng, đồ thị là đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành.
- ✓ Phương trình $x = a$ cũng là một đường thẳng (nhưng không phải là một hàm số) vuông góc với trục tọa độ và cắt tại điểm có hoành độ bằng a .
- ✓ Cho đường thẳng d có hệ số góc k , d đi qua điểm $M(x_0; y_0)$, khi đó phương trình của đường thẳng d là: $y - y_0 = a(x - x_0)$.

4 CÁC DẠNG TOÁN

📁 Dạng 1. Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số bậc nhất

Phương pháp:

- ✓ Hàm số $y = ax + b$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow a > 0$.
- ✓ Hàm số $y = ax + b$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow a < 0$.
- ✓ Hàm số $y = |ax + b|$ ($a \neq 0$) đồng biến trên $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$ và nghịch biến trên $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.
- ✓ Hàm số $y = a|x| + b$ với $a > 0$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.
- ✓ Hàm số $y = a|x| + b$ với $a < 0$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

Ví dụ 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số để hàm số $y = (2 - m)x + m + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải:

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Tìm tất cả các giá trị của tham số để hàm số $y = (2m + 2)x - m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải:

.....

.....

Dạng 2. Xác định hàm số bậc nhất

- ✓ Viết phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm A và B , ($x_A \neq x_B$).
 -  Phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b$ (1).
 -  Thế tọa độ A và B vào (1), được hệ phương trình hai ẩn a và b .
 -  Giải hệ phương trình này, tìm được a và b .
- ✓ Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A và song song với $\Delta: y = a'x + b'$.
 -  Phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b$, ($b \neq b'$) (1).
 -  Vì $A \in d$ nên thế tọa độ A vào (1) được phương trình (*).
 -  Vì $d \parallel \Delta$ nên $a = a'$ (**).
 -  Giải hệ (*) và (**) ta tìm được a và b .
- ✓ Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với $\Delta: y = a'x + b'$.
 -  Phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b$ (1).
 -  Vì $A \in d$ nên thế tọa độ A vào (1) được phương trình (*).
 -  Vì $d \perp \Delta$ nên $a \cdot a' = -1$ (**).
 -  Giải hệ (*) và (**) ta tìm được a và b .

 **Ví dụ 1.** Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2; 1)$, $B(1; -2)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m + 2)x - 7m - 1$ vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = 2x - 1$.

Lời giải:

.....

.....

.....

📁 Dạng 3. Vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$

Phương pháp:

- ☑ Cho $x = 0 \Rightarrow y = a \cdot 0 + b = b \Rightarrow A(0; b)$.
- ☑ Cho $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \Rightarrow B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.
- ☑ Đồ thị hàm số $y = ax + b$ là đường thẳng đi qua A, B .

 **Ví dụ 1.** Vẽ đồ thị của hàm số $y = x - 2$.

Lời giải:

📁 Dạng 4. Tương giao của hai đường thẳng $y = ax + b(d_1)$ và $y = a'x + b'(d_2)$

- ☑ $a \neq a' \Leftrightarrow d_1 \cap d_2 = I$. Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases}$$
- ☑ $d \perp d' \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$.
- ☑ $\begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases} \Leftrightarrow d \parallel d'$.
- ☑ $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \Leftrightarrow d \equiv d'$.

 **Ví dụ 1.** Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) đi qua điểm $A(-3; 2)$ và song song với $(\Delta): y = -x + 2$.

Lời giải:

 **Ví dụ 2.** Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) đi qua điểm $M(2; 5)$ và vuông góc với $(\Delta): y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN**🔥 Câu 1.** Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $y = 2x - 3$

c) $y = x + 2$

e) $y = x + 3$

b) $y = -x - 3$

d) $y = 2x - 5$

f) $y = 3x - 7$

.....

.....

.....

.....

🔥 Câu 2. Cho hàm số bậc nhất có đồ thị là đường thẳng d . Tìm hàm số đó biết:

a) d đi qua $A(1;1), B(3;-2)$.

b) d đi qua $A(3;0), B(-2;2)$.

c) d đi qua $C(2;-2)$ và song song với $\Delta: x - y + 1 = 0$.

d) d đi qua $D(1;3)$ và song song với $\Delta: 2x - y + 5 = 0$.

e) d đi qua $N(1;-1)$ và $d \perp d'$ với $d': y = -x + 3$.

f) d đi qua $M(2;0)$ và $d \perp d'$ với $d': y = x + 3$.

.....

.....

.....

.....

🔥 Câu 3. Cho đường thẳng $(d_1): y = x + 2$ và đường thẳng $(d_2): y = (2m^2 - m)x + m^2 + m$.

a) Tìm m để $(d_1) \parallel (d_2)$.

b) Gọi A là điểm thuộc đường thẳng (d_1) có hoành độ $x = 2$. Viết phương trình đường thẳng (d_3) đi qua A vuông góc với (d_1) .

.....

.....

.....

.....

TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Hàm số nào sau đây không phải là hàm số bậc nhất?

- A. $y = 1 - x$. B. $y = \frac{x}{2}$. C. $y = \frac{2}{x}$. D. $y = x + 2$.

🔥 **Câu 2.** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất?

- A. $y = \frac{1}{x+2}$. B. $y = \sqrt{7}x + 1$. C. $y = \frac{mx+1}{x}$. D. $y = \sqrt{2x+m+1}$.

🔥 **Câu 3.** Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = 3$. B. $y = \frac{2}{x} + 4$. C. $y = -x + 5$. D. $y = \frac{1}{2}x + 3$.

🔥 **Câu 4.** Cho hàm số $y = 2x + 1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Tập xác định của hàm số trên là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$. D. Đồ thị hàm số trên đi qua điểm $(0; 1)$.

🔥 **Câu 5.** Đồ thị hàm số $y = 3x + 2$ cắt trục tung tại điểm

- A. $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$. B. $(0; 3)$. C. $(0; 2)$. D. $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$.

🔥 **Câu 6.** Đường thẳng $(d): y = 2x + 1$ vuông góc với đường thẳng

- A.** $y = -2x + 9$. **B.** $y = -\frac{1}{2}x + 3$. **C.** $y = \frac{1}{2}x + 4$. **D.** $y = 2x - 4$.

🔥 **Câu 7.** Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ và $y = 3x + 2$ là

- A.** $(-3; 7)$. **B.** $(3; 11)$. **C.** $(3; 5)$. **D.** $(-3; -7)$.

🔥 **Câu 8.** Giá trị của hàm số $y = 4x + 1$ tại $x = 1$ là

- A.** 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

🔥 **Câu 9.** Hàm số nào sau đây đi qua hai điểm $A(1; 2)$ và $B(0; -1)$?

- A.** $y = x + 1$. **B.** $y = x - 1$. **C.** $y = 3x - 1$. **D.** $y = -3x - 1$.

A. d_1 và d_2 trùng nhau.

B. d_1 và d_2 cắt nhau.

D. d_1 và d_2 vuông góc với nhau.

A. $m = 1$.

B. $m > 1$.

C. $m < 1$.

D. $m \neq 1$.

A. $m = 1$.

B. $m > 1$.

C. $m < 1$.

D. $m \neq 1$.

A. -1 .

B. 1.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

A. $m = 2$.

B. $m < 2$.

C. $m > 2$.

D. $m > -2$.

Câu 15. Giá trị nào của k thì hàm số $y = (k - 1)x + k - 2$ nghịch biến trên tập xác định của hàm số.

- A. $k < 1$. B. $k > 1$. C. $k < 2$. D. $k > 2$.

Câu 16. Cho hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến khi $a > 0$. B. Hàm số đồng biến khi $a < 0$.
C. Hàm số đồng biến khi $x > -\frac{b}{a}$. D. Hàm số đồng biến khi $x < -\frac{b}{a}$.

Câu 17. Với giá trị nào của a và b thì đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua các điểm $A(-2; 1)$, $B(1; 2)$

- A. $a = -2$ và $b = -1$. B. $a = 2$ và $b = 1$. C. $a = 1$ và $b = 1$. D. $a = -1$ và $b = -1$.

Câu 18. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1; 2)$ và $B(3; 1)$ là:

- A. $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$. B. $y = \frac{-x}{4} + \frac{7}{4}$. C. $y = \frac{3x}{2} + \frac{7}{2}$. D. $y = -\frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$.

🔥 **Câu 19.** Đồ thị hàm số $y = ax + b$ cắt trục hoành tại điểm $x = 3$ và đi qua điểm $M(-2; 4)$ với các giá trị a, b là

- A. $a = \frac{1}{2}; b = 3.$ B. $a = -\frac{1}{2}; b = 3.$ C. $a = -\frac{1}{2}; b = -3.$ D. $a = \frac{1}{2}; b = -3.$

🔥 **Câu 20.** Cho hai đường thẳng $d_1: y = \frac{1}{2}x + 100$ và $d_2: y = -\frac{1}{2}x + 100$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. d_1 và d_2 trùng nhau. B. d_1 và d_2 cắt nhau và không vuông góc.
C. d_1 và d_2 song song với nhau. D. d_1 và d_2 vuông góc.

🔥 **Câu 21.** Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $y = x + 2$ và $y = -\frac{3}{4}x + 3$ là

- A. $\left(\frac{4}{7}; \frac{18}{7}\right).$ B. $\left(\frac{4}{7}; -\frac{18}{7}\right).$ C. $\left(-\frac{4}{7}; \frac{18}{7}\right).$ D. $\left(-\frac{4}{7}; -\frac{18}{7}\right).$

🔥 **Câu 22.** Đường thẳng đi qua điểm $A(1;3)$ và song song với đường thẳng $(d): y = x + 1$ có phương trình là

- A. $y = x - 2.$ B. $y = -x - 2.$ C. $y = -x + 2.$ D. $y = x + 2.$

🔥 **Câu 23.** Đường thẳng đi qua $M(-1;4)$ và vuông góc với đường thẳng $(d): y = -\frac{1}{2}x + 2$ có phương trình là

A. $y = 2x + 6.$

B. $y = -2x + 6.$

C. $y = 2x - 6.$

D. $y = -2x - 6.$

🔥 Câu 24. Tìm hàm số bậc nhất đi qua điểm $A(2;1)$ và song song với đường thẳng $y = 2x + 3.$

A. $y = 2x - 3.$

B. $y = -2x - 2.$

C. $y = 2x + 4.$

D. $y = 2x + 2.$

🔥 Câu 25. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số bậc nhất có hệ số góc bằng 2 và đi qua gốc tọa độ?

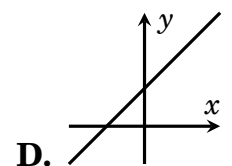
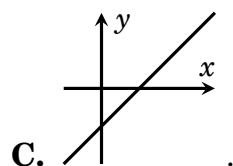
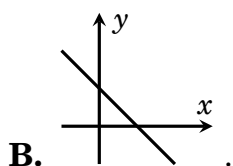
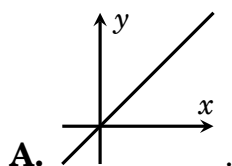
A. $M(1;2).$

B. $N(0;2).$

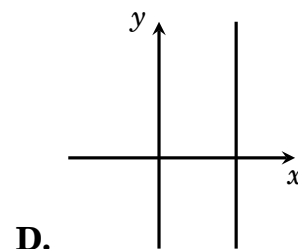
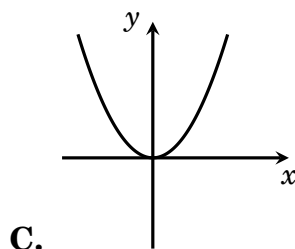
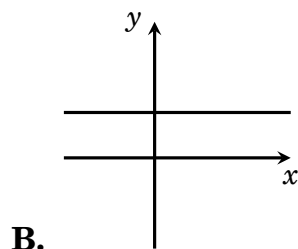
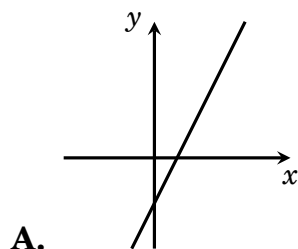
C. $P(2;0).$

D. $Q(0;2).$

🔥 Câu 26. Trong các đồ thị sau, đồ thị nào là đồ thị của hàm số $y = x - 1$?



🔥 Câu 27. Đồ thị nào sau đây là đồ thị của hàm số $y = ax + b$, với $a \neq 0$



❖ Câu 28. Cho hai hàm số $y = 2x + 2$ và $y = \frac{1}{2}x + 3$. Đồ thị của hai hàm số này sẽ

- A. vuông góc nhau. B. song song nhau. C. trùng nhau. D. cắt nhau.

❖ Câu 29. Trong các cặp hàm số sau đây, cặp hàm số nào có đồ thị là hai đường thẳng song song nhau

- A. $d_1: y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 2\sqrt{3}$ và $d_2: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6 - 2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$.
 B. $d_1: y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2\sqrt{3}$ và $d_2: y = \frac{3}{\sqrt{3}}x + \frac{6 + 2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$.
 C. $d_1: y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2\sqrt{3}$ và $d_2: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6 + 2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$.
 D. $d_1: y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 2\sqrt{3}$ và $d_2: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6 + 2\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$.

❖ Câu 30. Gọi $M(a; b)$ là điểm thuộc đồng thời cả hai đồ thị của các hàm số $y = 3x - 1$ và $y = 4 - 5x$. Khi đó, giá trị của tổng $a + b$ là

- A. -6. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $-\frac{7}{4}$.

BÀI 3. HÀM SỐ BẬC HAI

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Hàm số bậc hai là hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

2 SỰ BIẾN THIÊN

✓ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

✓ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y ($a > 0$)	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y ($a < 0$)	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

✓ Khi $a > 0$ hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, nghịch biến trên $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và có giá trị nhỏ nhất là $-\frac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

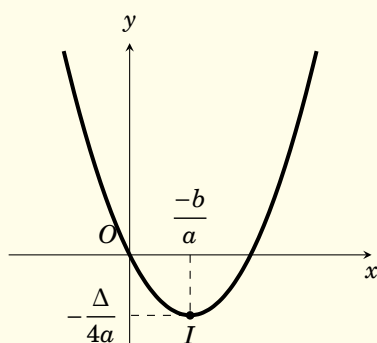
✓ Khi $a < 0$ hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ và có giá trị lớn nhất là $-\frac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

3 ĐỒ THỊ.

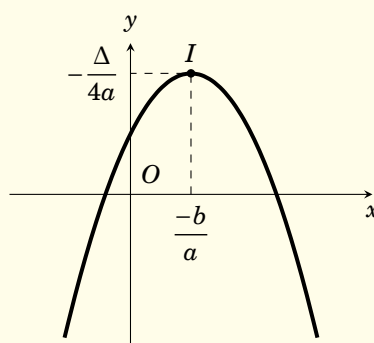
✓ Khi $a > 0$ đồ thị hàm số bậc hai bề lõm hướng lên trên và có tọa độ đỉnh là $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

✓ Khi $a < 0$ đồ thị hàm số bậc hai bề lõm hướng lên trên và có tọa độ đỉnh là $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

✓ Đồ thị nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng.



Hình 1



Hình 2

4 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Vẽ đồ thị và lập bảng biến thiên của hàm số bậc hai

- ✓ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- ✓ Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.
- ✓ Bảng biến thiên.
- ✓ Lập bảng giá trị (5 điểm).
- ✓ Xác định "chiều quay" của parabol và vẽ đường cong qua 5 điểm trên hệ trục.

 **Ví dụ 1.** Vẽ đồ thị các hàm số sau đây

① $y = x^2 - 4x + 1$.

② $y = -x^2 - 2x + 3$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. Xác định tọa độ giao điểm của parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ với đường thẳng $d: y = mx + n$

Phương pháp giải.

- ✓ Lập phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 + bx + c = mx + n$.
- ✓ Giải phương trình, tìm nghiệm x_0 .
- ✓ Thay các nghiệm x_0 vào một trong hai hàm số ban đầu, tính y_0 .
- ✓ Kết luận giao điểm $(x_0; y_0)$.

 **Ví dụ 1.** Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số sau:

① $y = x^2 + 2x - 3$ và $y = 2x + 1$.

② $y = -x^2 - 4x + 1$ và $y = -x + 3$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 3. Xác định (P): $y = ax^2 + bx + c$ khi biết các yếu tố liên quan

Phương pháp giải.

- ☑ Nếu đề cho (P) qua điểm $(x_0; y_0)$ thì ta thay x_0, y_0 vào hàm số.
- ☑ Nếu đề cho hoành độ đỉnh (hoặc trục đối xứng) $x = x_0$ ta được $-\frac{b}{2a} = x_0$.
- ☑ Nếu đề cho tung độ đỉnh $y = y_0$ ta được $-\frac{\Delta}{4a} = y_0$.
- ☑ Nếu đề cho tọa độ đỉnh $I(x_0; y_0)$ thì ta được
 - ✍ Hoành độ đỉnh $-\frac{b}{2a} = x_0$.
 - ✍ $(x_0; y_0) \in (P)$ nên $ax_0^2 + bx_0 + c = y_0$.
 - ✍ Giải phương trình ẩn số a, b, c .

 **Ví dụ 1.** Xác định phương trình của (P): $y = -2x^2 + bx + c$, biết (P)

- ① đi qua hai điểm $M(0; -2)$ và $N(2; 0)$.
- ② có đỉnh $I(1; 3)$.
- ③ đi qua điểm $A(2; -3)$ và có hoành độ đỉnh $x_0 = 3$.
- ④ có trục đối xứng là $x = 2$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

 **Câu 1.** Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau

- | | | | |
|------------------------|-------------------------|--------------------|--------------------|
| ① $y = x^2 - 3x + 2$. | ③ $y = -x^2 - 2x + 3$. | ⑤ $y = 2x^2$. | ⑦ $y = -x^2 - 2$. |
| ② $y = -2x^2 + 4x$. | ④ $y = x^2 - 6x + 8$. | ⑥ $y = x^2 - 4x$. | ⑧ $y = x^2 + 1$. |

.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 2. Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số sau:

① $y = 3x - 2$ và $y = 9x^2 - 3x - 1$.

③ $y = 3x$ và $y = x^2 - x + 5$.

② $y = -2x^2 - 3x + 2$ và $y = 2$.

④ $y = x^2 - 4$ và $y = 4 - x^2$.

Câu 3. Xác định phương trình Parabol có dạng

① $y = ax^2 + bx + 2$ qua $A(1;0)$ và trục đối xứng $x = \frac{3}{2}$.

② $y = ax^2 + bx + 3$ qua $A(-1;9)$ và trục đối xứng $x = -2$.

Câu 4. Tìm Parabol $y = ax^2 + 3x - 2$, biết rằng Parabol đó

① Qua điểm $A(1;5)$.

② Cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 2.

③ Có đỉnh $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{4}\right)$.

④ Có trục đối xứng $x = -3$.

Câu 5. Xác định parabol $P : y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng P đi qua điểm $M(1;5)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{1}{4}$.

Câu 6. Xác định parabol $P : y = ax^2 + 2x + c$, biết rằng $I\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)$ là đỉnh của P .

🔥 **Câu 7.** Tìm parabol $P: y = ax^2 + bx + c$, biết rằng P đi qua ba điểm $A(1; -1)$, $B(2; 3)$, $C(-1; -3)$.

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Hàm số $y = x^2$ đồng biến trên khoảng

A. $(0; +\infty)$.

B. $(-\infty; 0)$.

C. $(-\infty; +\infty)$.

D. $(-1; 1)$.

🔥 **Câu 2.** Hàm số $y = -x^2 + 4x + 5$ nghịch biến trên khoảng

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(-\infty; +\infty)$.

D. $(2; +\infty)$.

🔥 **Câu 3.**

Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình vẽ bên?

A. $y = -x^2 - 4x - 9$.

B. $y = x^2 + 4x - 5$.

C. $y = x^2 + 4x - 1$.

D. $y = x^2 + 2x - 5$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$+\infty$	-5	$+\infty$

🔥 **Câu 4.** Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$?

- A. $y = x^2 - 6x + 5$. B. $y = x^2 - 4x + 1$. C. $y = -x^2 - 2x + 3$. D. $y = -x^2 + 8x - 3$.

🔥 **Câu 5.** Cho hàm số $y = 2x^2 - 2x + 3$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$. D. Đồ thị hàm số có tọa độ đỉnh là $I(1; 3)$.

🔥 **Câu 6.** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai?

- A. $y = 2x - 1$. B. $y = |x|$. C. $y = 2 - x^2$. D. $y = \sqrt{2x^2 + x + 5}$.

🔥 **Câu 7.** Trong các hàm số sau, hàm số nào xác định trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \sqrt{x}$. B. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$. C. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$. D. $y = -2x^2 + 3x - 1$.

🔥 **Câu 8.** Parabol $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua hai điểm $M(1; 5)$ và $N(-2; 8)$ có phương trình là:

- A. $y = x^2 + x + 2$. B. $y = x^2 + 2x + 2$. C. $y = 2x^2 + x + 2$. D. $y = 2x^2 + 2x + 2$.

❖ **Câu 9.** Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(8;0)$ và có đỉnh $A(6;-12)$ có phương trình là:

- A.** $y = x^2 - 12x + 96$. **B.** $y = 2x^2 - 24x + 96$. **C.** $y = 2x^2 - 36x + 96$. **D.** $y = 3x^2 - 36x + 96$.

❖ **Câu 10.** Hàm số $y = 2x^2 + 4x - 1$. Khi đó:

- A.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên $(-2; +\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên $(-2; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

❖ **Câu 11.** Đỉnh của parabol $y = \frac{2(x+2)^2 + 9}{-3}$ là điểm nào sau đây?

- A.** $I(-2;9)$. **B.** $I(2;9)$. **C.** $I(-2;3)$. **D.** $I(-2;-3)$.

❖ **Câu 12.**

Bảng biến thiên ở hình bên của hàm số nào trong các hàm số sau?

- A.** $y = x^2 + 4x + 5$.
B. $y = -x^2 - 4x - 3$.
C. $y = x^2 - 4x - 11$.
D. $y = -x^2 - 4x + 1$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	$-\infty$

🔥 **Câu 13.** Hãy lập bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 + 2x + 3$.

A.

x	$+\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	6	$+\infty$

C.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	6	$-\infty$

B.

x	$+\infty$	-1	$+\infty$
y	$+\infty$	2	$+\infty$

D.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$-\infty$	2	$-\infty$

🔥 **Câu 14.** Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.
- B.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.
- C.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\Delta}{4a}; +\infty\right)$.
- D.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\Delta}{4a}; +\infty\right)$.

🔥 **Câu 15.** Xác định parabol $(P): y = x^2 + ax - b$, biết đỉnh của nó là $I(-1; -2)$.

A. $(P): y = x^2 + 2x - 1$.

B. $(P): y = x^2 + 2x + 1$.

C. $(P): y = x^2 - 2x - 1$.

D. $(P): y = -x^2 - 2x - 1$.

❖ **Câu 16.** Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + 1$, biết đỉnh của nó là $I(2; -3)$.

A. $(P): y = x^2 - 4x + 1.$

B. $(P): y = x^2 + 4x + 1.$

C. $(P): y = -x^2 + 4x + 1.$

D. $(P): y = x^2 + 2x + 1.$

❖ **Câu 17.** Đường thẳng $2x + 1 = 0$ là trục đối xứng của parabol (P) nào sau đây?

A. $(P): y = 3x^2 + x - 1.$

B. $(P): y = 2x^2 + x - 1.$

C. $(P): y = x^2 + x - 1.$

D. $(P): y = -x^2 + x - 1.$

❖ **Câu 18.** Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, biết đỉnh của nó là $I(-1; 1)$ và cắt trục hoành tại điểm $M(0; 2)$.

A. $(P): y = -x^2 + 2x - 1.$

B. $(P): y = x^2 - 2x + 2.$

C. $(P): y = -x^2 - 2x + 2.$

D. $(P): y = x^2 + 2x + 2.$

❖ **Câu 19.** Xác định tọa độ đỉnh I và trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 4$.

A. $I\left(-\frac{5}{2}; -\frac{9}{4}\right), x = -\frac{5}{2}.$ **B.** $I\left(\frac{5}{2}; -\frac{9}{4}\right), x = -\frac{5}{2}.$ **C.** $I\left(-\frac{5}{2}; -\frac{9}{4}\right), x = \frac{5}{2}.$ **D.** $I\left(\frac{5}{2}; -\frac{9}{4}\right), x = \frac{5}{2}.$

Câu 20. Đồ thị của hàm số nào sau đây nhận trục tung làm trục đối xứng?

A. $y = x^2 - 3x + 2.$

B. $y = 2x^2 + 4.$

C. $y = 3x^2 + 2x.$

D. $y = 4x^2 - x + 1.$

Câu 21. Tìm tọa độ tất cả các giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x^2 + 3x + 2$ và $y = 4x + 3.$

A. $\left(-\frac{1}{2}; 1\right), (1; 7).$

B. $\left(-\frac{1}{2}; 1\right), (-1; -1).$

C. $\left(\frac{1}{2}; 5\right), (1; 7).$

D. $\left(-\frac{1}{2}; -5\right), (1; 1).$

Câu 22. Tìm tọa độ tất cả các giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 3$ và $y = 2x^2 + x + 3.$

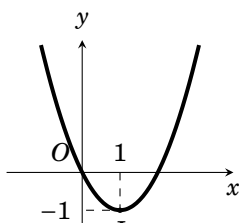
A. $(0; 3), (-6; -15).$

B. $(-6; 69).$

C. $(0; 3), (-6; 69).$

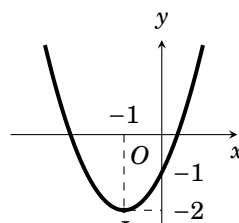
D. $(0; 3), (6; 9).$

Câu 23. Trong các đường parabol dưới đây, đường nào là đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x - 1$?



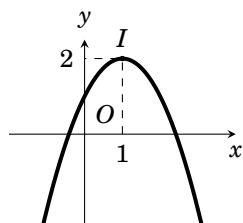
A.

Hình 1

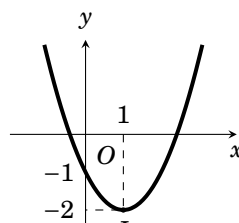


B.

Hình 2



C. Hình 3

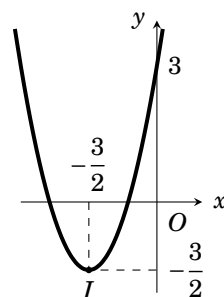


D. Hình 4

❖ Câu 24.

Đường parabol ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = 2x^2 - 6x + 3$.
- B. $y = -2x^2 - 6x + 3$.
- C. $y = 2x^2 + 6x + 3$.
- D. $y = -2x^2 + 6x + 3$.



❖ Câu 25. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 6x + 8$.

- A. -1.
- B. 1.
- C. 8.
- D. 9.

❖ Câu 26. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 1 - 4x - x^2$.

- A. 1.
- B. 5.
- C. -5.
- D. 4.

🔥 **Câu 27.** Hàm số $y = x - x^2$ đạt giá trị lớn nhất tại giá trị nào của x ?

A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = \frac{1}{4}$.

C. $x = -\frac{1}{2}$.

D. $x = -\frac{1}{4}$.

🔥 **Câu 28.**

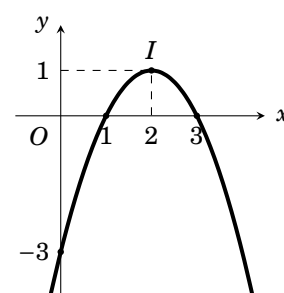
Đường parabol ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$.
Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $y \leq 0, \forall x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

B. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1.

C. $y > 0, \forall x \in (1; 3)$.

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 2$.



🔥 **Câu 29.** Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của hàm số $y = \frac{2}{6x - 5 - 9x^2}$.

A. $y_{\min} = -\frac{1}{4}$.

B. $y_{\min} = \frac{1}{2}$.

C. $y_{\min} = -\frac{1}{2}$.

D. $y_{\min} = \frac{1}{4}$.

🔥 **Câu 30.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x - 1)^2 + (x - 3)^2$.

A. 0.

B. 2.

C. 10.

D. 4.

CHƯƠNG 3

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA PHƯƠNG TRÌNH

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là $\mathcal{D}_f$ và $\mathcal{D}_g$. Đặt $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Mệnh đề chứa biến " $f(x) = g(x)$ " được gọi là **phương trình một ẩn**.

- ① x được gọi là **ẩn số** (hay **ẩn**) và $\mathcal{D}$ gọi là tập xác định của phương trình.
- ② $x_0 \in \mathcal{D}$ gọi là một nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ nếu " $f(x_0) = g(x_0)$ " là mệnh đề đúng.

! Chú ý: Các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là các hoành độ giao điểm đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

2 PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG, PHƯƠNG TRÌNH HỆ QUẢ.

- ① **Phương trình tương đương:** Hai phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ và $f_2(x) = g_2(x)$ được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.
 - ☑ Kí hiệu là $f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$.
 - ☑ Phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình gọi là phép biến đổi tương đương.
- ② **Phương trình hệ quả:** $f_2(x) = g_2(x)$ gọi là phương trình hệ quả của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ nếu tập nghiệm của nó chứa tập nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$.
 - ☑ Kí hiệu là $f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)$.
 - ☑ Phương trình hệ quả có thể có thêm nghiệm không phải là nghiệm của phương trình ban đầu. Ta gọi đó là **nghiệm ngoại lai**.

Một số dạng thường gặp:

- ① Phương trình tương đương.
 - ☑ $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}$
 - ☑ $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x).h(x) = g(x).h(x)$ nếu $h(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathcal{D}$
- ② Phương trình hệ quả

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f^2(x) = g^2(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}$$

Khi giải phương trình ta cần chú ý:

- ☑ Đặt điều kiện xác định (đkxđ) của phương trình và khi tìm được nghiệm của phương trình phải đối chiếu với điều kiện xác định.
- ☑ Nếu hai vế của phương trình luôn cùng dấu thì bình phương hai vế của nó ta thu được phương trình tương đương.
- ☑ Khi biến đổi phương trình thu được phương trình hệ quả thì khi tìm được nghiệm của phương trình hệ quả phải thử lại phương trình ban đầu để loại bỏ nghiệm ngoại lai.

3 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình

Điều kiện xác định của phương trình (gọi tắt là điều kiện của phương trình) là những điều kiện cần của ẩn x để các biểu thức trong phương trình đều có nghĩa.

Các dạng thường gặp:

✎ $\sqrt{f(x)}$ xác định khi $f(x) \geq 0$.

✎ $\frac{1}{f(x)}$ xác định khi $f(x) \neq 0$.

✎ $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ xác định khi $f(x) > 0$.

 **Ví dụ 1.** Tìm điều kiện xác định của phương trình sau:

① $x + \frac{5}{x^2 - 4} = 1.$

② $1 + \sqrt{3 - x} = \sqrt{x - 2}.$

③ $1 + \sqrt{2x - 3} = \sqrt{3x - 2}.$

④ $\sqrt{4 - 2x} = \frac{x + 1}{x^3 - 3x + 2}.$

⑤ $\frac{5}{x^2 - x - 1} = \sqrt[3]{x}$

⑥ $1 + \sqrt{x - 2} = \sqrt{x - 1}$

⑦ $1 + \sqrt{2x - 4} = \sqrt{2 - 4x}$

⑧ $\sqrt{2x - 6} = \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

⑨ $4x + \sqrt{4x - 3} = 2\sqrt{3 - 4x} + 3.$

⑩ $\sqrt{-x^2 + 6x - 9} + x^3 = 27$

⑪ $\sqrt{x} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{-3 - x}.$

⑫ $\sqrt{(x - 3)^2(5 - 3x)} + 2x = \sqrt{3x - 5} + 4$

Lời giải:

Dạng 2. Phương trình tương đương, phương trình hệ quả

① Phương trình tương đương.

$$\text{✎ } f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}$$

$$\text{✎ } f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x).h(x) = g(x).h(x) \text{ nếu } h(x) \neq 0 \text{ với mọi } x \in \mathcal{D}$$

② Phương trình hệ quả

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f^2(x) = g^2(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}$$

 **Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau

① $1 + \frac{1}{2-x} = \frac{6}{4-x^2}.$

② $1 + \frac{1}{x-4} = \frac{10}{x+5} - \frac{24}{(4-x)(x+5)}$

③ $2x + \frac{3}{x-2} = \frac{3x}{x-2}$

④ $\frac{2x}{\sqrt{3-x}} = \frac{1}{\sqrt{3-x}} - \sqrt{3-x}.$

⑤ $\sqrt{x+1}(x^2-16) = 0.$

⑥ $\frac{\sqrt{3-x}}{x^2-2x-3} = 0.$

⑦ $\sqrt{x-2} = \sqrt{x^2-8}.$

⑧ $\sqrt{3x^2-x-9} = x-1.$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Xác định m để các cặp phương trình sau đây tương đương với nhau?

① $2x-3=0$ và $\frac{2mx}{x-2} + 2m+1=0.$

② $x^2-4=0$ và $3x^2+(m+3)x+7m+9=0.$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN**🔥 Câu 1.** Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình và giải phương trình đó:

① $3x + \frac{5}{x-4} = 12 + \frac{5}{x-4}.$

② $5x + \frac{1}{x+3} = 15 + \frac{1}{x+3}.$

③ $x^2 - \frac{1}{x-1} = 9 - \frac{1}{x-1}.$

④ $3x + \frac{2}{x-5} = 15 + \frac{2}{x-5}.$

⑤ $2x + \frac{3}{x-1} = \frac{3x}{x-1}.$

⑥ $x + \frac{1}{x-2} = \frac{2x-3}{x-2}.$

🔥 Câu 2. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình và giải phương trình đó:

① $1 + \sqrt{1-x} = \sqrt{x-2}.$

② $\sqrt{x+1} = \sqrt{2-x}.$

③ $\sqrt{x+1} = x+1.$

④ $\sqrt{x-1} = 1-x.$

⑤ $\frac{x}{\sqrt{x-1}} = \frac{3}{\sqrt{x-1}}.$

⑥ $x^2 - \sqrt{1-x} = \sqrt{x-2} + 3.$

🔥 Câu 3. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình và giải phương trình đó:

① $\sqrt{x-3}(x^2 - 3x + 2) = 0.$

② $\sqrt{x+1}(x^2 - x - 2) = 0.$

③ $\frac{x}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-2}.$

④ $\frac{x^2-4}{\sqrt{x+1}} = \frac{x+3}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}.$

⑤ $(x^2 + x - 2)\sqrt{x+3} = 0.$

⑥ $\frac{x}{2\sqrt{x-3}} = \frac{2}{\sqrt{x-3}}.$

🔥 Câu 4. Tìm m để cặp phương trình sau tương đương

① $3x + 2 = 0$ và $(m+3)x - m + 4 = 0$

② $x + 2 = 0$ và $m(x^2 + 3x + 2) + m^2x + 2 = 0$

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình $x + \frac{5}{x^2 - 4} = 1$

- A. $x \neq 0$. B. $x \neq \pm 2$. C. $x \neq -2$. D. $x \neq 2$.

Câu 2. Tìm điều kiện xác định của phương trình $1 + \sqrt{3 - x} = \sqrt{x - 2}$

- A. $2 < x < 3$. B. $2 \leq x \leq 3$. C. $x \leq 3$. D. $x \geq 2$.

Câu 3. Tìm điều kiện xác định của phương trình $1 + \sqrt{2x - 3} = \sqrt{3x - 2}$

- A. $x < \frac{3}{2}$. B. $x \geq \frac{3}{4}$. C. $x \geq \frac{3}{2}$. D. $x \geq \frac{5}{2}$.

Câu 4. Tìm điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{4 - 2x} = \frac{x + 1}{x^3 - 3x + 2}$

- A. $\begin{cases} x < 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x < 4 \\ x \neq 1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x < 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x < 3 \\ x \neq 1 \end{cases}$

🔥 **Câu 5.** Tìm điều kiện xác định của phương trình $\frac{5}{x^2-x-1} = \sqrt[3]{x}$

A. $x \geq 2$.

B. $x \in \emptyset$.

C. $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 1. \\ x \neq 2 \end{cases}$

D. $x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

🔥 **Câu 6.** Tìm điều kiện xác định của phương trình $1 + \sqrt{x-2} = \sqrt{x-1}$

A. $x \geq 2$.

B. $x \in \emptyset$.

C. $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 1. \\ x \neq 2 \end{cases}$

D. $x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

🔥 **Câu 7.** Tìm điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{2x-6} = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

A. $x \geq 2$.

B. $x \in \emptyset$.

C. $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 1. \\ x \neq 2 \end{cases}$

D. $x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

🔥 **Câu 8.** Điều kiện của phương trình $x+2 - \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{4-3x}}{x+1}$ là:

A. $x > -2$ và $x \neq -1$.

B. $x > -2$ và $x < \frac{4}{3}$.

C. $x > -2, x \neq -1$ và $x \leq \frac{4}{3}$.

D. $x \neq -2$ và $x \neq -1$.

🔥 **Câu 9.** Điều kiện xác định của phương trình $x + \frac{1}{\sqrt{2x+4}} = \frac{\sqrt{3-2x}}{x}$ là:

A. $x > -2$ và $x \neq 0$.

B. $x > -2, x \neq 0$ và $x \leq \frac{3}{2}$.

C. $x > -2$ và $x < \frac{3}{2}$.

D. Đáp án khác.

🔥 **Câu 10.** Tìm số nghiệm của các phương trình $1 + \frac{1}{2-x} = \frac{6}{4-x^2}$

A. 1 nghiệm.

B. 2 nghiệm.

C. 3 nghiệm.

D. Vô nghiệm.

🔥 **Câu 11.** Tìm số nghiệm của các phương trình $\frac{2x}{\sqrt{3-x}} = \frac{1}{\sqrt{3-x}} - \sqrt{3-x}$

A. 1 nghiệm.

B. 2 nghiệm.

C. 3 nghiệm.

D. Vô nghiệm.

🔥 **Câu 12.** Tìm số nghiệm của các phương trình $\sqrt{x+1}(x^2-16)=0$

A. 1 nghiệm.

B. 2 nghiệm.

C. 3 nghiệm.

D. Vô nghiệm.

🔥 **Câu 13.** Tìm số nghiệm của các phương trình $\frac{\sqrt{3-x}}{x^2-2x-3} = 0$

- A. 1 nghiệm. B. 2 nghiệm. C. 3 nghiệm. D. Vô nghiệm.

🔥 **Câu 14.** Tập xác định của phương trình $\frac{2x}{x^2+1} - 5 = \frac{3}{x^2+1}$ là:

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

🔥 **Câu 15.** Tập xác định của phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x-3}$ là:

- A. $(3; +\infty)$. B. $[2; +\infty)$. C. $[1; +\infty)$. D. $[3; +\infty)$.

🔥 **Câu 16.** Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-2} + \frac{x^2+5}{\sqrt{7-x}} = 0$ là:

- A. $x \geq 2$. B. $x < 7$. C. $2 \leq x \leq 7$. D. $2 \leq x < 7$.

🔥 **Câu 17.** Điều kiện xác định của phương trình $\frac{1}{x^2-1} = \sqrt{x+3}$ là:

- A. $(1; +\infty)$. B. $[-3; +\infty)$. C. $[-3; +\infty) \setminus \{\pm 1\}$. D. Đáp án khác.

🔥 **Câu 18.** Điều kiện của phương trình $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x^2 - 1} = 0$ là:

- A.** $x \geq 0$. **B.** $x > 0$. **C.** $x > 0$ và $x^2 - 1 \geq 0$. **D.** $x \geq 0$ và $x^2 - 1 > 0$.

🔥 **Câu 19.** Điều kiện xác định của phương trình $\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{5-2x}}{x-2}$ là:

- A.** $x \geq 1$ và $x \neq 2$. **B.** $x > 1$ và $x \neq 2$. **C.** $1 < x \leq \frac{5}{2}$ và $x \neq 2$. **D.** $1 \leq x \leq \frac{5}{2}$.

🔥 **Câu 20.** Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{2x - x^2}$ là:

- A.** $T = \{0\}$. **B.** $T = \emptyset$. **C.** $T = \{0; 2\}$. **D.** $T = \{2\}$.

🔥 **Câu 21.** Tập nghiệm của phương trình $\frac{\sqrt{x}}{x} = \sqrt{-x}$ là:

- A.** $S = \{0\}$. **B.** $S = \emptyset$. **C.** $S = \{1\}$. **D.** $S = \{-1\}$.

🔥 **Câu 22.** Hai phương trình được gọi là tương đương khi:

- A.** Có cùng dạng phương trình. **B.** Có cùng tập xác định.

C. Có cùng tập hợp nghiệm.

D. Có cùng một nghiệm.

🔥 **Câu 23.** Trong các khẳng định sau, phép biến đổi nào là tương đương:

A. $3x + \sqrt{x-2} = x^2 \Leftrightarrow 3x = x^2 - \sqrt{x-2}.$

B. $\sqrt{x-1} = 3x \Leftrightarrow x-1 = 9x^2.$

C. $3x + \sqrt{x-2} = x^2 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow 3x = x^2.$

D. Đáp án khác.

🔥 **Câu 24.** Phương trình $(x^2 + 1)(x-1)(x+1) = 0$ tương đương với phương trình:

A. $x-1=0.$

B. $x+1=0.$

C. $x^2+1=0.$

D. $(x-1)(x+1)=0.$

🔥 **Câu 25.** Phương trình $x^2 = 3x$ tương đương với phương trình:

A. $x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2}.$

B. $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3}.$

C. $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}.$

D. $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1}.$

🔥 **Câu 26.** Phương trình $(x-4)^2 = x-2$ là phương trình hệ quả của phương trình nào sau đây

A. $x-4 = x-2.$

B. $\sqrt{x-2} = x-4.$

C. $\sqrt{x-4} = \sqrt{x-2}.$

D. $\sqrt{x-4} = x-2.$

🔥 Câu 27. Cho phương trình $2x^2 - x = 0$ (1). Trong các phương trình sau đây, phương trình nào không phải là hệ quả của phương trình (1)?

- A. $2x - \frac{x}{1-x} = 0$. B. $4x^3 - x = 0$. C. $(2x^2 - x)^2 = 0$. D. $x^2 - 2x + 1 = 0$.

🔥 Câu 28. Phương trình $x^2 = 3x$ tương đương với phương trình:

- A. $x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2}$. B. $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3}$.
C. $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}$. D. $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1}$.

🔥 Câu 29. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x-2 = 1$. B. $\frac{x(x-1)}{(x-1)} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.
C. $|3x-2| = x-3 \Rightarrow 8x^2 - 4x - 5 = 0$. D. $\sqrt{x-3} = \sqrt{9-2x} \Rightarrow 3x-12 = 0$.

🔥 Câu 30. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. vô số.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

- ① **Định nghĩa:** Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình có dạng $ax + b = 0$ với a, b là số thực và $a \neq 0$.
- ② **Giải và biện luận phương trình $ax + b = 0$ (1)**
 -  Nếu $a \neq 0$: $(1) \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.
 -  Nếu $a = 0$: phương trình (1) trở thành $0x + b = 0$.
 - TH1: Với $b = 0$ phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 - TH2: Với $b \neq 0$ phương trình vô nghiệm.

2 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

- ① **Định nghĩa:** Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với a, b, c là số thực và $a \neq 0$.
- ② **Giải và biện luận phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1)**
 -  Nếu $a = 0$: trở về giải và biện luận phương trình dạng (1)
 -  Nếu $a \neq 0$: $\Delta = b^2 - 4ac$
 - TH1: $\Delta > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
 - TH2: $\Delta = 0$ phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$
 - TH3: $\Delta < 0$ phương trình vô nghiệm.

3 ĐỊNH LÝ VIET VÀ ỨNG DỤNG

- ① **Định lý Vi - ét.**
Hai số x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ khi và chỉ khi chúng thỏa mãn hệ thức $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.
- ② **Ứng dụng.**
 -  Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai
 -  Phân tích thành nhân tử: Nếu đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thì nó có thể phân tích thành nhân tử $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
 -  Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng: Nếu hai số có tổng là S và tích là P thì chúng là nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.
 -  Xét dấu của các nghiệm phương trình bậc hai:
Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (*), kí hiệu $S = -\frac{b}{a}, P = \frac{c}{a}$ khi đó
 - Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $P < 0$

- Phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
- Phương trình (*) có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

4 PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

① Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối. Phương pháp giải.

$$\begin{aligned} \checkmark \quad |f(x)| = g(x) &\xLeftrightarrow{C_1} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \xLeftrightarrow{C_2} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{cases} \\ \checkmark \quad |f(x)| = |g(x)| &\xLeftrightarrow{C_1} [f(x)]^2 = [g(x)]^2 \xLeftrightarrow{C_2} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{aligned}$$

② Phương trình chứa ẩn ở mẫu. Phương pháp giải.

- ☒ Quy đồng mẫu số (chú ý cần đặt điều kiện mẫu số khác không).
- ☒ Đặt ẩn phụ.

③ Phương trình chứa ẩn trong căn bậc hai. Phương pháp giải.

- ☒ $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = [g(x)]^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$
- ☒ $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \text{ (hay } g(x) \geq 0) \end{cases}$
- ☒ $af(x) + b\sqrt{f(x)} + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{f(x)}, t \geq 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$
- ☒ $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = h(x)$
 - Đặt $u = \sqrt{f(x)}, v = \sqrt{g(x)}$ với $u, v \geq 0$.
 - Đưa phương trình trên về hệ phương trình với hai ẩn là u và v .
- ☒ $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} + \sqrt{f(x).g(x)} = h(x)$
Đặt $t = \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}, t \geq 0$.

④ Phương trình trùng phương. Phương pháp giải.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2, t \geq 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$$

5 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải và biện luận phương trình bậc nhất $y = ax + b$

-  Nếu $a \neq 0$: $(1) \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.
-  Nếu $a = 0$: phương trình (1) trở thành $0x + b = 0$.
 - TH1: Với $b = 0$ phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 - TH2: Với $b \neq 0$ phương trình vô nghiệm.

 **Ví dụ 1.** Giải và biện luận phương trình $(m^2 - 3)x - 2m^2 = x - 4m$ theo tham số m .

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. Giải và biện luận phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$

-  Nếu $a = 0$: trở về giải và biện luận phương trình dạng (1)
-  Nếu $a \neq 0$: $\Delta = b^2 - 4ac$
 - TH1: $\Delta > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
 - TH2: $\Delta = 0$ phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$
 - TH3: $\Delta < 0$ phương trình vô nghiệm.

 **Ví dụ 1.** Giải và biện luận phương trình $(2m^2 + 5m + 2)x^2 - 4mx + 2 = 0$ theo tham số m .

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 3. Biện luận theo m có áp dụng định lí Viet

Hai số x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ khi và chỉ khi chúng thỏa mãn hệ thức $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

 **Ví dụ 1.** Cho phương trình $x^2 - 2mx - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tính theo m giá trị của các biểu thức sau:

① $A = x_1^2 + x_2^2$.

② $B = x_1^3 + x_2^3$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 4m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình

① có hai nghiệm trái dấu.

② có hai nghiệm dương phân biệt.

Dạng 4. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

$$\begin{aligned} \checkmark \quad |f(x)| = g(x) &\stackrel{C_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \stackrel{C_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{cases} \\ \checkmark \quad |f(x)| = |g(x)| &\stackrel{C_1}{\Leftrightarrow} [f(x)]^2 = [g(x)]^2 \stackrel{C_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{aligned}$$

 **Ví dụ 1.** Giải phương trình: $|2x + 1| = |x^2 - 3x - 4|$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Giải phương trình: $|3x - 2| = 3 - 2x$.

Lời giải:

.....

 Dạng 5. Phương trình chứa ẩn ở mẫu.

- ☒ Quy đồng mẫu số (chú ý cần đặt điều kiện mẫu số khác không).
- ☒ Đặt ẩn phụ.

 **Ví dụ 1.** Giải phương trình $\frac{1-6x}{x-2} + \frac{9x+4}{x+2} = \frac{x(3x-2)+1}{x^2-4}$.

Lời giải:

 Dạng 6. Phương trình chứa ẩn trong căn bậc hai

- ☒ $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = [g(x)]^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$
- ☒ $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \text{ (hay } g(x) \geq 0) \end{cases}$
- ☒ $af(x) + b\sqrt{f(x)} + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{f(x)}, t \geq 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$
- ☒ $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = h(x)$
 - Đặt $u = \sqrt{f(x)}, v = \sqrt{g(x)}$ với $u, v \geq 0$.
 - Đưa phương trình trên về hệ phương trình với hai ẩn là u và v .
- ☒ $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} + \sqrt{f(x).g(x)} = h(x)$
Đặt $t = \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}, t \geq 0$.

 **Ví dụ 1.** Giải phương trình: $\sqrt{x^2-2x-4} = \sqrt{2-x}$.

Lời giải:

 **Ví dụ 2.** Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 6x + 6} = 2x - 1$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 3.** Giải phương trình: $\sqrt{15 - x} + \sqrt{3 - x} = 6$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 7. Phương trình trùng phương.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2, t \geq 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$$

 **Ví dụ 1.** Giải phương trình $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

 **Câu 1.** Giải và biện luận phương trình sau với m là tham số.

① $(m - 1)x + 2 - m = 0$

② $m(mx - 1) = 9x + 3$

③ $(m + 1)^2x = (3m + 7)x + 2 + m$

④ $(2m - 4)x + 2 - m = 0$

⑤ $(m + 1)x = (3m^2 - 1)x + m - 1$

⑥ $(m - 3)x - 2 + m = 0$

 **Câu 2.** Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất.

① $(m^2 - m)x = 2x + m^2 - 1.$

② $m(4mx - 3m + 2) = x(m + 1).$

 **Câu 3.** Giải và biện luận phương trình sau với m là tham số.

① $2x^2 - 6x + 3m - 5 = 0$

② $x^2 - x + m = 0$

③ $x^2 - 3x + 4m = 0$

④ $(m + 1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$

⑤ $(2m^2 + 5m + 2)x^2 - 4mx + 2 = 0$

⑥ $(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m - 5 = 0$

⑦ $(m - 2)x^2 - (2m - 1)x + m + 2 = 0$

⑧ $(m + 1)x^2 - (2m + 1)x + m - 2 = 0$

 **Câu 4.** Tìm m để phương trình $mx^2 + x + m + 1 = 0$

① Có nghiệm kép.

② Có hai nghiệm phân biệt.

 **Câu 5.** Tìm m để phương trình $x^2 - 9x + m = 0$ có một nghiệm là -3 . Khi đó tìm nghiệm còn lại.

🔥 **Câu 6.** Cho phương trình $x^2 - (m + 5)x - m + 6 = 0$ (1).

- ① Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.
- ② Tìm m để phương trình (1) có một nghiệm $x = -2$. Tìm nghiệm còn lại.
- ③ Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

🔥 **Câu 7.** Tìm nghiệm của các phương trình sau

- | | |
|--|--|
| ① $ 2x + 1 = x^2 - 3x - 4 $. | ⑪ $x - \sqrt{2x - 5} = 4$. |
| ② $ 3x - 2 = 3 - 2x$. | ⑫ $\sqrt{2x + 1} = 3x + 1$. |
| ③ $ x^2 - 4x - 5 = 4x - 17$ | ⑬ $\sqrt{x^3 - x} = \sqrt{4x + 4}$. |
| ④ $ 3x - 2 = x^2 + 2x + 3$. | ⑭ $\sqrt{x^4 + 3x + 1} = \sqrt{x^4 - x^2 - 1}$. |
| ⑤ $ x^3 - 1 = x^2 - 3x + 2 $. | ⑮ $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1$. |
| ⑥ $\frac{2x + 1}{3x + 2} = \frac{x + 1}{x - 2}$. | ⑯ $2\sqrt{x + 3} = 9x^2 - x - 4$. |
| ⑦ $1 + \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{10}{x + 3} - \frac{50}{(2 - x)(x + 3)}$. | ⑰ $x^2 + \sqrt{x + 7} = 7$. |
| ⑧ $\frac{(x + 1)^2}{x + 2} = \frac{(2x - 1)^2}{x - 2}$. | ⑱ $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$. |
| ⑨ $\frac{x + 1}{x + 2} + \frac{x - 1}{x - 2} = \frac{2x + 1}{x + 1}$. | ⑲ $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. |
| ⑩ $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x}$. | ⑳ $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. |

TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Cho phương trình $ax + b = 0$. Chọn mệnh đề đúng.

- A. Nếu phương trình có nghiệm thì a khác 0.
- B. Nếu phương trình vô nghiệm thì $a = 0$.
- C. Nếu phương trình vô nghiệm thì $b = 0$.
- D. Nếu phương trình có nghiệm thì b khác 0.

 **Câu 2.** Tìm m để phương trình $(m^2 - 9)x = 3m(m - 3)$ (1) có nghiệm duy nhất

- A.** $m = 3$. **B.** $m = -3$. **C.** $m = 0$. **D.** $m \neq -3$ và $m \neq 3$.

 **Câu 3.** Phương trình $(m^2 - 4m + 3)x = m^2 - 3m + 2$ có nghiệm duy nhất khi

- A.** $m \neq 1$. **B.** $m \neq 3$. **C.** $m \neq 1$ và $m \neq 3$. **D.** $m = 1$ và $m = 3$.

 **Câu 4.** Phương trình $(m^2 - 2m)x = m^2 - 3m + 2$ có nghiệm khi

- A.** $m = 0$. **B.** $m = 2$. **C.** $m \neq 0$ và $m \neq 2$. **D.** $m \neq 0$.

 **Câu 5.** Phương trình $m^2x + 6 = 4x + 3m$. Phương trình có nghiệm khi

- A.** $m \neq 2$. **B.** $m \neq -2$. **C.** $m \neq 2$ và $m \neq -2$. **D.** $\forall m$.

 **Câu 6.** Phương trình $ax + b = 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

- A.** $a \neq 0$. **B.** $a = 0$. **C.** $b = 0$. **D.** $a = 0$ và $b = 0$.

🔥 **Câu 7.** Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

A. $a = 0$.

B. $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.

C. $a = b = 0$.

D. $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$.

🔥 **Câu 8.** Phương trình $x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$

A. Có 2 nghiệm trái dấu.

B. Có 2 nghiệm âm phân biệt.

C. Có 2 nghiệm dương phân biệt.

D. Vô nghiệm.

🔥 **Câu 9.** Phương trình $x^2 + m = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m > 0$.

B. $m < 0$.

C. $m \leq 0$.

D. $m \geq 0$.

🔥 **Câu 10.** Phương trình $(m - 1)x^2 + 3x - 1 = 0$. Phương trình có nghiệm khi

A. $m \geq -\frac{5}{4}$.

B. $m \leq -\frac{5}{4}$.

C. $m = -\frac{5}{4}$.

D. $m = \frac{5}{4}$.

🔥 Câu 11. Với giá trị nào của m thì phương trình: $mx^2 + 2(m-2)x + m - 3 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt?

- A.** $m \leq 4$. **B.** $m < 4$. **C.** $m < 4$ và $m \neq 0$. **D.** $m \neq 0$.

🔥 Câu 12. Cho phương trình: $mx^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi tham số m thỏa điều kiện:

- A.** $m < -\frac{4}{5}$ và $m \neq 0$. **B.** $m \neq 0$. **C.** $m < -\frac{4}{5}$. **D.** $m > -\frac{4}{5}$ và $m \neq 0$.

🔥 Câu 13. Cho phương trình $(m+1)x^2 - 6(m+1)x + 2m + 3 = 0$ (1). Với giá trị nào sau đây của m thì phương trình (1) có nghiệm kép?

- A.** $m = \frac{7}{6}$. **B.** $m = -\frac{6}{7}$. **C.** $m = \frac{6}{7}$. **D.** $m = -1$.

🔥 Câu 14. Cho phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0$. Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm duy nhất?

- A.** $m = 1$. **B.** $m = 0$.
C. $m = 0$ và $m = -1$. **D.** $m = 0$ hoặc $m = -1$.

🔥 **Câu 15.** Phương trình $(m-2)x^2 + 2x - 1 = 0$ có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m = 0$ và $m = 2$. B. $m = 1$ hoặc $m = 2$. C. $m = -2$ và $m = 3$. D. $m = 2$.

🔥 **Câu 16.** Với giá trị nào của m thì phương trình $2(x^2 - 1) = x(mx + 1)$ có nghiệm duy nhất:

- A. $m = \frac{17}{8}$. B. $m = 2$ hoặc $m = \frac{17}{8}$.
C. $m = 2$. D. $m = 0$.

🔥 **Câu 17.** Để hai đồ thị $y = -x^2 - 2x + 3$ và $y = x^2 - m$ có hai điểm chung thì:

- A. $m = -3,5$. B. $m < -3,5$. C. $m > -3,5$. D. $m \geq -3,5$.

🔥 **Câu 18.** Nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 5 = 0$ có thể xem là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

- A. $y = x^2$ và $y = -3x + 5$. B. $y = x^2$ và $y = -3x - 5$.
C. $y = x^2$ và $y = 3x - 5$. D. $y = x^2$ và $y = 3x + 5$.

🔥 **Câu 19.** $\sqrt{2}$ và $\sqrt{3}$ là hai nghiệm của phương trình:

- A. $x^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$. B. $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$.
C. $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$. D. $x^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$.

 **Câu 20.** Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 - 3x - 1 = 0$. Ta có tổng $x_1^2 + x_2^2$ bằng
A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

 **Câu 21.** Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $2x^2 - 4x - 1 = 0$. Khi đó, giá trị của $T = |x_1 - x_2|$ là
A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 4.

 **Câu 22.** Phương trình $\frac{x-m}{x+1} = \frac{x-2}{x-1}$ có nghiệm duy nhất khi
A. $m \neq 0$. **B.** $m \neq -1$. **C.** $m \neq 0$ và $m \neq -1$. **D.** Không có m .

 **Câu 23.** Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình: $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x+m}{x+2} = m$ có đúng 1 nghiệm?
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Kết quả khác.

🔥 **Câu 24.** Tập nghiệm của phương trình: $|x - 2| = |3x - 5|$ (1) là tập hợp nào sau đây ?

- A. $\left\{\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right\}$. B. $\left\{-\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right\}$. C. $\left\{-\frac{7}{4}; -\frac{3}{2}\right\}$. D. $\left\{-\frac{7}{4}; \frac{3}{2}\right\}$.

🔥 **Câu 25.** Tập nghiệm của phương trình: $|x - 2| = 2x - 1$ là:

- A. $S = \{-1; 1\}$. B. $S = \{-1\}$. C. $S = \{1\}$. D. $S = \{0\}$.

🔥 **Câu 26.** Phương trình $-x^4 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x^2 = 0$ có:

- A. 1 nghiệm. B. 2 nghiệm. C. 3 nghiệm. D. 4 nghiệm.

🔥 **Câu 27.** Phương trình sau đây có bao nhiêu nghiệm âm: $x^4 - 2005x^2 - 13 = 0$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

🔥 **Câu 28.** Phương trình sau đây có bao nhiêu nghiệm: $x^4 + 1999x^2 + 13 = 0$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

 **Câu 29.** Phương trình $x^4 - 2020x^2 + 2019 = 0$ có bao nhiêu nghiệm:

- A. 2. B. 3. C. 4. D. Vô số.

 **Câu 30.** Số nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2 - 4x - 2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}$ là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

 **Câu 31.** Tìm m để phương trình $(m^2 + 4)x = m(m + 2)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$:

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = 0$. D. $m \neq -2$ và $m \neq 2$.

 **Câu 32.** Tập nghiệm của phương trình $2x + \frac{3}{x-1} = \frac{3x}{x-1}$ là:

- A. $S = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$. B. $S = \{1\}$. C. $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$. D. $S = \emptyset$.

 **Câu 33.** Phương trình $|ax + b| = |cx + d|$ tương đương với phương trình:

- A. $ax + b = cx + d$. B. $ax + b = -(cx + d)$.
C. $ax + b = cx + d$ hay $ax + b = -(cx + d)$. D. $\sqrt{ax + b} = \sqrt{cx + d}$.

🔥 **Câu 34.** Phương trình $|2x - 4| - 2x + 4 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

🔥 **Câu 35.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x-4}(x^2-3x+2)=0$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

🔥 **Câu 36.** Phương trình $-x^4 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x^2 = 0$ có:

- A. 1 nghiệm. B. 2 nghiệm. C. 3 nghiệm. D. 4 nghiệm.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.

Định nghĩa 1. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$$

- ☑ Trong đó x, y là hai ẩn; các chữ số còn lại là hệ số.
- ☑ Nếu cặp số $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình của hệ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình.
- ☑ Giải hệ phương trình là tìm tập nghiệm của nó.
- ☑ **Chú ý:** Để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn ta có thể dùng các cách giải đã biết như: phương pháp thế, phương pháp cộng đại số.

 **Ví dụ 1.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\textcircled{1} \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 4y = 6 \end{cases}.$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - y = 8 \end{cases}.$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} 2\sqrt{x+5} + \sqrt{y-8} = 11 \\ 5\sqrt{x+5} - 4\sqrt{y-8} = 8 \end{cases}.$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} \frac{10}{4x-y} + \frac{1}{x+y} = 1 \\ \frac{25}{4x-y} + \frac{3}{x+y} = 2 \end{cases}.$$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

2 HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN.

Định nghĩa 2. Phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là $ax + by + cz = d$. trong đó x, y, z là ba ẩn; a, b, c, d là các hệ số và a, b, c không đồng thời bằng 0. Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

- ✓ Trong đó x, y, z là ba ẩn; các chữ còn lại là các hệ số.
- ✓ Mỗi bộ ba số x_0, y_0, z_0 nghiệm đúng của ba phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình.

Nhận xét: Nguyên tắc chung để giải các hệ phương trình nhiều ẩn là khử bớt ẩn để đưa về các phương trình hay hệ phương trình có số ẩn ít hơn. Để khử bớt ẩn, ta cũng có thể dùng các phương pháp cộng đại số, phương pháp thế như đối với hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

 **Ví dụ 2.** Giải hệ phương trình

$$\textcircled{1} \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = -3 \\ 2x + 2y + z = -2 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ x - 3y + z = 5 \\ x - 5y = 1 \end{cases}$$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

 **Câu 1.** Tìm nghiệm của các hệ phương trình sau

$$\textcircled{1} \begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 2x + y = 11 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} \sqrt{2}x + 4y = -1 \\ 2x + 4\sqrt{2}y = 5 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} \sqrt{3}x - y = 1 \\ 5x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

 **Câu 2.** Tìm nghiệm của các hệ phương trình sau

$$\textcircled{1} \begin{cases} (x+3)y - 5 = xy \\ (x-2)(y+5) = xy \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} |x-y| = \sqrt{2} \\ 2x-y = -1 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} \frac{3(x+y)}{x-y} = -7 \\ \frac{5x-y}{y-x} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

.....

🔥 Câu 3. Tìm nghiệm của các hệ phương trình sau

$$\textcircled{1} \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 3 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} \frac{6}{x-2y} + \frac{2}{x+2y} = 3 \\ \frac{3}{x-2y} + \frac{4}{x+2y} = -1 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} \frac{6x-3}{y-1} - \frac{2y}{x+1} = 5 \\ \frac{4x-2}{y-1} - \frac{4y}{x+1} = 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} 2|x-6| + 3|y+1| = 5 \\ 5|x-6| - 4|y+1| = 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ x + 2y - 3z = 10 \\ -x + 3y + 2z = -16 \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \begin{cases} 2x + 5y + z = 8 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

🔥 Câu 4. Tìm nghiệm của các hệ phương trình sau

$$\textcircled{1} \begin{cases} 3x + y - 3z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ -x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ x - 3y + z = 5 \\ x - 5y = 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} x + 3y + 2z = 8 \\ 2x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 6 \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} x - 3y + 2z = -7 \\ -2x + 4y + 3z = 8 \\ 3x + y - z = 5 \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$$

$$\textcircled{7} \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{6}{z} = 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{3}{z} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{8} \begin{cases} -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = \frac{1}{6} \\ \frac{x+1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = -11 \\ \frac{2}{x} - \frac{2y+4}{y} + \frac{1}{z} = -7 \\ -\frac{3}{x} + \frac{1}{y} + \frac{-2-z}{z} = -6 \end{cases}$$

🔥 Câu 5. Một bài kiểm tra có 15 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng được cộng 5 điểm. Mỗi câu trả lời sai hoặc bỏ trống bị trừ 5 điểm. Một học sinh làm bài kiểm tra và đạt 25 điểm. Hỏi bạn đó đã trả lời đúng bao nhiêu câu?

🔥 Câu 6. Có 2 loại xe khách (loại I và loại II). Nếu chọn phương án vận chuyển hành khách bằng 2 chuyến xe loại I và 5 chuyến xe loại II thì vận chuyển được tối đa 190 hành khách (không tính tài xế). Nếu chọn phương án vận chuyển bằng 3 chuyến xe loại I và 3 chuyến xe loại II thì vận chuyển được tối đa 195 hành khách (không tính tài xế). Hỏi mỗi loại xe có thể chứa tối đa bao nhiêu hành khách (không tính tài xế)?

🔥 Câu 7. Ba bạn Vân, Anh, Khoa đi chợ mua trái cây. Bạn Anh mua 2 kí cam và 3 kí quýt hết 105 nghìn đồng, bạn Khoa mua 4 kí nho và 1 kí cam hết 215 nghìn đồng, bạn Vân mua 2 kí nho, 3 kí cam và 1 kí quýt hết 170 nghìn đồng. Hỏi giá mỗi loại cam, quýt, nho là bao nhiêu?

🔥 Câu 8. Một cửa hàng bán quần, áo và nón. Ngày thứ nhất bán được 3 cái quần, 7 cái áo và 10 cái nón, doanh thu là 1930000 đồng. Ngày thứ hai bán được 5 cái quần, 6 cái áo và 8 cái nón, doanh thu là 2310000 đồng. Ngày thứ ba bán được 11 cái quần, 9 cái áo và 3 cái nón, doanh thu là 3390000 đồng. Hỏi giá bán mỗi quần, mỗi áo, mỗi nón là bao nhiêu?

TRẮC NGHIỆM

🔥 Câu 1. Nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x - 2y - z = 7 \\ -4x + 3y - 2z = 15 \\ -x - 2y + 3z = -5 \end{cases}$$
 là:

- A. $(-10; 7; 9)$. B. $\left(\frac{3}{2}; -2; \frac{3}{2}\right)$. C. $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{9}{2}; \frac{5}{4}\right)$. D. $(-5; -7; -8)$.

 **Câu 2.** Cặp $(x; y) = (1; 2)$ là nghiệm của phương trình:

A. $3x + 2y = 7.$

B. $x - 2y = 5.$

C. $0.x + 3y = 4.$

D. $3x + 0.y = 2.$

 **Câu 3.** Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$ là:

A. $(1; -2).$

B. $\left(\frac{1}{3}; \frac{-7}{4}\right).$

C. $\left(\frac{-1}{3}; -5\right).$

D. $(-2; 1).$

 **Câu 4.** Hệ phương trình nào sau đây là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:

A. $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}.$

B. $\begin{cases} x^2 - 5y = 1 \\ x - y^2 = 0 \end{cases}.$

C. $\begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}.$

D. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y^2 = 0 \end{cases}.$

 **Câu 5.** Hệ phương trình nào sau đây là hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn:

A. $\begin{cases} x^2 + x = 1 \\ x - 2y = 0 \\ -3x + 2y - z = 3 \end{cases}.$

B. $\begin{cases} x^2 - 2y - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}.$

C. $\begin{cases} 5x^2 - x - 1 = 0 \\ 2x - 3 = 0 \end{cases}.$

D. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ -3x + 2y - z = 3 \end{cases}.$

🔥 **Câu 6.** Hệ phương trình nào sau đây là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:

A. $\begin{cases} x^2 - 3y = 1 \\ -x + y = 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} -x + 2y - 3z = 5 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x - z = 1 \\ 5x + 4z = -3 \end{cases}$

🔥 **Câu 7.** Hệ phương trình nào sau đây có duy nhất một nghiệm ?

A. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x - 2y = -6 \end{cases}$ C. $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ -6x + 2y = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 10x + 2y = -1 \end{cases}$

🔥 **Câu 8.** Hệ phương trình nào sau đây vô nghiệm ?

A. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = -6 \end{cases}$ C. $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + y = 3 \\ -x - y = -3 \end{cases}$

🔥 **Câu 9.** Hệ phương trình nào sau đây có vô số nghiệm ?

A. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = -2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

🔥 **Câu 10.** Hệ phương trình nào sau đây có nghiệm là (1; 1) ?

A. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x = -2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ y = 7 \end{cases}$

 **Câu 11.** Hệ phương trình nào sau đây có nghiệm là $(1; 1; -1)$?

A. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ 3x + y + 5z = -1 \end{cases}$
B. $\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ x - y + 3z = -1 \\ z = 0 \end{cases}$
C. $\begin{cases} x = 3 \\ x - y + z = -2 \\ x + y - 7z = 0 \end{cases}$
D. $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

 **Câu 12.** Hệ phương trình $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ -x + 5y + z = 9 \end{cases}$ có nghiệm là:

A. $(1; 2; 0)$.
B. $(-1; -2; 0)$.
C. $(0; 1; 2)$.
D. $(1; 2; 1)$.

 **Câu 13.** Hệ phương trình $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases}$ có nghiệm là:

A. $(2; 0)$.
B. $(-2; -3)$.
C. $(2; 3)$.
D. $(3; -2)$.

 **Câu 14.** Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ là

A. $(2; 1)$.
B. $(-2; 1)$.
C. $(1; 2)$.
D. $(2; -1)$.

 **Câu 15.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hệ phương trình vô nghiệm. B. Hệ phương trình vô số nghiệm.
C. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất. D. Hệ phương trình có hai nghiệm.

 **Câu 16.** Tập nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \\ x + y - 10 = 0 \end{cases}$ là

- A. $S = \left\{ \left(\frac{20}{3}; \frac{10}{3} \right) \right\}$. B. $S = \emptyset$. C. $S = \left\{ \left(\frac{10}{3}; \frac{20}{3} \right) \right\}$. D. $S = \left\{ \frac{10}{3}; \frac{20}{3} \right\}$.

 **Câu 17.** Hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 8 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

 **Câu 18.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 58 \end{cases}$. Hệ phương trình trên có nghiệm $(x; y)$ là

- A. $(3; 7)$. B. $(7; 3)$. C. $(3; 7); (7; 3)$. D. $(3; 3)$.

 **Câu 19.** Tìm độ dài hai cạnh của một tam giác vuông, biết rằng: Khi ta tăng mỗi cạnh 2cm thì diện tích tăng 17cm^2 ; khi ta giảm chiều dài cạnh này 3cm và cạnh kia 1cm thì diện tích giảm 11cm^2 . Đáp án đúng là

- A.** 5cm và 10cm . **B.** 4cm và 7cm . **C.** 2cm và 3cm . **D.** 5cm và 6cm .

 **Câu 20.** Một thửa ruộng hình chữ nhật có chu vi 250m . Tìm chiều dài và chiều rộng của thửa ruộng biết rằng khi ta giảm chiều dài 3 lần và chiều rộng tăng 2 lần thì chu vi thửa ruộng không đổi. Đáp án đúng là

- A.** 32 m và 25 m . **B.** 75 m và 50 m . **C.** 50 m và 45 m . **D.** 60 m và 40 m .

CHƯƠNG 4

BẤT ĐẲNG THỨC - BẤT PHƯƠNG TRÌNH

BÀI 1. BẤT ĐẲNG THỨC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Các mệnh đề dạng " $a < b$ ", " $a > b$ ", " $a \geq b$ ", " $a \leq b$ " được gọi là bất đẳng thức.

2 BẤT ĐẲNG THỨC HỆ QUẢ VÀ BẤT ĐẲNG THỨC TƯƠNG ĐƯƠNG

- Nếu mệnh đề " $a < b \Rightarrow c < d$ " đúng thì ta nói bất đẳng thức $c < d$ là bất đẳng thức hệ quả của bất đẳng thức $a < b$ và cũng viết là $a < b \Rightarrow c < d$.
- Nếu bất đẳng thức $a < b$ là hệ quả của bất đẳng thức $c < d$ và ngược lại thì ta nói hai bất đẳng thức tương đương với nhau và viết là $a < b \Leftrightarrow c < d$.

3 TÍNH CHẤT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

Tính chất		Tên gọi
Điều kiện	Nội dung	
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	Cộng hai vế của bất đẳng thức với một số
$c > 0$ $c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$ $a < b \Leftrightarrow ac > bc$	Nhân hai vế của bất đẳng thức với một số
	$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều
$a > 0, c > 0$	$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều
$n \in \mathbb{N}^*$ $n \in \mathbb{N}^*$ và $a > 0$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$ $a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$	Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một lũy thừa
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức

4 BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY

Định lý 1. Trung bình nhân của hai số không âm nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của chúng

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \forall a, b \geq 0$$

Đẳng thức $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$ xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Mở rộng: Nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số không âm thì

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Hệ quả 1. Tổng của một số dương với nghịch đảo của nó lớn hơn hoặc bằng 2.

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a > 0$$

5 BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI

Định lý 2. Với các số thực a, b, c, d tùy ý ta luôn có

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $ad = bc$ hay $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Mở rộng: Với hai bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ta có

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

6 BẤT ĐẲNG THỨC CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Điều kiện	Nội dung
	$ x \geq 0, x \geq x, x \geq -x$
	$ x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
$a > 0$	$ x \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ hoặc } x \geq a$
	$ a - b \leq a + b \leq a + b $

7 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh bất đẳng thức dựa vào định nghĩa và tính chất

Phương pháp giải.

Để chứng minh bất đẳng thức (BĐT) $A \geq B$ ta có thể sử dụng các cách sau:

- ☑ Ta đi chứng minh $A - B \geq 0$. Để chứng minh nó ta thường sử dụng các hằng đẳng thức để phân tích $A - B$ thành tổng hoặc tích của những biểu thức không âm.
- ☑ Xuất phát từ BĐT đúng, biến đổi tương đương về BĐT cần chứng minh.

Ví dụ 1. Cho hai số thực a, b, c . Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau

① $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

② $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Lời giải:

.....

.....

☐ Dạng 2. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy.

Phương pháp giải.

Một số chú ý khi sử dụng bất đẳng thức Cauchy:

- ① Khi áp dụng Cauchy thì các số phải là những số không âm.
- ② BĐT Cauchy thường được áp dụng khi trong BĐT cần chứng minh có tổng và tích.
- ③ Điều kiện xảy ra dấu "=" là các số bằng nhau.

Bất đẳng thức côsi còn có hình thức khác thường hay sử dụng

!

$$① x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$② x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$$

$$③ xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

 **Ví dụ 1.** Cho a, b là số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$. Chứng minh rằng

$$① \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) \geq 4.$$

$$② \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$$

Lời giải:

☐ Dạng 3. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki

Với các số thực a, b, c, d tùy ý ta luôn có

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $ad = bc$ hay $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

 **Ví dụ 1.** Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki

- ① Cho $x^2 + y^2 = 5$ tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = x + 2y$.
- ② Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{1-x} + 2\sqrt{x+1}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

🔥 **Câu 1.** Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

- ① $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. (HD: $\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$)
- ② $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ (HD: $\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$)
- ③ $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$ (HD: $\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$)
- ④ $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab+bc-ca)$ (HD: $\Leftrightarrow (a-b+c)^2 \geq 0$)

.....

.....

.....

.....

🔥 **Câu 2.** Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

- ① $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$. (HD: $a+b \geq 2\sqrt{ab}; b+c \geq 2\sqrt{bc}; c+a \geq 2\sqrt{ca}$)
- ② $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc$. (HD: $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}; a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$)
- ③ $(1+a)(1+b)(1+c) \geq \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)^3$. (HD: $(1+a)(1+b)(1+c) = 1+a+b+c+ab+bc+ca+abc$)
- ④ $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c$ với $a, b, c > 0$. (HD: $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2\sqrt{\frac{abc^2}{ab}} = 2c$)

.....

.....

.....

.....

🔥 **Câu 3.** Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh:

- ① $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$ (HD: $a > |b-c| \Rightarrow a^2 > b^2-2bc+c^2$)
- ② $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$. (HD: $a^2 > a^2 - (b-c)^2 \Rightarrow a^2 > (a+b-c)(a-b+c)$)
- ③ $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4 > 0$. (HD: $\Leftrightarrow (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0$)
- ④ $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2 > a^3+b^3+c^3$. (HD: $\Leftrightarrow (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0$)

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Áp dụng BĐT Cô-si để tìm GTNN của các biểu thức sau:

① $y = \frac{x}{2} + \frac{18}{x}; x > 0.$

② $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}; x > 1.$

Câu 5. Áp dụng BĐT Cô-si để tìm GTLN của các biểu thức sau:

① $y = (x+3)(5-x)$ với $-3 \leq x \leq 5.$

② $y = x(6-x)$ với $0 \leq x \leq 6.$

Câu 6. Biết x, y là 2 số thực dương thỏa mãn $x + 2\sqrt{2}y = 5$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^4 + y^4.$

Câu 7. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $A = \sqrt{1-2x} + 3\sqrt{1+x}.$

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho bất đẳng thức $|a-b| \leq |a| + |b|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

A. $a = b.$

B. $ab \leq 0.$

C. $ab \geq 0.$

D. $ab = 0.$

-------	-------

🔥 **Câu 2.** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^2 + 3|x|$ với $x \in \mathbb{R}$ là

- A. $-\frac{9}{4}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. 0. D. $\frac{3}{2}$.

🔥 **Câu 3.** Cho biểu thức $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Kết luận nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị lớn nhất, không có giá trị nhỏ nhất.
 B. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.
 C. Hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.
 D. Hàm số $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

🔥 **Câu 4.** Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 0, giá trị lớn nhất bằng 1.
 B. $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất bằng 1.
 C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 1, giá trị lớn nhất bằng 2.
 D. $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

🔥 **Câu 5.** Cho biết hai số a và b có tổng bằng 3. Khi đó, tích hai số a và b

- A. có giá trị nhỏ nhất là $\frac{9}{4}$. B. có giá trị lớn nhất là $\frac{9}{4}$.
 C. có giá trị lớn nhất là $\frac{3}{2}$. D. không có giá trị lớn nhất.

🔥 Câu 6. Cho ba số $a; b; c$ thỏa mãn đồng thời: $a + b - c > 0; b + c - a > 0; c + a - b > 0$. Để ba số $a; b; c$ là ba cạnh của một tam giác thì cần thêm điều kiện gì?

A. Cần có cả $a, b, c \geq 0$.

B. Cần có cả $a, b, c > 0$.

C. Chỉ cần một trong ba số a, b, c dương.

D. Không cần thêm điều kiện gì.

🔥 Câu 7. Tìm mệnh đề đúng?

A. $a < b \Rightarrow ac < bc$.

B. $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

C. $a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$.

D. $a < b \Rightarrow ac < bc, (c > 0)$.

🔥 Câu 8. Suy luận nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > bd$.

B. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

C. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d$.

D. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$.

🔥 Câu 9. Trong các tính chất sau, tính chất nào sai?

A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$.

B. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{d} < \frac{b}{c}$.

C. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$.

D. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$.

🔥 Câu 10. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d.$

B. $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow ac < bd.$

C. $\begin{cases} a \leq b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d.$

D. $ac \leq bc \Rightarrow a \leq b. (c > 0).$

🔥 Câu 11. Cho biểu thức $P = -a + \sqrt{a}$ với $a \geq 0$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{4}$.

B. Giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{4}$.

C. Giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$.

D. P đạt giá trị lớn nhất tại $a = \frac{1}{4}$.

🔥 Câu 12. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ bằng

A. $\frac{11}{4}$.

B. $\frac{4}{11}$.

C. $\frac{11}{8}$.

D. $\frac{8}{11}$.

🔥 Câu 13. Cho $f(x) = x - x^2$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{4}$.

B. $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$.

C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{4}$.

D. $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$.

🔥 **Câu 14.** Bất đẳng thức $(m+n)^2 \geq 4mn$ tương đương với bất đẳng thức nào sau đây?

A. $n(m-1)^2 - m(n-1)^2 \geq 0.$

B. $m^2 + n^2 \geq 2mn.$

C. $(m+n)^2 + m - n \geq 0.$

D. $(m-n)^2 \geq 2mn.$

🔥 **Câu 15.** Với mọi $a, b \neq 0$, ta có bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $a - b < 0.$

B. $a^2 - ab + b^2 < 0.$

C. $a^2 + ab + b^2 > 0.$

D. $a - b > 0.$

🔥 **Câu 16.** Với hai số x, y dương thoả $xy = 36$, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 12.$

B. $x + y \geq 2xy = 72.$

C. $4xy \leq x^2 + y^2.$

D. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy = 36.$

🔥 **Câu 17.** Cho hai số x, y dương thoả $x + y = 12$, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{xy} \leq 6.$

B. $xy < \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 36.$

C. $2xy < x^2 + y^2.$

D. $\sqrt{xy} \geq 6.$

🔥 **Câu 18.** Hai số a, b thỏa mãn bất đẳng thức $\frac{a^2 + b^2}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ thì

A. $a < b$.

B. $a > b$.

C. $a = b$.

D. $a \neq b$.

🔥 **Câu 19.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$ là

A. 2.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 3.

🔥 **Câu 20.** Cho hai số thực x, y không âm và thỏa mãn $x^2 + 2y^2 = 12$. Giá trị lớn nhất của $P = xy$ là

A. $\frac{13}{4}$.

B. 4.

C. 8.

D. 13.

BÀI 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Định nghĩa 1. Bất phương trình ẩn x là mệnh đề chứa biến có dạng

$$f(x) < g(x) \text{ hoặc } f(x) \leq g(x)$$

trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là những biểu thức của x .

- ✓ $f(x)$ và $g(x)$ lần lượt là vế trái, vế phải của bất phương trình.
- ✓ Số thực x_0 sao cho $f(x_0) < g(x_0)$ ($f(x_0) \leq g(x_0)$) là mệnh đề đúng được gọi là một nghiệm của bất phương trình.
- ! ✓ Giải bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó, khi tập nghiệm rỗng thì ta nói bất phương trình vô nghiệm. **Chú ý:** Bất phương trình cũng có thể viết lại dưới dạng sau: $g(x) > f(x)$ hoặc $g(x) \geq f(x)$.

2 HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Định nghĩa 2. Hệ bất phương trình ẩn x gồm một số bất phương trình ẩn x mà ta phải tìm nghiệm chung của chúng.

- ✓ Mỗi giá trị của x đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.
- ! ✓ Giải hệ bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó.
- ✓ Để giải một hệ bất phương trình ta giải từng bất phương trình rồi lấy giao của các tập nghiệm.

3 CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình

Điều kiện xác định của bất phương trình là điều kiện của ẩn số x để $f(x)$ và $g(x)$ có nghĩa.

 **Ví dụ 1.** Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $\frac{5x}{x^2+1} + \frac{3x-2}{2x-5} \leq 7 + \frac{4}{2x-5}$.

Lời giải:

.....

Ví dụ 2. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $\sqrt{2x+6} > 3 + 2\sqrt{2x+6}$.

Lời giải:

Dạng 2. Giải và biện luận bất phương trình dạng $ax + b > 0$

Bất phương trình $ax + b > 0$ (1) ($ax + b \geq 0, ax + b \leq 0, ax + b \geq 0$).

- ☑ Nếu $a = 0$ khi đó (1) $\Leftrightarrow b > 0$.
 - Nếu $b \leq 0$ thì (1) vô nghiệm.
 - Nếu $b > 0$ thì (1) có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$.
- ☑ Nếu $a > 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$.
- ☑ Nếu $a < 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$.

Ví dụ 1. Giải và biện luận bất phương trình sau.

- ① $mx + 6 \leq 2x + 3m$.
- ② $(m^2 + 9)x + 3 \geq m(1 - 6x)$.

Lời giải:

Dạng 3. Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Phương pháp giải:

- ☑ Giải từng bất phương trình trong hệ bất phương trình.
- ☑ Tìm giao tất cả các tập nghiệm của các bất phương trình trong hệ bất phương trình.
- ☑ Kết luận.

Ví dụ 1. Tìm nghiệm nguyên của hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 2x + 7 \\ 4x + 3 > 2x + 19 \end{cases}$$

Lời giải:

Dạng 4. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

$$\begin{aligned} \checkmark \quad |f(x)| < g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases} \\ \checkmark \quad |f(x)| > g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \text{ có nghĩa} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x) < -g(x) \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Chú ý: Với $B > 0$ ta có:



$$\checkmark \quad |A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$$

$$\checkmark \quad |A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} A < -B \\ A > B \end{cases}$$

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau

① $|5x + 3| > 7$.

② $|2x - 3| < x + 1$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

Câu 1. Giải các bất phương trình sau:

① $3(x - 1) + 2 > 2x + 3$.

② $x^2 - 3x + 4 \leq x^2 - 2$.

③ $4x + 3 < 2x - 1$.

④ $3x^2 - 10x + 8 \geq 3x(x + 1)$.

⑤ $2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4}$.

⑥ $3 - \frac{2x+1}{5} > x + \frac{3}{4}$.

⑦ $\frac{5(x-1)}{6} - 1 < \frac{2(x+1)}{3}$.

⑧ $3 - \frac{2x+1}{5} > x + \frac{3}{4}$

⑨ $2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4}$.

⑩ $-2x + \frac{3}{5} > \frac{3(2x-7)}{3}$

⑪ $\frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < 2 + \frac{x}{6}$.

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Giải và biện luận các bất phương trình sau:

① $mx + 1 > m^2 + x$

② $mx + 6 > 2x + 3m$

③ $(m + 1)x + m < 3m + 4$

④ $\frac{m(x-2)}{6} + \frac{x-m}{3} > \frac{x+1}{2}$

🔥 **Câu 3.** Tìm m để các bất phương trình sau vô nghiệm:

① $3 - mx < 2(x - m) - (m + 1)^2.$

② $m^2x + 1 \geq m + (3m - 2)x.$

③ $mx - m^2 > mx - 4.$

④ $(m^2 - 4m + 3)x + 2m - 4 < 0.$

🔥 **Câu 4.** Giải các hệ bất phương trình sau:

① $\begin{cases} 3x + 1 \geq 2x + 7 \\ 4x + 3 > 2x + 19 \end{cases}$

② $\begin{cases} \frac{4x-5}{7} < x+3 \\ \frac{3x+8}{4} > 2x-5 \end{cases}$

③ $\begin{cases} \frac{4}{3} - 12x \leq x + \frac{1}{2} \\ \frac{4x-3}{2} < \frac{2-x}{3} \end{cases}$

④ $\begin{cases} \frac{x}{2} \leq x + \frac{4}{3} \\ \frac{2x-9}{3} < \frac{19+x}{2} \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} \frac{11-x}{2} \geq 2x-5 \\ 2(3x+1) \geq \frac{x-8}{2} \end{cases}$

⑥ $\begin{cases} 15x-2 > 2x + \frac{1}{3} \\ 2(x-4) < \frac{3x-14}{2} \end{cases}$

🔥 **Câu 5.** Giải các bất phương trình sau:

① $|3x - 2| > 7.$

② $|5x - 12| < 3.$

③ $|x - 2| < \frac{x}{2}.$

④ $|2x - 8| \leq 7.$

⑤ $|3x + 15| \geq 3.$

⑥ $|x - 1| > \frac{x+1}{2}.$

⑦ $|2x - 5| \leq x + 1.$

⑧ $|2x + 1| \leq x.$

⑨ $|x - 2| > x + 1.$

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Giá trị $x = -3$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau đây?

- A.** $(x+3)(x+2) > 0$. **B.** $(x+3)^2(x+2) \leq 0$. **C.** $x + \sqrt{1-x^2} \geq 0$. **D.** $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{3+2x} > 0$.

Câu 2. Bất phương trình $5x - 1 > \frac{2x}{5} + 3$ có nghiệm là

- A.** $\forall x$. **B.** $x < 2$. **C.** $x > -\frac{5}{2}$. **D.** $x > \frac{20}{23}$.

Câu 3. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $|x^2 - 4x| < 0$.

- A.** $S = \emptyset$. **B.** $S = \{0\}$. **C.** $S = (0; 4)$. **D.** $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

Câu 4. Bất phương trình $|x - 1| \geq x - 1$ có nghiệm là

- A.** $x \in (-\infty, +\infty)$. **B.** $x = 1$. **C.** $x \geq 1$. **D.** $x < 0$.

🔥 **Câu 5.** Bất phương trình $|x - 3| \geq 1$ có nghiệm là

- A. $3 \leq x \leq 4$. B. $2 < x < 3$. C. $x \leq 2$ hoặc $x \geq 4$. D. $x = 3$.

🔥 **Câu 6.** Bất phương trình: $|3x - 2|(x^2 + 1) \geq 0$ có tập nghiệm là

- A. $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. B. $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. C. $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$. D. $\mathbb{R}$.

🔥 **Câu 7.** Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. Bất phương trình bậc nhất một ẩn luôn có nghiệm.
 B. Bất phương trình $ax + b < 0$ vô nghiệm khi $a = 0$ và $b \geq 0$.
 C. Bất phương trình $ax + b < 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $a = 0$ và $b < 0$.
 D. Bất phương trình $ax + b < 0$ vô nghiệm khi $a = 0$.

🔥 **Câu 8.** Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $x^2 \leq 3x \Leftrightarrow x \leq 3$. B. $\frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.
 C. $\frac{x+1}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x+1 \geq 0$. D. $x + |x| \geq x \Leftrightarrow |x| \geq 0$.

Câu 9. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2-x > 0 \\ 2x+1 > x-2 \end{cases}$ là

A. $(-\infty; -3)$.B. $(-3; 2)$.C. $(2; +\infty)$.D. $(-3; +\infty)$.

Câu 10. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-2 < 4(-x+1) \\ 4-3x < 2(2-x) \end{cases}$ là

A. $(-\infty; 0)$.B. $(2; 3)$.C. $(0; 1)$.D. $(1; +\infty)$.

Câu 11. Điều kiện của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 4x-2 < 2x-8 \\ x-m > 0 \end{cases}$ có nghiệm là

A. $m \leq -3$.B. $m > -3$.C. $m \geq -3$.D. $m < -3$.

Câu 12. Số nghiệm nguyên âm của bất phương trình $|2x-4| \geq x+3$ là

A. 2.

B. 1.

C. Vô số.

D. 4.

Câu 13. Tìm tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+2 > 2x+3 \\ 1-x > 0 \end{cases}$.

A. $\emptyset$.B. $\left(\frac{1}{5}; 1\right)$.C. $(-\infty; 1)$.D. $(1; +\infty)$.

🔥 Câu 14. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2x}{3} - 1 > \frac{x}{2} + 1$ là

- A. $S = (-\infty; 12)$. B. $S = (2; +\infty)$. C. $S = (-12; +\infty)$. D. $S = (12; +\infty)$.

🔥 Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình $3x < 5(1-x)$ là

- A. $\left(-\frac{5}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$. C. $\left(\frac{5}{8}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{5}{8}\right)$.

🔥 Câu 16. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} < -x+1 \\ \frac{4-3x}{2} < 3-x \end{cases}$ là

- A. $S = \left(-2; \frac{4}{5}\right)$. B. $S = \left(\frac{4}{5}; +\infty\right)$. C. $S = (-\infty; -2)$. D. $S = (-2; +\infty)$.

🔥 Câu 17. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{x-1}{2} < -x+1 \\ 3+x > \frac{5-2x}{2} \end{cases}$ là

- A. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$. B. $S = (1; +\infty)$. C. $S = \left(-\frac{1}{4}; 1\right)$. D. $S = \emptyset$.

🔥 **Câu 18.** Tập nghiệm S của bất phương trình $\begin{cases} 2(x-1) < x+3 \\ 2x \leq 3(x+1) \end{cases}$ là

A. $S = (-3; 5)$.

B. $S = (-3; 5]$.

C. $S = [-3; 5)$.

D. $S = [-3; 5]$.

🔥 **Câu 19.** Số nghiệm nguyên của hệ bất phương trình $\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} > 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x + 25 \end{cases}$ là

A. Vô số.

B. 4.

C. 8.

D. 0.

🔥 **Câu 20.** Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\begin{cases} 5x - 2 < 4x + 5 \\ x^2 < (x+2)^2 \end{cases}$ bằng

A. 21.

B. 27.

C. 28.

D. 29.

BÀI 3.

DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

A

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1

ĐỊNH NGHĨA

Nhị thức bậc nhất đối với x là biểu thức dạng $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) trong đó a, b là hai số cho đã cho.

2

DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

Định lí 1. *Nhị thức $f(x) = ax + b$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$, trái dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.*

Quy tắc:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trái - Trái} \\ \text{Phải - Cùng} \end{array} \right.$ dấu của a

3

CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Xét dấu nhị thức bậc nhất

Phương pháp: Dưa vào bảng xét dấu.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	Trái dấu a	0	Cùng dấu a

Ví dụ 1. Xét dấu biểu thức $f(x) = (x - 2)(x + 4)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{2 - 3x}{4x + 1}$.

Lời giải:

Dạng 2. Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

- ☑ Giải bất phương trình tích.
- Dạng $P(x) > 0$ (1) (trong đó $P(x)$ là tích các nhị thức bậc nhất).
 - Cách giải: Lập bảng xét dấu của $P(x)$. Từ đó suy ra tập nghiệm của (1).
- ☑ Giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu.
- Dạng $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ (2) (trong đó $P(x), Q(x)$ là tích những nhị thức bậc nhất.)
 - Cách giải: Lập bảng xét dấu của $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Từ đó suy ra tập nghiệm của (2).

Chú ý:

- ✍ Quy đồng và không được khử mẫu.
- ✍ Rút gọn bớt các nhị thức có lũy thừa bậc chẵn (cần lưu ý trong việc rút gọn để tránh làm mất nghiệm).

 **Ví dụ 1.** Giải bất phương trình sau: $(x - 1)(2 - 3x) \geq 0$.

Lời giải:

 **Ví dụ 2.** Giải bất phương trình sau: $\frac{-2x + 4}{(2x - 1)(3x + 1)} \leq 0$.

Lời giải:

B TỰ LUẬN**🔥 Câu 1.** Lập bảng xét dấu các biểu thức sau

① $(3x+5)(x-4)$.

② $(-5x+5)(9-2x)$.

③ $\frac{-2x+3}{x-2}$.

④ $x(4-x)(x+2)$.

⑤ $x(2x-5)(x-7)$.

⑥ $1 - \frac{5x-3}{x+1}$.

⑦ $x(6-3x)(-x+4)$.

⑧ $\frac{4x-12}{x^2-4x}$.

⑨ $\frac{-3x-12}{x^2-3x}$.

🔥 Câu 2. Giải các bất phương trình sau:

① $(x+1)(x-1)(3x-6) > 0$.

② $(2x-7)(4-5x) \geq 0$.

③ $\frac{2x-5}{3x+2} < \frac{3x+2}{2x-5}$.

④ $\frac{x-3}{x+1} > \frac{x+5}{x-2}$.

⑤ $x^2 - x - 20 > 2(x-11)$.

⑥ $\frac{x-3}{x+5} < \frac{1-2x}{x-3}$.

⑦ $3x(2x+7)(9-3x) \geq 0$.

⑧ $\frac{3x-4}{x-2} > 1$.

⑨ $\frac{2x-5}{2-x} \geq -1$.

C TRẮC NGHIỆM**🔥 Câu 1.** Cho nhị thức bậc nhất $f(x) = 23x - 20$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

B. $f(x) > 0$ với $\forall x \in \left(-\infty; \frac{20}{23}\right)$.

C. $f(x) > 0$ với $x > -\frac{5}{2}$.

D. $f(x) > 0$ với $\forall x \in \left(\frac{20}{23}; +\infty\right)$.

🔥 Câu 2. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x) = x(x-6)+5-2x-[10+x(x-8)]$ luôn dương?

A. $\emptyset$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $(-\infty; 5)$.

D. $(5; +\infty)$.

🔥 **Câu 3.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = \frac{x+2}{x-5}$ không dương

A. $[-2, 5]$. B. $(-2, 5)$. C. $(-2, 5]$. D. $[-2, 5)$.

🔥 **Câu 4.** Các giá trị của x thỏa mãn điều kiện đa thức $f(x) = \frac{1}{x+2} + x - 1 - \frac{1}{x+1} - \sqrt{x^2+1}$ là

A. $x \neq -2$ và $x \neq -1$. B. $x > -1$. C. $x \neq -1$. D. $x \neq -2$.

🔥 **Câu 5.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = \frac{2}{1-x} - 1$ âm?

A. $(-\infty; -1)$. B. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-1; 1)$.

🔥 **Câu 6.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = (x-1)(x+3)$ không âm

- A. $(-3, 1)$. B. $[-3, 1]$.
C. $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$. D. $(-\infty, -3) \cup [1, +\infty)$.

Câu 7. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = \frac{-4x+1}{3x+1} + 3$ không dương

- A. $\left[-\frac{4}{5}, -\frac{1}{3}\right]$. B. $\left[-\frac{4}{5}, -\frac{1}{3}\right)$. C. $\left(-\infty, -\frac{4}{5}\right]$. D. $\left[-\frac{4}{5}, +\infty\right)$.

Câu 8. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = \frac{4}{x+3} - 2$ không dương

- A. $(-\infty, -3) \cup [-1, +\infty)$. B. $(-3, -1]$.
C. $[-1, +\infty)$. D. $(-\infty, -1]$.

Câu 9. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = |2x-5| - 3$ không dương

- A. $1 \leq x \leq 4$. B. $x = \frac{5}{2}$. C. $x = 0$. D. $x < 1$.

Câu 10. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức $f(x) = \frac{x-1}{x^2+4x+3}$ không dương?

- A. $S = (-\infty; 1)$. B. $S = (-3; -1) \cup [1; +\infty)$.
C. $S = (-\infty; -3) \cup (-1; 1]$. D. $S = (-3; 1)$.

🔥 **Câu 11.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = \frac{2-x}{2x+1}$ không âm?

A. $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

B. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

C. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup [2; +\infty)$.

D. $S = \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$.

🔥 **Câu 12.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức $f(x) = x(x^2 - 1)$ không âm?

A. $(-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$. B. $[-1; 0] \cup [1; +\infty)$. C. $(-\infty; -1] \cup [0; 1)$. D. $[-1; 1]$.

🔥 **Câu 13.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = |2x - 3| - 1$ không dương?

A. $1 \leq x \leq 3$. B. $-1 \leq x \leq 1$. C. $1 \leq x \leq 2$. D. $-1 \leq x \leq 2$.

🔥 **Câu 14.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì $f(x) = 5x - \frac{x+1}{5} - 4 - (2x-7)$ luôn âm

A. $\emptyset$. B. $\mathbb{R}$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(-1; +\infty)$.

🔥 **Câu 15.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì $f(x) = x^2 - 2x + 3$ luôn dương

A. $\emptyset$. B. $\mathbb{R}$. C. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. D. $(-1; 3)$.

🔥 **Câu 16.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x) = x^2 + 9 - 6x$ luôn dương

- A.** $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(3; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 3)$.

🔥 **Câu 17.** Tìm tham số thực m để tồn tại x thỏa $f(x) = m^2x + 3 - (mx + 4)$ âm

- A.** $m = 1$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = 1$ hoặc $m = 0$. **D.** $\forall m \in \mathbb{R}$.

🔥 **Câu 18.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x) = 2x + \frac{3}{2x-4} - \left(3 + \frac{3}{2x-4}\right)$ âm

- A.** $2x < 3$. **B.** $x < \frac{3}{2}$ và $x \neq 2$. **C.** $x < \frac{3}{2}$. **D.** $x < \frac{2}{3}$.

🔥 **Câu 19.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x) = 2(x-1) - x - (3(x-1) - 2x - 5)$ luôn dương

- A.** $x \in \mathbb{R}$. **B.** $x < 3,24$. **C.** $x > -2,12$. **D.** Vô nghiệm.

Câu 20. Số các giá trị nguyên âm của x để đa thức $f(x) = (x+3)(x-2)(x-4)$ không âm là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 21. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x) = \left(\frac{5x}{5} - \frac{13}{21} + \frac{x}{15}\right) - \left(\frac{9}{25} - \frac{2x}{35}\right)$ luôn âm

- A. $x > 0$. B. $x < \frac{257}{295}$. C. $x > -\frac{5}{2}$. D. $x < -5$.

Câu 22. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = \frac{x+2}{x-5}$ không dương

- A. $[-2, 5]$. B. $(-2, 5)$. C. $(-2, 5]$. D. $[-2, 5)$.

Câu 23. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ luôn âm

- A. $\mathbb{R}$. B. $\emptyset$. C. $(-1, 1)$. D. Một đáp số khác.

Câu 24. Các số tự nhiên bé hơn 4 để đa thức $f(x) = \frac{2x}{5} - 23 - (2x - 16)$ luôn âm

- A. $\{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. B. $-\frac{35}{8} < x < 4$.
C. $\{0; 1; 2; 3\}$. D. $\{0; 1; 2; -3\}$.

🔥 **Câu 25.** Tìm số nguyên nhỏ nhất của x để $f(x) = \frac{x-5}{(x+7)(x-2)}$ luôn dương

A. $x = 3$.

B. $x = -4$.

C. $x = 5$.

D. $x = 6$.

🔥 **Câu 26.** Các số tự nhiên bé hơn 6 để đa thức $f(x) = 5x - \frac{1}{3} - \left(12 - \frac{2x}{3}\right)$ luôn dương

A. $\{2; 3; 4; 5\}$.

B. $\{3; 4; 5\}$.

C. $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

D. $\{3; 4; 5; 6\}$.

🔥 **Câu 27.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = \frac{3x+5}{2} - 1 - \left(\frac{x+2}{3} + x\right)$ luôn âm

A. Vô nghiệm.

B. Mọi x đều là nghiệm.

C. $x > 4,11$.

D. $x < -5$.

🔥 **Câu 28.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì $f(x) = \frac{x-1}{x+2} - \frac{x+2}{x-1}$ không âm?

A. $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$.

B. $(-2; +\infty)$.

C. $\left[-2; -\frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$.

D. $(-\infty; -2) \cup \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Câu 29. Tìm số nguyên lớn nhất của x để đa thức $f(x) = \frac{x+4}{x^2-9} - \frac{2}{x+3} - \frac{4x}{3x-x^2}$ luôn âm

A. $x = 2$. B. $x = 1$. C. $x = -2$. D. $x = -1$.

Câu 30. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì biểu thức $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \frac{x+5}{x+1}$ không âm

A. $[1, +\infty)$. B. $(-\infty, -1) \cup (1, 3]$. C. $(3, 5) \cup (6, 16)$. D. $(-6, 4)$.

BÀI 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN VÀ MIỀN NGHIỆM CỦA NÓ

☑ Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là bất phương trình có một trong các dạng:

☐ $ax + by + c < 0$. ☐ $ax + by + c > 0$. ☐ $ax + by + c \leq 0$. ☐ $ax + by + c \geq 0$.

trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0; x và y là các ẩn số.

☑ Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 < c$ gọi là một nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

☑ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm bất phương trình được gọi là miền nghiệm của nó.

2 CÁCH XÁC ĐỊNH MIỀN NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.

Định lý 1. Trong mặt phẳng tọa độ đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng ấy (không kể bờ (d)) gồm các điểm có tọa độ thỏa mãn bất phương trình $ax + by + c > 0$, nửa mặt phẳng còn lại (không kể bờ (d)) gồm các điểm có tọa độ thỏa mãn bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Vậy để xác định miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$, ta có quy tắc thực hành biểu diễn hình học tập nghiệm (hay biểu diễn miền nghiệm) như sau:

☑ **Bước 1:** Vẽ đường thẳng $(d): ax + by + c = 0$

☑ **Bước 1:** Xét một điểm $M(x_0; y_0)$ không nằm trên (d) .

— Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

— Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) không chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

! **Chú ý:** Đối với các bất phương trình dạng $ax + by + c \leq 0$ hoặc $ax + by + c \geq 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả bờ.

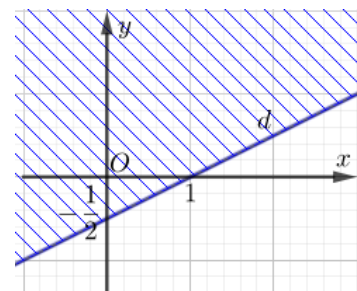
 **Ví dụ 1.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $x - 2y > 1$?

Lời giải:

☑ Đường thẳng $d: x - 2y = 1$ đi qua hai điểm $A(1; 0)$ và $B(0; -\frac{1}{2})$.

☑ $x = y = 0$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

☑ Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $d: x - 2y = 1$, không chứa gốc tọa độ O , không bao gồm đường thẳng d (là miền không gạch chéo trên hình vẽ).



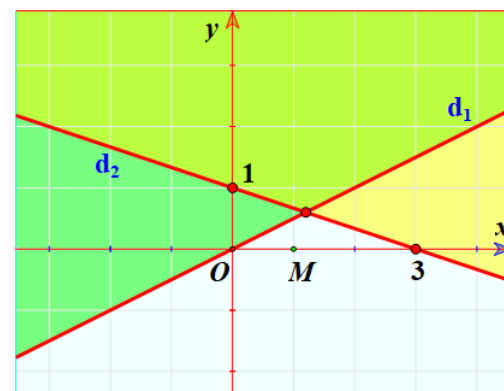
3 HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

- ☑ Trong mặt phẳng tọa độ, ta gọi tập hợp các điểm có tọa độ thỏa mãn mọi bất phương trình trong hệ là miền nghiệm của hệ.
- ☑ Miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.
- ☑ Để xác định miền nghiệm của hệ, ta dùng phương pháp biểu diễn hình học như sau:
 - ☑ Với mỗi bất phương trình trong hệ, ta xác định miền nghiệm của nó và gạch bỏ (tô màu) miền còn lại.
 - ☑ Sau khi làm như trên lần lượt đối với tất cả các bất phương trình trong hệ trên cùng một mặt phẳng tọa độ, miền còn lại không bị gạch (tô màu) chính là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Ví dụ 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y > 0 \\ x + 3y < 3 \end{cases}$.

Lời giải:

- ☑ Vẽ các đường thẳng $d_1: x - 2y = 0$; $d_2: x + 3y = 3$.
- ☑ Điểm $M(1;0)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $d_1; d_2$ không chứa điểm M .
- ☑ Miền không bị tô đậm (miền chứa điểm M), không tính các bờ $d_1; d_2$ (hình vẽ) là miền nghiệm của hệ đã cho.



B TỰ LUẬN

Câu 1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình sau:

① $2x - y \geq 0$.

② $-3x + y + 2 \leq 0$.

③ $\frac{x - 2y}{2} > \frac{2x + y + 1}{3}$.

④ $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$.

⑤ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leq 1$.

⑥ $-x + 2 + 2(y - 2) < (1 - x)$.

Câu 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình sau:

① $\begin{cases} x + y - 2 < 0 \\ x - y + 3 \geq 0 \end{cases}$

② $\begin{cases} 3x - y \geq -1 \\ 2x + y \leq 6 \\ x + 3y > 3 \end{cases}$.

$$\textcircled{3} \begin{cases} x + y + 2 > 0 \\ 2x - 3y - 6 \leq 0 \\ x - 2y + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} 2x + 3y - 6 < 0 \\ x \geq 0 \\ 2x - 3y - 1 \leq 0 \end{cases}.$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ x - 3y + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \begin{cases} -x + 2y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

TRẮC NGHIỆM

 **Câu 1.** Miền nghiệm của bất phương trình $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$ là nửa mặt phẳng **không** chứa điểm

A. (0;0).

B. (1;1).

C. (4;2).

D. (1;-1).

 **Câu 2.** Miền nghiệm của bất phương trình $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$ là nửa mặt phẳng chứa điểm

A. (0;0).

B. (-4;2).

C. (-2;2).

D. (-5;3).

 **Câu 3.** Miền nghiệm của bất phương trình $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$ là nửa mặt phẳng **không** chứa điểm

A. (-3;-4).

B. (-2;-5).

C. (-1;-6).

D. (0;0).

Câu 4. Miền nghiệm của bất phương trình $4(x-1)+5(y-3)>2x-9$ là nửa mặt phẳng chứa điểm

- A. (0;0). B. (1;1). C. (-1;1). D. (2;5).

Câu 5. Câu nào sau đây đúng?. Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 \geq 0 \\ 2(x-1) + \frac{3y}{2} \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$
 là

phần mặt phẳng chứa điểm

- A. (2;1). B. (0;0). C. (1;1). D. (3;4).

Câu 6. Điểm nào sau đây không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x+3y-1>0 \\ 5x-y+4<0 \end{cases}?$$

- A. (-1;4). B. (-2;4). C. (0;0). D. (-3;4).

Câu 7. Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x-5y-1>0 \\ 2x+y+5>0 \\ x+y+1<0 \end{cases}?$$

- A. (0;0). B. (1;0). C. (0;-2). D. (0;2).

🔥 **Câu 8.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y + 3 < 0 \\ x + y - 5 > 0 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm

A. (5;3).

B. (0;0).

C. (1;-1).

D. (-2;2).

🔥 **Câu 9.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x \geq y - 3 \\ 2y \geq 8 - x \\ y \leq 6 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm

A. (0;0).

B. (1;2).

C. (2;1).

D. (8;4).

🔥 **Câu 10.** Miền nghiệm của bất phương trình $3x + 2(y + 3) > 4(x + 1) - y + 3$ là phần mặt phẳng chứa điểm nào?

A. (3;0).

B. (3;1).

C. (1;1).

D. (0;0).

🔥 **Câu 11.** Miền nghiệm của bất phương trình $5(x + 2) - 9 < 2x - 2y + 7$ là phần mặt phẳng không chứa điểm nào?

A. (-2;1).

B. (2;3).

C. (2;-1).

D. (0;0).

Câu 12. Trong các cặp số sau đây, cặp nào không là nghiệm của bất phương trình $2x + y < 1$?

- A. $(-2; 1)$. B. $(3; -7)$. C. $(0; 1)$. D. $(0; 0)$.

Câu 13. Trong các cặp số sau đây, cặp nào không là nghiệm của bất phương trình $x - 4y + 5 \geq 0$?

- A. $(-5; 0)$. B. $(-2; 1)$. C. $(1; -3)$. D. $(0; 0)$.

Câu 14. Miền nghiệm của bất phương trình $-3x + y + 2 \leq 0$ không chứa điểm nào sau đây?

- A. $A(1; 2)$. B. $B(2; 1)$. C. $C\left(1; \frac{1}{2}\right)$. D. $D(3; 1)$.

Câu 15. Miền nghiệm của bất phương trình $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$ không chứa điểm nào sau đây?

- A. $A(-1; -2)$. B. $B\left(-\frac{1}{11}; -\frac{2}{11}\right)$. C. $C(0; -3)$. D. $D(-4; 0)$.

Câu 16. Miền nghiệm của bất phương trình $2x + y > 1$ không chứa điểm nào sau đây?

- A. $A(1; 1)$. B. $B(2; 2)$. C. $C(3; 3)$. D. $D(-1; -1)$.

🔥 **Câu 17.** Miền nghiệm của bất phương trình $(1 + \sqrt{3})x - (1 - \sqrt{3})y \geq 2$ chứa điểm nào sau đây?

- A.** $A(1; -1)$. **B.** $B(-1; -1)$. **C.** $C(-1; 1)$. **D.** $D(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

🔥 **Câu 18.** Miền nghiệm của bất phương trình $x - 2 + 2(y - 1) > 2x + 4$ chứa điểm nào sau đây?

- A.** $A(1; 1)$. **B.** $B(1; 5)$. **C.** $C(4; 3)$. **D.** $D(0; 4)$.

🔥 **Câu 19.** Miền nghiệm của bất phương trình $2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} - 2 \leq 0$ chứa điểm nào sau đây?

- A.** $A(1; 1)$. **B.** $B(1; 0)$. **C.** $C(\sqrt{2}; \sqrt{2})$. **D.** $D(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

🔥 **Câu 20.** Trong các cặp số sau, cặp nào không là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - 3y + 2 > 0 \end{cases}$ là

- A.** $(0; 0)$. **B.** $(1; 1)$. **C.** $(-1; 1)$. **D.** $(-1; -1)$.

BÀI 5. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Tam thức bậc hai là biểu thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), trong đó a, b, c là những số thực.

2 DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

$$f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$$

☑ $\Delta < 0$: Phương trình vô nghiệm.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu a	

☑ $\Delta = 0$: Phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu a	0	Cùng dấu a

☑ $\Delta > 0$: Phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 .

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu a 0 Trái dấu a 0 Cùng dấu a			

3 PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

$$\checkmark |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$$\checkmark |f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$$\checkmark |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$\checkmark \quad |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \text{ có nghĩa.} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x) < -g(x) \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Chú ý:

$$\checkmark \quad |A| = A \Leftrightarrow A \geq 0; |A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0$$

$$! \quad \checkmark \quad \text{Với } B > 0 \text{ ta có: } |A| < B \Leftrightarrow -B < A < B; |A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} A < -B \\ A > B \end{cases}.$$

$$\checkmark \quad |A + B| = |A| + |B| \Leftrightarrow AB \geq 0; |A - B| = |A| + |B| \Leftrightarrow AB \leq 0.$$

4 PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG CĂN

$$\checkmark \quad \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$$

$$\checkmark \quad \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 (\text{hoaëc } g(x) \geq 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\checkmark \quad a.f(x) + b.\sqrt{f(x)} + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{f(x)}, t \geq 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$$

$$\checkmark \quad \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = h(x). \text{ Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{f(x)} \\ v = \sqrt{g(x)} \end{cases}; u, v \geq 0 \text{ đưa về hệ } u, v.$$

$$\checkmark \quad \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

$$\checkmark \quad \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases} \end{cases}$$

5 CÁC DẠNG TOÁN**Dạng 1. Xét dấu tam thức bậc hai**

Phương pháp giải: Áp dụng các quy tắc xét dấu.

Ví dụ 1. Xét dấu của các tam thức bậc hai

① $f(x) = 2x^2 - 5x + 2.$

② $f(x) = x^2 + 2x + 1.$

③ $f(x) = 4x^2 + 7.$

Lời giải:

.....

**Ví dụ 2.** Xét dấu của các biểu thức

① $f(x) = (x^2 - 4)(-2x^2 + x + 3).$

② $f(x) = (-x^2 + 4x)(x^2 + 3).$

③ $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 5}{2 - x}.$

④ $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4}.$

Lời giải:**Dạng 2. Tìm m để biểu thức luôn âm hoặc luôn dương trên $\mathbb{R}$**

☒ $ax^2 + bx + c > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}.$

☒ $ax^2 + bx + c < 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}.$

☒ $ax^2 + bx + c \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}.$

☒ $ax^2 + bx + c \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}.$

**Ví dụ 1.** Cho $f(x) = (m+2)x^2 + 2(m+2)x + m+3$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) \geq 0$ với mọi giá trị của x .**Lời giải:****Ví dụ 2.** Cho $f(x) = mx^2 - x - 1$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) < 0$ với mọi giá trị của x .**Lời giải:**

Dạng 3. Phương trình - bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối**Phương pháp giải:** Sử dụng các công thức phần lý thuyết.**Ví dụ 1.** Giải phương trình $|x^2 - x - 1| = x - 1$.**Lời giải:****Ví dụ 2.** Giải phương trình $|x^2 - 1| = |1 - 3x|$.**Lời giải:****Dạng 4. Phương trình - bất phương trình chứa dấu căn****Phương pháp giải:** Sử dụng các công thức phần lý thuyết.**Ví dụ 1.** Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x + 1} = x - 1$.**Lời giải:**

Ví dụ 2. Giải bất phương trình: $\sqrt{(x+5)(3x+4)} > 4(x-1)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

Câu 1. Xét dấu các biểu thức sau:

① $2x^2 - 7x + 5$

② $-x^2 + 4x + 5$

③ $-4x^2 + 12x - 9$

④ $3x^2 - 2x - 8$

⑤ $-x^2 + 2x - 1$

⑥ $2x^2 - 7x + 5$

⑦ $(3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$

⑧ $(3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1)$

⑨ $\frac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3}$

⑩ $\frac{(x^2 - x)(3 + x)}{x^2 + x - 2}$

⑪ $\frac{(2x^2 - 4)(x^2 + 1)}{2x^2 + x - 3}$

⑫ $\frac{(2x^2 - 2)(1 - x^2)}{x^2 - 2}$

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Giải các bất phương trình sau:

① $x^2 - x - 6 \leq 0$

② $-5x^2 + 4x + 12 < 0$

③ $16x^2 + 40x + 25 > 0$

④ $-2x^2 + 3x - 7 \geq 0$

⑤ $3x^2 - 4x + 4 \geq 0$

⑥ $\frac{-3x^2 - x + 4}{x^2 + 3x + 5} > 0$

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Giải các hệ bất phương trình sau:

① $\begin{cases} x^2 + x + 5 < 0 \\ x^2 - 6x + 1 > 0 \end{cases}$

② $\begin{cases} 2x^2 + x - 6 > 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 \geq 0 \end{cases}$

③ $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 < 0 \\ -x^2 - 3x + 10 > 0 \end{cases}$

$$\textcircled{4} \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} -x^2 + 4x - 7 < 0 \\ x^2 - 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{6} -4 \leq \frac{x^2 - 2x - 7}{x^2 + 1} \leq 1$$

🔥 Câu 4. Tìm m để các phương trình trên có nghiệm.

$$\textcircled{1} (1+m)x^2 - 2mx + 2m = 0$$

$$\textcircled{2} (m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 = 0$$

$$\textcircled{3} (3-m)x^2 - 2(m+3)x + m + 2 = 0$$

$$\textcircled{4} (m-2)x^2 - 4mx + 2m - 6 = 0$$

$$\textcircled{5} (-m^2 + 2m - 3)x^2 + 2(2-3m)x - 3 = 0$$

🔥 Câu 5. Tìm m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x .

$$\textcircled{1} 3x^2 + 2(m-1)x + m + 4 > 0$$

$$\textcircled{2} x^2 + (m+1)x + 2m + 7 > 0$$

$$\textcircled{3} 2x^2 + (m-2)x - m + 4 > 0$$

$$\textcircled{4} mx^2 + (m-1)x + m - 1 < 0$$

$$\textcircled{5} (m-1)x^2 - 2(m+1)x + 3(m-2) > 0$$

$$\textcircled{6} |3(m+6)x^2 - 3(m+3)x + 2m - 3| > 3$$

🔥 Câu 6. Tìm m để các bất phương trình sau vô nghiệm.

$$\textcircled{1} (m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 < 0$$

$$\textcircled{2} (m-3)x^2 + (m+2)x - 4 > 0$$

$$\textcircled{3} (m^2 + 2m - 3)x^2 + 2(m-1)x + 1 < 0$$

$$\textcircled{4} mx^2 + 2(m-1)x + 4 \geq 0$$

$$\textcircled{5} (3-m)x^2 - 2(2m-5)x - 2m + 5 > 0$$

$$\textcircled{6} mx^2 - 4(m+1)x + m - 5 < 0$$

🔥 **Câu 7.** Giải các phương trình sau:

① $|x^2 - 5x + 4| = x^2 + 6x + 5$

② $|x^2 - 1| = x^2 - 2x + 8$

③ $2|x| - |x - 3| = 3$

④ $|x^2 - 1| = 1 - |x|$

🔥 **Câu 8.** Giải các bất phương trình sau:

① $2x^2 - |5x - 3| < 0$

② $x - 8 > |x^2 + 3x - 4|$

③ $|x^2 - 1| - 2x < 0$

④ $|x^2 + 4x + 3| > |x^2 - 4x - 5|$

⑤ $|x - 3| - |x + 1| < 2$

⑥ $|x^2 - 3x + 2| + x^2 > 2x$

🔍 TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Biểu thức nào sau đây là một tam thức bậc hai đối với x ?

A. $f(x) = 2x^2 - \sqrt{3}$. B. $f(x) = 2x - 1$. C. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$. D. $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x + 2}$.

🔥 **Câu 2.** Cho $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

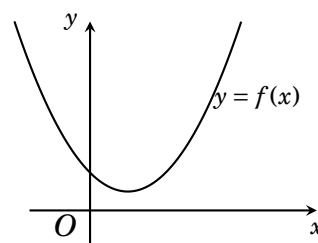
A. $f(0) = 2$. B. $f(2) = 3$. C. $f(3) = 4$. D. $f(4) = 5$.

🔥 Câu 3. Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, với $a \neq 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $a.f(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$. **B.** $a.f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. **C.** $a.f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. **D.** $a.f(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

🔥 Câu 4.

Cho hình vẽ bên, biết $f(x) = ax^2 + bx + c$ và $\Delta = b^2 - 4ac$. Xác định dấu của a và Δ .



- A.** $a > 0, \Delta < 0$. **B.** $a < 0, \Delta < 0$. **C.** $a > 0, \Delta > 0$. **D.** $a > 0, \Delta = 0$.

🔥 Câu 5. Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, với $a \neq 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A.** $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a .
B. $a.f(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = -\frac{b}{2a}$.
C. $a.f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.
D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt Ox tại một điểm duy nhất.

Câu 6. Bảng xét dấu sau đây là của một trong số bốn tam thức bậc hai được cho dưới đây. Hỏi đó là tam thức nào?

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

- A. $f(x) = x^2 - 2x + 3$. B. $f(x) = x^2 - 2x - 3$. C. $f(x) = x^2 - 3x + 2$. D. $f(x) = -x^2 + 3x - 2$.

Câu 7. Trong khoảng nào $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$ trái dấu với hệ số của x^2 ?

- A. $\left(-\frac{5}{2}; 1\right)$. B. $(-\infty; -1)$ và $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.
C. $\left(-1; \frac{5}{2}\right)$. D. $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 8. Trong các khẳng định sau khẳng định nào **sai**?

- A. $f(x) = x^2 + 3x + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. B. $f(x) = -x^2 + 4x - 4 \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
C. $f(x) = -x^2 + 5x - 4 > 0$ với mọi $x \in (1; 4)$. D. $f(x) = 2x^2 - x - 1 \leq 0$ với mọi $x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Câu 9. Với giá trị tùy ý của m , biểu thức nào sau đây là một tam thức bậc hai đối với x ?

- A. $f(x) = mx^2 + 3x + 1$. B. $f(x) = (m^2 - 1)x^2 + 2x + m - 1$.
C. $f(x) = (m + 1)x^2 - 1$. D. $f(x) = (-m^2 - 1)x^2 + (2m - 5)x - 2017$.

Câu 10. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - bx + 3$. Với giá trị nào của b thì $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $b \in [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$.

B. $b \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.

C. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$.

D. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$.

Câu 11. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x - 2}$ là

A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

B. $[2; +\infty)$.

C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

D. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên x để tam thức bậc hai $-2x^2 + 5x - 2$ không âm?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên x để tam thức bậc hai $-x^2 + 5x - 6$ luôn dương?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 14. Tam thức bậc hai $x^2 - 5x - 6$ luôn dương khi

A. $x < -1$ hoặc $x > 6$.

B. $-1 < x < 6$.

C. $x \leq -1$ hoặc $x \geq 6$.

D. $-1 \leq x \leq 6$.

❖ **Câu 15.** Tam thức bậc hai $-x^2 + 5x - 4$ không âm khi

- A. $x < 1$ hoặc $x > 4$. B. $1 < x < 4$. C. $x \leq 1$ hoặc $x \geq 4$. D. $1 \leq x \leq 4$.

❖ **Câu 16.** Có bao nhiêu giá trị nguyên x để tam thức bậc hai $x^2 - 5x + 4$ luôn âm?

- A. 0. B. 1. C. 4. D. 2.

❖ **Câu 17.** Cho $f(x) = \frac{11x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} - x$. Tìm x để $f(x) < 0$.

- A. $x \in (-3; -2) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$. B. $x \in (-3; 1) \cup \left(2; \frac{3}{2}\right) \cup (3; +\infty)$.
C. $x \in (-3; -1) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$. D. $x \in (-2; -1) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup (3; +\infty)$.

❖ **Câu 18.** Cho $f(x) = 4x^4 - x^2 + 2x - 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(x) > 0, \forall x \in \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$. B. $f(x) < 0, \forall x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$.
C. $f(x) > 0, \forall x \in \left(-\infty; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$. D. $f(x) < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

🔥 Câu 19. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tam thức bậc hai $f(x) = -2x^2 - (m+2)x + m^2 - m - 1$ luôn dương trên $\mathbb{R}$?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

🔥 Câu 20. Với giá trị nào của x thì $f(x) = (x^2 + 4x + 10)^2 - 7(x^2 + 4x + 11) + 7$ mang giá trị âm?

A. $(1; 3)$.B. $(-1; 3)$.C. $(-3; 1)$.D. $(-3; -1)$.

🔥 Câu 21. Có bao nhiêu giá trị x nguyên thỏa mãn $f(x) = x(x^3 - x + 2) - 1 < 0$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

🔥 Câu 22. Xác định tất cả các giá trị của m để tam thức bậc hai $f(x) = (m+1)x^2 - 3mx + 4m$ có hai nghiệm dương.

A. $m \in \left(-\frac{1}{3}; -1\right)$.B. $m \in \left(-\frac{16}{7}; -1\right)$.C. $m \in \left(-\frac{3}{4}; 1\right)$.D. $m \in \left(-\frac{14}{3}; 3\right)$.

🔥 Câu 23. Hãy chỉ ra một khoảng của x để biểu thức $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + 7x + 12}$ luôn âm?

A. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.B. $(2; +\infty)$.C. $(-\infty; -4)$.D. $\left(-3; \frac{1}{2}\right)$.

🔥 **Câu 24.** Biểu thức $f(x) = \frac{3x+2}{2x+1} - \frac{x-2}{x-1}$ luôn dương trên khoảng nào?

- A. $(0; 1)$. B. $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$. C. $(-1; 0)$. D. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

🔥 **Câu 25.** Có bao nhiêu số nguyên x để biểu thức $f(x) = (3x^2 + x - 2)^2 - (x^2 - x - 7)^2$ luôn âm?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

🔥 **Câu 26.** Cho hai biểu thức $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ và $g(x) = \frac{2}{x+1}$. Tìm x để $f(x) < g(x)$.

- A. $-2 < x < -1$. B. $1 < x < 2$. C. $x > 2$. D. $-1 < x < 2$.

🔥 **Câu 27.** Cho biểu thức $f(x) = \frac{x^2 - 5x - 6}{x - x^3}$. Tìm một khoảng của x để biểu thức $f(x)$ luôn dương.

- A. $(2; 3)$. B. $(1; 2)$. C. $(-1; 0)$. D. $(0; 2)$.

🔥 **Câu 28.** Biểu thức $f(x) = \frac{x^2 - 12x + 36}{2x^2 + 9x - 5}$ luôn âm trên khoảng nào?

- A. $(6; +\infty)$. B. $\left(\frac{1}{2}; 6\right)$. C. $\left(-5; \frac{1}{2}\right)$. D. $(-\infty; -5)$.

🔥 **Câu 29.** Cho biểu thức $f(x) = (2x^2 - 6x - 8)(12 - x - x^2)$. Tìm một khoảng của x để biểu thức $f(x)$ luôn dương.

- A. $(-4; -3)$. B. $(-3; 0)$. C. $(-6; -1)$. D. $(-1; 4)$.

🔥 **Câu 30.** Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5}}$ là

- A. $(-\infty; 1)$. B. $[-5; 1]$. C. $[-5; \sqrt{5}]$. D. $\mathbb{R}$.

🔥 **Câu 31.** Giá trị nào của m thì phương trình $(m - 3)x^2 + (m + 3)x - (m + 1) = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

- A. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$. B. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$.
C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$. D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

🔥 **Câu 32.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$.

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. B. $[2; +\infty)$. C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$. D. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

🔥 **Câu 33.** Tìm m để $(m+1)x^2 + mx + m < 0 \forall x \in \mathbb{R}$?

- A. $m < -1$. B. $m > -1$. C. $m < -\frac{4}{3}$. D. $m > \frac{4}{3}$.

🔥 **Câu 34.** Tìm m để $f(x) = x^2 - 2(2m-3)x + 4m - 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

- A. $m > \frac{3}{2}$. B. $m > \frac{3}{4}$. C. $\frac{3}{4} < m < \frac{3}{2}$. D. $1 < m < 3$.

🔥 **Câu 35.** Với giá trị nào của a thì bất phương trình $ax^2 - x + a \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

- A. $a = 0$. B. $a < 0$. C. $0 < a \leq \frac{1}{2}$. D. $a \geq \frac{1}{2}$.

🔥 **Câu 36.** Với giá trị nào của m thì bất phương trình $x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm?

- A. $m < 1$. B. $m > 1$. C. $m < \frac{1}{4}$. D. $m > \frac{1}{4}$.

🔥 **Câu 37.** Cho $f(x) = -2x^2 + (m+2)x + m - 4$. Tìm m để $f(x)$ âm với mọi x .

A. $-14 < m < 2$.

B. $-14 \leq m \leq 2$.

C. $-2 < m < 14$.

D. $m < -14$ hoặc $m > 2$.

🔥 **Câu 38.** Bất phương trình $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x+2}$ có nghiệm là

A. $\left(-2, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup (0, 2) \cup \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$.

B. $x \notin \{-2, 0, 2\}$.

C. $-2 < x < 0$.

D. $0 < x < 2$.

🔥 **Câu 39.** Tập nghiệm của bất phương trình $\left| \frac{3x}{x^2-4} \right| < 1$ là

A. $S = (-\infty, -4) \cup (-1, 1) \cup (4, +\infty)$.

B. $S = (-\infty, -4)$.

C. $S = (-1, 1)$.

D. $S = (4, +\infty)$.

🔥 **Câu 40.** Bất phương trình $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$ có nghiệm là

A. $3 < x \leq 5$.

B. $2 < x \leq 3$.

C. $-5 < x \leq -3$.

D. $-3 < x \leq -2$.

CHƯƠNG 5 THỐNG KÊ

BÀI 1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ THỐNG KÊ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ, TẦN SUẤT. BIỂU ĐỒ

① Số liệu thống kê

- Một tập con hữu hạn các đơn vị điều tra đgl một mẫu.
- Số phần tử của một mẫu đgl kích thước mẫu.
- Các giá trị của dấu hiệu thu được trên mẫu đgl một mẫu số liệu.

② Tần số của một giá trị là số lần xuất hiện của mỗi giá trị trong mẫu số liệu.

③ Tần suất: f_i của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số n_i và kích thước mẫu N : $f_i = \frac{n_i}{N}$ (thường viết tần suất dưới dạng %).

④ Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp

Giá trị	Tần số	Tần suất (%)	Lớp	Tần số	Tần suất (%)
x_1	n_1	f_1	$[x_1; x_2)$	n_1	f_1
x_2	n_2	f_2	$[x_2; x_3)$	n_2	f_2
...	...	...	...	...	...
x_k	n_k	f_k	$[x_k; x_{k+1})$	n_k	f_k
	N	100%		N	100%

⑤ Biểu đồ

- Biểu đồ hình cột
- Biểu đồ hình quạt
- Đường gấp khúc

2 SỐ TRUNG BÌNH CỘNG. SỐ TRUNG VỊ. MÔT

① Số trung bình cộng:

- Với mẫu số liệu kích thước N là $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số:

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{N}$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số ghép lớp:

$$\bar{x} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k}{N}$$

c_i là giá trị đại diện của lớp thứ i .

② Môđ: Môđ của một bảng phân bố tần số là giá trị có tần số lớn nhất và được kí hiệu là M_0 .

③ Số trung vị: Giả sử ta có một mẫu gồm N số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm (hoặc không tăng). Khi đó số trung vị M_e là:

- Số đứng giữa nếu N lẻ.
- Trung bình cộng của hai số đứng giữa nếu N chẵn.

Chú ý:

- Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu.
- Nếu các số liệu trong mẫu có sự chênh lệch quá lớn thì dùng số trung vị làm đại diện cho các số liệu của mẫu.
- Nếu quan tâm đến giá trị có tần số lớn nhất thì dùng một làm đại diện. Một mẫu số liệu có thể có nhiều một.

Dạng 1. Bảng phân bố tần số và tần suất

Để lập bảng phân bố tần số và tần suất từ bảng số liệu thống kê ban đầu, ta thực hiện các bước sau:

- ① Sắp thứ tự các giá trị trong các số liệu thống kê.
- ② Tính tần số n_i của các giá trị x_i bằng cách đếm số lần x_i xuất hiện.
- ③ Tính tần suất f_i của x_i theo công thức $f_i = \frac{n_i}{n}$.
- ④ Đặt các số liệu x_i , n_i , f_i vào bảng ta thu được bảng phân bố tần số và tần suất.

Ví dụ 1. Cho số liệu thống kê ghi trong bảng sau

Thời gian hoàn thành một sản phẩm ở một nhóm công nhân (đơn vị: phút)

42	42	42	42	44	44	44	44	44	45
45	45	45	45	45	45	45	45	45	45
45	45	45	45	45	45	45	45	45	54
54	54	50	50	50	50	48	48	48	48
48	48	48	48	48	48	50	50	50	50

- ① Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất của bảng trên.
- ② Trong 50 công nhân được khảo sát, những công nhân có thời gian hoàn thành một sản phẩm từ 45 phút đến 50 phút chiếm bao nhiêu phần trăm.

Lời giải:

Dạng 2. Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp

- ☑ Tần số của giá trị x_i (hay một lớp nào đó) là số lần xuất hiện n_i của x_i .
- ☑ Tần suất của giá trị x_i (hay một lớp nào đó) là tỉ số $\frac{x_i}{\sum x_i}$.

Ví dụ 1. Nhiệt độ trung bình (đơn vị: °C) của tháng 10 ở địa phương D từ năm 1971 đến 2000 được cho ở bảng sau

27,1	26,9	28,5	27,4	29,1	27,0	27,1	27,4	28,0	28,6
28,1	27,4	27,4	26,5	27,8	28,2	27,6	28,7	27,3	26,8
26,8	26,7	29,0	28,4	28,3	27,4	27,0	27,0	28,3	25,9

Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của bảng số liệu đã cho?

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

Câu 1. Điều tra về tuổi nghề của 30 công nhân được chọn ra từ 150 công nhân của một nhà máy A. Người ta thu được bảng số liệu ban đầu như sau:

7	2	5	9	7	4	3	8	10	4
2	4	4	5	6	7	7	5	4	1
9	4	14	2	8	5	5	7	3	8

Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất của bảng trên.

Câu 2. Khi điều tra về năng suất của một giống lúa mới, điều tra viên ghi lại năng suất (tạ / ha) của giống lúa đó trên 40 thửa ruộng có cùng diện tích 1 ha trong bảng sau:

30	32	32	34	38	36	38	36
40	30	40	40	34	38	36	36
38	40	30	40	32	30	30	30
40	38	38	34	34	32	32	36
34	40	34	30	38	38	32	32

- Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất của bảng trên.
- Trong 40 thửa ruộng được khảo sát, hãy cho biết những thửa ruộng có năng suất cao nhất chiếm bao nhiêu phần trăm.

Câu 3. Cho bảng số liệu thống kê năng suất lúa hè thu (tạ / ha) của 30 tỉnh như sau:

25	30	25	30	35	35	40	40	45	25
30	30	40	25	45	45	35	25	35	40
35	35	40	40	30	35	35	35	40	30

- ① Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất của bảng trên.
- ② Nhận xét về xu hướng tập trung của các số liệu thống kê.

Câu 4. Điều tra về số tiền mua sách (đơn vị: nghìn đồng) trong một năm của 50 sinh viên, người ta thu được bảng số liệu thống kê sau

203	37	141	43	55	303	252	758	321	123
425	27	72	87	215	358	521	863	284	279
608	302	703	68	149	327	127	125	489	234
498	968	350	57	75	503	712	440	185	404
98	552	101	612	333	451	901	875	789	202

- ① Từ bảng số liệu thống kê trên, lập bảng phân bố tần số ghép lớp theo các lớp $[0;99]$, $[100;199]$,... $[900;999]$.
- ② Xét top 20% sinh viên dùng nhiều tiền để mua sách nhất. Người mua ít nhất trong nhóm này mua hết bao nhiêu tiền?

Câu 5. Một cảnh sát giao thông ghi tốc độ (đơn vị: km/h) của 30 chiếc xe qua trạm như sau

53	47	59	66	36	69	83	77	42	57	51	60	78	63	46
63	42	55	63	48	75	60	58	80	44	59	60	75	49	63

Hãy lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp gồm 6 lớp với độ dài mỗi đoạn của lớp là 7.

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Để điều tra các con trong mỗi gia đình của một chung cư gồm 100 gia đình. Người ta chọn ra 20 gia đình ở tầng 4 và thu được mẫu số liệu sau đây:

4 4 2 5 3 5 1 1 2 3 1 1 2 3 4 1 3 2 3 2

Kích thước của mẫu là bao nhiêu?

- A. 5. B. 20. C. 4. D. 100.

Câu 2. Để điều tra các con trong mỗi gia đình của một chung cư gồm 100 gia đình. Người ta chọn ra 20 gia đình ở tầng 4 và thu được mẫu số liệu sau đây:

3 2 4 1 3 5 1 1 2 3 1 2 1 3 4 1 1 2 3 5

Dấu hiệu ở đây là gì?

- A. Số gia đình ở tầng 4. B. Số con ở mỗi gia đình.
C. Số tầng của chung cư. D. Số người trong mỗi gia đình.

Câu 3. Để điều tra các con trong mỗi gia đình của một chung cư gồm 100 gia đình . Người ta chọn ra 20 gia đình ở tầng 4 và thu được mẫu số liệu sau đây:

2 4 2 1 3 5 1 1 2 3 1 2 2 3 4 1 1 2 3 4

Có bao nhiêu giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên?

- A. 4. B. 20. C. 10. D. 5.

Câu 4. Điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kW.h) của 30 gia đình ở một khu phố A, người ta thu được mẫu số liệu sau:

165	85	65	65	70	50	45	100	45	100
100	100	100	90	53	70	141	42	50	150
40	70	84	59	75	57	133	45	65	75

- Dấu hiệu điều tra ở đây là gì?
- A. Điện năng tiêu thụ trong một tháng.

B. Điện năng tiêu thụ trong một ngày.

C. Điện năng tiêu thụ trong nửa tháng.

D. Điện năng tiêu thụ trong một năm.

🔥 **Câu 5.** Điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kW·h) của 30 gia đình ở một khu phố A, người ta thu được mẫu số liệu sau:

105	96	65	65	70	50	45	100	45	100
100	100	100	90	53	70	141	42	50	150
40	70	84	59	75	57	133	45	165	175

- Tần số của giá trị 100 là bao nhiêu?
- A. 5.

B. $\frac{1}{6}$.

C. 4.

D. $\frac{1}{5}$.

🔥 **Câu 6.** Điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kW·h) của 30 gia đình ở một khu phố A, người ta thu được mẫu số liệu sau:

87	85	65	65	70	50	45	100	45	100
100	89	100	90	53	70	141	42	50	150
40	70	84	59	75	57	133	45	65	75

- Tập hợp các đơn vị điều tra ở đây là gì?
- A. Là tập hợp 30 gia đình.

B. Là khu phố A.

C. Là tập hợp số điện năng tiêu thụ.

D. Là các con số được cho trong bảng số liệu trên.

Câu 7. Một cảnh sát giao thông ghi tốc độ (đơn vị: km/h) của 30 chiếc xe qua trạm như sau

40	41	41	80	40	52	52	52	60	55	60	60	62	55	55
60	65	60	65	65	70	70	65	75	75	70	55	70	41	65

Tìm tất cả các tốc độ có tần suất lớn nhất.

A. 41 km/h và 52 km/h.

B. 55 km/h và 70 km/h.

C. 60 km/h và 65 km/h.

D. 62 km/h và 80 km/h.

Câu 8. Một cảnh sát giao thông ghi tốc độ (đơn vị: km/h) của 30 chiếc xe qua trạm như sau

40	41	41	80	40	52	52	52	60	55	60	60	62	55	55
60	65	60	65	65	70	70	65	75	75	70	55	70	41	65

Những tốc độ nào sau đây có tần suất là 3,3%?

A. 41 km/h và 52 km/h.

B. 55 km/h và 70 km/h.

C. 60 km/h và 65 km/h.

D. 62 km/h và 80 km/h.

Câu 9. Tuổi thọ của 30 bóng đèn được thử (đơn vị: giờ) có kết quả như trong bảng sau

1180	1179	1187	1190	1187	1198	1179	1178	1185	1184
1178	1180	1185	1179	1180	1198	1179	1198	1178	1191
1185	1184	1179	1180	1184	1198	1180	1178	1179	1178

Tìm tuổi thọ của bóng đèn có tần suất lớn nhất.

A. 1187 giờ.

B. 1179 giờ.

C. 1185 giờ.

D. 1191 giờ.

Câu 10. Tuổi thọ của 30 bóng đèn được thử (đơn vị: giờ) có kết quả như trong bảng sau

1180	1179	1187	1190	1187	1198	1179	1178	1185	1184
1178	1180	1185	1179	1180	1198	1179	1198	1178	1191
1185	1184	1179	1180	1184	1198	1180	1178	1179	1178

Tìm tất cả tuổi thọ của bóng đèn có tần suất nhỏ nhất.

A. 1189 giờ và 1184 giờ.

B. 1179 giờ và 1187 giờ.

C. 1185 giờ và 1178 giờ.

D. 1190 giờ và 1191 giờ.

Câu 11. Điều tra thời gian hoàn thành một sản phẩm của 20 công nhân, người ta thu được mẫu số liệu như sau (đơn vị: phút).

10	12	13	15	11	13	16	18	19	21
23	21	15	17	16	15	20	13	16	11

Thời gian hoàn thành sản phẩm là 11 phút thì chiếm bao nhiêu phần trăm?

A. 10%.

B. 11%.

C. 12%.

D. 13%.

Câu 12. Để điều tra thời gian hoàn thành một sản phẩm của 20 công nhân, người ta thu được mẫu số liệu như sau (đơn vị: phút).

10	12	13	15	11	13	16	18	19	21
23	21	15	17	16	15	20	13	16	11

Thời gian hoàn thành sản phẩm ngắn nhất chiếm bao nhiêu phần trăm?

A. 6%.

B. 5%.

C. 7%.

D. 9%.

Câu 13. Điều tra số con trong gia đình ở một chung cư 100 gia đình. Người ta chọn 20 gia đình ở lầu 2 được mẫu số liệu như sau

2	4	3	1	2	3	3	5	1	2
1	2	2	3	4	1	1	3	2	4

Gia đình có 3 con chiếm bao nhiêu phần trăm trong số 20 hộ?

- A. 15%. B. 25%. C. 35%. D. 45%.

🔥 Câu 14. Điều tra số con trong gia đình ở một chung cư 100 gia đình. Người ta chọn 20 gia đình ở lầu 2 được mẫu số liệu như sau

2	4	3	1	2	3	3	5	1	2
1	2	2	3	4	1	1	3	2	4

Gia đình có đông con nhất chiếm bao nhiêu phần trăm trong số 20 hộ?

- A. 5%. B. 15%. C. 25%. D. 35%.

🔥 Câu 15. Điều tra về điện năng tiêu thụ điện trong 1 tháng của 16 hộ người ta thu được mẫu số liệu như sau (đơn vị: kW·h).

80	75	110	89	76	75	80	120
98	76	130	100	80	75	75	75

Điện năng tiêu thụ nào sau đây có tần suất là 31,25%?

- A. 76 kW·h. B. 80 kW·h. C. 75 kW·h. D. 100 kW·h.

🔥 Câu 16. Điều tra về điện năng tiêu thụ điện trong 1 tháng của 16 hộ người ta thu được mẫu số liệu như sau (đơn vị: kW·h).

80	75	110	89	76	75	80	120
98	76	130	100	80	75	75	75

Điện năng tiêu thụ nào sau đây có tần suất là 18,75%?

- A. 76 kW·h. B. 80 kW·h. C. 75 kW·h. D. 100 kW·h.

🔥 **Câu 17.** Một nhà nghiên cứu ghi lại tuổi của 40 bệnh nhân bị đau mắt hột với số liệu thống kê như bảng sau

17	18	16	21	18	21	13	25	17	18
22	16	23	22	17	22	16	25	23	22
18	23	18	16	21	23	18	25	14	21
21	18	21	19	25	16	17	18	16	23

Bệnh nhân lớn tuổi nhất chiếm bao nhiêu phần trăm trong số 40 bệnh nhân?
A. 5%. **B.** 10%. **C.** 15%. **D.** 20%.

🔥 **Câu 18.** Một nhà nghiên cứu ghi lại tuổi của 40 bệnh nhân bị đau mắt hột với số liệu thống kê như bảng sau

17	18	16	21	18	21	13	25	17	18
22	16	23	22	17	22	16	25	23	22
18	23	18	16	21	23	18	25	14	21
21	18	21	19	25	16	17	18	16	23

Bệnh nhân nhỏ tuổi nhất chiếm bao nhiêu phần trăm trong số 40 bệnh nhân?
A. 2,5%. **B.** 5%. **C.** 10%. **D.** 15%.

🔥 **Câu 19.** Số học sinh giỏi của 30 lớp ở trường trung học phổ thông A được cho ở bảng số liệu sau

1	2	3	1	6	5	5	4	10	11
2	11	0	6	2	0	11	0	4	5
6	10	2	0	11	10	7	6	6	2

Lớp không có học sinh giỏi chiếm bao nhiêu phần trăm trong số 30 lớp?
A. 13,3%. **B.** 6,7%. **C.** 16,7%. **D.** 10%.

Câu 20. Số học sinh giỏi của 30 lớp ở trường trung học phổ thông A được cho ở bảng số liệu sau

1	2	3	1	6	5	5	4	10	11
2	11	0	6	2	0	11	0	4	5
6	10	2	0	11	10	7	6	6	2

Lớp có 10 học sinh giỏi chiếm bao nhiêu phần trăm trong số 30 lớp?

A. 13,4%.

B. 13,3%.

C. 12%.

D. 6%.

Câu 21. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Lớp	[160;162]	[163;165]	[166;168]	[169;171]	[172;174]	Cộng
Tần số	6	12	10	5	3	$n = 36$

Tính độ dài của mỗi lớp.

A. 36.

B. 161.

C. 5.

D. 2.

Câu 22. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Lớp	[1;10]	[11;20]	[21;30]	[31;40]	[41;50]	Cộng
Tần số	10	5	6	3	12	$n = 36$

Tính giá trị đại diện lần lượt của mỗi lớp.

A. 5,5; 15,5; 25,5; 35,5; 45,5.

B. 10; 5; 6; 3; 12.

C. 1; 11; 21; 31; 41.

D. 10; 20; 30; 40; 50.

🔥 **Câu 23.** Tuổi các học viên của một lớp học tiếng Anh buổi tối ở một trung tâm được ghi lại trong bảng tần số ghép lớp bên dưới. Tính kích thước mẫu n .

Lớp	[15; 19]	[20; 24]	[25; 29]	[30; 34]	[35; 39]	Cộng
Tần số	10	12	14	9	5	n

- A. $n = 39$.
- B. $n = 50$.
- C. $n = 24$.
- D. $n = 5$.

🔥 **Câu 24.** Kết quả của một kì thi tiếng Anh của 32 học sinh được cho bởi bảng phân bố tần số bên cạnh (thang điểm 100). Tính x .

Lớp	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100]	Cộng
Tần số	4	6	x	6	3	2	$n = 32$

- A. $x = 11$.
- B. $x = 65$.
- C. $x = 10$.
- D. $x = 9$.

🔥 **Câu 25.** Nhiệt độ trung bình (đơn vị: °C) của tháng 5 ở địa phương A từ năm 1961 đến 1990 được cho ở bảng sau

27,1	26,9	28,5	27,4	29,1	27,0	27,1	27,4	28,0	28,6
28,1	27,4	27,4	26,5	27,8	28,2	27,6	28,7	27,3	26,8
26,8	26,7	29,0	28,4	28,3	27,4	27,0	27,0	28,3	25,9

Trong 4 bảng sau đây, bảng nào là bảng phân bố tần số ghép lớp của bảng số liệu đã cho?

A.

Lớp	Tần số
[25; 27)	6
[27; 29)	21
[29; 31]	3
Cộng	$n = 30$

C.

Lớp	Tần số
[25; 27)	7
[27; 29)	22
[29; 31]	1
Cộng	$n = 30$

B.

Lớp	Tần số
[25; 27)	7
[27; 29)	21
[29; 31]	2
Cộng	$n = 30$

D.

Lớp	Tần số
[25; 27)	6
[27; 29)	22
[29; 31]	2
Cộng	$n = 30$

🔥 Câu 26. Thành tích chạy 50 m (đơn vị: giây) của học sinh lớp 10A ở một trường THPT được cho ở bảng phân bố tần suất sau

Lớp	Tần suất (%)
[6,0; 6,5)	6,06
[6,5; 7,0)	15,15
[7,0; 7,5)	30,30
[7,5; 8,0)	27,27
[8,0; 8,5)	12,12
[8,5; 9,0]	9,10
Cộng	100 (%)

Trong lớp 10A, số học sinh chạy 50 m hết từ 7 giây đến dưới 8,5 giây chiếm bao nhiêu phần trăm?

A. 12,12%.

B. 90,90%.

C. 69,69%.

D. 84,84%.

🔥 Câu 27. Giá bán 80 lô đất (đơn vị: triệu đồng) được ghi lại trong bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Lớp	Tần số
[79,5; 84,5)	5
[84,5; 89,5)	10
[89,5; 94,5)	15
[94,5; 99,5)	26
[99,5; 104,5)	13
[104,5; 109,5)	7
[109,5; 114,5]	4
Cộng	$n = 80$

Tính tần suất của lớp [94,5; 99,5) (làm tròn một chữ số thập phân).

A. 32,5%.

B. 24,8%.

C. 26,0%.

D. 56,0%.

🔥 **Câu 28.** Giá bán (đơn vị: nghìn đồng) 120 mặt hàng ở một cửa hàng được thống kê trong bảng tần suất ghép lớp sau

Lớp	[40;49]	[50;59]	[60;69]	[70;79]	[80;89]	Cộng
Tần suất (%)	5,00	10,00	31,67	38,33	15,00	100

Ở cửa hàng này, có bao nhiêu mặt hàng có giá bán từ 60 nghìn đồng đến 79 nghìn đồng?
A. 84. B. 70. C. 39. D. 46.

🔥 **Câu 29.** Thống kê điểm kiểm tra một tiết chương 5 môn Toán của 35 học sinh lớp 10A, thấy phổ điểm rơi vào 5 giá trị khác nhau là 5, 6, 7, 8, 9, 10. Biết rằng số điểm 8 chiếm 20%, tính số học sinh đạt 8 điểm.
A. 5. B. 6. C. 8. D. 7.

🔥 **Câu 30.** Điều tra số con trong mỗi gia đình của n hộ gia đình thấy có 8 hộ gia đình có 2 con và chiếm tỉ lệ 40%. Tìm n .
A. $n = 20$. B. $n = 5$. C. $n = 40$. D. $n = 32$.

🔥 **Câu 31.** Số liệu thống kê qua điều tra dấu hiệu X , được cho như trong bảng sau

Giá trị dấu hiệu (X)	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

Khẳng định nào sau đây luôn đúng?
A. Dấu hiệu X có tất cả 3 giá trị khác nhau.
B. Dấu hiệu X có tất cả n giá trị.

C. Số các giá trị của dấu hiệu X là $n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

D. Số các giá trị của dấu hiệu X là $x_1 + x_2 + \dots + x_k$.

Câu 32. Số liệu thống kê qua điều tra dấu hiệu X , được cho như trong bảng sau

Lớp giá trị dấu hiệu (X)	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	$\dots$	$[x_{k-1}; x_k]$
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

A. Dấu hiệu X có các giá trị được chia thành 3 lớp.

B. Dấu hiệu X có các giá trị được chia thành x_k lớp.

C. Dấu hiệu X có các giá trị được chia thành n_k lớp.

D. Dấu hiệu X có các giá trị được chia thành $k - 1$ lớp.

Câu 33. Điều tra dấu hiệu X , người ta chọn một mẫu kích thước N và thu được số liệu thống kê như trong bảng sau

Giá trị dấu hiệu (X)	x_1	x_2	$\dots$	x_k
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

A. $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$.

B. $x_1 + x_2 + \dots + x_k = N$.

C. $n_1 + n_2 + \dots + x_k = N$.

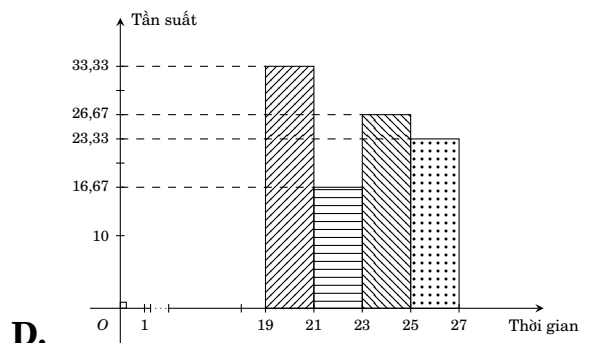
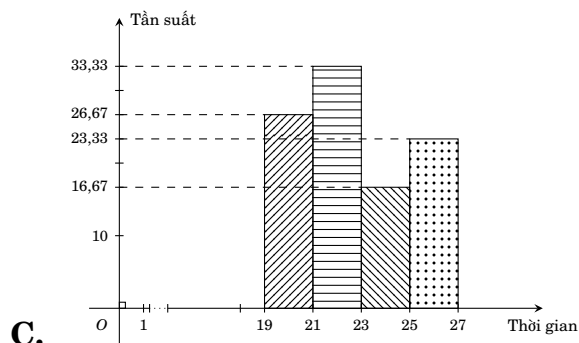
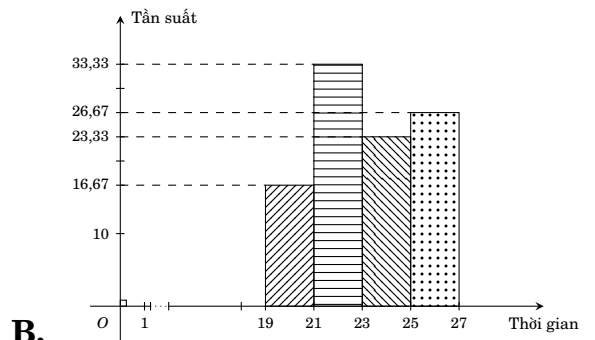
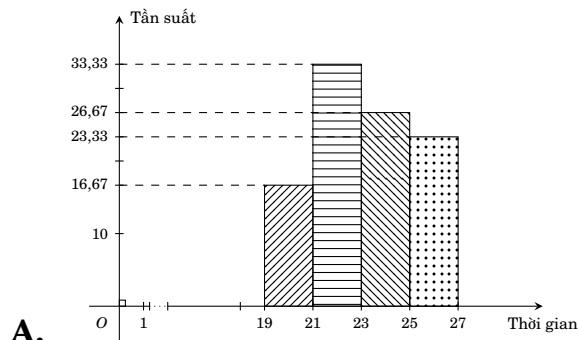
D. $n_1 + x_2 + \dots + n_k = N$.

Câu 34. Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp sau

Thời gian bạn A đi từ nhà đến trường trong 30 ngày

Lớp thời gian (phút)	$[19; 21)$	$[21; 23)$	$[23; 25)$	$[25; 27]$	Cộng
Tần suất (%)	16,67	33,33	26,67	23,33	100%

Biểu đồ nào sau đây là biểu đồ tần suất hình cột về thời gian đi từ nhà đến trường của bạn A trong 30 ngày?



Câu 35. Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp sau

Thời gian bạn sử dụng của 1 bóng đèn trong 30 ngày

Lớp thời gian (phút)	[190;210)	[210;230)	[230;250)	[250;270]	Cộng
Tần suất (%)	15	40	25	20	100%

Trục nằm ngang của biểu đồ tần suất hình cột về thời gian sử dụng của 1 bóng đèn trong 30 ngày biểu diễn giá trị gì?

A. Tần số.

B. Số ngày sử dụng.

C. Tần suất.

D. Thời gian sử dụng trong 1 ngày.

Câu 36. Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp sau

Số hộp mỹ phẩm bán được trong 30 ngày của cửa hàng A

Số sản phẩm (cái)	[100;120)	[120;140)	[140;150)	[150;160]	Cộng
Tần suất (%)	13	37	30	20	100%

Trục đứng của biểu đồ tần suất hình cột về số hộp mỹ phẩm bán được trong 30 ngày của cửa hàng A biểu diễn giá trị gì?

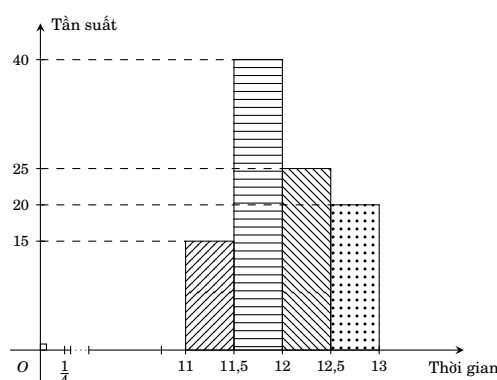
A. Tần số.

B. Số mỹ phẩm bán được trong một ngày.

C. Tần suất.

D. Số ngày.

Câu 37. Cho biểu đồ tần suất hình cột về thời gian (giây) bạn A chạy 100 m trong 20 lần như hình vẽ



Thời gian bạn A chạy 100 m từ 11 giây đến dưới 11,5 giây có tần suất là bao nhiêu?

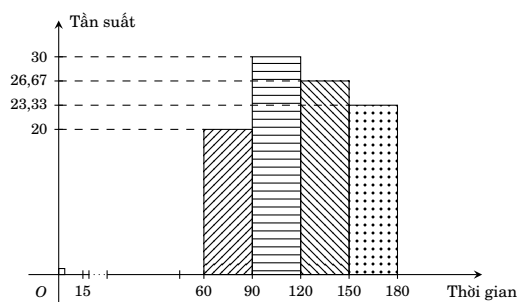
A. 15%.

B. 20%.

C. 25%.

D. 40%.

Câu 38. Cho biểu đồ tần suất hình cột về thời gian (phút) khách hàng sử dụng máy tính số 10 trong 30 ngày của một quán NET như hình vẽ



Thời gian khách hàng sử dụng máy tính số 10 có tần suất cao nhất nằm trong khoảng nào sau đây?

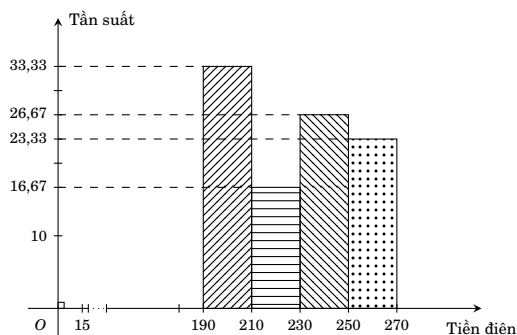
A. Từ 60 phút đến dưới 90 phút.

B. Từ 90 phút đến dưới 120 phút.

C. Từ 120 phút đến dưới 150 phút.

D. Từ 150 phút đến dưới 180 phút.

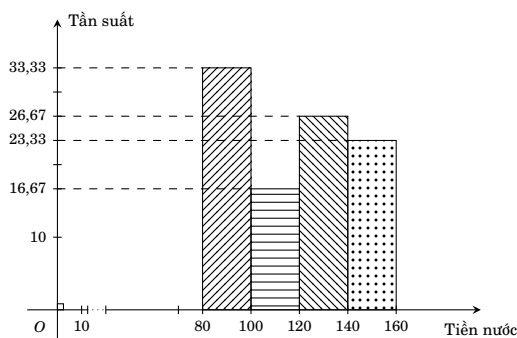
🔥 **Câu 39.** Cho biểu đồ tần suất hình cột về tiền điện (nghìn đồng) phải trả hàng tháng của hộ gia đình X trong một năm như hình vẽ



Số tiền điện mà hộ gia đình X phải trả hàng tháng có tần suất thấp nhất nằm trong khoảng nào sau đây?

- A. Từ 190 nghìn đồng đến dưới 210 nghìn đồng.
- B. Từ 210 nghìn đồng đến dưới 230 nghìn đồng.
- C. Từ 230 nghìn đồng đến dưới 250 nghìn đồng.
- D. Từ 250 nghìn đồng đến dưới 270 nghìn đồng.

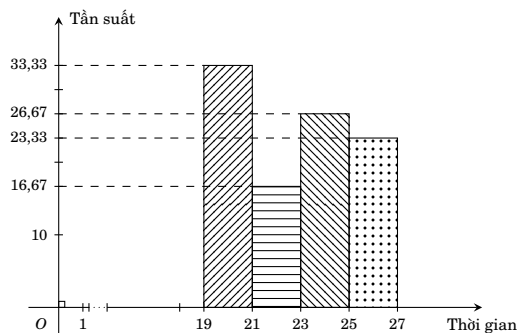
🔥 **Câu 40.** Cho biểu đồ tần suất hình cột về tiền nước (nghìn đồng) phải trả hàng tháng của hộ gia đình X trong một năm như hình vẽ



Số tiền nước mà hộ gia đình X phải trả hàng tháng nằm trong khoảng nào sau đây?

- A. Từ 80 nghìn đồng đến dưới 100 nghìn đồng.
- B. Từ 100 nghìn đồng đến dưới 120 nghìn đồng.
- C. Từ 80 nghìn đồng đến dưới 140 nghìn đồng.
- D. Từ 80 nghìn đồng đến 160 nghìn đồng.

Câu 41. Cho biểu đồ tần suất hình cột về thời gian (phút) bạn A đi từ nhà đến trường trong 30 ngày như hình vẽ



Thời gian bạn A đi từ nhà đến trường nằm trong khoảng từ 21 đến dưới 23 phút có tần suất ít hơn thời gian bạn A đi từ nhà đến trường nằm trong khoảng từ 19 đến dưới 21 phút bao nhiêu phần trăm?

- A. 16,66%. B. 16,67%. C. 23,33%. D. 33,33%.

Câu 42. Cho các số liệu thống kê được ghi trong bảng sau
Thời gian hoàn thành một sản phẩm ở một nhóm công nhân (đơn vị: phút)

3	4	3	4	6	7	8	10
2	3	5	4	3	2	4	7
2	3	4	6	5	7	8	5

Tính thời gian (làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy) trung bình hoàn thành một sản phẩm của nhóm công nhân đó.

- A. $\bar{x} = 5,23$. B. $\bar{x} = 6,79$. C. $\bar{x} = 4,79$. D. $\bar{x} = 3,79$.

Câu 43. Cho các số liệu thống kê được ghi trong bảng sau
Điểm kiểm tra 45' môn toán của 30 học sinh lớp 11A1

1	2	6	5	8	8	9	10	6	5
2	8	7	5	5	4	9	10	3	4
3	6	4	2	1	7	8	7	2	1

Tính gần đúng (làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy) số trung bình cộng $\bar{x}$ điểm của 30 học sinh nói trên.

A. $\bar{x} \approx 5,27$.B. $\bar{x} \approx 6,27$.C. $\bar{x} \approx 4,27$.D. $\bar{x} \approx 7,27$.

🔥 **Câu 44.** Cho các số liệu thống kê được ghi trong bảng sau
Điểm kiểm tra 45' môn toán của 30 học sinh lớp 11A1

1	2	6	5	8	8	9	10	6	5
2	8	7	5	5	4	9	10	3	4
3	6	4	2	1	7	8	7	2	1

Tìm số trung vị M_e điểm của 30 học sinh nói trên.

A. $M_e = 3$.B. $M_e = 4$.C. $M_e = 5$.D. $M_e = 6$.

🔥 **Câu 45.** Số áo bán được của một cửa hàng được cho bởi bảng sau

Cỡ áo	36	37	38	39	40	41	42	Cộng
Tần số	13	45	126	110	126	40	5	465

Tính số trung vị M_e của áo bán được trong cửa hàng đó.

A. $M_e = 37$.B. $M_e = 38$.C. $M_e = 39$.D. $M_e = 40$.

🔥 **Câu 46.** Cho biết tình hình thu hoạch lúa ở xã A được thống kê như sau

Làng	A	B	C	D	E
Diện tích trồng lúa(ha)	150	130	120	110	160
Năng suất lúa(tạ/ha)	40	45	38	35	30

Tính năng suất trung bình $\bar{x}$ (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy) của xã đó.

A. $\bar{x} = 37,40$.B. $\bar{x} = 38,05$.C. $\bar{x} = 36,36$.D. $\bar{x} = 39,50$.

Câu 47. Bảng số liệu sau đây thống kê thời gian hoàn thành sản phẩm ở một nhóm công nhân

Thời gian(phút)	42	44	45	48	50	54
Tần số	3	12	13	11	6	5

Tính giá trị trung bình $\bar{x}$ (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy) về thời gian hoàn thành một sản phẩm của nhóm công nhân đó.

A. $\bar{x} = 46,74$.

B. $\bar{x} = 45,74$.

C. $\bar{x} = 47,74$.

D. $\bar{x} = 44,74$.

Câu 48. Bảng số liệu sau đây thống kê thời gian hoàn thành sản phẩm ở một nhóm công nhân

Thời gian(phút)	42	44	45	48	50	54
Tần số	3	12	13	11	6	5

Tính số trung vị M_e về thời gian hoàn thành một sản phẩm của nhóm công nhân đó.

A. $M_e = 47$.

B. $M_e = 44$.

C. $M_e = 46$.

D. $M_e = 45$.

Câu 49. Khối lượng 30 quả trứng gà được cho bởi bảng sau

Khối lượng(g)	25	30	35	40	45	50	Cộng
Tần số	3	5	10	6	4	2	30

Tính số trung bình $\bar{x}$ (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy) của bảng nói trên.

A. $\bar{x} = 36,5$.

B. $\bar{x} = 35,5$.

C. $\bar{x} = 37,5$.

D. $\bar{x} = 34,5$.

🔥 **Câu 50.** Khối lượng 30 quả trứng gà của được cho bởi bảng sau

Khối lượng(g)	25	30	35	40	45	50	Cộng
Tần số	3	5	10	6	4	2	30

Tính số trung vị M_e của bảng nói trên.
A. $M_e = 30$. B. $M_e = 35$. C. $M_e = 40$. D. $M_e = 45$.

🔥 **Câu 51.** Bảng xếp loại học lực của học sinh lớp 11A2 trường THPT Bắc Thăng Long năm học 2012 – 2013 được cho như sau

Học lực	Kém	Yếu	Trung Bình	Khá	Giỏi	Tổng
Điểm	[0;3)	[3;5)	[5;6,5)	[6,5;8)	[8;10]	
Số học sinh	3	12	13	11	6	45

Xác định số trung bình $\bar{x}$ điểm của 45 học sinh nói trên
A. $\bar{x} = 5,8$. B. $\bar{x} = 5,5$. C. $\bar{x} = 6,0$. D. $\bar{x} = 5$.

🔥 **Câu 52.** Cho một mẫu số liệu dưới dạng bảng phân bố tần số. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?
A. Một của mẫu số liệu là giá trị có tần số nhỏ nhất.
B. Một của mẫu số liệu là giá trị có tần số lớn nhất.
C. Một của mẫu số liệu là giá trị lớn nhất trong mẫu số liệu.
D. Mỗi mẫu số liệu chỉ có duy nhất một một.

🔥 **Câu 53.** Điều tra tiền lương (nghìn đồng) hàng tháng của 30 công nhân của một xưởng may, ta có bảng phân bố tần số sau

Tiền lương	300	500	700	800	900	1000	Cộng
Tần số	3	5	6	5	6	5	30

Tìm tất cả các một M_O của bảng phân bố tần số đã cho.

A. $M_O = 300$.

B. $M_O = 1000$.

C. $M_O^{(1)} = 800$ và $M_O^{(2)} = 1000$.

D. $M_O^{(1)} = 700$ và $M_O^{(2)} = 900$.

♣ Câu 54. Tiền thưởng (triệu đồng) cho 43 cán bộ và nhân viên trong công ti X được thống kê như sau

Tiền thưởng	2	3	4	5	6	Cộng
Tần số	5	15	10	6	7	43

Một M_O của bảng phân bố tần số đã cho là

A. $M_O = 2$.

B. $M_O = 3$.

C. $M_O = 5$.

D. $M_O = 6$.

♣ Câu 55. Tuổi của 169 đoàn viên tại một khu dân cư được thống kê bởi bảng phân bố tần số sau

Tuổi	18	19	20	21	22	Cộng
Tần số	10	50	70	29	10	169

Tính một M_O của bảng phân bố tần số đã cho.

A. $M_O = 18$.

B. $M_O = 22$.

C. $M_O = 20$.

D. $M_O = 19$.

♣ Câu 56. Một cửa hàng bán quần áo thống kê số áo sơ mi nam đã bán ra trong một quý theo các cỡ khác nhau và có được bảng phân bố tần số sau

Cỡ áo	36	37	38	39	40	41	42
Số áo bán được	13	45	110	184	126	40	5

Mốt M_O của bảng phân bố tần số đã cho là

A. $M_O = 42$.B. $M_O = 39$.C. $M_O = 38$.D. $M_O = 36$.

🔥 **Câu 57.** Kết quả của 100 học sinh dự kì thi học sinh giỏi Toán (thang điểm là 20) được cho trong bảng sau đây

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Mốt M_O của bảng số liệu thống kê đã cho là

A. $M_O = 9$.B. $M_O = 19$.C. $M_O = 15$.D. $M_O = 16$.

🔥 **Câu 58.** Người ta đã tiến hành thăm dò ý kiến của khách hàng về các mẫu 1,2,3,4,5 của một loại sản phẩm mới được sản xuất ở nhà máy X. Dưới đây là bảng phân bố tần số theo số phiếu tín nhiệm dành cho các mẫu kể trên.

Mẫu	1	2	3	4	5	Cộng
Tần số	2100	1860	1950	2000		10000

Trong sản xuất, nhà máy nên ưu tiên cho mẫu nào?

A. Mẫu 1.B. Mẫu 3.C. Mẫu 4.D. Mẫu 5.

🔥 **Câu 59.** Cho bảng phân bố tần suất

Giá trị	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Cộng
Tần suất	6,6%	10%	16,6%	16,6%	13,3%	13,3%	10%	10%	3,3%	100%

Tính một M_O của bảng số liệu thống kê đã cho.

A. $M_O = 8$.B. $M_O^{(1)} = 2$ và $M_O^{(2)} = 3$.C. $M_O^{(1)} = 4$ và $M_O^{(2)} = 5$.D. $M_O = 7$.

🔥 Câu 60. Tuổi của top 20 vận động viên giành được nhiều huy chương nhất cho đoàn Thể thao Việt Nam tại SEA Games 29 được thống kê trong bảng số liệu sau

21	21	20	24	26	22	24	26	24	25
26	24	29	20	24	31	22	25	15	26

Mốt M_O của bảng số liệu đã cho là

A. $M_O = 15$.

B. $M_O = 31$.

C. $M_O = 24$.

D. $M_O = 26$.

BÀI 2. PHƯƠNG SAI. ĐỘ LỆCH CHUẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Để đo mức độ chênh lệch (độ phân tán) giữa các giá trị của mẫu số liệu so với số trung bình ta dùng phương sai s^2 và độ lệch chuẩn $s = \sqrt{s^2}$.

✓ Với mẫu số liệu kích thước N là $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$:

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

✓ Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số, tần suất:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^k n_i x_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k f_i x_i \right)^2 \end{aligned}$$

✓ Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i (c_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i c_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^k n_i c_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^k f_i (c_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k f_i c_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k f_i c_i \right)^2 \end{aligned}$$

(c_i, n_i, f_i là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i ; N là số các số liệu thống kê $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$).

Chú ý:

- ✓ Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì độ phân tán của các số liệu thống kê càng lớn.
- ! ✓ Phương sai s^2 và độ lệch chuẩn s đều được dùng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình cộng). Nhưng khi cần chú ý đến đơn vị đo thì ta dùng s vì s có cùng đơn vị đo với dấu hiệu được nghiên cứu.

2 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng số liệu KHÔNG ghép lớp

Để tính phương sai s^2 của một mẫu số liệu $\{x_1; x_2; \dots; x_N\}$ ta thực hiện cách sau:

- ① Tính số trung bình: $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$.
- ② Tính các độ lệch: $x_i - \bar{x}$, $i = 1, N$.
- ③ Tính các phương sai theo công thức $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$

Tính độ lệch chuẩn s : Độ lệch chuẩn s bằng căn bậc hai của phương sai.

Ví dụ 1. Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số dưới đây:

Sản lượng (x)	20	21	22	23	24	
Tần số (n)	5	8	11	10	6	$N = 40$

- ① Tính sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng?
- ② Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng số liệu ghép lớp

Công thức:

$$s^2 = \frac{1}{n} [n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(c_k - \bar{x})^2]$$

trong đó c_i ; n_i ; f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i ; c_i được tính bằng trung bình cộng của 2 giá trị đầu mút của lớp i , n là số các số liệu thống kê ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$), $\bar{x}$ là số trung bình cộng của các số trong số liệu thống kê đã cho. Độ lệch chuẩn s được tính bởi công thức $s = \sqrt{s^2}$.

Ví dụ 1. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Độ dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành

Lớp của độ dài (cm)	Tần số
[10;20)	8
[20;30)	18
[30;40)	24
[40;50]	10
Cộng	60

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

🔥 Câu 1. 100 học sinh tham gia kì thi học sinh giỏi toán (thang điểm là 20). Kết quả được cho trong bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	$N = 100$

- ① Tính số điểm trung bình.
- ② Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

.....

.....

.....

.....

🔥 Câu 2. Kết quả thi kết thúc học kì một của bạn Hoa được ghi lại trong bảng sau:

Văn	Địa	Lý	Hóa	Toán	Anh văn
6,0	8,0	7,5	8,5	7,0	7,5

Tìm số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

.....

.....

.....

.....

🔥 Câu 3. Trong sổ theo dõi bán hàng ở một cửa hàng bán xe máy có bảng sau:

Số xe bán trong ngày	0	1	2	3	4	5
Tần số	2	13	15	12	7	3

Tìm số xe trung bình bán được trong ngày. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Theo dõi số bao xi măng bán ra trong 22 ngày tại một cửa hàng bán vật liệu xây dựng ta có bảng sau:

47	54	43	50	61	36	65	54	43	50	62
59	36	45	45	33	53	67	21	45	50	36

Tìm số trung bình. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Câu 5. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Khối lượng của 30 củ khoai tây	
Lớp của khối lượng (g)	Tần số
[70;80)	3
[80;90)	6
[90;100)	12
[100;110)	6
[110;120)	3
Cộng	30

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho.

Câu 6. Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp sau

Chiều cao của 35 cây bạch đàn	
Lớp của chiều cao (m)	Tần suất (%)
[6,5;7,0)	5,7
[7,0;7,5)	11,4
[7,5;8,0)	25,7
[8,0;8,5)	31,4
[8,5;9,0)	17,2
[9,0;9,5)	8,6
Cộng	100

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố tần suất ghép lớp đã cho.

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khẳng định nào dưới đây đúng khi nói về phương sai và độ lệch chuẩn?

- A. Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu. Nó là một số đặc trưng quan trọng của mẫu số liệu.
- B. Phương sai và độ lệch chuẩn được dùng làm đại diện cho tần số. Nó là một số đặc trưng quan trọng của tần số.
- C. Phương sai và độ lệch chuẩn đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì độ phân tán càng nhỏ.
- D. Phương sai và độ lệch chuẩn đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì độ phân tán càng lớn.

Câu 2. Cho dãy số liệu thống kê: 1,2,3,4,5,6,7. Phương sai của các số liệu thống kê đã cho là.

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Câu 3. Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số sau đây.

Sản lượng (x)	20	21	22	23	24	
Tần số (n)	5	8	11	10	6	$N = 40$

Tính độ lệch chuẩn.

- A. $s \approx 1,23$ (tạ).
- B. $s \approx 1,24$ (tạ).
- C. $s \approx 1,25$ (tạ).
- D. $s \approx 1,26$ (tạ).

Câu 4. Tiền thưởng (đơn vị là triệu đồng) cho cán bộ và nhân viên trong một công ty được trình bày trong bảng phân bố tần số sau đây.

Tiền thưởng (x)	2	3	4	5	6	Cộng
Tần số	5	15	10	6	7	43

Tính độ lệch chuẩn.

A. $s \approx 1,23$ (triệu đồng).

B. $s \approx 1,24$ (triệu đồng).

C. $s \approx 1,25$ (triệu đồng).

D. $s \approx 1,26$ (triệu đồng).

Câu 5. Bảng sau đây trích từ sổ theo dõi bán hàng của một cửa hàng bán xe máy.

Số xe bán trong ngày	0	1	2	3	4	5
Tần số	2	13	15	12	7	3

Tính độ lệch chuẩn.

A. $s \approx 1,25$ (xe).

B. $s \approx 1,26$ (xe).

C. $s \approx 1,27$ (xe).

D. $s \approx 1,28$ (xe).

Câu 6. Kết quả thi môn Ngữ văn của một trường Trung học phổ thông được cho trong bảng tần số sau đây.

Điểm thi	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	3	7	12	14	3	1	40

Tính độ lệch chuẩn.

A. $s \approx 1,11$ (điểm).

B. $s \approx 1,12$ (điểm).

C. $s \approx 1,13$ (điểm).

D. $s \approx 1,14$ (điểm).

Câu 7. Người ta phân 20 con cá mè thành 4 lớp dựa trên khối lượng của chúng (đơn vị là kg). Ta có bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây.

Lớp khối lượng (kg)	Tần số
[0,6;0,8)	4
[0,8;1,0)	6
[1,0;1,2)	6
[1,2;1,4]	4
	$N = 20$

Tính phương sai.

A. $s^2 = 0,042$.B. $s^2 = 0,043$.C. $s^2 = 0,044$.D. $s^2 = 0,045$.

🔥 **Câu 8.** Người ta tiến hành phỏng vấn một số người về một bộ phim mới chiếu trên truyền hình. Người điều tra yêu cầu cho điểm bộ phim (thang điểm là 100). Kết quả được trình bày trong bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây.

Lớp	Tần số
[50;60)	2
[60;70)	6
[70;80)	10
[80;90)	8
[90;100)	4
	$N = 30$

Tính phương sai.

A. $s^2 \approx 122,66$.B. $s^2 \approx 122,67$.C. $s^2 \approx 122,68$.D. $s^2 \approx 122,69$.

🔥 **Câu 9.** Cho dãy số liệu thống kê: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Tính phương sai s_x^2 của các số liệu thống kê đã cho.

A. $s_x^2 = 3$.B. $s_x^2 = 2$.C. $s_x^2 = 5$.D. $s_x^2 = 4$.

Câu 10. Cho biết giá trị thành phẩm quy ra tiền (nghìn đồng) trong một tuần lao động của 7 công nhân là

180, 190, 190, 200, 210, 210, 220.

Phương sai s_x^2 của dãy trên gần với số nào nhất?

- A. 200. B. 171. C. 175. D. 190.

Câu 11. Cho biết giá trị thành phẩm quy ra tiền (nghìn đồng) trong một tuần lao động của 7 công nhân là

150, 170, 170, 200, 230, 230, 250.

Phương sai s_x^2 của dãy trên gần với số nào nhất?

- A. 1200. B. 1230. C. 1228. D. 1225.

Câu 12. Tiền thưởng (triệu đồng) cho cán bộ và nhân viên trong một công ti cho bởi bảng phân bố tần số sau

Tiền thưởng	2	8	4	5	6
Tần số	5	15	10	6	7

Phương sai của bảng số liệu trên thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. (1,3; 1,4). B. (1,4; 1,5). C. (1,5; 1,6). D. (1,6; 1,7).

Câu 13. Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Toán (thang điểm là 20). Kết quả được cho bởi bảng sau đây

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Tính phương sai s_x^2 của bảng trên.

A. $s_x^2 \approx 3,96$.

B. $s_x^2 \approx 1,96$.

C. $s_x^2 \approx 1,99$.

D. $s_x^2 \approx 3,69$.

🔥 **Câu 14.** Bảng sau đây trích từ sổ theo dõi bán hàng của một cửa hàng bán xe máy.

Số xe bán trong ngày	0	1	2	3	4	5
Tần số	2	13	15	12	7	3

Tính độ lệch chuẩn s của bảng trên.

A. $s \approx 1,57$.

B. $s \approx 2,35$.

C. $s \approx 1,25$.

D. $s \approx 1,75$.

🔥 **Câu 15.** Số liệu sau đây cho ta lãi (quy tròn) hàng tháng của một cửa hàng trong năm 2005. Đơn vị là triệu đồng.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lãi	12	15	18	13	13	16	18	14	15	17	20	17

Tính phương sai s_x^2 của bảng trên.

A. $s_x^2 \approx 5,29$.

B. $s_x^2 \approx 5,39$.

C. $s_x^2 \approx 5,19$.

D. $s_x^2 \approx 2,32$.

🔥 **Câu 16.** Khách đến tham quan một điểm du lịch trong mỗi tháng được thống kê trong bảng sau đây.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Khách	430	560	450	550	760	430	525	110	635	450	800	950

Tính độ lệch chuẩn s của bảng trên.

A. $s \approx 211$.

B. $s \approx 209,3$.

C. $s \approx 403,54$.

D. $s \approx 207,52$.

🔥 **Câu 17.** Độ lệch chuẩn bằng

- A. bình phương của phương sai.
C. một nửa của phương sai.

- B. căn bậc hai số học của phương sai.
D. hai lần phương sai.

🔥 **Câu 18.** Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số sau đây

Sản lượng	20	21	22	23	24
Tần số	5	8	11	10	6

Tính độ lệch chuẩn s của bảng trên.

- A. $s \approx 1,54$. B. $s \approx 0,34$. C. $s \approx 0,43$. D. $s \approx 1,24$.

🔥 **Câu 19.** Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

- A. Phương sai luôn là một số không âm.
B. Phương sai không có đơn vị.
C. Phương sai càng lớn thì độ phân tán càng lớn.
D. Độ lệch chuẩn càng lớn thì độ phân tán càng lớn.

CHƯƠNG 6

CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

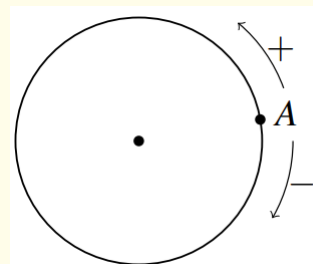
BÀI 1. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 KHÁI NIỆM CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC.

Định nghĩa 1. Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại gọi là chiều âm.

Quy ước: chiều dương là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ.



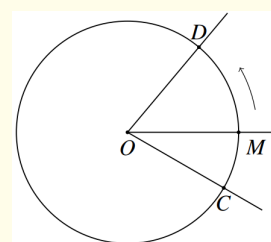
Định nghĩa 2. Trên đường tròn định hướng, cho hai điểm A và B . Một điểm M di chuyển trên đường tròn luôn theo một chiều (dương hoặc âm) từ A đến B tạo nên một **cung lượng giác** có điểm đầu là A , điểm cuối là B .

- ✓ Với hai điểm A, B đã cho trên đường tròn định hướng, ta có vô số cung lượng giác điểm đầu A , điểm cuối B . Mỗi cung như vậy đều được kí hiệu là $\widehat{AB}$.
- ! ✓ Trên một đường tròn định hướng, lấy hai điểm A và B thì
 - ☉ Kí hiệu $\widehat{AB}$ chỉ một cung hình học (cung lớn hoặc cung bé) hoàn toàn xác định.
 - ☉ Kí hiệu $\widehat{AB}$ chỉ một cung lượng giác điểm đầu A , điểm cuối B .

Định nghĩa 3. Trên đường tròn định hướng, cho cung lượng giác $\widehat{CD}$. Một điểm M chuyển động trên đường tròn từ C đến D tạo nên cung lượng giác $\widehat{CD}$ nói trên.

Khi đó, tia OM quay xung quanh gốc O từ vị trí OC đến vị trí OD . Ta nói OM tạo ra một góc lượng giác có tia đầu là OC , tia cuối là OD .

Kí hiệu (OC, OD) .

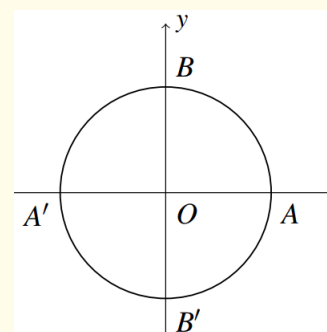


Định nghĩa 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường tròn định hướng tâm O bán kính $R = 1$.

Đường tròn cắt 2 trục tọa độ tại $A(1;0)$, $A'(-1;0)$, $B(0;1)$, $B'(0;-1)$.

Ta lấy A làm điểm gốc của đường tròn đó.

Đường tròn xác định như trên gọi là đường tròn lượng giác.



2 SỐ ĐO CỦA CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC.

✓ Độ và radian.

— Đơn vị radian: Trên đường tròn tùy ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là cung có số đo 1 rad.

— Quan hệ giữa độ và radian $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ và $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

— Độ dài của một cung tròn: $l = R \cdot \alpha$

✓ Số đo của một cung lượng giác: $\widehat{AM} = a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

trong đó a là số đo của một cung lượng giác tùy ý có điểm đầu là A , điểm cuối là M .

✓ Số đo của một góc lượng giác: Số đo của góc lượng giác (OA, OC) là số đo của cung lượng giác $\widehat{AC}$ tương ứng.

📁 Dạng 1. Liên hệ giữa độ và radian

Sử dụng công thức chuyển đổi giữa số đo độ và số đo radian

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad \text{và} \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

 **Ví dụ 1.** Đổi số đo của các góc sau ra radian:

- | | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|
| ① 30° . | ② -45° . | ③ 90° . | ④ -72° . |
| ⑤ 180° . | ⑥ 600° . | ⑦ -135° . | ⑧ 270° . |

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Đổi số đo của các góc sau ra độ:

- | | | | |
|---------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|
| ① $\frac{\pi}{2}$. | ② $\frac{3\pi}{5}$. | ③ $\frac{5\pi}{18}$. | ④ 2. |
| ⑤ $-\frac{2}{5}$. | ⑥ $\frac{\pi}{2}$. | ⑦ $-\frac{3\pi}{2}$. | ⑧ $\frac{4\pi}{7}$. |

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. Độ dài cung lượng giác

Cung tròn bán kính R có số đo α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) rad có độ dài là $l = R \cdot \alpha$

Video Ví dụ 1. Một đường tròn có bán kính 36 m. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

① $\frac{\pi}{2}$.

② $\frac{3\pi}{5}$.

③ $-\frac{3\pi}{2}$.

④ $\frac{4}{7}$.

⑤ 90° .

⑥ -72° .

⑦ 180° .

⑧ 45° .

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

🔥 Câu 1. Đổi số đo của các góc sau ra Radian.

① 30°

④ -106°

⑦ 540°

⑩ 270°

② 60°

⑤ 45°

⑧ 600°

⑪ 225°

③ 72°

⑥ 135°

⑨ $-37^\circ 45' 30''$

⑫ -720°

.....

.....

.....

.....

🔥 Câu 2. Đổi số đo của các góc sau ra độ.

① $\frac{5\pi}{18}$

④ $-\frac{2\pi}{9}$

⑦ $\frac{9\pi}{2}$

⑩ $-\frac{\pi}{8}$

② $\frac{3\pi}{5}$

⑤ $\frac{5\pi}{12}$

⑧ $-\frac{4\pi}{7}$

⑪ $-\frac{16}{5\pi}$

③ -4

⑥ 5

⑨ $-\frac{5\pi}{3}$

⑫ $\frac{10\pi}{3}$

.....

.....

.....

🔥 **Câu 3.** Một đường tròn có bán kính $45m$. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

① $\frac{3\pi}{4}$
② 51°
③ $\frac{1}{3}$

④ 135°
⑤ 105°
⑥ $\frac{2\pi}{3}$

⑦ $\frac{3\pi}{7}$
⑧ 49°
⑨ $\frac{4}{3}$

⑩ $\frac{10\pi}{3}$
⑪ 72°
⑫ $\frac{2\pi}{3}$

🔄 TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Trên đường tròn lượng giác, cung 1 rad có độ dài là

A. π .

B. 1 .

C. $\frac{\pi}{180}$.

D. $\frac{180}{\pi}$.

🔥 **Câu 2.** Góc có số đo 1080° thì có số đo là bao nhiêu radian?

A. 6π .

B. 3π .

C. 12π .

D. 4π .

🔥 **Câu 3.** Trong hệ trục tọa độ Oxy , góc lượng giác (Ox, Oy) **không thể** có số đo nào trong các số đo dưới đây?

A. -270° .

B. -990° .

C. 810° .

D. 630° .

🔥 **Câu 4.** Góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α mà $\widehat{uOv}$ là góc nhọn thì khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

B. $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq 0$.

C. $\exists k \in \mathbb{Z} : -\frac{\pi}{2} + k2\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

D. $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

🔥 **Câu 5.** Góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α mà $\widehat{uOv}$ là góc tù thì khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

B. $-\pi < \alpha \leq -\frac{\pi}{2}$.

C. $\exists k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{2} + k2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + k2\pi$.

D. $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

🔥 **Câu 6.** Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo -1955° . Tìm số đo góc hình học $\widehat{uOv}$.

A. 25° .

B. 155° .

C. 15° .

D. 55° .

🔥 **Câu 7.** Tính số đo bằng rad của góc $22^\circ 30'$.

A. $\frac{\pi}{8}$.

B. $\frac{7\pi}{12}$.

C. $\frac{9\pi}{12}$.

D. $\frac{5\pi}{12}$.

🔥 **Câu 8.** Tính số đo bằng độ của góc $\frac{\pi}{36}$.

A. 6° .

B. 8° .

C. 5° .

D. 10° .

🔥 **Câu 9.** Trên đường tròn tùy ý, cung có số đo 1 rad là

A. cung có độ dài bằng 1.

B. cung có độ dài bằng bán kính.

C. cung có độ dài bằng đường kính.

D. cung tương ứng với góc ở tâm là 60° .

🔥 **Câu 10.** Tính số đo bằng rad của góc 108° .

A. $\frac{3\pi}{5}$.

B. $\frac{\pi}{10}$.

C. $\frac{3\pi}{2}$.

D. $\frac{\pi}{4}$.

🔥 **Câu 11.** Tính độ dài l của cung có số đo $\frac{\pi}{8}$ trên đường tròn có bán kính $r = 5$.

A. $l = \frac{\pi}{8}$.

B. $l = \frac{5\pi}{8}$.

C. $l = \frac{5\pi}{4}$.

D. $l = \frac{5}{16}$.

🔥 **Câu 12.** Tính số đo bằng rad của góc 120° .

A. 120π .

B. $\frac{3\pi}{2}$.

C. 12π .

D. $\frac{2\pi}{3}$.

🔥 **Câu 13.** Góc có số đo $-\frac{3\pi}{16}$ được đổi sang số đo độ (phút, giây) là

- A. $33^\circ 45'$. B. $-29^\circ 30'$. C. $-33^\circ 45'$. D. $32^\circ 55'$.

🔥 **Câu 14.** Trên một đường tròn tùy ý, cung có số đo 2 rad là

- A. cung có độ dài bằng 2. B. cung có độ dài bằng bán kính.
C. cung có độ dài bằng đường kính. D. cung tương ứng với góc ở tâm là 60° .

🔥 **Câu 15.** Đổi 2 rad ra độ.

- A. $= 2^\circ$. B. $\left(\frac{360}{\pi}\right)^\circ$. C. 360° . D. 180° .

🔥 **Câu 16.** Trên đường tròn bán kính $R = 20$, tính độ dài ℓ của cung có số đo 50° .

- A. $\ell = 750$. B. $\ell = \frac{50\pi}{9}$. C. $\ell = \frac{25\pi}{9}$. D. $\ell = 20 \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 50$.

🔥 **Câu 17.** Trên đường tròn bán kính $R = 8$ cm, lấy cung có số đo 54° . Tính độ dài ℓ của cung tròn.

- A. $\ell = 7,54$ cm. B. $\ell = 5,74$ cm. C. $\ell = 4,75$ cm. D. $\ell = 7,47$ cm.

🔥 **Câu 18.** Trong các góc lượng giác sau, góc nào có cùng tia đầu và tia cuối với góc lượng giác 999° ?

- A. -81° . B. -279° . C. 81° . D. 99° .

🔥 **Câu 19.** Trong các góc lượng giác sau, góc nào có cùng tia đầu và tia cuối với góc lượng giác $-\frac{22\pi}{3}$?

- A. $\frac{4\pi}{3}$. B. $-\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{8\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{3}$.

🔥 **Câu 20.** Cho góc $\alpha = \frac{11\pi}{5} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), để $\alpha \in (-18; -12)$ thì giá trị của k bằng bao nhiêu?

- A. -8 . B. -7 . C. -6 . D. -5 .

BÀI 2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC.

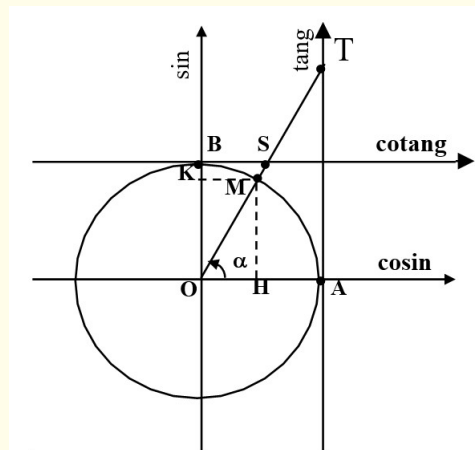
Cho $(OA, OM) = \alpha$. Giả sử $M(x; y)$.

$$\cos \alpha = x = \overline{OH}$$

$$\sin \alpha = y = \overline{OK}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \overline{AT} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

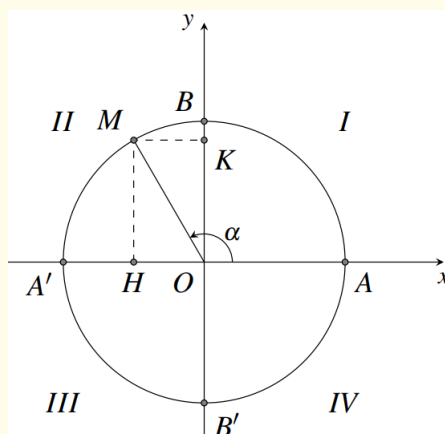
$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \overline{BS} \left(\alpha \neq k\pi \right)$$



Nhận xét:

- ① $\forall \alpha, -1 \leq \cos \alpha \leq 1, -1 \leq \sin \alpha \leq 1.$
- ② $\tan \alpha$ xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- ③ $\cot \alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- ④ $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha.$
- ⑤ $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha.$
- ⑥ $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha.$
- ⑦ $\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha.$

2 DẤU CỦA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC



Giá trị lượng giác	Góc phần tư I	Góc phần tư II	Góc phần tư III	Góc phần tư IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

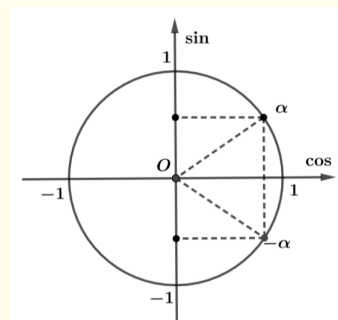
3 HỆ THỨC CƠ BẢN.

- ① $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.
- ② $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.
- ③ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ với mọi α .
- ④ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ với mọi $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$.
- ⑤ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ với mọi $\alpha \neq k2\pi$.
- ⑥ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ với mọi $\alpha \neq k\pi$.

4 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT.

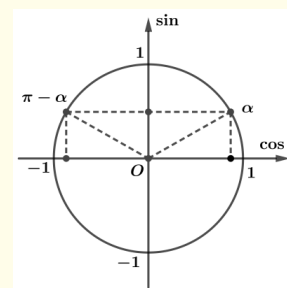
- ① Hai cung đối nhau: α và $-\alpha$.

- ✓ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- ✓ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- ✓ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
- ✓ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$



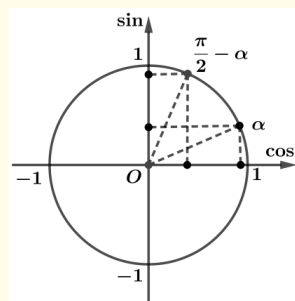
- ② Hai cung bù nhau: α và $\pi - \alpha$.

- ✓ $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- ✓ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- ✓ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
- ✓ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$



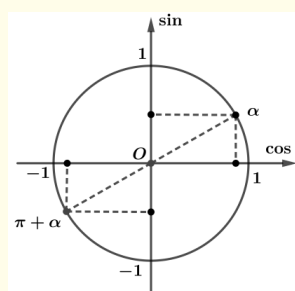
- ③ Hai cung phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

- ✓ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
- ✓ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
- ✓ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
- ✓ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$



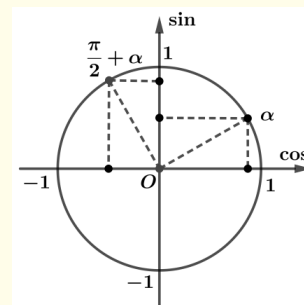
- ④ Hai cung hơn kém nhau π : α và $\pi + \alpha$.

- ✓ $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$
- ✓ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$
- ✓ $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$
- ✓ $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$



⑤ Hai cung hơn kém nhau $\frac{\pi}{2}$: α và $\frac{\pi}{2} + \alpha$.

- ☑ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$
- ☑ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$
- ☑ $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$
- ☑ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$



5 CÁC DẠNG TOÁN

□ Dạng 1. Dấu của các giá trị lượng giác

Sử dụng bảng sau:

Giá trị lượng giác	Góc phần tư I	Góc phần tư II	Góc phần tư III	Góc phần tư IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

Ví dụ 1. Xác định dấu các biểu thức:

- ① $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-45^\circ)$. ② $B = \sin 150^\circ \cdot \cos(25^\circ)$. ③ $C = \sin 400^\circ \cdot \tan(-30^\circ)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

□ Dạng 2. Tính giá trị lượng giác của một cung

Sử dụng các công thức lượng giác cơ bản:

- ① $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.
- ② $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.
- ③ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ với mọi α .
- ④ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ với mọi $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$.
- ⑤ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ với mọi $\alpha \neq k2\pi$.
- ⑥ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ với mọi $\alpha \neq k\pi$.

Ví dụ 1. Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại biết

① $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

② $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ và $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

③ $\tan \alpha = \sqrt{3}$ và $0 < \alpha < 90^\circ$.

④ $\cot \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ và $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Lời giải:

Dạng 3. Sử dụng cung liên kết để tính giá trị lượng giác

Sử dụng công thức các cung có liên quan đặc biệt

Ví dụ 1. Sử dụng công thức các cung có liên quan đặc biệt.

① Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Tính $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$.

② Rút gọn biểu thức $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$.

Lời giải:

Dạng 4. Rút gọn biểu thức và chứng minh đẳng thức

Sử dụng các công thức lượng giác cơ bản.

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức

① $A = \sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x$.

② $B = \frac{2\sin^2 x - 1}{\sin^2 x - \sin x \cos x}$

Lời giải:



Ví dụ 2. Chứng minh rằng $\frac{2 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 3 \tan^2 \alpha + 2$

Lời giải:

B TỰ LUẬN

Câu 1. Tính các giá trị lượng giác còn lại biết

① $\sin x = \frac{1}{2}$ với $90^\circ < x < 180^\circ$.

② $\sin x = -\frac{4}{5}$ với $270^\circ < x < 360^\circ$.

③ $\sin x = -\frac{3}{5}$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

④ $\cos x = \frac{1}{4}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

⑤ $\cos x = \frac{3}{5}$ với $0 < x < 90^\circ$.

⑥ $\cos x = -\frac{5}{13}$ với $180^\circ < x < 270^\circ$.

⑦ $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ với $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

⑧ $\cos x = \frac{4}{5}$ với $270^\circ < x < 360^\circ$.

⑨ $\sin x = \frac{5}{13}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

⑩ $\sin x = -\frac{1}{3}$ với $180^\circ < x < 270^\circ$.

⑪ $\tan x = 3$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

⑫ $\tan x = -2$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

⑬ $\tan x = -\frac{1}{2}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

⑭ $\cot x = 3$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

⑮ $\tan x = \frac{3}{4}$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

⑯ $\tan x = -\sqrt{2}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

⑰ $\cot x = \frac{2}{3}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

⑱ $\cot x = -\sqrt{3}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

⑲ $\cot x = -3$ với $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

Câu 2. Tính giá trị các biểu thức lượng giác sau.

① Cho $\tan x = -2$. Tính $A_1 = \frac{5 \cot x + 4 \tan x}{5 \cot x - 4 \tan x}$, $A_2 = \frac{2 \sin x + \cos x}{\cos x - 3 \sin x}$.

- ② Cho $\cot x = \sqrt{2}$. Tính $B_1 = \frac{3\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}, B_2 = \frac{\sin x - 3\cos x}{\sin x + 3\cos x}$.
- ③ Cho $\cot x = 2$. Tính $C_1 = \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x - 2\cos x}, C_2 = \frac{\cos^2 x - \sin x \cos x}{3\sin x - 2\cos x}$.
- ④ Cho $\tan x = 2$. Tính $D_1 = \frac{2\sin x + 3\cos x}{4\sin x - 5\cos x}, D_2 = \frac{5\sin^3 x + 4\cos^3 x}{3\sin x - 2\cos x}$.

🔥 Câu 3. Biểu diễn giá trị lượng giác của các góc sau bằng giá trị lượng giác của góc x .

- | | | | |
|---------------------------|---------------------------|----------------------|---|
| ① $\sin(x - 90^\circ)$. | ⑥ $\cot(180^\circ + x)$. | ⑩ $\sin(\pi + x)$. | ⑭ $\tan(x - 5\pi)$. |
| ② $\cos(180^\circ + x)$. | ⑦ $\sin(x - 540^\circ)$. | ⑪ $\tan(2\pi - x)$. | ⑮ $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$. |
| ③ $\sin(270^\circ - x)$. | ⑧ $\tan(360^\circ - x)$. | ⑫ $\cot(3\pi - x)$. | ⑯ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$. |
| ④ $\sin(x - 180^\circ)$. | ⑨ $\cot(x - \pi)$. | ⑬ $\sin(x - 7\pi)$. | |
| ⑤ $\cos(x + 540^\circ)$. | | | |

🔥 Câu 4. Rút gọn các biểu thức sau.

- ① $A = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x - \pi)$.
- ② $B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
- ③ $C = 2\cos x + 3\cos(\pi - x) - \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.
- ④ $D = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

🔥 Câu 5. Rút gọn và tính giá trị của các biểu thức (không sử dụng máy tính).

- ① $A = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 180^\circ$.
- ② $C = \cos 10^\circ + \cos 40^\circ + \cos 70^\circ + \dots + \cos 170^\circ$.
- ③ $F = \sin 5^\circ + \sin 10^\circ + \sin 15^\circ + \dots + \sin 360^\circ$.
- ④ $I = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \dots \tan 80^\circ$.
- ⑤ $L = \cos^2 2^\circ + \cos^2 4^\circ + \cos^2 6^\circ + \dots + \cos^2 88^\circ$.

🔥 Câu 6. Chứng minh các đẳng thức sau.

- | | |
|---|--|
| ① $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$. | ⑪ $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$. |
| ② $2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$. | ⑫ $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cos^2 x$. |
| ③ $3 - 4\sin^2 x = 4\cos^2 x - 1$. | ⑬ $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$. |
| ④ $\sin x \cot x + \cos x \tan x = \sin x + \cos x$. | ⑭ $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$. |
| ⑤ $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$. | ⑮ $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = 1$. |
| ⑥ $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$. | ⑯ $\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) + \tan^2 x = 0$. |
| ⑦ $4\cos^2 x - 3 = (1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x)$. | |
| ⑧ $(1 + \cos x)(\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x) = \sin^2 x$. | |
| ⑨ $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x = 2\sin^2 x - 1$. | |
| ⑩ $\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x = \sin x \cos x$. | |

🔥 Câu 7. Chứng minh các đẳng thức sau không phụ thuộc vào biến x .

- ① $A = \cos^4 x - \sin^4 x + 2\sin^2 x$.
- ② $B = \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x$.
- ③ $C = \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x$.
- ④ $D = \cos^4 x (2\cos^2 x - 3) + \sin^4 x (2\sin^2 x - 3)$.

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔥 Câu 1. Chọn mệnh đề đúng (với k là số nguyên tùy ý)?

- | | |
|---|--|
| A. $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$. | B. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi$. |
| C. $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$. | D. $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = k2\pi$. |

🔥 **Câu 2.** Chọn mệnh đề **sai** (với k là số nguyên tùy ý)?

A. $\sin(x + k2\pi) = \sin x.$

B. $\cos(x + k\pi) = \cos x.$

C. $\tan(x + k2\pi) = \tan x.$

D. $\cot(x + k\pi) = \cot x.$

🔥 **Câu 3.** Tìm số dương T nhỏ nhất thoả $\sin(x + T) = \sin x$ với mọi x .

A. $T = \pi.$

B. $T = 2\pi.$

C. $T = \frac{\pi}{2}.$

D. $T = 4\pi.$

🔥 **Câu 4.** Tìm số dương T nhỏ nhất thoả $\cot(x + T) = \cot x$ với mọi x (thoả các vế của đẳng thức có nghĩa).

A. $T = \pi.$

B. $T = 2\pi.$

C. $T = \frac{\pi}{2}.$

D. $T = 4\pi.$

🔥 **Câu 5.** Có bao nhiêu giá trị thực của x thuộc $[0; 10\pi)$ thoả $\sin x = 0$?

A. 10.

B. 20.

C. 19.

D. 9.

🔥 **Câu 6.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **đúng**?

A. $\sin(180^\circ - a) = -\cos a.$

B. $\sin(180^\circ - a) = -\sin a.$

C. $\sin(180^\circ - a) = \sin a.$

D. $\sin(180^\circ - a) = \cos a.$

🔥 **Câu 7.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$ B. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x.$ C. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x.$ D. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x.$

🔥 **Câu 8.** Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

A. $\tan(\pi - a) = \tan a.$

B. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\sin a.$

C. $\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a.$

D. $\sin(\pi + a) = \sin a.$

🔥 **Câu 9.** Cho $\triangle ABC$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}.$ B. $\cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}.$ C. $\sin(A+B) = \sin C.$ D. $\cos(A+B) = \cos C.$

🔥 **Câu 10.** Đơn giản biểu thức $M = \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(a - \pi)$ ta được kết quả nào sau đây?

A. $M = \cos a + \sin a.$

B. $M = 2 \sin a.$

C. $M = \sin a - \cos a.$

D. $M = 0.$

🔥 Câu 11. Giá trị của $\sin \frac{47\pi}{6}$ là

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

🔥 Câu 12. Cho ΔABC và các mệnh đề:

— (I): $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$

— (II): $\tan \frac{A+B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = 1$

— (III): $\cos(A+B-C) - \cos 2C = 0$

Mệnh đề **đúng** là

A. Chỉ I.

B. chỉ III.

C. II và III.

D. I và II.

🔥 Câu 13. Cho ΔABC . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\sin \frac{A+B+3C}{2} = \cos C$.

B. $\cos(A+B-C) = -\cos 2C$.

C. $\tan \frac{A+B-2C}{2} = \cot \frac{3C}{2}$.

D. $\cot \frac{A+B+2C}{2} = \tan \frac{C}{2}$.

🔥 Câu 14. Giá trị của biểu thức $A = \frac{(\cot 44^\circ + \tan 226^\circ) \cdot \cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \cot 72^\circ \cdot \cot 18^\circ$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. -2.

D. 0.

🔥 **Câu 15.** Cho $\triangle ABC$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$.

B. $\cos(A+B+2C) = -\cos C$.

C. $\sin(A+C) = -\sin B$.

D. $\cos(A+B) = -\cos C$.

🔥 **Câu 16.** Cho $\triangle ABC$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\tan \left(\frac{A+B}{2} \right) = \tan \frac{C}{2}$.

B. $\tan \left(\frac{A+B}{2} \right) = -\tan \frac{C}{2}$.

C. $\tan \left(\frac{A+B}{2} \right) = \cot \frac{C}{2}$.

D. $\tan \left(\frac{A+B}{2} \right) = -\cot \frac{C}{2}$.

🔥 **Câu 17.** Cho $M = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 70^\circ \cdot \tan 80^\circ$. Giá trị của M bằng

A. $M = 0$.

B. $M = 1$.

C. $M = 4$.

D. $M = 8$.

🔥 **Câu 18.** Cho góc lượng giác $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin \alpha > 0$ và $\sin 2\alpha > 0$.

B. $\sin \alpha > 0$ và $\cos 2\alpha < 0$.

C. $\cos \alpha < 0$ và $\cos 2\alpha < 0$.

D. $\cos \alpha < 0$ và $\sin 2\alpha > 0$.

🔥 **Câu 19.** Cho góc lượng giác $\alpha = 2017^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin \alpha > 0$ và $\cos \alpha < 0$. B. $\sin \alpha > 0$ và $\cos \alpha > 0$.
C. $\sin \alpha < 0$ và $\cos \alpha < 0$. D. $\sin \alpha < 0$ và $\cos \alpha > 0$.

🔥 **Câu 20.** Cho góc lượng giác $\alpha = \frac{2017\pi}{4}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin \alpha > 0$ và $\cos \alpha < 0$. B. $\sin \alpha > 0$ và $\cos \alpha > 0$.
C. $\sin \alpha < 0$ và $\cos \alpha < 0$. D. $\sin \alpha < 0$ và $\cos \alpha > 0$.

🔥 **Câu 21.** Cho góc lượng giác α thỏa mãn $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) < 0$. B. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0$. C. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$. D. $\cot\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) < 0$.

🔥 **Câu 22.** Cho góc lượng giác α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\sin \alpha < 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha < 0$.

🔥 **Câu 23.** Cho góc lượng giác α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\sin(\alpha + \pi) < 0$. B. $\cos(\alpha + \pi) > 0$. C. $\tan(\alpha + \pi) > 0$. D. $\cot(\alpha + \pi) > 0$.

🔥 **Câu 24.** Cho góc lượng giác α thỏa mãn $\frac{11\pi}{2} < \alpha < 6\pi$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$. **B.** $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$. **C.** $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$. **D.** $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0$.

🔥 **Câu 25.** Cho góc lượng giác α thỏa mãn $4\pi < \alpha < \frac{9\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $\tan \alpha > 0, \cot \alpha > 0$. **B.** $\tan \alpha > 0, \cot \alpha < 0$. **C.** $\tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$. **D.** $\tan \alpha < 0, \cot \alpha > 0$.

🔥 **Câu 26.** Cho góc lượng giác $\alpha \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{4}\right)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?
A. $\sin \alpha > 0$. **B.** $\cos \alpha > 0$. **C.** $\cot \alpha < 0$. **D.** $\tan \alpha < 0$.

🔥 **Câu 27.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào là đúng?
A. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$. **C.** $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

🔥 **Câu 28.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào là đúng?

- A. $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1$. B. $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$. C. $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1$. D. $\cos \alpha + \sin \alpha = 1$.

🔥 **Câu 29.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào là **sai**?

- A. $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$ với $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$ với $\alpha \neq k.\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1$. D. $\tan \alpha . \cot \alpha = 1$ với $\alpha \neq k.\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

🔥 **Câu 30.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào là đúng?

- A. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 0$. B. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1$.
C. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$. D. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

🔥 **Câu 31.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào là đúng?

- A. $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$. B. $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 + 6 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.
C. $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 6 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$. D. $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

🔥 **Câu 32.** Giá trị của biểu thức $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$ bằng

- A. $S = \frac{1}{2}$. B. $S = -\frac{1}{2}$. C. $S = 1$. D. $S = 3$.

🔥 **Câu 33.** Trong các giá trị sau đây, $\cos \alpha$ có thể nhận giá trị nào?

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{7}{4}$. C. $-0,7$. D. $-1,2$.

🔥 **Câu 34.** Trên đường tròn lượng giác gốc A, cho cung α có điểm đầu là A, điểm cuối thuộc góc phần tư thứ II. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

- A. $\sin \alpha < 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha < 0$.

🔥 **Câu 35.** Trong các mệnh sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha$. B. $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$. C. $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$. D. $\cot(-\alpha) = \cot \alpha$.

🔥 **Câu 36.** Biết $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$. Tính $P = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

- A. $-\frac{3}{\sqrt{10}}$. B. $\frac{9}{10}$. C. $-\frac{3}{10}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{10}$.

Câu 37. Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung $\widehat{AM}$ có $\sin \widehat{AOM} > 0$. Xác định vị trí điểm M .

- A. M thuộc góc phần tư thứ I hoặc thứ II. B. M thuộc góc phần tư thứ I.
C. M thuộc góc phần tư thứ II. D. M thuộc góc phần tư thứ I hoặc thứ IV.

Câu 38. Khẳng định nào dưới đây luôn đúng với mọi α biết $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$?

- A. $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$. B. $\tan \alpha > 0$. C. $\sin^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cot^2 \alpha}$. D. $\sin \alpha > 0$.

Câu 39. Tìm góc α thỏa mãn $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ và $\tan \alpha = \cot \alpha$.

- A. 120° . B. 135° . C. 145° . D. 180° .

Câu 40. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào là **sai**?

- A. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$. B. $\sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$.
C. $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$. D. $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

Câu 41. Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ với $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính giá trị $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$. B. $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$. C. $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$. D. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Câu 42. Cho $\cos \alpha = \frac{4}{13}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính giá trị $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = -\frac{153}{169}$. B. $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{17}}{13}$. C. $\sin \alpha = \frac{153}{169}$. D. $\sin \alpha = -\sqrt{\frac{153}{169}}$.

Câu 43. Cho $\cot \alpha = 2 + \sqrt{3}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính giá trị của $\sin \alpha$.

- A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. C. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. D. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Câu 44. Nếu $\tan \alpha - \cot \alpha = 3$ thì $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ bằng bao nhiêu?

- A. 10. B. 9. C. 11. D. 12.

Câu 45. Rút gọn biểu thức sau $G = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$.

- A. $G = \sin^2 x$. B. $G = \frac{1}{\cos x}$. C. $G = \cos x$. D. $G = \frac{1}{\sin x}$.

🔥 **Câu 46.** Biết $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\cos \alpha < 0$. Tính giá trị của $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. B. $\tan \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$. D. $\tan \alpha = \sqrt{3}$.

🔥 **Câu 47.** Cho $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ ở đó $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. B. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. C. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. D. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

🔥 **Câu 48.** Cho $\cot \alpha = 3$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính giá trị của $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$. B. $\sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$. C. $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. D. $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

🔥 **Câu 49.** Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, ở đó $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị biểu thức $M = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

- A. $M = \frac{24}{25}$. B. $M = -\frac{24}{25}$. C. $M = -\frac{12}{25}$. D. $M = \frac{12}{25}$.

🔥 **Câu 50.** Cho $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ và thỏa mãn điều kiện $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = -\frac{4}{5}$. Tính giá trị của $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = \frac{3}{2\sqrt{10}}$. B. $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{10}}$. C. $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$. D. $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

🔥 Câu 51. Cho $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, ở đó $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$. B. $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$. C. $\tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. D. $\tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

🔥 Câu 52. Cho $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = \frac{2}{3}$. B. $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$. C. $\tan \alpha = \frac{5}{12}$. D. $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$.

🔥 Câu 53. Cho $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$ với $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính giá trị của $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$. B. $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$. C. $\tan \alpha = -\frac{2\sqrt{15}}{15}$. D. $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{15}}{15}$.

🔥 Câu 54. Cho $\cos \alpha = \frac{4}{13}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính giá trị của $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$. B. $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{17}}{13}$. C. $\sin \alpha = -\frac{3\sqrt{17}}{13}$. D. $\sin \alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

🔥 **Câu 55.** Cho $\cot \alpha = -3$ với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính giá trị của $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$. B. $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$. D. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

🔥 **Câu 56.** Cho $\tan \alpha = 4 + \sqrt{15}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính giá trị của $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{4}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{4}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{4}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5}}{3}$.

🔥 **Câu 57.** Cho $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = -\frac{8}{13}$. B. $\tan \alpha = -\frac{8}{15}$. C. $\tan \alpha = -\frac{8}{11}$. D. $\tan \alpha = -\frac{8}{9}$.

🔥 **Câu 58.** Cho $\tan \alpha = -\frac{4}{5}$ với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}, \cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$. B. $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}, \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$.
C. $\sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}, \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$. D. $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}, \cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$.

🔥 **Câu 59.** Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{3\sin x - 2\cos x}{5\cos x + 7\sin x}$, biết $\tan x = 2$.

A. $M = -\frac{4}{9}$.

B. $M = \frac{4}{19}$.

C. $M = -\frac{4}{19}$.

D. $M = \frac{4}{9}$.

🔥 **Câu 60.** Cho $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ với $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính $\sin \alpha$.

A. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

B. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

C. $\sin \alpha = -\frac{16}{25}$.

D. $\sin \alpha = \frac{16}{25}$.

🔥 **Câu 61.** Cho $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ với $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

C. $\cos \alpha = -\frac{16}{25}$.

D. $\cos \alpha = \frac{16}{25}$.

🔥 **Câu 62.** Cho $\cot \alpha = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \tan \alpha \cot^2 \alpha$.

A. $P = \frac{1}{27}$.

B. $P = \frac{1}{9}$.

C. $P = \frac{1}{3}$.

D. $P = 3$.

🔥 **Câu 63.** Cho $\cot \alpha = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \tan \alpha + \cot \alpha$.

A. $P = \frac{10}{3}$.

B. $P = 1$.

C. $P = 0$.

D. $P = \frac{4}{3}$.

🔥 **Câu 64.** Cho $\tan \alpha = -\sqrt{2}$ với $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính $\cos \alpha$.

- A.** $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$. **D.** $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

🔥 **Câu 65.** Cho $\cot \alpha = -3$ với $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. Tính $\sin \alpha$.

- A.** $\sin \alpha = -\frac{1}{10}$. **B.** $\sin \alpha = \frac{1}{10}$. **C.** $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

🔥 **Câu 66.** Cho $\tan \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $\cot \alpha$.

- A.** $\cot \alpha = -\frac{2}{3}$. **B.** $\cot \alpha = -\frac{3}{2}$. **C.** $\cot \alpha = \frac{\sqrt{45}}{9}$. **D.** $\cot \alpha = \frac{3}{2}$.

🔥 **Câu 67.** Cho $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ với $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin \alpha + \cos \alpha$.

- A.** $P = \frac{1}{5}$. **B.** $P = -\frac{1}{5}$. **C.** $P = \frac{7}{5}$. **D.** $P = -\frac{7}{5}$.

🔥 Câu 68. Cho $\tan \alpha = 2$, tính giá trị biểu thức $M = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

A. $M = \frac{3}{5}$.

B. $M = -\frac{4}{5}$.

C. $M = \frac{4}{5}$.

D. $M = -\frac{3}{5}$.

🔥 Câu 69. Cho $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}$, ở đó $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính giá trị biểu thức $M = \sin \alpha + \cos \alpha$.

A. $M = \sqrt{2}$.

B. $M = -\sqrt{2}$.

C. $M = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $M = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

🔥 Câu 70. Cho $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$, ở đó $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính giá trị của $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

A. $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{5}$.

B. $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{5}$.

C. $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{5}$.

D. $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{5}$.

BÀI 3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 CÔNG THỨC CỘNG.

$$\begin{aligned} \checkmark \cos(a \pm b) &= \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b. & \checkmark \tan(a \pm b) &= \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b}. \\ \checkmark \sin(a \pm b) &= \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b. \end{aligned}$$

2 CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI.

$$\begin{aligned} \checkmark \sin 2a &= 2 \sin a \cos a. \\ \checkmark \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1. \\ \checkmark \tan 2a &= \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}. \\ \checkmark \cot 2a &= \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a}. \end{aligned}$$

3 CÔNG THỨC HẠ BẬC.

$$\checkmark \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}, \quad \checkmark \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}, \quad \checkmark \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}.$$

4 CÔNG THỨC NHÂN BA.

$$\checkmark \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a, \quad \checkmark \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a, \quad \checkmark \tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}.$$

5 CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG.

$$\begin{aligned} \checkmark \cos a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)], & \checkmark \sin a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)], \\ \checkmark \sin a \cdot \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]. \end{aligned}$$

6 CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH.

$$\begin{aligned} \checkmark \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}, & \checkmark \sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}, \\ \checkmark \cos a - \cos b &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}, & \checkmark \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}. \end{aligned}$$

7 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Công thức cộng

Sử dụng các công thức cộng.



Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos 10^\circ + \cos 11^\circ \cos 21^\circ + \cos 69^\circ \cos 79^\circ$.

Lời giải:

.....



Ví dụ 2. Cho $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $0 < x < 90^\circ$. Tính $\sin(x + 30^\circ)$, $\cos(45^\circ - x)$.

Lời giải:

.....

Dạng 2. Công thức nhân

Sử dụng các công thức nhân.



Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức $P = A = \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8}$.

Lời giải:

.....



Ví dụ 2. Cho $\sin x = -\frac{4}{5}$ với $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. Tính $\sin 2x$, $\cos 2x$.

Lời giải:

.....

Dạng 3. Công thức biến đổi tổng thành tích, tích thành tổng

Sử dụng các biến đổi tổng thành tích, tích thành tổng



Ví dụ 1. Biến đổi thành tổng

① $2 \sin(a + b) \cos(a - b)$.

② $2 \cos(a + b) \cos(a - b)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Biến đổi thành tích

- ① $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x$
- ② $\sin 5x + \sin 6x + \sin 7x + \sin 8x$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

🔥 **Câu 1.** Không dùng máy tính, hãy tính giá trị các biểu thức sau.

- ① $A = \sin 12^\circ \cdot \cos 48^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 48^\circ.$
- ② $B = \cos 38^\circ \cdot \cos 22^\circ - \sin 38^\circ \cdot \sin 22^\circ.$
- ③ $C = \sin 10^\circ \cdot \cos 55^\circ - \cos 10^\circ \cdot \sin 55^\circ.$
- ④ $D = \sin 36^\circ \cdot \cos 6^\circ - \sin 126^\circ \cdot \cos 84^\circ.$
- ⑤ $E = \cos 112^\circ \cdot \cos 23^\circ - \sin 112^\circ \cdot \sin 23^\circ.$
- ⑥ $F = \sin 200^\circ \cdot \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cdot \cos 50^\circ.$

.....

.....

.....

.....

🔥 **Câu 2.** Tính giá trị các biểu thức sau.

- ① $A = \frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}.$
- ② $B = \frac{\tan 25^\circ + \tan 20^\circ}{1 - \tan 25^\circ \tan 20^\circ}.$
- ③ $C = \frac{\sin 10^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \cos 10^\circ}{\cos 17^\circ \cos 13^\circ - \sin 17^\circ \sin 13^\circ}.$
- ④ $D = \frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ}.$
- ⑤ $E = \frac{\sin 73^\circ \cos 3^\circ - \sin 87^\circ \cos 17^\circ}{\cos 132^\circ \cos 62^\circ + \cos 42^\circ \cos 28^\circ}.$
- ⑥ $F = \frac{\cot 225^\circ - \cot 79^\circ \cdot \cot 71^\circ}{\cot 259^\circ + \cot 251^\circ}.$

.....

.....

.....

.....

🔥 **Câu 3.** Tính giá trị các biểu thức sau.

- ① $A = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ biết $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
- ② $B = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ biết $\cos x = -\frac{12}{13}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.
- ③ $C = \cos(x - 30^\circ)$ biết $\tan x = \sqrt{2}$ và $0 < x < 90^\circ$.
- ④ $D = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ biết $\sin x = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.
- ⑤ $E = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ biết $\sin x = -\frac{12}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.
- ⑥ $F = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ biết $\sin x = -\frac{4}{5}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

🔥 **Câu 4.** Biết $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) và $\sin \beta = \frac{8}{17}$, ($90^\circ < \beta < 180^\circ$). Hãy tính giá trị biểu thức $A = \cos(\alpha + \beta)$ và $B = \sin(\alpha - \beta)$.

🔥 **Câu 5.** Rút gọn các biểu thức sau.

- ① $A = \sin x \cos 5x - \cos x \sin 5x$.
- ② $B = \sin 4x \cot 2x - \cos 4x$.
- ③ $C = \cos 6x \tan 3x - \sin 6x$.
- ④ $D = \sin(x + y) \cos(x - y) + \sin(x - y) \cos(x + y)$.
- ⑤ $E = \cos(40^\circ - x) \cos(x + 20^\circ) - \sin(40^\circ - x) \sin(x + 20^\circ)$.
- ⑥ $G = \sin(x + 10^\circ) \cos(2x - 80^\circ) + \sin(x + 100^\circ) \cos(2x + 10^\circ)$.

🔥 **Câu 6.** Cho tam giác ABC với A, B, C lần lượt và 3 góc của tam giác. Chứng minh rằng.

- ① $\sin C = \sin A \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos A$.
- ② $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$.
- ③ $\cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C$.

- ④ $\frac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B} = \tan A + \tan B, (A, B \neq 90^\circ).$
 ⑤ $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C, (A, B, C \neq 90^\circ).$
 ⑥ $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1,$

🔥 **Câu 7.** Tính giá trị các biểu thức sau (không sử dụng máy tính bỏ túi)

- ① $A = \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}.$
 ② $B = 3 \cos 10^\circ - 4 \cos^3 10^\circ.$
 ③ $C = \sin 20^\circ (1 - 4 \cos^2 20^\circ).$
 ④ $D = 4 \sin^3 40^\circ + 3 \sin 130^\circ.$
 ⑤ $E = 4 \sin^3 50^\circ + 3 \cos 140^\circ.$
 ⑥ $F = \frac{\tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ}.$

🔥 **Câu 8.** Rút gọn các biểu thức sau.

- ① $A = (\sin x + \cos x)^2.$
 ② $B = 1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x.$
 ③ $C = \sin x \cos x \cos 2x.$
 ④ $D = \cos^4 2x - \sin^4 2x.$
 ⑤ $E = \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{2}\right).$
 ⑥ $F = \sin x \cos x \cos 2x.$

🔥 **Câu 9.** Tính giá trị các biểu thức sau.

- ① $A = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}.$
 ② $B = \frac{1 - 2 \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x}.$
 ③ $C = \frac{2}{(1 - \tan x)(1 + \cot x)}.$
 ④ $D = (1 - \tan^2 x) \cot x.$
 ⑤ $E = \frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}.$
 ⑥ $F = \frac{\cot x - \tan x}{\cos 2x}.$

🔥 **Câu 10.** Tính giá trị các biểu thức

- ① $\sin 2x, \cos 2x$ khi $\sin x = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$.
- ② $\sin 2x, \cos 2x$ khi $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.
- ③ $\cos 2x, \sin 2x, \tan 2x$ khi $\cos x = -\frac{5}{13}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}$.
- ④ $\cos 2x, \sin 2x, \tan 2x$ khi $\tan x = 2$.
- ⑤ $\sin x, \cos x$ khi $\sin 2x = -\frac{4}{5}, \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

🔥 **Câu 11.** Chứng minh các đẳng thức sau.

- ① $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.
- ② $\sin 4x = 4 \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$.
- ③ $\cos^2 2x - \sin^2 x = \cos x \cos 3x$.
- ④ $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$.
- ⑤ $8 \sin^4 x = 3 - 4 \cos 2x + \cos 4x$.
- ⑥ $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$.
- ⑦ $\sin^4 x + \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x = \cos 4x$.
- ⑧ $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$.

🔥 **Câu 12.** Biến đổi thành tích các biểu thức sau đây.

- ① $A = \cos 3x + \cos x$.
- ② $B = \sin 3x + \sin 2x$.
- ③ $C = \cos 4x - \cos x$.
- ④ $D = \sin 5x - \sin x$.
- ⑤ $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.
- ⑥ $\sin x - \sin 3x + \sin 7x - \sin 5x$.
- ⑦ $\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x$.
- ⑧ $\cos 7x + \sin 3x + \sin 2x - \cos 3x$.

🔥 **Câu 13.** Biến đổi thành tổng các biểu thức sau đây.

① $A = \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5}.$

② $B = \sin 5x \cos 3x.$

③ $C = \sin \frac{3\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6}.$

④ $D = \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}.$

⑤ $E = \sin(x+y) \cos(x-y).$

⑥ $F = \sin(x+30^\circ) \cos(x-30^\circ).$

🔥 **Câu 14.** Tính giá trị các biểu thức.

① $A = \frac{\cos 2x - \cos 4x}{\sin 4x - \sin 2x}$ khi $x = 20^\circ.$

② $B = \frac{\cos x \cdot \cos 13x}{\cos 3x + \cos 5x}$ khi $x = \frac{\pi}{17}.$

③ $C = \frac{\cos x \cdot \cos 10x}{\cos 2x + \cos 4x}$ khi $x = \frac{\pi}{13}.$

④ $D = \frac{\tan 2x - \sin 2x}{\tan 2x + \sin 2x}$ khi $\tan x = \frac{2}{15}.$

🔥 **Câu 15.** Trong tam giác ABC có 3 góc lần lượt là A, B, C . Chứng minh rằng

① $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

② $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

③ $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$

④ $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Công thức nào sau đây là đúng?

A. $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$.

C. $\cos(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.

B. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

D. $\sin(x - y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

🔥 **Câu 2.** Công thức nào sau đây là đúng?

A. $\cos 45^\circ = \sin 30^\circ \cos 15^\circ - \cos 30^\circ \sin 15^\circ$.

C. $\cos 45^\circ = \cos 30^\circ \cos 15^\circ - \sin 30^\circ \sin 15^\circ$.

B. $\cos 45^\circ = \cos 30^\circ \cos 15^\circ + \sin 30^\circ \sin 15^\circ$.

D. $\cos 45^\circ = \sin 30^\circ \sin 15^\circ - \cos 15^\circ \cos 30^\circ$.

🔥 **Câu 3.** Công thức nào sau đây là đúng (với điều kiện có nghĩa của biểu thức)?

A. $\tan(x + y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.

C. $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$.

B. $\tan(x + y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$.

D. $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.

🔥 **Câu 4.** Tìm công thức đúng để tính giá trị $\sin \frac{\pi}{12}$.

A. $\sin \frac{\pi}{12} = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6}$.

C. $\sin \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$.

B. $\sin \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$.

D. $\sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$.

🔥 **Câu 5.** Công thức nào sau đây là đúng?

A. $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

B. $\sin x + \cos x = -\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.

C. $\sin x + \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

D. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

🔥 Câu 6. Công thức nào sau đây là đúng?

A. $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

B. $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

C. $\sin x - \cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

D. $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

🔥 Câu 7. Công thức nào sau đây là đúng (với điều kiện có nghĩa của biểu thức)?

A. $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}.$

B. $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}.$

C. $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}.$

D. $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}.$

🔥 Câu 8. Cho $\sin \theta = -\frac{12}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$. Tính $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right).$

A. $-\frac{5}{13}.$

B. $-\frac{19}{50}.$

C. $-\frac{7\sqrt{2}}{26}.$

D. $-\frac{3\sqrt{2}}{13}.$

🔥 Câu 9. Cho $\sin x = \frac{3}{5}, \sin y = \frac{4}{5}$, với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < y < \pi$. Tính giá trị $\sin(x - y).$

A. $\sin(x - y) = -\frac{7}{25}.$

B. $\sin(x - y) = -1.$

C. $\sin(x - y) = 1.$

D. $\sin(x - y) = \frac{7}{25}.$

🔥 **Câu 10.** Cho $\tan a + \tan b = 2$ và $\tan(a + b) = 4$, giá trị của $\tan a \cdot \tan b$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. -1.

🔥 **Câu 11.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\sin(x + y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.

B. $\sin(x - y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$.

C. $\cos(x + y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.

D. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin y \sin x$.

🔥 **Câu 12.** Cho $P = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2P = \sin x + \sqrt{3} \cos x$.

B. $\sqrt{2}P = \sin x + \sqrt{3} \cos x$.

C. $P = \sin x - \sqrt{3} \cos x$.

D. $P = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$.

🔥 **Câu 13.** Với giả thiết $P = \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\cos x \sin y + \cos y \sin x}$ luôn có nghĩa. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P = \tan(x + y)$.

B. $P = \tan(x - y)$.

C. $P = \cot(x + y)$.

D. $P = \cot(x - y)$.

🔥 **Câu 14.** Cho $\tan a = 2$, $\tan b = 3$. Tính giá trị của $\tan(a + b)$.

- A. $\tan(a + b) = -1$. B. $\tan(a + b) = -\frac{1}{7}$. C. $\tan(a + b) = -7$. D. $\tan(a + b) = 1$.

🔥 **Câu 15.** Biết $\sin a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, với $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Tính giá trị biểu thức $P = \cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right)$.

- A. $P = \frac{\sqrt{6}-3}{6}$. B. $P = \frac{\sqrt{3}-3}{6}$. C. $P = \frac{\sqrt{6}-3}{4}$. D. $P = \frac{\sqrt{6}+3}{4}$.

🔥 **Câu 16.** Với điều kiện là các biểu thức đều có nghĩa, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- A. $\cot(a - b) = \frac{\cot a - \cot b}{1 + \cot a \cot b}$. B. $\cot(a + b) = \frac{\cot a + \cot b}{1 - \cot a \cot b}$.
 C. $\cot(a + b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b}$. D. $\cot(a - b) = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot a - \cot b}$.

🔥 **Câu 17.** Cho $\cot \alpha = 2$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin\left(\alpha + \frac{7\pi}{6}\right)$.

- A. $-\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{5}}$. B. $\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{5}}$. C. $-\frac{\sqrt{2}+3}{2\sqrt{5}}$. D. $\frac{\sqrt{2}+3}{2\sqrt{5}}$.

🔥 **Câu 18.** Tính chính xác giá trị của $\sin 105^\circ$.

A. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

🔥 **Câu 19.** Công thức nào sau đây là công thức **sai**?

A. $\cos 2x = 1 - \sin^2 2x$.

B. $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$.

C. $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$.

D. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

🔥 **Câu 20.** Công thức nào sau đây là công thức **đúng**?

A. $\sin 2x = 2 \sin^2 x - 1$.

B. $\sin 2x = 1 - 2 \sin^2 x$.

C. $\sin 2x = 1 - \cos^2 x$.

D. $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$.

🔥 **Câu 21.** Với điều kiện có nghĩa, công thức nào sau đây là công thức **đúng**?

A. $\tan 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$.

B. $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$.

C. $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$.

D. $\tan 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{2 \tan x}$.

🔥 **Câu 22.** Công thức nào sau đây là công thức **đúng**?

A. $\sin 3x = 4 \sin^3 x - 3 \sin x$.

B. $\sin 3x = 3 \sin x \cdot \cos x$.

C. $\sin 3x = 3 \sin x$.

D. $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

🔥 **Câu 23.** Công thức nào sau đây là công thức đúng?

A. $\cos 3x = 3 \cos x - 4 \cos^3 x$.

B. $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

C. $\cos 3x = 3 \cos x$.

D. $\cos 3x = 3 \cos^2 x - 1$.

🔥 **Câu 24.** Cho số thực x thỏa mãn $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của $\sin 2x$.

A. $\sin 2x = \frac{2}{3}$.

B. $\sin 2x = \frac{8}{9}$.

C. $\sin 2x = -\frac{8}{9}$.

D. $\sin 2x = -\frac{2}{3}$.

🔥 **Câu 25.** Cho số thực x thỏa mãn $\sin x + \cos x = \frac{3}{4}$. Tính giá trị của $\sin 2x$.

A. $\sin 2x = 1$.

B. $\sin 2x = -1$.

C. $\sin 2x = \frac{1}{4}$.

D. $\sin 2x = -\frac{7}{16}$.

🔥 **Câu 26.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \cos^4 x - \sin^4 x$.

A. 1.

B. 2.

C. -1.

D. 0.

🔥 **Câu 27.** Cho $\tan \frac{x}{2} = m$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2\sin x + \cos x$ theo m .

A. $P = \frac{-m^2 + 2m + 1}{1 + m^2}$. B. $P = \frac{-m^2 - 4m + 1}{m^2 + 1}$. C. $P = \frac{-m^2 + 4m + 1}{m^2 + 1}$. D. $P = \frac{m^2 + 4m - 1}{m^2 + 1}$.

🔥 **Câu 28.** Cho $\sin a + \cos a = \frac{1}{4}$. Tính $\sin 2a$.

A. $-\frac{3}{4}$. B. $\frac{15}{16}$. C. $-\frac{15}{16}$. D. $\frac{3}{4}$.

🔥 **Câu 29.** Cho $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Tính $\tan 3x$.

A. $2 - \sqrt{3}$. B. $2 + \sqrt{3}$. C. 1. D. -1.

🔥 **Câu 30.** Trong các công thức sau, công thức nào **sai** ?

A. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. B. $\cos 3x = 4\cos^3 x + 3\cos x$.
C. $\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$. D. $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.

🔥 **Câu 31.** Giả sử $A = \tan x \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ được rút gọn thành $A = \tan nx$, với n là hằng số. Tìm n .

A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

🔥 **Câu 32.** Cho $\sin x = 3 \cos x$, tính $\sin x \cos x$.

A. $\frac{3}{10}$.

B. $\frac{2}{9}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{6}$.

🔥 **Câu 33.** Giá trị của biểu thức $\frac{1}{\sin 18^\circ} - \frac{1}{\sin 54^\circ}$ bằng

A. $\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$.

B. 2.

C. -2.

D. $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

🔥 **Câu 34.** Cho $\cos x = \frac{\alpha}{2}$. Tính $\cos 2x$.

A. $-1 + \frac{\alpha^2}{2}$.

B. $\frac{\alpha^2}{4} - 1$.

C. $-1 + \frac{\alpha^2}{4}$.

D. $-1 - \frac{\alpha^2}{2}$.

🔥 **Câu 35.** Cho $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$. Tính $\cos 36^\circ$.

A. 0,8090169944.

B. $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

C. $\frac{2 + 2\sqrt{5}}{8}$.

D. $\frac{-2 + 2\sqrt{5}}{8}$.

Câu 36. Cho $\sin 8^\circ = \alpha$. Tính $\cos 1^\circ \cdot \sin 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 4^\circ$.

A. α .

B. $\frac{1}{8}\alpha$.

C. 8α .

D. $\frac{1}{2}\alpha$.

Câu 37. Cho $\sin 40^\circ = \beta$. Tính $\cos 5^\circ \cdot \sin 5^\circ \cdot \cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ$.

A. β .

B. $\frac{1}{16}\beta$.

C. $\frac{1}{8}\beta$.

D. $\frac{1}{2}\beta$.

Câu 38. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\sin^2 x = 2 \sin x \cos x$.

B. $\cos^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

C. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

D. $\sin^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{2}$.

Câu 39. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\sin 3x = 4 \sin^3 x - 3 \sin x$.

B. $\cos 3x = 4 \cos^3 x + 3 \cos x$.

C. $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

D. $\cos 3x = 3 \cos x - 4 \cos^3 x$.

Câu 40. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

B. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

C. $\sin^3 x = \frac{1}{4} \sin x - \frac{3}{4} \sin 3x$.

D. $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$.

🔥 **Câu 41.** Biết $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, tính $\cos 2\alpha$.

- A. $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$. B. $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$. C. $\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$. D. $\cos 2\alpha = \frac{3}{4}$.

🔥 **Câu 42.** Biết $\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$ với $-\frac{\pi}{4} < \alpha < 0$, tính $\cos^2 \alpha$.

- A. $\cos^2 \alpha = \frac{5}{8}$. B. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{8}$. C. $\cos^2 \alpha = \frac{3}{8}$. D. $\cos^2 \alpha = \frac{7}{8}$.

🔥 **Câu 43.** Biết $\cos 2\alpha = \frac{3}{8}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, tính $\sin^2 \alpha$.

- A. $\sin^2 \alpha = \frac{9}{16}$. B. $\sin^2 \alpha = \frac{5}{16}$. C. $\sin^2 \alpha = \frac{3}{16}$. D. $\sin^2 \alpha = \frac{11}{16}$.

🔥 **Câu 44.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

- A. $\max P = 1$ và $\min P = -1$. B. $\max P = 7$ và $\min P = -7$.
C. $\max P = 3$ và $\min P = -3$. D. $\max P = 4$ và $\min P = -4$.

🔥 **Câu 45.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\cos^3 3x = \frac{3}{4} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos 9x.$

B. $\cos^3 3x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x.$

C. $\cos^3 3x = \frac{1}{4} \cos 3x - \frac{3}{4} \cos 9x.$

D. $\cos^3 3x = \frac{1}{4} \cos x + \frac{3}{4} \cos 3x.$

🔥 **Câu 46.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $3\cos^2 3x = \frac{1+2\cos x}{2}.$

B. $2\cos^2 x = 1 + 2\cos x.$

C. $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$

D. $\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}.$

🔥 **Câu 47.** Đặt $\cos 2x = m$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $1 + \cos^2 x = \frac{3}{2} + m.$ B. $1 + \cos^2 2x = \frac{3}{2} + m.$ C. $1 - \cos^2 x = \frac{1}{2} + m.$ D. $1 + \cos^2 x = 1 + \frac{1}{2}m.$

🔥 **Câu 48.** Cho $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$ (với $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$). Tính giá trị $\sin \alpha$.

A. $\frac{1}{5}.$

B. $-\frac{3}{\sqrt{5}}.$

C. $\frac{2}{\sqrt{5}}.$

D. $\frac{1}{\sqrt{5}}.$

🔥 **Câu 49.** Cho $\cos 2x = -\frac{4}{5}$ với $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Tính giá trị $\cos x$.

A. $\frac{2}{3\sqrt{10}}$.

B. $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

D. $\frac{2}{\sqrt{10}}$.

🔥 Câu 50. Tính giá trị của biểu thức $\mathcal{T} = \frac{2\cos^2 \alpha - 1}{4\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{7}{2}$.

🔥 Câu 51. Cho biểu thức $\mathcal{T} = \sin^2 x + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\mathcal{T} = \frac{3}{2}$.

B. $\mathcal{T} = \frac{1}{2}$.

C. $\mathcal{T} = \frac{-3}{2}$.

D. $\mathcal{T} = 1$.

🔥 Câu 52. Cho $\cos 4x = \frac{3}{4}$. Tính giá trị của $\tan^2 2x$.

A. $\frac{2}{7}$.

B. $-\frac{1}{7}$.

C. $\frac{1}{7}$.

D. 7.

🔥 Câu 53. Trong các đẳng thức dưới đây, đẳng thức nào đúng?

A. $\sin 3x + \sin 5x = 2\sin 4x \sin x$.

B. $\sin 3x + \sin 5x = -2\sin 4x \sin x$.

C. $\sin 3x + \sin 5x = 2\sin x \cos 4x$.

D. $\sin 3x + \sin 5x = 2\sin 4x \cos x$.

🔥 **Câu 54.** Chọn đẳng thức **sai** trong các đẳng thức được liệt kê ở các phương án A, B, C và D sau đây.

A. $\cos 4x + \cos x = 2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2}.$

B. $\cos 4x - \cos x = 2 \sin \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2}.$

C. $\sin 4x - \sin x = 2 \cos \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2}.$

D. $\sin 4x + \sin x = 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2}.$

🔥 **Câu 55.** Trong các đẳng thức dưới đây, đẳng thức nào là đúng?

A. $\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right).$

B. $\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right).$

C. $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right).$

D. $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right).$

🔥 **Câu 56.** Giả sử A, B, C là 3 góc của một tam giác. Biết rằng $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + k \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$. Khi đó, giá trị số k bằng bao nhiêu?

A. $k = 0.$

B. $k = 1.$

C. $k = 2.$

D. $k = 4.$

🔥 **Câu 57.** Tính giá trị biểu thức $M = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}.$

A. $M = -\frac{1}{2}.$

B. $M = \frac{1}{2}.$

C. $M = \frac{1}{3}.$

D. $M = -\frac{3}{7}.$

🔥 **Câu 58.** Tính giá trị biểu thức $S = \tan 10^\circ - \tan 50^\circ + \tan 60^\circ + \tan 70^\circ$.

A. $S = 2$.

B. $S = \sqrt{3}$.

C. $S = 2\sqrt{3}$.

D. $S = 4$.

🔥 **Câu 59.** Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a + b = \pi$. Tính $M = \sin(2a - b) + \sin(a - 2b)$.

A. $M = \frac{1}{2}$.

B. $M = 1$.

C. $M = 0$.

D. $M = -1$.

🔥 **Câu 60.** Rút gọn biểu thức $M = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{\cos x + 2\cos^2 x - 1}$.

A. $M = 2\sin x$.

B. $M = 2\cos x$.

C. $M = \sin x$.

D. $M = \cos x$.

🔥 **Câu 61.** Tính giá trị của biểu thức $A = \cos 72^\circ + \cos 108^\circ$.

A. 0.

B. 1.

C. $\cos 18^\circ$.

D. $\sin 18^\circ$.

🔥 **Câu 62.** Biến đổi thành tích biểu thức $B = \sin 3a + \sin a$ ta được

A. $2\sin 2a \cdot \cos a$.

B. $2\cos 2a \cdot \sin a$.

C. $\sin 4a$.

D. $2\sin 2a \cdot \sin a$.

🔥 **Câu 63.** Tính giá trị của biểu thức $A = \cos 14^\circ + \cos 134^\circ + \cos 106^\circ$.

- A. 1. B. 0. C. -1. D. $-\frac{1}{2}$.

🔥 **Câu 64.** Biến đổi thành tích biểu thức $C = \cos 3a + \cos 2a$ ta được

- A. $2 \cos \frac{5a}{2} \cos \frac{a}{2}$. B. $-2 \sin \frac{5a}{2} \sin \frac{a}{2}$. C. $2 \sin \frac{5a}{2} \cos \frac{a}{2}$. D. $2 \cos \frac{5a}{2} \sin \frac{a}{2}$.

🔥 **Câu 65.** Trong các công thức sau công thức nào **sai**?

- A. $\cos a + \cos 2a = 2 \cos \frac{3a}{2} \cos \frac{a}{2}$. B. $\sin a + \sin 2a = 2 \sin \frac{3a}{2} \cos \frac{a}{2}$.
C. $\cos a - \cos 2a = 2 \sin \frac{3a}{2} \sin \frac{a}{2}$. D. $\sin a - \sin 2a = 2 \cos \frac{3a}{2} \sin \frac{a}{2}$.

🔥 **Câu 66.** Biến đổi thành tích biểu thức $A = 1 - 2 \cos x + \cos 2x$ ta được

- A. $A = -4 \cos x \cos^2 \frac{x}{2}$. B. $A = -4 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}$. C. $A = -4 \sin x \cos^2 \frac{x}{2}$. D. $A = -4 \cos x \sin^2 \frac{x}{2}$.

🔥 **Câu 67.** Tính giá trị biểu thức $D = \cos 0 + \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}$

A. $D = 1$. B. $D = 2$. C. $D = 3$. D. $D = 0$.

🔥 **Câu 68.** Giá trị của $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $-\frac{1}{4}$.

🔥 **Câu 69.** Tính giá trị của biểu thức $A = \sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$.

A. $A = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$. B. $A = \frac{1}{2}$. C. $A = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$. D. $A = -\frac{1}{2}$.

🔥 **Câu 70.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào là đồng nhất thức?

A. $\cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha - 1$. B. $\sin^2 2\alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
 C. $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$. D. $\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha$.

🔥 **Câu 71.** Tính giá trị của biểu thức $B = \cos 75^\circ \cos 15^\circ$.

A. $B = \frac{1}{2}$. B. $B = \frac{1}{4}$. C. $B = -\frac{1}{2}$. D. $B = -\frac{1}{4}$.

🔥 **Câu 72.** Tính giá trị của biểu thức $C = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}$.

A. $C = \frac{1}{8}$.

B. $C = \frac{1}{4}$.

C. $C = -\frac{1}{4}$.

D. $C = -\frac{1}{8}$.

🔥 **Câu 73.** Tính giá trị của biểu thức $Q = \sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$.

A. $Q = \frac{1}{2}$.

B. $Q = \frac{1}{4}$.

C. $Q = \frac{1}{8}$.

D. $Q = \frac{1}{16}$.

🔥 **Câu 74.** Trong các khẳng định dưới đây. Khẳng định nào là khẳng định **sai**?

A. $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$.

B. $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$.

C. $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$.

D. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$.

🔥 **Câu 75.** Tính giá trị của biểu thức $\sin 75^\circ \cos 75^\circ$.

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $-\frac{1}{4}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

🔥 **Câu 76.** Cho tam giác ABC . Đẳng thức nào dưới đây đúng?

- A.** $2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \sin A + \sin B + \sin C.$ **B.** $4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \sin A + \sin B + \sin C.$
C. $2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \sin A + \sin B + \sin C.$ **D.** $4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \sin A + \sin B + \sin C.$

🔥 **Câu 77.** Tính giá trị của biểu thức $\sin 825^\circ \cos(-15^\circ) + \cos 75^\circ \sin(-555^\circ) + \tan 155^\circ \tan 245^\circ$.

- A.** $-2.$ **B.** $-1.$ **C.** $0.$ **D.** $2.$

🔥 **Câu 78.** Biến đổi biểu thức $M = \sin \frac{a}{5} \sin \frac{2a}{5}$ thành tổng.

- A.** $\frac{1}{2}(\sin 8a - \sin 2a).$ **B.** $4 \sin \left(\frac{\pi}{6} + a \right) + \sin \left(\frac{\pi}{6} - a \right).$
C. $\frac{1}{2} \left(\cos \frac{a}{5} - \cos \frac{3a}{5} \right).$ **D.** $-4 \cos a + \sin^2 \frac{a}{2}.$

🔥 **Câu 79.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2 \cos 2x + \sin^2 x$ lần lượt là

- A.** 3 và $-3.$ **B.** $\frac{3}{2}$ và $\frac{1}{2}.$ **C.** 1 và $3.$ **D.** 2 và $-1.$

Câu 80. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 5\sin^2 x + 3\cos^2 x + 2\cos 2x$ lần lượt là

A. 3 và -3 .

B. 5 và -3 .

C. 4 và -4 .

D. 3 và -4 .

PHẦN



HÌNH HỌC

CHƯƠNG 1

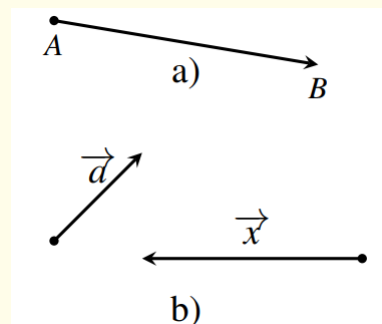
VECTƠ

BÀI 1. VECTƠ - CÁC ĐỊNH NGHĨA

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

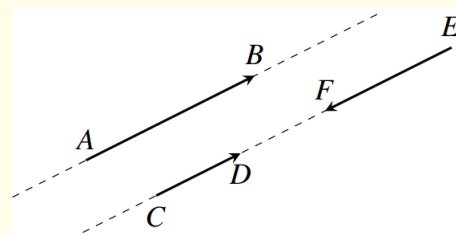
1 ĐỊNH NGHĨA VECTƠ.

- ☑ **Vectơ** là đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai điểm mút của đoạn thẳng đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối
- ☑ Vectơ có điểm đầu là A , điểm cuối là B ta kí hiệu : $\overrightarrow{AB}$.
- ☑ Vectơ còn được kí hiệu là: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$
- ☑ Vectơ – không là vectơ có điểm đầu trùng điểm cuối. Kí hiệu là $\vec{0}$.



2 HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG, CÙNG HƯỚNG.

- ☑ Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ gọi là giá của vectơ.
- ☑ Hai vectơ có giá song song hoặc trùng nhau gọi là hai vectơ cùng phương.
- ☑ Hai vectơ cùng phương thì hoặc cùng hướng hoặc ngược hướng.



! Đặc biệt: Vectơ – không cùng hướng với mọi véc tơ.

3 HAI VECTƠ BẰNG NHAU.

- ☑ Độ dài đoạn thẳng AB gọi là độ dài véc tơ $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu $|\overrightarrow{AB}|$. Vậy $|\overrightarrow{AB}| = AB$.
- ☑ Hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

4 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định một véc-tơ, phương hướng của véc-tơ, độ dài của véc-tơ

- ① Xác định một véc-tơ và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai véc-tơ theo định nghĩa.
- ② Dựa vào các tính chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một véc-tơ.

You Tube

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .

① Liệt kê tất cả các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ và có điểm đầu, điểm cuối lấy trong các điểm đã cho.

② Liệt kê tất cả các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ và có điểm đầu, điểm cuối lấy trong các điểm đã cho.

③ Vẽ các véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$ mà có điểm đầu là A hoặc B .

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

📁

Dạng 2. Chứng minh hai véc-tơ bằng nhau

Để chứng minh hai véc-tơ bằng nhau ta chứng minh chúng có cùng độ dài và cùng hướng hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

You Tube

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA . Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

B

TỰ LUẬN

🔥

Câu 1. Cho tứ giác $ABCD$. Có thể xác định được bao nhiêu vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là các điểm A, B, C, D ?

.....

.....

.....

.....

🔥

Câu 2. Cho $\triangle ABC$ có A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB .

① Chứng minh: $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{A'B'}$.

② Tìm các vectơ bằng $\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{C'A'}$.

🔥 **Câu 3.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD, BC . Chứng minh: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QN}; \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PN}$.

🔥 **Câu 4.** Cho ngũ giác $ABCDE$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của ngũ giác.

🔥 **Câu 5.** Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O . Tìm các vectơ từ 5 điểm A, B, C, D, O .

- ① Bằng vectơ $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{OB}$.
- ② Có độ dài bằng $|\overrightarrow{OB}|$.

🔥 **Câu 6.** Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm của BC . Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{GA}$.

- ① Chứng minh $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.
- ② Gọi J là trung điểm của BB' . Chứng minh $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Chọn khẳng định đúng.

- A. Vectơ là một đường thẳng có hướng.
- B. Vectơ là một đoạn thẳng.
- C. Vectơ là một đoạn thẳng không phân biệt điểm đầu và điểm cuối.
- D. Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

🔥 **Câu 2.** Vectơ có điểm đầu D điểm cuối E được kí hiệu là:

- A. DE .
- B. $\overrightarrow{ED}$.
- C. $|\overrightarrow{DE}|$.
- D. $\overrightarrow{DE}$.

🔥 **Câu 3.** Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hai vectơ cùng phương nếu hai vectơ đó song song hoặc trùng nhau.
- B. Hai vectơ cùng phương với một vectơ khác vectơ không thì hai vectơ đó cùng phương với nhau.
- C. Hai vectơ cùng phương nếu hai vectơ đó có cùng điểm đầu và điểm cuối.
- D. Hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng với nhau.

🔥 **Câu 4.** Cho tam giác ABC , có bao nhiêu vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là 3 đỉnh của tam giác ABC .

- A. 2.
- B. 6.
- C. 3.
- D. 4.

🔥 **Câu 5.** Cho hai điểm phân biệt A và B , hỏi có bao nhiêu véc-tơ được tạo thành từ hai điểm đó?

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

🔥 **Câu 6.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

A. Hai điểm A và B trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.B. Véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với hai véc-tơ không cùng phương khác thì M trùng với N .C. Hai điểm E và F trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{FE}$.D. Hai điểm P và Q trùng nhau khi và chỉ khi giá của $\overrightarrow{PQ}$ luôn song song hoặc trùng với một đường thẳng bất kì khác.

🔥 **Câu 7.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm là O . Có bao nhiêu véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{BC}$ được tạo thành từ các điểm đã cho?

A. 8.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

🔥 **Câu 8.** Xác định mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

A. Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng hướng và cùng độ dài.B. Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng phương và cùng độ dài.C. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.D. Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

🔥 **Câu 9.** Cho tam giác đều ABC , mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

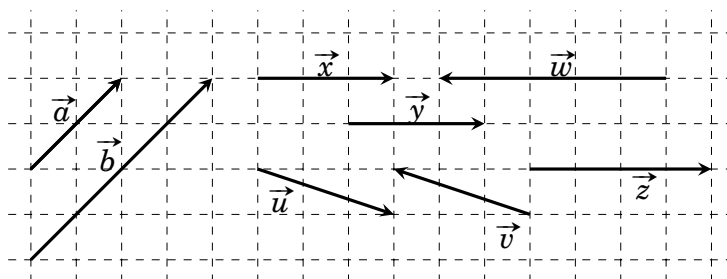
A. $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BC}$.

B. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

C. $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

🔥 **Câu 10.** Cho các véc-tơ như hình vẽ, có bao nhiêu cặp véc-tơ cùng phương xuất hiện trong hình?



A. 3.

B. 7.

C. 8.

D. 6.

🔥 **Câu 11.** Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Có duy nhất một véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ khác.

B. Có ít nhất hai véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ khác.

C. Có vô số véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ khác.

D. Không tồn tại véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ khác.

🔥 **Câu 12.** Cho hình thoi $ABCD$, khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$.

B. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

D. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}|$.

🔥 **Câu 13.** Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $AB = CD$.

B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai véc-tơ đối nhau.

C. $ABCD$ là hình bình hành.

D. AC và BD nhận cùng một điểm làm trung điểm.

🔥 **Câu 14.** Cho đoạn thẳng AB cố định, tập hợp các điểm R thỏa mãn $|\overrightarrow{RA}| = |\overrightarrow{AB}|$ là

A. một điểm.

B. một đường thẳng.

C. một đường tròn.

D. một đoạn thẳng.

🔥 **Câu 15.** Cho ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng với $\overrightarrow{BA}$.

D. $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng với $\overrightarrow{BA}$.

🔥 **Câu 16.** Trong ba mệnh đề sau đây, có bao nhiêu mệnh đề sai?

I. Nếu hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là cùng phương.

II. Nếu hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là cùng hướng.

III. Nếu hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là cùng hướng.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

🔥 Câu 17. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O có cạnh là 5 cm. Khi đó ta có

A. $\vec{AC} = 5\sqrt{2}$.B. $|\vec{BA}| = 5$.C. $\vec{BD} = \sqrt{2}\vec{BC}$.D. $BO = \frac{\vec{AB}\sqrt{2}}{2}$.

🔥 Câu 18. Cho tứ giác $ABCD$ có $\vec{AB} = \vec{DC}$ và $|\vec{AB}| = |\vec{AD}|$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì?

A. Hình thoi.

B. Hình chữ nhật.

C. Hình bình hành.

D. Hình vuông.

🔥 Câu 19. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{MA} = \vec{MB}$.B. $\vec{AB}$ và $\vec{AM}$ cùng phương.C. $\vec{AB}$ và $\vec{MB}$ ngược hướng.D. $|\vec{AB}| = |\vec{MB}|$.

🔥 Câu 20. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm là I . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{IA} = \vec{BI}$.B. $\vec{IC} = \vec{DI}$.C. $\vec{AI} = \vec{IC}$.D. $\vec{BI} = \vec{DI}$.

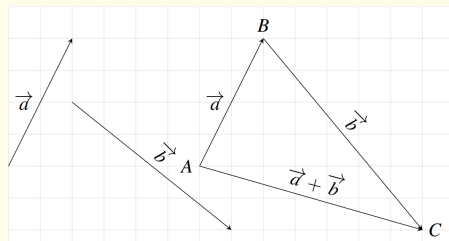
BÀI 2. TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTO

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 TỔNG HAI VECTO

Định nghĩa 1. Cho hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$. Từ điểm A tùy ý vẽ $\vec{AB} = \vec{a}$ rồi từ B vẽ $\vec{BC} = \vec{b}$, khi đó vectơ $\vec{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Kí hiệu $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.



Tính chất:

- ① Giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- ② Kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- ③ Tính chất vectơ – không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \forall \vec{a}$

2 HIỆU HAI VECTO.

Định nghĩa 2. Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ là vectơ ngược hướng và cùng độ dài với vectơ $\vec{a}$. Kí hiệu $-\vec{a}$.

Như vậy $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \forall \vec{a}$ và $\vec{AB} = -\vec{BA}$

Định nghĩa 3. Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$. Kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

3 CÁC QUY TẮC

- ☑ Quy tắc ba điểm: Cho A, B, C tùy ý, ta có: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$
- ☑ Quy tắc hình bình hành: Nếu ABCD là hình bình hành thì $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$.
- ☑ Quy tắc về hiệu vectơ: Cho O, A, B tùy ý ta có: $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$

Chú ý: Ta có thể mở rộng quy tắc ba điểm cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ thì

$$\vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \dots + \vec{A_{n-1}A_n} = \vec{A_1A_n}$$

4 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định véc-tơ

Dựa vào quy tắc cộng, trừ, quy tắc 3 điểm, hình bình hành, ta biến đổi và dựng hình để xác định các véc-tơ.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC .

- ① Xác định véc-tơ $\vec{a} = \vec{AB} + \vec{BC}$.
- ② Xác định véc-tơ $\vec{b} = \vec{AB} - \vec{AC}$.
- ③ Xác định véc-tơ $\vec{c} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

Lời giải:

Dạng 2. Tính độ dài của tổng và hiệu hai véc-tơ

- ① Độ dài của véc-tơ bằng độ dài của đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.
- ② Ta thường sử dụng các công thức về cạnh như hệ thức lượng tam giác vuông, định lý Pytago, tính chất tam giác đều, hình chữ nhật, hình vuông,...

Ví dụ 1. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính $|\vec{AB} - \vec{AC}|$

Lời giải:

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $|\vec{DB} + \vec{DC}|$

Lời giải:

Dạng 3. Chứng minh đẳng thức véc-tơ

- ☒ Sử dụng quy tắc ba điểm.
- ☒ Sử dụng quy tắc hình bình hành.

Ví dụ 1. Cho 5 điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EA} = \vec{CB} + \vec{ED}$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN**🔥 Câu 1.** Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Xác định các véc-tơ sau đây:

① $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

② $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}$

③ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$

④ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AD}$

.....

.....

.....

.....

🔥 Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$, có tâm O . Hãy xác định các véc-tơ sau đây:

① $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

② $\vec{y} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CD}$.

③ $\vec{z} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}$.

④ $\vec{t} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BD}$.

.....

.....

.....

.....

🔥 Câu 3. Cho tam giác ABC . Tìm véc-tơ $\vec{x}$ trong các trường hợp:

① $\vec{x} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$

② $\overrightarrow{CA} - \vec{x} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

.....

.....

.....

.....

🔥 Câu 4. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh:

① $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CB}.$

② $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}.$

🔥 **Câu 5.** Cho các điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}.$

🔥 **Câu 6.** Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh:

① $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}.$

② $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}.$

🔥 **Câu 7.** Cho 4 điểm A, B, C, D . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh:

① Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

② $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}.$

🔥 **Câu 8.** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O và cạnh a . M là một điểm bất kỳ. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$, $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$, $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$

🔥 **Câu 9.** Cho tam giác ABC đều cạnh a . Tính độ dài của các vectơ sau $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Cho I là trung điểm của đoạn AB . Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- A. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. B. $IA + IB = 0$. C. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$. D. $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{IB}$.

🔥 **Câu 2.** Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau.

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$. D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.

🔥 **Câu 3.** Cho 5 điểm A, B, C, D, E . Khi đó, tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ bằng

- A. $\vec{0}$. B. $\overrightarrow{EA}$. C. $\overrightarrow{AE}$. D. $-\overrightarrow{BE}$.

🔥 **Câu 4.** Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F phân biệt. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BF} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CF}$.

Câu 5. Giả sử điểm G là trọng tâm của tam giác ABC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

C. $GA = GB = GC$.

D. $GA + GB + GC = \vec{0}$.

Câu 6. Cho véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. Với điểm O bất kỳ, dựng véc-tơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.

B. O là trung điểm đoạn AB .

C. B là trung điểm đoạn OA .

D. A là trung điểm đoạn OB .

Câu 7. Cho véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ đối nhau. Với điểm O tùy ý, dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Tìm mệnh đề đúng.

A. $O \equiv B$.

B. $A \equiv B$.

C. $O \equiv A$.

D. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.

Câu 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Tính tổng $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.

A. $\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{BD}$.

C. $\vec{0}$.

D. $\overrightarrow{CD}$.

🔥 **Câu 9.** Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$. Tính theo a độ dài của véc-tơ $\vec{u} = \vec{BA} + \vec{CA}$.

A. $a\sqrt{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. a .

D. $2a$.

🔥 **Câu 10.** Cho hình thang $ABCD$ có $AB = a$, $CD = 3a$, $AB \parallel CD$. Tính theo a độ dài của véc-tơ $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{DC}$.

A. $3a$.

B. $4a$.

C. a .

D. $3a$.

🔥 **Câu 11.**

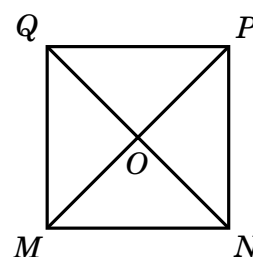
Cho hình vuông $MNPQ$ tâm O . Xác định tổng $\vec{MO} + \vec{PN}$.

A. $\vec{MN}$.

B. $\vec{OP}$.

C. $\vec{OQ}$.

D. $\vec{QO}$.



🔥 **Câu 12.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của ABC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{BD}$.

B. $\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{DB}$.

C. $\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.

D. $\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{CD}$.

🔥 **Câu 13.** Tổng $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{QR}$ bằng

A. $\overrightarrow{PM}$.

B. $\overrightarrow{MP}$.

C. $\overrightarrow{MQ}$.

D. $\overrightarrow{MN}$.

🔥 **Câu 14.** Với bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chọn câu đúng trong các câu sau

A. $ABCD$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

B. $ABCD$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

C. $ABCD$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

D. $ABCD$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$.

🔥 **Câu 15.** Cho ba điểm bất kỳ A, B, C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

B. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}$.

D. $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}$.

🔥 **Câu 16.** Cho ba điểm bất kỳ A, B, C . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CA}$.

🔥 **Câu 17.** Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$.

B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = AC$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

🔥 **Câu 18.** Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Véc-tơ nào trong các véc-tơ dưới đây bằng $\overrightarrow{CA}$

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$.

B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$.

D. $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB}$.

🔥 **Câu 19.** Cho ba điểm A, B, C bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.

🔥 **Câu 20.** Cho tam giác ABC là tam giác đều, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Mệnh đề nào là đúng trong các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$.

C. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO}$.

🔥 **Câu 21.** Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Khi đó,

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}$.

B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$.

D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}$.

Câu 22. Cho tứ giác $ABCD$. Xét các khẳng định sau

(I): $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

(III): $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$

(II): $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$

(IV): $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$

Tìm số khẳng định đúng.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Câu 23. Cho tam giác ABC là tam giác đều có cạnh bằng a . Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ lần lượt là

A. a và $a\sqrt{3}$.

B. Đều bằng a .

C. a và $2a$.

D. a và $a\sqrt{2}$.

Câu 24. Cho năm điểm A, B, C, D, E . Véc-tơ $\vec{v} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB}$ bằng véc-tơ nào dưới đây?

A. $\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{DB}$.

D. $\overrightarrow{AD}$.

Câu 25. Cho hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

- 🔥 **Câu 26.** Cho véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và một điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \vec{0}$?
- A. 1. B. 2. C. 0. D. vô số.

- 🔥 **Câu 27.** Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Nếu $\vec{a}$ là véc-tơ đối của $\vec{b}$ thì $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.
 B. Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng thì $\vec{b}$ là véc-tơ đối của $\vec{a}$.
 C. Nếu $\vec{b}$ là véc-tơ đối của $\vec{a}$ thì $\vec{b} = -\vec{a}$.
 D. Nếu $\vec{a}$ là véc-tơ đối của $\vec{b}$ thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

- 🔥 **Câu 28.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}|$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$.
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}$.

- 🔥 **Câu 29.** Cho bốn điểm A, B, C, D . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.
 C. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$.

Câu 30. Cho hai lực $F_1 = F_2 = 100\text{N}$, có điểm đặt tại O và tạo với nhau góc 120° . Cường độ lực tổng hợp của hai lực ấy bằng bao nhiêu?

A. 100 N.

B. $100\sqrt{5}$ N.

C. 200 N.

D. $50\sqrt{3}$ N.

BÀI 3. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI VECTO

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA.

Tích của vectơ $\vec{a}$ với số thực $k \neq 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$.

✓ Nếu $k > 0$, $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

✓ nếu $k < 0$ $k\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

Quy ước: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ và $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Tính chất:

- ! ✎ $(k \pm l)\vec{a} = k\vec{a} \pm l\vec{a}$.
 ✎ $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$.
 ✎ $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$.

✎ $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \vec{a} = \vec{0} \end{cases}$.
 ✎ $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, -1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

2 ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI VECTO CÙNG PHƯƠNG.

✓ $\vec{b}$ cùng phương $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k thỏa $\vec{b} = k\vec{a}$.

✓ Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là có số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

3 PHÂN TÍCH MỘT VECTO THEO HAI VECTO KHÔNG CÙNG PHƯƠNG.

Cho $\vec{a}$ không cùng phương $\vec{b}$. Với mọi vectơ $\vec{x}$ luôn được biểu diễn $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với m, n là các số thực duy nhất.

Tính chất:

- ! ① Cho I là trung điểm của đoạn AB , với mọi M ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
 ② Cho G là trọng tâm $\triangle ABC$, với mọi M ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

4 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Các bài toán sử dụng định nghĩa và tính chất của phép nhân véc-tơ với một số.

Áp dụng định nghĩa và các tính chất của phép nhân véc-tơ với một số để giải các bài tập.

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm của BC . Hãy tính:

① $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{IB}$.

② $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{IC}$.

③ $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{IA}$.

Lời giải:

Dạng 2. Phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương

Dùng các quy tắc về véc-tơ để phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương. Cho $\vec{a}$ không cùng phương $\vec{b}$. Với mọi vectơ $\vec{x}$ luôn được biểu diễn $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với m, n là các số thực duy nhất.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Phân tích véc-tơ $\vec{AG}$ theo 2 véc-tơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.

Lời giải:

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD . Phân tích véc-tơ $\vec{AM}$ theo 2 véc-tơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.

Lời giải:

Dạng 3. Chứng minh đẳng thức véc-tơ có chứa tích của véc-tơ với một số

Phương pháp giải:

☑ **Hướng 1:** Biến đổi một vế thành vế còn lại. Khi đó:

- Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
- Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích véc-tơ.

☑ **Hướng 2:** Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.

☑ **Hướng 3:** Biến đổi một đẳng thức véc-tơ đã biết luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng: $\vec{AB} + 2\vec{AC} + \vec{AD} = 3\vec{AC}$.

Lời giải:

.....

 Ví dụ 2.

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$.

Lời giải:

.....
.....
.....
.....

 Ví dụ 3.

Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải:

.....
.....
.....
.....

B

TỰ LUẬN

-  Câu 1.

Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC .
- ①

Tìm x, y biết $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BD} = y\overrightarrow{OB}$.
- ②

Tìm tất cả các véc-tơ $\vec{u}$ thỏa mãn $\vec{u} = 2\overrightarrow{ON}$.

.....	
.....	
.....	
.....	

-  Câu 2.

Cho tam giác ABC . Gọi H, K lần lượt thuộc 2 cạnh AB và AC sao cho $3AH = 2AB, 3AK = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $4BM = 3MC$. Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{BM}$ theo 2 véc-tơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{AK}$.

.....	
.....	
.....	
.....	

① Chứng minh: $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.

② Với điểm O bất kỳ, chứng minh: $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OI}$.

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Ex 1: Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB , N là trung điểm của BC . Lấy điểm P thuộc AC sao cho $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA}$. K là trung điểm của MN . Chứng minh:

$$\textcircled{1} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

$$\textcircled{2} \quad \overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

rằng:

$$\textcircled{1} \quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

$$\textcircled{2} \quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}.$$

$$\textcircled{3} \quad \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}).$$

🔥 **Câu 8.** Cho ΔABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Chứng minh rằng:

$$\textcircled{1} \quad \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CM} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BN}$$

$$\textcircled{2} \quad \overrightarrow{AC} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{CM} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$$

$$\textcircled{3} \quad \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CM}.$$

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Cho tam giác ABC có trung tuyến AM và trọng tâm G . Khẳng định nào sau đây đúng?

$$\text{A. } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).$$

$$\text{C. } \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MG}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

🔥 **Câu 2.** Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì đẳng thức nào sau đây đúng?

$$\text{A. } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

$$\text{B. } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

$$\text{C. } \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

$$\text{D. } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

🔥 **Câu 3.** Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây đúng?

$$\text{A. } \overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}.$$

🔥 **Câu 4.** Cho hình bình hành $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$. C. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.

🔥 **Câu 5.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$.

🔥 **Câu 6.** Cho G là trọng tâm tam giác ABC , gọi I là trung điểm của BC . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- A. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$. B. $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$. C. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$. D. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

🔥 **Câu 7.** Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Hãy chọn hệ thức đúng

A. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$.

B. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

C. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

D. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

❖ **Câu 8.** Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC . Các điểm D, E thỏa mãn các đẳng thức: $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

❖ **Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O . Gọi P là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

❖ **Câu 10.** Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là **sai**?

A. $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

B. $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

C. $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.

D. $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

❖ **Câu 11.** Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng?

A. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

D. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

🔥 Câu 12. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$.

D. $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AG}$.

🔥 Câu 13. Cho tam giác ABC và $A'B'C'$ có trọng tâm lần lượt là G và G' . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng?

A. $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'})$.

B. $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'})$.

C. $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

D. $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'})$.

🔥 Câu 14. Cho điểm A và véc-tơ $\vec{u}$. Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$?

A. Duy nhất một.

B. Hai.

C. Không có.

D. Vô số.

🔥 Câu 15. Cho ba điểm không thẳng hàng A, B, C và M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $ABMC$ là hình bình hành.

B. $ABCM$ là hình bình hành.

C. M là trọng tâm của tam giác ABC .

D. CM là trung tuyến của tam giác ABC .

- ❖ **Câu 16.** Cho hai điểm A, B phân biệt và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$. Khi đó,
- A. M là trung điểm AB . B. M là điểm đối xứng với A qua B .
 C. M là điểm đối xứng với B qua A . D. M trùng với A .

- ❖ **Câu 17.** Cho tam giác ABC và điểm M tùy ý. Đẳng thức nào sau đây **không** suy ra được G là trọng tâm tam giác ABC ?

- A. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
 C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GM}$. D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

- ❖ **Câu 18.** Cho I là trung điểm đoạn thẳng AB . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$. B. $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. C. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$. D. $\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

- ❖ **Câu 19.** Cho hai vectơ tùy ý $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực h, k bất kì. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $h(\vec{a} - \vec{b}) = h\vec{a} - h\vec{b}$. B. $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$.
 C. $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$. D. $(-1)\vec{a} = \vec{a}$.

Câu 20. Vectơ đối của $\vec{u} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ là vectơ nào sau đây?

A. $\vec{v} = -3\vec{a} + 4\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

B. $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + 2\vec{c}$.

C. $\vec{v} = 3\vec{a} + 4\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

D. $\vec{v} = -3\vec{a} - 4\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 21. Cho ΔABC có trọng tâm G và trung tuyến AM . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\vec{GA} + 2\vec{GM} = \vec{0}$.

B. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$, với mọi điểm O .

C. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

D. $\vec{AM} = -2\vec{MG}$.

Câu 22. Gọi CM là trung tuyến của tam giác ABC và D là trung điểm của CM . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\vec{DA} + \vec{DB} + 2\vec{DC} = \vec{0}$.

B. $\vec{DA} + \vec{DC} + 2\vec{DB} = \vec{0}$.

C. $\vec{DA} + \vec{DB} + 2\vec{CD} = \vec{0}$.

D. $\vec{DC} + \vec{DB} + 2\vec{DA} = \vec{0}$.

Câu 23. Chọn phát biểu sai?

A. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\vec{AB} = k\vec{BC}, k \neq 0$.

B. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\vec{AC} = k\vec{BC}, k \neq 0$.

C. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\vec{AB} = k\vec{AC}, k \neq 0$.

D. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\vec{AB} = k\vec{AC}$.

🔥 **Câu 24.** Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G . Khi đó $\overrightarrow{GA} =$

A. $2\overrightarrow{GM}$. B. $\frac{2}{3}\overrightarrow{GM}$. C. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

🔥 **Câu 25.** Cho tam giác ABC có trọng tâm G và trung tuyến AM . Khẳng định nào sau đây là sai:

- A. $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, với mọi điểm O .
 C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{MG}$.

🔥 **Câu 26.** Cho hình bình hành $ABCD$. Tổng các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ là

A. $\overrightarrow{AC}$. B. $2\overrightarrow{AC}$. C. $3\overrightarrow{AC}$. D. $5\overrightarrow{AC}$.

🔥 **Câu 27.** Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm đó thẳng hàng là

- A. $\forall M : \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. B. $\forall M : \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}$.
 C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. D. $\exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

🔥 **Câu 28.** Hãy chọn kết quả đúng khi phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ của tam giác ABC với trung tuyến AM .

A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

🔥 **Câu 29.** Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$. B. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$. D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.

🔥 **Câu 30.** Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC . Đẳng thức vectơ nào sau đây đúng?

A. $2\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AG}$. B. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$. C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{GM}$.

🔥 **Câu 31.** Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC . Câu nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$. B. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA}$. C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}$.

🔥 **Câu 32.** Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì đẳng thức nào sau đây đúng.

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$. C. $\overrightarrow{AG} = \frac{3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})}{2}$. D. $\overrightarrow{AG} = \frac{2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})}{3}$.

❖ Câu 33. Điều kiện nào dưới đây là điều kiện cần và đủ để điểm O là trung điểm của đoạn AB .

- A. $OA = OB$. B. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$. C. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BO}$. D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

❖ Câu 34. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây cùng phương?

- A. $-3\vec{a} + \vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a} + 6\vec{b}$. B. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $2\vec{a} + \vec{b}$.
C. $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$. D. $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - 2\vec{b}$.

❖ Câu 35. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây là cùng phương?

- A. $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$. B. $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$.
C. $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$. D. $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$.

❖ Câu 36. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $MB = 3MA$. Khi đó, biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là:

- A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

🔥 Câu 37. Cho tam giác ABC có M thuộc cạnh BC sao cho $CM = 2MB$ và I là trung điểm của AB . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

🔥 Câu 38. Cho tam giác ABC có N thuộc cạnh BC sao cho $BN = 2NC$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

🔥 Câu 39. Cho tam giác ABC có N thuộc cạnh BC sao cho $BN = 2NC$ và I là trung điểm của AB . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{NI} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{NI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{NI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{NI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

🔥 Câu 40. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM , gọi I là trung điểm AM . Đẳng thức nào sau đây đúng?

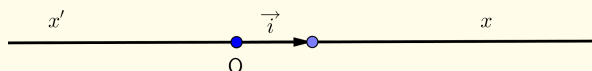
- A. $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
C. $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IA}$. D. $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA}$.

BÀI 4. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 TRỤC TỌA ĐỘ.

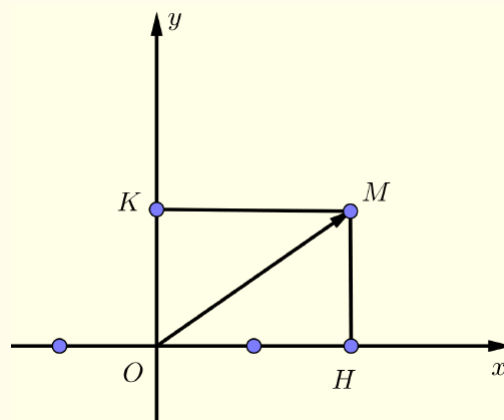
Định nghĩa 1. Trục tọa độ (Trục, hay trục số) là một đường thẳng trên đó ta đã xác định một điểm O và một vectơ đơn vị $\vec{i}$ (tức là $|\vec{i}| = 1$).



Điểm O được gọi là gốc tọa độ, vectơ $\vec{i}$ được gọi là vectơ đơn vị của trục tọa độ. Kí hiệu $(O; \vec{i})$ hay $x'Ox$ hoặc đơn giản là Ox .

2 HỆ TRỤC TỌA ĐỘ.

Định nghĩa 2. Hệ trục tọa độ gồm hai trục vuông góc Ox và Oy với hai vectơ đơn vị lần lượt là $\vec{i}, \vec{j}$. Điểm O gọi là gốc tọa độ, Ox gọi là trục hoành và Oy gọi là trục tung. Kí hiệu Oxy hay $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



Tọa độ điểm, tọa độ vectơ.

Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ nếu $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì cặp số $(x; y)$ được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u}$.

Kí hiệu là $\vec{u} = (x; y)$ hay $\vec{u}(x; y)$.

x được gọi là hoành độ, y được gọi là tung độ của vectơ $\vec{u}$.

Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tọa độ của vectơ $\vec{OM}$ gọi là tọa độ của điểm M , kí hiệu là $M = (x; y)$ hay $M(x; y)$. x được gọi là hoành độ, y được gọi là tung độ của điểm M .

Nhận xét. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên Ox và Oy thì

$$M(x; y) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{OH} + \vec{OK}$$

Như vậy $\vec{OH} = x\vec{i}, \vec{OK} = y\vec{j}$ hay $x = \overline{OH}, y = \overline{OK}$.

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng. Tọa độ trọng tâm tam giác.

✎ Cho $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ và M là trung điểm AB .

Tọa độ trung điểm $M(x_M; y_M)$ của đoạn thẳng AB là
$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

✍ Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$.

$$\text{Tọa độ trọng tâm } G(x_G; y_G) \text{ của tam giác } ABC \text{ là } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

Tính chất 1. Biểu thứ tọa độ của các phép toán vectơ.

Cho $\vec{u} = (x; y)$; $\vec{u}' = (x'; y')$ và số thực k . Khi đó ta có :

✍ $\vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

✍ $\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x'; y \pm y')$

✍ $k \cdot \vec{u} = (kx; ky)$

✍ $\vec{u}'$ cùng phương $\vec{u}$, ($\vec{u} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k sao cho $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

✍ Cho $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ thì $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

3 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Các phép toán trên tọa độ véc-tơ

① Căn cứ vào định nghĩa tọa độ của điểm, véc-tơ và các công thức tọa độ của véc-tơ $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $k\vec{u}$.

② Phân tích $\vec{c} = (c_1; c_2)$ theo các véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$.

Bước 1: Giả sử $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Bước 2: Ta có $m\vec{a} + n\vec{b} = (ma_1 + nb_1; ma_2 + nb_2)$.

Giải hệ $\begin{cases} c_1 = ma_1 + nb_1 \\ c_2 = ma_2 + nb_2 \end{cases}$.

 **Ví dụ 1.** Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (-4; 2)$, $\vec{b} = (5; 8)$. Tính tọa độ của các véc-tơ

① $\vec{a} + \vec{b}$.

② $\vec{a} - \vec{b}$.

③ $5\vec{a} + 2\vec{b}$.

④ $-(5\vec{a} - 2\vec{b})$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Trong mặt phẳng Oxy , cho các véc-tơ $\vec{a} = (4; -2)$, $\vec{b} = (-1; -1)$, $\vec{c} = (2; 5)$. Hãy phân tích

① véc-tơ $\vec{b}$ theo hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$.

② véc-tơ $\vec{a}$ theo hai véc-tơ $\vec{b}$ và $\vec{c}$.

③ véc-tơ $\vec{c}$ theo hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải:

.....

.....

Dạng 2. Tính tọa độ trung điểm - trọng tâm

✍ Tọa độ trung điểm $M(x_M; y_M)$ của đoạn thẳng AB là
$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

✍ Tọa độ trọng tâm $G(x_G; y_G)$ của tam giác ABC là
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1;4)$, $B(-2;6)$. Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB .

Lời giải:

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(-1;2)$, $B(1;4)$, $C(-1;-2)$. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC .

Lời giải:

Dạng 3. Xác định tọa độ của một véc-tơ và một điểm

- ✍ Tọa độ điểm $M(x; y): \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$
- ✍ Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$
- ✍ Sử dụng tọa độ hai vectơ bằng nhau, các phép tính tổng, hiệu, tích vectơ với một số, tọa độ trung điểm và trọng tâm tam giác.
- ✍ Phương pháp chung: ta thường tìm nhữnghệ thức về vectơ liên hệ giữa M (hay vectơ $\vec{a}$) với các điểm (hay vectơ) đã biết cho phép lập hệ phương trình mà fhai ẩn là tọa độ của M (hay vectơ $\vec{a}$), từ đó tìm được tọa độ của M (hay vectơ $\vec{a}$).

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình bình hành $ABCD$. Tìm tọa độ điểm D biết $A(3;2)$, $B(2;-1)$, $C(-2;-2)$.

Lời giải:

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $B(2;3)$, $C(-1;-2)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn

$$\textcircled{1} \quad 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

$$\textcircled{2} \quad 3\overrightarrow{CM} - 4\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}.$$

Lời giải:

.....

B TỰ LUẬN

Câu 1. Viết tọa độ của các vectơ sau:

$$\textcircled{1} \quad \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}; \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j}; \vec{c} = 3\vec{i}; \vec{d} = -2\vec{j}.$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}; \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}; \vec{c} = -\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}; \vec{d} = -4\vec{j}; \vec{e} = 3\vec{i}.$$

.....

Câu 2. Cho $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (0; 3)$. Tìm tọa độ của các vectơ sau:

$$\textcircled{1} \quad \vec{x} = \vec{a} + \vec{b}; \vec{y} = \vec{a} - \vec{b}; \vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b}.$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b}; \vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b}; \vec{w} = 4\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

.....

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho các véc-tơ $\vec{a} = (3; 2)$, $\vec{b} = (3; -3)$, $\vec{c} = (5; 0)$. Hãy phân tích

$\vec{b}$ theo hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$.

$\vec{a}$ theo hai véc-tơ $\vec{b}$ và $\vec{c}$.

$\vec{c}$ theo hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

.....

🔥 **Câu 4.** Cho $\vec{a} = (2; 0)$, $\vec{b} = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$, $\vec{c} = (4; -6)$.

- ① Tìm tọa độ của vectơ $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$.
- ② Tìm 2 số m, n sao cho: $m\vec{a} + \vec{b} - n\vec{c} = \vec{0}$.
- ③ Biểu diễn vectơ $\vec{c}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$.

🔥 **Câu 5.** Cho hai điểm $A(3; -5), B(1; 0)$.

- ① Tìm tọa độ điểm C sao cho: $\vec{OC} = -3\vec{AB}$.
- ② Tìm điểm D đối xứng của A qua C .
- ③ Tìm điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k = -3$.

🔥 **Câu 6.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hình bình hành $ABCD$. Tìm tọa độ điểm D biết

- | | |
|------------------------------------|----------------------------------|
| ① $A(-1; 4), B(2; 6), C(1; 1)$. | ② $A(0; 4), B(-2; 0), C(3; 1)$. |
| ③ $A(-5; 0), B(-2; 3), C(1; -2)$. | ④ $A(2; 1), B(-2; 0), C(1; 1)$. |

🔥 **Câu 7.** Cho ba điểm $A(-1; 1), B(1; 3), C(-2; 0)$.

- ① Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- ② Tìm các tỉ số mà điểm A chia đoạn BC , điểm B chia đoạn AC , điểm C chia đoạn AB .

🔥 **Câu 8.** Cho ba điểm $A(1; -2)$, $B(0; 4)$, $C(3; 2)$.

- ① Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.
- ② Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB .
- ③ Tìm tọa độ điểm M sao cho: $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
- ④ Tìm tọa độ điểm N sao cho: $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

🔥 **Câu 9.** Cho ba điểm $A(1; -2)$, $B(2; 3)$, $C(-1; -2)$.

- ① Tìm tọa độ điểm D đối xứng của A qua C .
- ② Tìm tọa độ điểm E là đỉnh thứ tư của hình bình hành có 3 đỉnh là A, B, C .
- ③ Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔥 **Câu 1.** Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

A. $I\left(\frac{x_A - x_B}{2}; \frac{y_A - y_B}{2}\right)$.

B. $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

C. $I\left(\frac{x_A + x_B}{3}; \frac{y_A + y_B}{3}\right)$.

D. $I\left(\frac{x_A + y_A}{2}; \frac{x_B + y_B}{2}\right)$.

🔥 **Câu 2.** Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. $\overrightarrow{AB} = (y_A - x_A; y_B - x_B)$.

B. $\overrightarrow{AB} = (x_A + x_B; y_A + y_B)$.

C. $\overrightarrow{AB} = (x_A - x_B; y_A - y_B)$.

D. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và $C(x_C; y_C)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $G\left(\frac{x_A - x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

B. $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{2}\right)$.

C. $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

D. $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{2}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

Câu 4. Cho các vectơ $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$. Điều kiện để vectơ $\vec{u} = \vec{v}$ là

A. $\begin{cases} u_1 = u_2 \\ v_1 = v_2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} u_1 = -v_1 \\ u_2 = -v_2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} u_1 = v_2 \\ u_2 = v_1 \end{cases}$.

Câu 5. Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, cho véc-tơ $\vec{a}$ thỏa mãn $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{a}$.

A. $\vec{a} = (3; -4)$.

B. $\vec{a} = (3; 4)$.

C. $\vec{a} = (-3; -4)$.

D. $\vec{a} = (-4; 3)$.

Câu 6. Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, cho véc-tơ $\vec{u}$ có tọa độ $(-1; 3)$. Viết véc-tơ $\vec{u}$ dưới dạng $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

A. $\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j}$.

B. $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$.

C. $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j}$.

D. $\vec{u} = -\vec{i} - 3\vec{j}$.

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-1;2)$, $B(4;-3)$. Tính tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

- A. $\overrightarrow{AB} = (3; -1)$. B. $\overrightarrow{AB} = (5; -5)$. C. $\overrightarrow{AB} = (-5; 5)$. D. $\overrightarrow{AB} = (-4; 6)$.

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(-1;4)$ và $B(3;-5)$. Khi đó tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{BA}$ là cặp số nào?

- A. $(2; -1)$. B. $(4; -9)$. C. $(-4; 9)$. D. $(4; 9)$.

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (3; -1)$ và $\vec{b} = (3; 4)$. Tính tọa độ véc-tơ $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

- A. $\vec{c} = (3; 3)$. B. $\vec{c} = (2; 7)$. C. $\vec{c} = (2; 1)$. D. $\vec{c} = (6; 3)$.

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho véc-tơ $\vec{a} = (3; -2)$. Tính tọa độ véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a}$.

- A. $\vec{u} = (5; 0)$. B. $\vec{u} = (6; 4)$. C. $\vec{u} = (3; -2)$. D. $\vec{u} = (6; -4)$.

Câu 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho bốn điểm $A(3; -2)$, $B(7; 1)$, $C(0; 1)$, $D(-8; -5)$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai véc-tơ đối.
C. Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng.

- B. Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng.
D. Bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

🔥 **Câu 12.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-1;5)$, $B(5;5)$, $C(-1;11)$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. Ba điểm A, B, C thẳng hàng.
B. Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.
C. Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.
D. Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

🔥 **Câu 13.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , mệnh đề nào trong các mệnh đề dưới đây là mệnh đề đúng?

- A. Hai véc-tơ $\vec{a}(-5;0)$ và $\vec{b}(-4;0)$ cùng phương.
B. Véc-tơ $\vec{c} = (7;3)$ là véc-tơ đối của $\vec{d} = (-7;3)$.
C. Hai véc-tơ $\vec{a} = (4;2)$ và $\vec{b} = (8;3)$ cùng phương.
D. Hai véc-tơ $\vec{a} = (6;3)$ và $\vec{b} = (2;1)$ ngược hướng.

🔥 **Câu 14.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - \vec{j}$ và $\overrightarrow{OB} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$. Tính tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

- A. $\overrightarrow{AB} = (3;3)$. B. $\overrightarrow{AB} = (2;-1)$. C. $\overrightarrow{AB} = (7;1)$. D. $\overrightarrow{AB} = (-3;-3)$.

🔥 **Câu 15.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cặp véc-tơ nào dưới đây đối nhau?

A. $\vec{a} = (1; 2)$ và $\vec{b} = (-1; -2)$.

B. $\vec{a} = (1; 2)$ và $\vec{b} = (2; 1)$.

C. $\vec{a} = (-1; -2)$ và $\vec{b} = (-1; -2)$.

D. $\vec{a} = (1; 2)$ và $\vec{b} = (-2; -1)$.

🔥 **Câu 16.** Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, cho hai véc-tơ $\vec{u} = (2; -3)$ và $\vec{v} = -5\vec{i} - \vec{j}$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{w} = (a; b)$, biết $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$. Khi đó $a.b$ bằng

A. -57 .

B. 57 .

C. -63 .

D. 63 .

🔥 **Câu 17.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; -5)$ và $\vec{b} = (-4; 7)$. Tính tọa độ của véc-tơ $\vec{a} + \vec{b}$.

A. $(2; -2)$.

B. $(-2; 2)$.

C. $(6; -12)$.

D. $(-6; 12)$.

🔥 **Câu 18.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; 5)$ và $\vec{b} = (-4; 3)$. Tính tọa độ của véc-tơ $\vec{a} - \vec{b}$.

A. $(-2; 2)$.

B. $(-6; -2)$.

C. $(-2; 8)$.

D. $(6; 2)$.

🔥 **Câu 19.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; 4)$. Tính tọa độ của véc-tơ $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

A. $\vec{m} = (11; 14)$.

B. $\vec{m} = (11; 6)$.

C. $\vec{m} = (4; 6)$.

D. $\vec{m} = (11; 16)$.

🔥 Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (2; -4)$, $\vec{b} = (-5; 3)$. Tính tọa độ véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

- A. $\vec{u} = (7; -7)$. B. $\vec{u} = (9; -11)$. C. $\vec{u} = (9; 5)$. D. $\vec{u} = (-1; 5)$.

🔥 Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-2; 1)$, $\vec{c} = (3; -1)$. Tính tọa độ của véc-tơ $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

- A. $(-3; 6)$. B. $(3; -6)$. C. $(3; 6)$. D. $(-3; -6)$.

🔥 Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba véc-tơ $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; -4)$, $\vec{c} = (-7; 2)$. Tính tọa độ của véc-tơ $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$.

- A. $\vec{u} = (4; 3)$. B. $\vec{u} = (16; 10)$. C. $\vec{u} = (-12; 26)$. D. $\vec{u} = (40; -13)$.

🔥 Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba véc-tơ $\vec{a} = (1; 1)$, $\vec{b} = (3; -4)$ và $\vec{c} = (-5; 2)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.

- A. $\vec{x} = (7; 7)$. B. $\vec{x} = (7; -7)$. C. $\vec{x} = (1; -1)$. D. $\vec{x} = (9; -5)$.

🔥 **Câu 24.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (m; m^2)$ và $\vec{b} = (m^2 - 2; 4)$. Hỏi m bằng bao nhiêu nếu $\vec{a} = \vec{b}$?

A. $m = 2$.

B. $m = -2$.

C. $m = -1$.

D. $m = 1$.

🔥 **Câu 25.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (\lambda + 1; 1)$ và $\vec{b} = (-1; \mu - 2)$. Tính $\lambda + \mu$, biết $\vec{a} = \vec{b}$.

A. $\lambda + \mu = 1$.

B. $\lambda + \mu = 0$.

C. $\lambda + \mu = -1$.

D. $\lambda + \mu = 2$.

🔥 **Câu 26.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; -2)$, $B(2; 5)$. Với điểm M bất kỳ, tính tọa độ véc-tơ $\vec{MA} - \vec{MB}$.

A. $(1; 7)$.

B. $(-1; -7)$.

C. $(1; -7)$.

D. $(-1; 7)$.

🔥 **Câu 27.** Trên trục tọa độ $(O; \vec{e})$, cho điểm M sao cho $\vec{OM} = 2\vec{e}$ và điểm N sao cho $\vec{MN} = -3$. Tọa độ của điểm N là bao nhiêu?

A. -5 .

B. -1 .

C. 5 .

D. 1 .

🔥 Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; -2)$ và $B(3; 4)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- A. $I(2; 1)$. B. $I(4; 2)$. C. $I(1; 3)$. D. $I(2; 6)$.

🔥 Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(0; 3)$ và $B(-2; -5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- A. $I(-2; -2)$. B. $I(-1; -2)$. C. $I(1; 1)$. D. $I(-1; -1)$.

🔥 Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(2; 1)$ và véc-tơ $\vec{u} = (-3; 1)$. Tìm tọa độ điểm N sao cho $\vec{MN} = \vec{u}$.

- A. $N(-5; 0)$. B. $N(5; 0)$. C. $N(-1; 2)$. D. $N(1; -2)$.

🔥 Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $OABC$ có $B(-6; 12)$. Tìm tọa độ tâm I của hình bình hành $OABC$.

- A. $I(-3; 6)$. B. $I(-1; 4)$. C. $I(3; -6)$. D. $I(1; -4)$.

🔥 Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 4)$, $B(-2; 2)$, $C(4; 0)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{BG}$ với G là trọng tâm của tam giác ABC .

- A. $(3; 0)$. B. $(3; 1)$. C. $(-1; 4)$. D. $(-3; 0)$.

🔥 **Câu 33.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(1; -1)$, $B(3; -5)$, $C(4; -7)$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CB}$.

B. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{BC}$.

🔥 **Câu 34.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = (3; -2)$ và hai điểm $A(0; -3)$, $B(1; 5)$. Biết $2\vec{x} + 2\vec{u} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Tính tọa độ véc-tơ $\vec{x}$.

A. $\left(-\frac{5}{2}; 6\right)$.

B. $\left(\frac{5}{2}; -6\right)$.

C. $(-5; 12)$.

D. $(5; -12)$.

🔥 **Câu 35.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho véc-tơ $\vec{a} = (2m + 1; 3m - 2)$ và $\vec{b} = (2; 1)$. Tìm giá trị của m để $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$.

A. $m = \frac{5}{4}$.

B. $m = -\frac{5}{4}$.

C. $m = -\frac{5}{8}$.

D. $m = \frac{3}{8}$.

🔥 **Câu 36.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho véc-tơ $\vec{a} = (-5; 0)$, $\vec{b} = (4; m)$. Tìm m sao cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

A. $m = -5$.

B. $m = 4$.

C. $m = 0$.

D. $m = -1$.

🔥 Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương và $\vec{v} = -2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$. Trong các véc-tơ sau, véc-tơ nào cùng hướng với véc-tơ $\vec{v}$?

- A. $\vec{u}_1 = -\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$. B. $\vec{u}_2 = -2\vec{a}$. C. $\vec{u}_3 = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$. D. $\vec{u}_4 = 6\vec{a} - \vec{b}$.

🔥 Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(3; -2)$, $B(-5; 4)$ và $C\left(\frac{1}{3}; 0\right)$. Tìm giá trị của k thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

- A. $k = 3$. B. $k = -3$. C. $k = 2$. D. $k = -2$.

🔥 Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(1; -2)$, $B(0; 3)$, $C(-3; 4)$, $D(-1; 8)$. Ba điểm nào trong bốn điểm đã cho là thẳng hàng?

- A. A, B, C . B. B, C, D . C. A, B, D . D. A, C, D .

🔥 Câu 40. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(-2; 0)$, $B(5; -4)$, $C(-5; 1)$. Tọa độ điểm D để tứ giác $BCAD$ là hình bình hành là:

- A. $D(-8; -5)$. B. $D(8; 5)$. C. $D(-8; 5)$. D. $D(8; -5)$.

CHƯƠNG 2

TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ TỪ 0° ĐẾN 180°

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

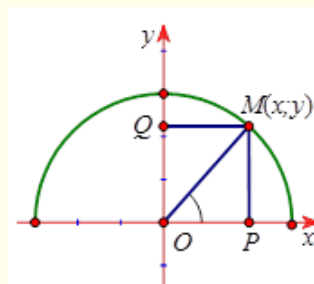
1 ĐỊNH NGHĨA

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Với mỗi góc $\alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$, ta xác định điểm M trên nửa đường tròn đơn vị tâm O sao cho $\alpha = \widehat{xOM}$. Giả sử điểm M có tọa độ $(x; y)$.

Khi đó:

$$\sin \alpha = y; \cos \alpha = x; \tan \alpha = \frac{y}{x} (\alpha \neq 90^\circ); \cot \alpha = \frac{x}{y} (\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 180^\circ).$$

Các số $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là giá trị lượng giác của góc α .



Nhận xét:

- Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của M lên trục Ox, Oy khi đó $M(\overline{OP}; \overline{OQ})$.
- Với $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ta có $0 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1$

Tính chất:

Góc phụ nhau



$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \tan(90^\circ - \alpha) &= \cot \alpha \\ \cot(90^\circ - \alpha) &= \tan \alpha \end{aligned}$$

Góc bù nhau

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(180^\circ - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(180^\circ - \alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned}$$

2 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC ĐẶC BIỆT.

Góc α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	0
$\cot \alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\parallel$

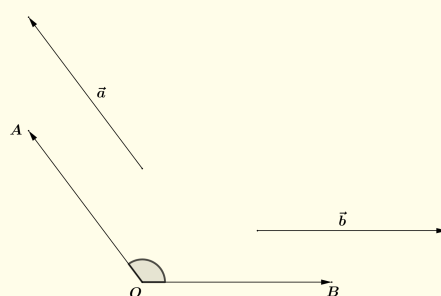
3 CÁC HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

$$\begin{aligned} \checkmark \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ) \\ \checkmark \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ) \\ \checkmark \tan \alpha \cdot \cot \alpha &= 1 (\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ) \\ \checkmark \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \checkmark 1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\alpha \neq 90^\circ) \\ \checkmark 1 + \cot^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ) \end{aligned}$$

4 GÓC GIỮA HAI VECTO.

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Từ điểm O bất kỳ dựng các vectơ $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$. Số đo góc AOB được gọi là số đo góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- $\checkmark$ Quy ước: Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì ta xem góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là tùy ý (từ 0° đến 180°).
- $\checkmark$ Kí hiệu: $(\vec{a}; \vec{b})$



5 CÁC DẠNG TOÁN

📁 Dạng 1. Xác định giá trị lượng giác của góc đặc biệt

Phương pháp giải:

- $\checkmark$ Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc.
- $\checkmark$ Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt.
- $\checkmark$ Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản.

Ví dụ 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$\textcircled{1} A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ. \quad \textcircled{2} B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ.$$

📁 Dạng 2. Chứng minh đẳng thức lượng giác

Phương pháp giải:

- $\checkmark$ Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản.
- $\checkmark$ Sử dụng tính chất của giá trị lượng giác.
- $\checkmark$ Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ.

Ví dụ 1. Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \cos^4 x - \sin^4 x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1. \\ \textcircled{2} \tan^2 x - \sin^2 x &= \tan^2 x \sin^2 x. \\ \textcircled{3} \frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} &= 1. \end{aligned}$$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN**🔥 Câu 1.** Tính giá trị các biểu thức sau:

- ① $A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$
 ② $B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ$
 ③ $C = \sin^2 45^\circ - 2\sin^2 50^\circ + 3\cos^2 45^\circ - 2\sin^2 40^\circ + 4\tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

🔥 Câu 2. Tính giá trị các biểu thức sau:

- ① $A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$
 ② $B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$
 ③ $C = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$

🔥 Câu 3. Tính giá trị các biểu thức sau:

- ① $A = \sin 45^\circ + 2\cos 60^\circ - \tan 30^\circ + 5\cot 120^\circ + 4\sin 135^\circ$
 ② $B = 4a^2 \sin^2 45^\circ - 3(a \tan 45^\circ)^2 + (2a \cos 45^\circ)^2$
 ③ $C = \sin^2 35^\circ - 5\sin^2 73^\circ + \cos^2 35^\circ - 5\cos^2 73^\circ$
 ④ $D = \frac{12}{1 + \tan^2 76^\circ} - 5\tan 85^\circ \cot 95^\circ + 12\sin^2 104^\circ$
 ⑤ $E = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ + \sin^2 90^\circ$
 ⑥ $F = \cos^3 1^\circ + \cos^3 2^\circ + \cos^3 3^\circ + \dots + \cos^3 179^\circ + \cos^3 180^\circ$

🔥 Câu 4. Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

- ① $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$
 ② $\frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$
 ③ $\frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$
 ④ $\frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 + 2\tan^2 x$
 ⑤ $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x = \frac{1}{\cos x}$

C TRẮC NGHIỆM**🔥 Câu 1.** Bất đẳng thức nào dưới đây là đúng?

- A. $\sin 90^\circ < \sin 100^\circ$. B. $\cos 95^\circ > \cos 100^\circ$. C. $\tan 85^\circ < \tan 125^\circ$. D. $\cos 145^\circ > \cos 125^\circ$.

🔥 Câu 2. Giá trị của $\tan 45^\circ + \cot 135^\circ$ bằng bao nhiêu?

- A. 2. B. 0. C. $\sqrt{3}$. D. 1.

🔹 **Câu 3.** Giá trị của $\cos 30^\circ + \sin 60^\circ$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. 1.

🔹 **Câu 4.** Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. 1. D. -1.

🔹 **Câu 5.** Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

🔹 **Câu 6.** Giá trị của $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. 1.

🔹 **Câu 7.** Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. D. 2.

🔹 **Câu 8.** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

- A. $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$. B. $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.
C. $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$. D. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$.

🔹 **Câu 9.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$. B. $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$. C. $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$. D. $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$.

🔹 **Câu 10.** Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$. B. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$.
C. $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$. D. $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$.

🔹 **Câu 11.** Giá trị của $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. 1.

🔹 **Câu 12.** Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. D. 2.

🔹 **Câu 13.** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào đúng?

- A. $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$.

🔹 **Câu 14.** Cho α và β là hai góc bù nhau, trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào sai?

- A. $\sin \alpha = \sin \beta$. B. $\cos \alpha = -\cos \beta$. C. $\tan \alpha = -\tan \beta$. D. $\cot \alpha = \cot \beta$.

🔹 **Câu 15.** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

- A. $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$. B. $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.
C. $\tan(180^\circ - \alpha) = \tan \alpha$. D. $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$.

🔹 **Câu 16.** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

- A. $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$. B. $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.
C. $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = 1$. D. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

🔹 **Câu 17.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$. B. $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$. C. $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$. D. $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$.

🔹 **Câu 18.** Cho góc α tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\sin \alpha < 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha < 0$.

🔹 **Câu 19.** Đẳng thức nào sau đây sai:

- A. $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$. B. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$.
C. $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$. D. $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$.

🔥 **Câu 20.** Cho hai góc nhọn α và $\beta (\alpha < \beta)$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $\cos \alpha < \cos \beta$. B. $\sin \alpha < \sin \beta$. C. $\tan \alpha + \tan \beta > 0$. D. $\cot \alpha > \cot \beta$.

🔥 **Câu 21.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, góc B bằng 30° . Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\cos C = \frac{1}{2}$. D. $\sin B = \frac{1}{2}$.

🔥 **Câu 22.** Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\sin \alpha = -\sin(180^\circ - \alpha)$. B. $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$.
C. $\tan \alpha = \tan(180^\circ - \alpha)$. D. $\cot \alpha = \cot(180^\circ - \alpha)$.

🔥 **Câu 23.** Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau:

- A. $\cos 75^\circ > \cos 50^\circ$. B. $\sin 80^\circ > \sin 50^\circ$. C. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$. D. $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$.

🔥 **Câu 24.** Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $\sin 90^\circ < \sin 100^\circ$. B. $\cos 95^\circ > \cos 100^\circ$. C. $\tan 85^\circ < \tan 125^\circ$. D. $\cos 145^\circ > \cos 125^\circ$.

🔥 **Câu 25.** Hai góc nhọn α và β phụ nhau, hệ thức nào sau đây là sai?

- A. $\sin \alpha = \cos \beta$. B. $\tan \alpha = \cot \beta$. C. $\cot \beta = \frac{1}{\cot \alpha}$. D. $\cos \alpha = -\sin \beta$.

🔥 **Câu 26.** Trong các hệ thức sau hệ thức nào đúng?

- A. $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1$. B. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$.
C. $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$. D. $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$.

🔥 **Câu 27.** Cho biết $\sin \alpha + \cos \alpha = a$. Giá trị của $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ bằng bao nhiêu?

- A. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = a^2$. B. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2a$.
C. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1-a^2}{2}$. D. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{a^2-11}{2}$.

🔥 **Câu 28.** Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$?

- A. $-\frac{19}{13}$. B. $\frac{19}{13}$. C. $\frac{25}{13}$. D. $-\frac{25}{13}$.

🔥 **Câu 29.** Cho biết $\cot \alpha = 5$. Tính giá trị của $E = 2\cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$?

- A. $\frac{10}{26}$. B. $\frac{100}{26}$. C. $\frac{50}{26}$. D. $\frac{101}{26}$.

🔥 **Câu 30.** Đẳng thức nào sau đây là sai?

- A. $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2, \forall x$. B. $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x, \forall x \neq 90^\circ$.
C. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x, \forall x$. D. $\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x, \forall x$.

BÀI 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

2 CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Với ba vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và mọi số thực k ta luôn có:

- ☑ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- ☑ $\vec{a}(\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$
- ☑ $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
- ☑ $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Chú ý:

- ☑ Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thì $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- ☑ $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.
- ☑ $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$.
- ☑ $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

3 BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Khi đó

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

- ☑ Độ dài vectơ $\vec{a}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

- ☑ Công thức tính góc giữa 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

- ☑ Khoảng cách giữa 2 điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Hệ quả:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

4 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tích tích vô hướng của hai véc-tơ

- ✓ Dựa vào định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
- ✓ Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ.

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính

① $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

② $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

③ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. Tính góc giữa hai véc-tơ -góc giữa hai đường thẳng

- ✓ Để tính góc giữa hai vectơ, ta sử dụng định nghĩa tích vô hướng kết hợp các kĩ thuật tính tích vô hướng.
- ✓ Để tính góc giữa hai đường thẳng, ta tính góc giữa hai véc-tơ có giá là hai đường thẳng đã cho rồi suy ra góc giữa hai đường thẳng.
- ✓ Để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ta chứng minh góc giữa hai đường thẳng bằng 90° .

Ví dụ 1. Cho các véc-tơ $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$. Tìm góc giữa hai véc-tơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $A(1;3)$ và $B(3;-1)$. Tính góc giữa đường thẳng OA và AB .

Lời giải:

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

🔥 **Câu 1.** Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tính các tích vô hướng:

① $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

② $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

③ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

🔥 **Câu 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm.

① Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$.

② Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

🔥 **Câu 3.** Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.

① Tam giác ABC là tam giác gì?

② Tính cosin góc B của tam giác ABC .

🔥 **Câu 4.** Cho hai vectơ $\vec{a}(0;4)$; $\vec{b}(4;-2)$

① Tính cosin góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

② Xác định tọa độ của vectơ $\vec{c}$ biết $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{c} = -1$ và $(-\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot \vec{a} = 6$.

🔥 **Câu 5.** Cho tam giác ABC với $A(3;1)$, $B(-1;-1)$, $C(6;0)$. Tính góc A của tam giác ABC .

Câu 6. Biết $A(1; -1), B(3; 0)$ là hai đỉnh của hình vuông $ABCD$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D .

Câu 7. Cho tam giác ABC có $A(1; 2), B(-2; 6), C(9; 8)$.

- ① Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .
- ② Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- ③ Tìm tọa độ trực tâm H và trọng tâm G của tam giác ABC .
- ④ Tính chu vi, diện tích tam giác ABC .
- ⑤ Tìm tọa độ điểm M trên Oy để B, M, A thẳng hàng.
- ⑥ Tìm tọa độ điểm N trên Ox để tam giác ANC cân tại N .
- ⑦ Tìm tọa độ điểm D để $ABDC$ là hình chữ nhật.
- ⑧ Tìm tọa độ điểm T thỏa $\overrightarrow{TA} + 2\overrightarrow{TB} - 3\overrightarrow{TC} = \vec{0}$.
- ⑨ Tìm tọa độ điểm E đối xứng với A qua B .

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mp Oxy cho $A(4; 6), B(1; 4), C\left(7; \frac{3}{2}\right)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} = (-3; -2), \overrightarrow{AC} = \left(3; -\frac{9}{2}\right)$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
- C. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$. D. $|\overrightarrow{BC}| = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

🔥 **Câu 2.** Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Trong các kết quả sau đây, hãy chọn kết quả đúng.

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

🔥 **Câu 3.** Cho các vectơ $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (-2; -6)$. Khi đó góc giữa chúng là

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 135° .

🔥 **Câu 4.** Cho $\vec{OM} = (-2; -1)$, $\vec{ON} = (3; -1)$. Tính góc của $(\vec{OM}, \vec{ON})$

- A. 135° . B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. -135° . D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

🔥 **Câu 5.** Trong mặt phẳng Oxy cho $\vec{a} = (1; 3)$, $\vec{b} = (-2; 1)$. Tích vô hướng của 2 vectơ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

🔥 **Câu 6.** Cặp vectơ nào sau đây vuông góc?

- A. $\vec{a} = (2; -1)$ và $\vec{b} = (-3; 4)$. B. $\vec{a} = (3; -4)$ và $\vec{b} = (-3; 4)$.
C. $\vec{a} = (-2; -3)$ và $\vec{b} = (-6; 4)$. D. $\vec{a} = (7; -3)$ và $\vec{b} = (3; -7)$.

🔥 **Câu 7.** Cho 2 vec tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$, tìm biểu thức **sai**.

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left[\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a} + \vec{b})^2 \right]$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left[(\vec{a} + \vec{b})^2 - \vec{a}^2 - \vec{b}^2 \right]$.

🔥 **Câu 8.** Cho tam giác đều ABC cạnh $a = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $(\vec{AB} \cdot \vec{AC}) \vec{BC} = 2\vec{BC}$.

B. $\vec{BC} \cdot \vec{CA} = -2$.

C. $(\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot \vec{AC} = -4$.

D. $(\vec{BC} - \vec{AC}) \cdot \vec{BA} = 2$.

🔥 **Câu 9.** Cho tam giác ABC cân tại A , $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = a$. Tính $\vec{BA} \cdot \vec{CA}$

A. $\frac{a^2}{2}$.

B. $-\frac{a^2}{2}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

D. $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

🔥 **Câu 10.** Cho ABC là tam giác đều. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$.

B. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\vec{AC} \cdot \vec{AB}$.

C. $(\vec{AB} \cdot \vec{AC}) \vec{BC} = \vec{AB} (\vec{AC} \cdot \vec{BC})$.

D. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

🔥 **Câu 11.** Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-1;1)$, $C(5;-1)$. Tính $\cos A$

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

B. $\frac{-1}{\sqrt{5}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

D. $\frac{-2}{\sqrt{5}}$.

🔥 **Câu 12.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$.

B. $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \frac{1}{2} \vec{OA} \cdot \vec{AC}$.

C. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{CD}$.

D. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AC} \cdot \vec{AD}$.

🔥 **Câu 13.** Trong mặt phẳng Oxy cho $A(-1;-1)$, $B(3;1)$, $C(6;0)$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $\vec{AB} = (-4;-2)$, $\vec{AC} = (1;7)$.

B. $\hat{B} = 135^\circ$.

C. $|\vec{AB}| = 20$.

D. $|\vec{BC}| = 3$.

🔥 **Câu 14.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\vec{DA} \cdot \vec{CB} = a^2$.

B. $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -a^2$.

C. $(\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot \vec{AC} = a^2$.

D. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{CB} \cdot \vec{CD} = 0$.

🔥 **Câu 15.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AD . Câu nào sau đây **sai**?

A. $\vec{AB} \cdot \vec{DC} = 8a^2$.

B. $\vec{AD} \cdot \vec{CD} = 0$.

C. $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = 0$.

D. $\vec{DA} \cdot \vec{DB} = 0$.

🔥 Câu 16. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AD . Khi đó $(\vec{IA} + \vec{IB}) \cdot \vec{ID}$ bằng :

A. $\frac{9a^2}{2}$.

B. $-\frac{9a^2}{2}$.

C. 0.

D. $9a^2$.

🔥 Câu 17. Cho tam giác đều ABC cạnh a , với các đường cao AH, BK vẽ $HI \perp AC$. Câu nào sau đây đúng?

A. $(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{BC} = a^2$.

B. $\vec{CB} \cdot \vec{CK} = \frac{a^2}{8}$.

C. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$.

D. $\vec{CB} \cdot \vec{CK} = \frac{a^2}{2}$.

🔥 Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$.

B. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = a^2$.

C. $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = a^2$.

D. $(\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC}) \cdot \vec{AD} = a^2$.

🔥 Câu 19. Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\hat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây là **sai**?

A. $(\vec{AB}, \vec{BC}) = 130^\circ$.

B. $(\vec{BC}, \vec{AC}) = 40^\circ$.

C. $(\vec{AB}, \vec{CB}) = 50^\circ$.

D. $(\vec{AC}, \vec{CB}) = 120^\circ$.

🔥 **Câu 20.** Trong mặt phẳng $(O; \vec{i}, \vec{j})$ cho 2 vectơ : $\vec{a} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 8\vec{i} - 4\vec{j}$. Kết luận nào sau đây **sai**?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

B. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

C. $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$.

D. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0$.

🔥 **Câu 21.** Trong mặt phẳng Oxy cho $A(1;2)$, $B(4;1)$, $C(5;4)$. Tính $\widehat{BAC}$?

A. 60° .

B. 45° .

C. 90° .

D. 120° .

🔥 **Câu 22.** Cho các vectơ $\vec{a} = (1; -3)$, $\vec{b} = (2; 5)$. Tính tích vô hướng của $\vec{a}(\vec{a} + 2\vec{b})$.

A. 16.

B. 26.

C. 36.

D. -16.

🔥 **Câu 23.** Cho hình vuông $ABCD$, tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 24. Cho hai điểm $A(-3,2), B(4,3)$. Tìm điểm M thuộc trục Ox và có hoành độ dương để tam giác MAB vuông tại M .

A. $M(7;0)$.

B. $M(5;0)$.

C. $M(3;0)$.

D. $M(9;0)$.

Câu 25. Cho $A(2; 5), B(1;3), C(5;-1)$. Tìm tọa độ điểm K sao cho $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CK}$.

A. $K(-4;5)$.

B. $K(-4;5)$.

C. $K(4;-5)$.

D. $K(-4;-5)$.

Câu 26. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$.

B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a$.

C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a\sqrt{2}$.

Câu 27. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

A. 0.

B. a .

C. $\frac{a^2}{2}$.

D. a^2 .

Câu 28. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (2;-1)$ và $\vec{b} = (-3;4)$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Tích vô hướng của hai vectơ đã cho là -10 .B. Độ lớn của vectơ $\vec{a}$ là $\sqrt{5}$.C. Độ lớn của vectơ $\vec{b}$ là 5.D. Góc giữa hai vectơ là 90° .

🔥 **Câu 29.** Cho M là trung điểm AB , tìm biểu thức **sai**.

A. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$.

B. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.

C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$.

D. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$.

🔥 **Câu 30.** Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và H là trung điểm BC . Tính $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$.

A. $\frac{3a^2}{4}$.

B. $\frac{-3a^2}{4}$.

C. $\frac{3a^2}{2}$.

D. $\frac{-3a^2}{2}$.

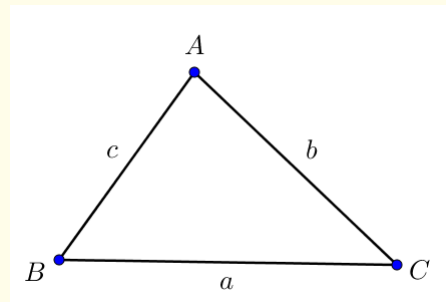
BÀI 3. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH LÝ CÔSIN

Trong tam giác ABC với $BC = a, AC = b$ và $AB = c$. Ta có:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \end{aligned}$$



Hệ quả 1.

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}$$

2 ĐỊNH LÝ SIN

Trong tam giác ABC với $BC = a, AC = b, AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3 ĐỘ DÀI TRUNG TUYẾN

Cho tam giác ABC với m_a, m_b, m_c lần lượt là các trung tuyến kẻ từ A, B, C . Ta có:

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \\ m_b^2 &= \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} \\ m_c^2 &= \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \end{aligned}$$

4 DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Với tam giác ABC ta kí hiệu:

h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh BC, CA, AB .

☑ R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác.

☑ $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác.

☑ S là diện tích tam giác.

Khi đó ta có:

① $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$

② $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$

③ $S = \frac{abc}{4R}$

④ $S = pr$

⑤ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (công thức Hê-rông)

5 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. xác định các yếu tố trong tam giác.

① Sử dụng định lý côsin và định lý sin.

② Sử dụng công thức xác định độ dài đường trung tuyến và mối liên hệ của các yếu tố trong các công thức tính diện tích trong tam giác.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $AC = 10$, $AB = 16$ và $\widehat{C} = 120^\circ$. Tính cạnh BC , các góc còn lại, diện tích của tam giác đó.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 20^\circ$, $\widehat{C} = 31^\circ$ và $b = 210$. Tính góc A , các cạnh còn lại, diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $AC = 8$, $AB = 5$ và $BC = 7$. Tính các góc, độ dài các đường trung tuyến, diện tích, bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác đó.

Lời giải:

B TỰ LUẬN

Câu 1. Giải tam giác và tính diện tích ABC , biết:

① $c = 14$; $\hat{A} = 60^\circ$; $\hat{B} = 40^\circ$.

② $b = 4,5$; $\hat{A} = 30^\circ$; $\hat{C} = 75^\circ$.

③ $c = 35$; $\hat{A} = 40^\circ$; $\hat{C} = 120^\circ$.

④ $a = 137,5$; $\hat{B} = 83^\circ$; $\hat{C} = 57^\circ$.

⑤ $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$; $c = 14$.

⑥ $b = 4,5$; $\hat{A} = 30^\circ$; $\hat{C} = 75^\circ$.

⑦ $a = 109$; $\hat{B} = 33^\circ 24'$; $\hat{C} = 66^\circ 59'$.

⑧ $a = 12$; $\hat{B} = 35^\circ$; $\hat{C} = 65^\circ$.

Câu 2. Giải tam giác và tính diện tích ABC , biết:

① $a = 6,3$; $b = 6,3$; $\hat{C} = 54^\circ$.

② $b = 32$; $c = 45$; $\hat{A} = 87^\circ$.

③ $a = 7$; $b = 23$; $\hat{C} = 130^\circ$.

④ $b = 14$; $c = 10$; $\hat{A} = 145^\circ$.

⑤ $b = 32$; $c = 45$ và $\hat{A} = 87^\circ$.

⑥ $b = 14$; $c = 10$; $\hat{A} = 145^\circ$.

⑦ $a = 12$; $c = 8,2$ và $\hat{A} = 110^\circ$.

⑧ $a = 20$; $b = 13$; $\hat{A} = 67^\circ 23'$.

🔥 **Câu 3.** Giải tam giác và tính diện tích ABC , biết:

① $a = 14; b = 18; c = 20.$

② $a = 6; b = 7,3; c = 4,8.$

③ $a = 4; b = 5; c = 7.$

④ $a = 2\sqrt{3}; b = 2\sqrt{2}; c = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$

⑤ $a = 2, b = 3, c = 4.$

⑥ $a = 14; b = 18; c = 20.$

🔥 **Câu 4.** Cho tam giác ABC biết $a = 2\sqrt{3}, b = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính góc lớn nhất của tam giác.

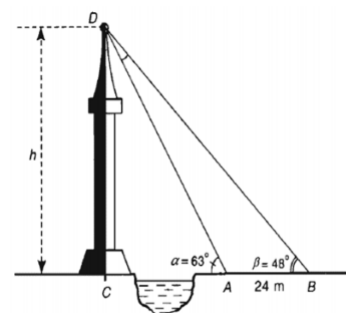
🔥 **Câu 5.** Cho $\triangle ABC$ ta có $a = 13, b = 4$ và $\cos C = -\frac{5}{13}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác.

🔥 **Câu 6.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết $\hat{A} = 30^\circ, \hat{B} = 45^\circ$. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{B} = 58^\circ$ và $a = 72$. Tính góc $\widehat{C}$, cạnh b , c , đường cao h_a , h_b và độ dài các đường trung tuyến của tam giác ABC .

Câu 8.

Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24$ m, $\widehat{CAD} = \alpha = 63^\circ$, $\widehat{CBD} = \beta = 48^\circ$. Tính chiều cao h của tháp.



TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $\triangle ABC$ có $b = 6, c = 8, \widehat{A} = 60^\circ$. Độ dài cạnh a là

A. $2\sqrt{13}$.

B. $3\sqrt{12}$.

C. $2\sqrt{37}$.

D. $\sqrt{20}$.

Câu 2. Cho $\triangle ABC$ có $S = 84, a = 13, b = 14, c = 15$. Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác trên là

A. 8,125.

B. 130.

C. 8.

D. 8,5.

- 🔥 **Câu 3.** Cho $\triangle ABC$ có $a = 6, b = 8, c = 10$. Diện tích S của tam giác trên là
A. 48. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 30.

- 🔥 **Câu 4.** Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn: $2\cos B = \sqrt{2}$. Khi đó:
A. $B = 30^\circ$. **B.** $B = 60^\circ$. **C.** $B = 45^\circ$. **D.** $B = 75^\circ$.

- 🔥 **Câu 5.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại B và có $\widehat{C} = 25^\circ$. Số đo của góc A là
A. $A = 65^\circ$. **B.** $A = 60^\circ$. **C.** $A = 155^\circ$. **D.** $A = 75^\circ$.

- 🔥 **Câu 6.** Cho $\triangle ABC$ có $B = 60^\circ, a = 8, c = 5$. Độ dài cạnh b bằng
A. 7. **B.** 129. **C.** 49. **D.** $\sqrt{129}$.

- 🔥 **Câu 7.** Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{C} = 45^\circ, \widehat{B} = 75^\circ$. Số đo của góc A là
A. $A = 65^\circ$. **B.** $A = 70^\circ$. **C.** $A = 60^\circ$. **D.** $A = 75^\circ$.

🔥 Câu 8. Cho ΔABC có $S = 10\sqrt{3}$, nửa chu vi $p = 10$. Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác trên là

- A. 3. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

🔥 Câu 9. Cho ΔABC có $a = 4, c = 5, B = 150^\circ$. Diện tích của tam giác là

- A. $5\sqrt{3}$. B. 5. C. 10. D. $10\sqrt{3}$.

🔥 Câu 10. Cho tam giác ABC thỏa mãn: $2\cos A = 1$. Khi đó

- A. $\hat{A} = 30^\circ$. B. $\hat{A} = 45^\circ$. C. $\hat{A} = 120^\circ$. D. $\hat{A} = 60^\circ$.

🔥 Câu 11. Cho tam giác ABC có $b = 7, c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$. Đường cao h_a của tam giác ABC là

- A. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. B. 8. C. $8\sqrt{3}$. D. $80\sqrt{3}$.

🔥 Câu 12. Cho tam giác ABC , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

- A. $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$. B. $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.

C. $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.

D. $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$.

🔥 **Câu 13.** Cho tam giác ABC . Tìm công thức **sai**.

A. $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

B. $\sin A = \frac{a}{2R}$.

C. $b \sin B = 2R$.

D. $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$.

🔥 **Câu 14.** Chọn công thức đúng trong các đáp án sau.

A. $S = \frac{1}{2}bc \sin A$.

B. $S = \frac{1}{2}ac \sin A$.

C. $S = \frac{1}{2}bc \sin B$.

D. $S = \frac{1}{2}bc \sin B$.

🔥 **Câu 15.** Cho tam giác ABC có $a = 8, b = 10$, góc C bằng 60° . Độ dài cạnh c là

A. $c = 3\sqrt{21}$.

B. $c = 7\sqrt{2}$.

C. $c = 2\sqrt{11}$.

D. $c = 2\sqrt{21}$.

🔥 **Câu 16.** Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a.b.c$.

B. $\frac{a}{\sin A} = R$.

C. $\cos B = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

D. $m_c^2 = \frac{2b^2 + 2a^2 - c^2}{4}$.

🔥 **Câu 17.** Cho tam giác ABC , chọn công thức đúng?

A. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot AB \cos C.$

B. $AB^2 = AC^2 - BC^2 + 2AC \cdot BC \cos C.$

C. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C.$

D. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC + \cos C.$

🔥 **Câu 18.** Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\cos B + \cos C = 2 \cos A.$

B. $\sin B + \sin C = 2 \sin A.$

C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A.$

D. $\sin B + \cos C = 2 \sin A.$

🔥 **Câu 19.** Cho tam giác ABC . Đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin(A + B - 2C) = \sin 3C.$

B. $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}.$

C. $\sin(A + B) = \sin C.$

D. $\cos \frac{A+B+2C}{2} = \sin \frac{C}{2}.$

🔥 **Câu 20.** Gọi $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ là tổng bình phương độ dài ba trung tuyến của tam giác ABC . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. $S = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$ **B.** $S = a^2 + b^2 + c^2.$ **C.** $S = \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$ **D.** $S = 3(a^2 + b^2 + c^2).$

🔥 **Câu 21.** Độ dài trung tuyến m_c ứng với cạnh c của $\triangle ABC$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.

B. $\sqrt{\frac{b^2 + a^2}{2} + \frac{c^2}{4}}$.

C. $\frac{1}{2}\sqrt{(2b^2 + 2a^2) - c^2}$.

D. $\sqrt{\frac{b^2 + a^2 - c^2}{4}}$.

🔥 **Câu 22.** Tam giác ABC có $\cos B$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

B. $\sqrt{1 - \sin^2 B}$.

C. $\cos(A + C)$.

D. $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

🔥 **Câu 23.** Cho tam giác ABC có $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. Khi đó

A. Góc $C > 90^\circ$.

B. Góc $C < 90^\circ$.

C. Góc $C = 90^\circ$.

D. Không thể kết luận được gì về góc C .

🔥 **Câu 24.** Một tam giác có ba cạnh là 13,14,15. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

A. 84.

B. $\sqrt{84}$.

C. 42.

D. $\sqrt{168}$.

🔥 **Câu 25.** Một tam giác có ba cạnh là 26,28,30. Bán kính đường tròn nội tiếp là

A. 16.

B. 8.

C. 4.

D. $4\sqrt{2}$.

🔥 **Câu 26.** Một tam giác có ba cạnh là 52,56,60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là

A. $\frac{65}{8}$.

B. 40.

C. 32,5.

D. $\frac{65}{4}$.

🔥 **Câu 27.** Tam giác với ba cạnh là 3,4,5. Có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?

A. 1.

B. $\sqrt{2}$.C. $\sqrt{3}$.

D. 2.

🔥 **Câu 28.** Tam giác ABC có $a = 6, b = 4\sqrt{2}, c = 2$, M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 3$. Độ dài đoạn AM bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{9}$.

B. 9.

C. 3.

D. $\frac{1}{2}\sqrt{108}$.

🔥 **Câu 29.** Cho các điểm $A(1;-2), B(-2;3), C(0;4)$. Diện tích ΔABC bằng bao nhiêu?

A. $\frac{13}{2}$.

B. 13.

C. 26.

D. $\frac{13}{4}$.

🔥 **Câu 30.** Cho tam giác ABC có $A(1; -1), B(3; -3), C(6; 0)$. Diện tích $\triangle ABC$ là
A. 12. **B.** 6. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** 9.

🔥 **Câu 31.** Cho các điểm $A(1; 1), B(2; 4), C(10; -2)$. Góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu?
A. 90° . **B.** 60° . **C.** 45° . **D.** 30° .

🔥 **Câu 32.** Tam giác với ba cạnh là 5; 12; 13 có bán kính đường tròn ngoại tiếp là?
A. 6. **B.** 8. **C.** $\frac{13}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

🔥 **Câu 33.** Cho tam giác ABC có $a = 4, b = 6, c = 8$. Khi đó diện tích của tam giác là
A. $9\sqrt{15}$. **B.** $3\sqrt{15}$. **C.** 105. **D.** $\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

🔥 **Câu 34.** Tam giác với ba cạnh là 5; 12; 13 có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?
A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 3.

🔥 Câu 35. Tam giác với ba cạnh là 6;8;10 có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng bao nhiêu?

A. 5.

B. $4\sqrt{2}$.C. $5\sqrt{2}$.

D. 6.

🔥 Câu 36. Cho tam giác ABC thỏa mãn: $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. Khi đó

A. $\hat{A} = 30^\circ$.B. $\hat{A} = 45^\circ$.C. $\hat{A} = 60^\circ$.D. $\hat{A} = 75^\circ$.

🔥 Câu 37. Cho tam giác ABC , biết $a = 24, b = 13, c = 15$. Tính góc A .

A. $33^\circ 34'$.B. $117^\circ 49'$.C. $28^\circ 37'$.D. $58^\circ 24'$.

🔥 Câu 38. Tam giác ABC có $\hat{A} = 68^\circ 12', \hat{B} = 34^\circ 44', AB = 117$. Tính AC .

A. 68.

B. 168.

C. 118.

D. 200.

Câu 39. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $78^\circ 24'$. Biết $CA = 250m$, $CB = 120m$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

A. $266m$.B. $255m$.C. $166m$.D. $298m$.

Câu 40. Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD = 80m$, người ta nhìn hai điểm A và B trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$. Ba điểm A, B, D thẳng hàng. Tính khoảng cách AB ?

A. $71m$.B. $91m$.C. $79m$.D. $40m$.

CHƯƠNG 3

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa 1. Cho đường thẳng Δ . Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ gọi là vectơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ .

! **Nhận xét :** Nếu $\vec{u}$ là VTCP của Δ thì $k\vec{u}$ ($k \neq 0$) cũng là VTCP của Δ .

2 PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG.

Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và $\vec{u} = (a; b)$ là VTCP có phương trình tham số là

$$\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3 PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và $\vec{u} = (a; b)$ (với $a \neq 0, b \neq 0$) là vectơ chỉ phương thì phương trình chính tắc

$$\Delta: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

4 VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa 2. Cho đường thẳng Δ . Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ gọi là vectơ pháp tuyến (VTPT) của Δ nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với Δ .

Nhận xét :

- ! ✍ Nếu $\vec{n}$ là VTPT của Δ thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là VTPT của Δ .
- ✍ VTPT và VTCP vuông góc với nhau. Do vậy nếu Δ có VTCP $\vec{u} = (a; b)$ thì $\vec{n} = (-b; a)$ là một VTPT của Δ .

5 PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG.

Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (a; b)$ có phương trình tổng quát là

$$\Delta: a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0 \quad (c = -ax_0 - by_0)$$

! Chú ý: Nếu đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ thì $\vec{n} = (a; b)$ là VTPT của Δ .

6 CÁC DẠNG ĐẶC BIỆT CỦA PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT

- ☑ Δ song song hoặc trùng với trục $Ox \Leftrightarrow \Delta: by + c = 0$.
- ☑ Δ song song hoặc trùng với trục $Oy \Leftrightarrow \Delta: ax + c = 0$.
- ☑ Δ đi qua gốc tọa độ $\Leftrightarrow \Delta: ax + by = 0$.
- ☑ Δ đi qua hai điểm $A(a; 0), B(0; b) \Leftrightarrow \Delta: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ với $(ab \neq 0)$.
- ☑ Phương trình đường thẳng có hệ số góc k là $y = kx + m$ với $k = \tan \alpha$, α là góc hợp bởi tia Mt của Δ ở phía trên trục Ox và tia Mx .

7 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho hai đường thẳng $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

- ☑ Nếu $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$ thì hai đường thẳng cắt nhau.
- ☑ Nếu $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng song song nhau.
- ☑ Nếu $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng trùng nhau.

8 GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

- ☑ Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau tạo thành 4 góc. Nếu Δ_1, Δ_2 không vuông góc với nhau thì góc nhọn trong số bốn góc đó được gọi là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .
- ☑ Kí hiệu (Δ_1, Δ_2) .
- ☑ Nếu $\Delta_1 \perp \Delta_2$ thì $(\Delta_1, \Delta_2) = 90^\circ$.
- ☑ Nếu Δ_1, Δ_2 song song hay trùng nhau thì $(\Delta_1, \Delta_2) = 0^\circ$.

Công thức tính góc.

Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (a_1; b_1)$ và $\vec{n}_2 = (a_2; b_2)$.

Đặt $\varphi = (\Delta_1, \Delta_2)$ thì

$$\cos \varphi = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

hay

$$\cos \varphi = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

! Chú ý: Có thể sử dụng vectơ chỉ phương của hai đường thẳng thay cho vectơ pháp tuyến trong công thức trên.

9 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG

Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$.

$$d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \geq 0$$

! Đặc biệt: $d(M, Ox) = |y_0|, d(M, Oy) = |x_0|$.

10

KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG.

- ✍ Nếu $\Delta_1 \cap \Delta_2$ hoặc $\Delta_1 \equiv \Delta_2$ thì $d(\Delta_1, \Delta_2) = 0$.
- ✍ Nếu $\Delta_1 \parallel \Delta_2$ thì $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M, \Delta_2)$ với M bất kì thuộc Δ_1 .
- ✍ **Đặc biệt:** Nếu $\begin{cases} \Delta_1: ax + by + c_1 = 0 \\ \Delta_2: ax + by + c_2 = 0 \end{cases}$ thì $d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

11

CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Viết phương trình tham số của đường thẳng

- ① Xác định $M_0(x_0; y_0)$ và VTCP $\vec{u} = (a; b)$.
- ② Viết phương trình tham số là

$$\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

 **Ví dụ 1.** Lập phương trình tham số đường thẳng Δ , biết Δ đi qua điểm $A(-1; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4; 1)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ , biết Δ đi qua điểm $A(-2; 1)$ và $B(5; -3)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ , biết Δ đi qua điểm $A(1;1)$ và có hệ số góc $k = -2$.

Lời giải:

📁 Dạng 2. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

① Xác định $M_0(x_0; y_0)$ và VTPT $\vec{n} = (a; b)$.

② Viết phương trình tham số là

$$\Delta : a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0 \quad (c = -ax_0 - by_0)$$

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tổng quát đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1;5)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2;3)$.

Lời giải:

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tổng quát đường thẳng Δ đi qua điểm $N(2;3)$ và vuông góc với đường thẳng AB với $A(1;3)$, $B(2;1)$.

Lời giải:

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tổng quát đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $d : 2x - y + 4 = 0$.

Lời giải:

Dạng 3. Vị trí tương đối và góc giữa hai đường thẳng

- ✎ Nếu $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$ thì hai đường thẳng cắt nhau.
- ✎ Nếu $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng song song nhau.
- ✎ Nếu $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng trùng nhau.

Ví dụ 1. Cho các đường thẳng $\Delta: 2x + 3y - 5 = 0$, $\Delta': 3x - 2y - 1 = 0$. Xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng Δ và Δ' .

Lời giải:

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Cho các đường thẳng $\Delta: (m+3)x + 3y - 2m + 3 = 0$, $\Delta': 2x + 2y + 2 - 3m = 0$. Tìm giá trị của tham số m để

- ① Đường thẳng Δ song song với Δ' .
- ② Đường thẳng Δ cắt Δ' .

Lời giải:

.....

.....

.....

Dạng 4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

$$d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \geq 0$$

Ví dụ 1. Tìm khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ biết

- ① $M(1;2)$ và $\Delta: 4x + 3y - 2 = 0$.
- ② $M(0;5)$ và $\Delta: x - 4y + 5 = 0$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

Dạng 5. Góc giữa hai đường thẳng

$$\cos \varphi = |\cos (\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

Ví dụ 1. Xác định góc giữa hai đường thẳng sau

$$\textcircled{1} \Delta_1: 3x - 3y + 1 = 0 \text{ và } \Delta_2: \begin{cases} x = t \\ y = 7 - 5t \end{cases} \quad \textcircled{2} \Delta_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \text{ và } \Delta_2: \begin{cases} x = 2 - 4t' \\ y = 5 - 2t' \end{cases}$$

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

B TỰ LUẬN

Câu 1. Lập PTTS, PTTQ, PTCT (nếu có) của các đường thẳng đi qua điểm M và có VTCP $\vec{u}$.

- | | | |
|--|---|---|
| $\textcircled{1} M(-2; 3), \vec{u} = (5; -1).$ | $\textcircled{4} M(-2; 2), \vec{u} = (5; 0).$ | $\textcircled{7} M(-3; 4), \vec{u} = (-2; -2).$ |
| $\textcircled{2} M(2; 3), \vec{u} = (2; 3).$ | $\textcircled{5} M(1; 3), \vec{u} = (0; 3).$ | $\textcircled{8} M(2; 1), \vec{u} = (1; 2).$ |
| $\textcircled{3} M(-4; 1), \vec{u} = (1; -1).$ | $\textcircled{6} M(-2; 5), \vec{u} = (-3; -1).$ | $\textcircled{9} M(-3; 0), \vec{u} = (5; 3).$ |

_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____

Câu 2. Lập PTTQ, PTTS, PTCT (nếu có) của các đường thẳng đi qua điểm M và có VTPT $\vec{n}$.

- | | | |
|--|---|---|
| $\textcircled{1} M(-2; 3), \vec{n} = (5; -1).$ | $\textcircled{4} M(-2; 2), \vec{n} = (5; 0).$ | $\textcircled{7} M(-3; 4), \vec{n} = (-2; -2).$ |
| $\textcircled{2} M(2; 3), \vec{n} = (2; 3).$ | $\textcircled{5} M(1; 3), \vec{n} = (0; 3).$ | $\textcircled{8} M(2; 1), \vec{n} = (1; 2).$ |
| $\textcircled{3} M(-4; 1), \vec{n} = (1; -1).$ | $\textcircled{6} M(-2; 5), \vec{n} = (-3; -1).$ | $\textcircled{9} M(-3; 0), \vec{n} = (5; 3).$ |

_____	_____
_____	_____
_____	_____

Câu 3. Lập PTTS, PTTQ, PTCT (nếu có) của các đường thẳng đi qua điểm M và có hệ số góc k .

① $M(-2;3), k = -2.$

② $M(2;3), k = 3.$

③ $M(-4;1), k = 1.$

④ $M(-2;2), k = 3.$

⑤ $M(1;3), k = 7.$

⑥ $M(-2;5), k = 0.$

⑦ $M(-3;4), k = 5.$

⑧ $M(2;1), k = -3.$

⑨ $M(-3;0), k = -5.$

Câu 4. Lập PTTS, PTTQ, PTCT (nếu có) của các đường thẳng đi qua hai điểm A và B .

① $A(-2;3), B(1;1).$

② $A(1;2), B(3;4).$

③ $A(-3;-1), B(5;2).$

④ $A(-4;3), B(5;1).$

⑤ $A(-3;-3), B(1;5).$

⑥ $A(4;0), B(0;1).$

⑦ $A(2;5), B(2;1).$

⑧ $A(-6;-1), B(-1;-1).$

⑨ $A(-3;-3), B(4;5).$

Câu 5. Lập PTTS, PTTQ, PTCT (nếu có) của các đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng Δ .

① $A(-2;3), \Delta : 4x - 10y + 1 = 0.$

② $A(1;2), \Delta : x - 2y + 3 = 0.$

③ $A(-3;-1), \Delta : 3x + 2y - 2 = 0.$

④ $A(-4;3), \Delta : 2x + y + 5 = 0.$

⑤ $A(-3;-3), \Delta : -x - y - 7 = 0.$

⑥ $A(4;0), \Delta : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + 4t \end{cases}.$

⑦ $A(2;5), \Delta : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 + t \end{cases}.$

⑧ $A(-6;-1), \Delta : \begin{cases} x = -2 - t \\ y = -4 + t \end{cases}.$

⑨ $A(-3;-3), \Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}.$

Câu 6. Lập PTTS, PTTQ, PTCT (nếu có) của các đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng Δ .

- ① $A(-2;3), \Delta: 4x - 10y + 1 = 0.$ ⑤ $A(-3;-3), \Delta: -x - y - 7 = 0.$ ⑧ $A(-6;-1), \Delta: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = -4 + t \end{cases}.$
- ② $A(1;2), \Delta: x - 2y + 3 = 0.$ ⑥ $A(4;0), \Delta: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + 4t \end{cases}.$ ⑨ $A(-3;-3), \Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}.$
- ③ $A(-3;-1), \Delta: 3x + 2y - 2 = 0.$ ⑦ $A(2;5), \Delta: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 + t \end{cases}.$
- ④ $A(-4;3), \Delta: 2x + y + 5 = 0.$

🔥 **Câu 7.** Cho tam giác ABC . Viết phương trình các cạnh, các đường trung tuyến, các đường cao của tam giác với:

- ① $A(2;0), B(2;-3), C(0;-1).$ ③ $A(-1;-1), B(1;9), C(9;1).$ ⑤ $A(0;-1), B(1;3), C(3;4).$
- ② $A(1;4), B(3;-1), C(6;2).$ ④ $A(4;-1), B(-3;2), C(1;6).$ ⑥ $A(-4;0), B(0;5), C(4;2).$

🔥 **Câu 8.** Cho tam giác ABC biết $A(2;0), B(0;4), C(1;3)$. Viết phương trình tổng quát của

- ① Đường cao AH .
 ② Đường trung trực của đoạn thẳng BC .
 ③ Đường thẳng AB .
 ④ Đường thẳng qua C và song song với đường thẳng AB .

🔥 **Câu 9.** Xét vị trí tương đối và tìm giao điểm nếu có của cặp đường thẳng:

- ① $d: \begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = -6 + 5t' \\ y = 2 - 4t' \end{cases}$
- ② $d: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ và $d': 2x + 4y - 10 = 0$
- ③ $d: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ và $d': \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2}$

Câu 10. Tính góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 , với:

- ① $d_1: x - 2y - 1 = 0$ và $d_2: x + 3y - 11 = 0$. ④ $d_1: x - 2y + 3 = 0$ và $d_2: 2x + y - 11 = 0$.
 ② $d_1: 3x + y - 4 = 0$ và $d_2: 2x + 3y - 7 = 0$. ⑤ $d_1: 4x + 2y - 3 = 0$ và $d_2: x + 3y + 3 = 0$.
 ③ $d_1: 4x - y - 5 = 0$ và $d_2: 2x + 2y - 5 = 0$. ⑥ $d_1: x + 6y - 5 = 0$ và $d_2: 2x + 8y - 20 = 0$.

Câu 11. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ , với:

- ① $M(4; -5)$ và $\Delta: 3x - 4y + 8 = 0$. ④ $M(4; -5)$ và $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$. ⑤ $M(-2; 3)$ và $\Delta: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + t \end{cases}$.
 ② $M(2; 3)$ và $\Delta: x - y + 2 = 0$. ⑥ $M(3; -5)$ và $\Delta: \begin{cases} x = -2t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$.
 ③ $M(1; 5)$ và $\Delta: -2x - 3y - 7 = 0$.

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(3; -4)$, $B(0, 6)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng AB .

- A. $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -4 + 10t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -4 + 10t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 10t \\ y = 6 - 3t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 3t \\ y = 6 + 10t \end{cases}$.

🔥 **Câu 2.** Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -4 + t \end{cases}$.

Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng Δ ?

A. $M(19;1)$.

B. $N(19;0)$.

C. $P(19;2)$.

D. $Q(7;1)$.

🔥 **Câu 3.** Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là

A. $\vec{u} = (2;3)$.

B. $\vec{u} = (3;2)$.

C. $\vec{u} = (-2;-3)$.

D. $\vec{u} = (2;-3)$.

🔥 **Câu 4.** Trong mặt phẳng Oxy , nếu một đường thẳng Δ có hệ số góc là k thì Δ có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u} = (k;1)$.

B. $\vec{u} = (k;-1)$.

C. $\vec{u} = (1;k)$.

D. $\vec{u} = (-1;k)$.

🔥 **Câu 5.** Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $A(1;-4)$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-4;9)$.

A. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 4 + 9t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -4 - 9t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -4 + 9t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 + 9t \\ y = -4 - 4t \end{cases}$

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $A(3; -5)$ có hệ số góc $k = -3$.

A. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -5 + 3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -5 - 3t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -5 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -5 + t \end{cases}$

Câu 7. Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tham số đường thẳng d đi qua điểm $A(0; -4)$ và song song với đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2018 + 2t \\ y = 10 - t \end{cases}$.

A. $\begin{cases} x = -2t \\ y = -4 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = -t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -2t \\ y = 4 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -4 - t \\ y = 2t \end{cases}$

Câu 8. Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(5; -2)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (4; -3)$.

A. $\begin{cases} x = 8 + 3t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 5 - 3t \end{cases}$

Câu 9. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 - 4t \end{cases}$. Điểm nào sau đây không thuộc d ?

A. $A(5; 3)$.

B. $B(2; 5)$.

C. $C(-1; 9)$.

D. $D(8; -3)$.

🔥 **Câu 10.** Đường thẳng d có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{u}_1 = (b; -a)$ là vectơ chỉ phương của d .
 B. $\vec{u}_2 = (-b; a)$ là vectơ chỉ phương của d .
 C. $\vec{n}' = (ka; kb)$ $k \in \mathbb{R}$ là vectơ pháp tuyến của d .
 D. d có hệ số góc $k = \frac{-b}{a}$ ($b \neq 0$).

🔥 **Câu 11.** Đường thẳng đi qua $A(-1; 2)$, nhận $\vec{n} = (2; -4)$ làm véc tơ pháp tuyến có phương trình là

- A. $x - 2y - 4 = 0$. B. $x + y + 4 = 0$. C. $-x + 2y - 4 = 0$. D. $x - 2y + 5 = 0$.

🔥 **Câu 12.** Cho đường thẳng $(d): 2x + 3y - 4 = 0$. Vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của (d) ?

- A. $\vec{n}_1 = (3; 2)$. B. $\vec{n}_2 = (-4; -6)$. C. $\vec{n}_3 = (2; -3)$. D. $\vec{n}_4 = (-2; 3)$.

🔥 **Câu 13.** Cho đường thẳng $d: 3x - 7y + 15 = 0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{u} = (7; 3)$ là vectơ chỉ phương của d . B. d có hệ số góc $k = \frac{3}{7}$.
 C. d không đi qua gốc tọa độ. D. d đi qua hai điểm $M\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$ và $N(5; 0)$.

🔥 **Câu 14.** Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2; 4); B(-6; 1)$ là:

- A.** $3x + 4y - 10 = 0$. **B.** $3x - 4y + 22 = 0$. **C.** $3x - 4y + 8 = 0$. **D.** $3x - 4y - 22 = 0$.

🔥 **Câu 15.** Cho đường thẳng $d : x - 2y + 1 = 0$. Nếu đường thẳng (Δ) đi qua $M(1; -1)$ và song song với d thì (Δ) có phương trình

- A.** $x - 2y - 3 = 0$. **B.** $x - 2y + 5 = 0$. **C.** $x - 2y + 3 = 0$. **D.** $x + 2y + 1 = 0$.

🔥 **Câu 16.** Cho ba điểm $A(1; -2), B(5; -4), C(-1; 4)$. Đường cao AA' của tam giác ABC có phương trình

- A.** $3x - 4y + 8 = 0$. **B.** $3x - 4y - 11 = 0$. **C.** $-6x + 8y + 11 = 0$. **D.** $8x + 6y + 13 = 0$.

🔥 **Câu 17.** Cho hai đường thẳng $(d_1) : mx + y = m + 1, (d_2) : x + my = 2$ cắt nhau khi và chỉ khi

- A.** $m \neq 2$. **B.** $m \neq \pm 1$. **C.** $m \neq 1$. **D.** $m \neq -1$.

🔥 **Câu 18.** Cho hai điểm $A(4; 0), B(0; 5)$. Phương trình nào sau đây không phải là phương trình của đường thẳng AB ?

- A.** $\begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. **B.** $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$. **C.** $\frac{x-4}{-4} = \frac{y}{5}$. **D.** $y = \frac{-5}{4}x + 15$.

❖ **Câu 19.** Đường thẳng $(\Delta): 3x - 2y - 7 = 0$ cắt đường thẳng nào sau đây?

A. $(d_1): 3x + 2y = 0.$

B. $(d_2): 3x - 2y = 0.$

C. $(d_3): -3x + 2y - 7 = 0.$

D. $(d_4): 6x - 4y - 14 = 0.$

❖ **Câu 20.** Mệnh đề nào sau đây đúng? Đường thẳng $d: x - 2y + 5 = 0$:

A. Đi qua $A(1; -2).$

B. Có phương trình tham số: $\begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

C. d có hệ số góc $k = \frac{1}{2}.$

D. d cắt (d') có phương trình: $x - 2y = 0.$

❖ **Câu 21.** Cho đường thẳng $d: 4x - 3y + 5 = 0$. Nếu đường thẳng (Δ) đi qua gốc tọa độ và vuông góc với d thì (Δ) có phương trình

A. $4x + 3y = 0.$

B. $3x - 4y = 0.$

C. $3x + 4y = 0.$

D. $4x - 3y = 0.$

❖ **Câu 22.** Giao điểm M của $d: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + 5t \end{cases}$ và $d': 3x - 2y - 1 = 0$ là

A. $M\left(2; -\frac{11}{2}\right).$

B. $M\left(0; \frac{1}{2}\right).$

C. $M\left(0; -\frac{1}{2}\right).$

D. $M\left(-\frac{1}{2}; 0\right).$

🔥 **Câu 23.** Phương trình nào sau đây biểu diễn đường thẳng không song song với đường thẳng $d: y = 2x - 1$?

- A.** $2x - y + 5 = 0$. **B.** $2x - y - 5 = 0$. **C.** $-2x + y = 0$. **D.** $2x + y - 5 = 0$.

🔥 **Câu 24.** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $I(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng có phương trình $2x - y + 4 = 0$

- A.** $-x + 2y - 5 = 0$. **B.** $x + 2y - 3 = 0$. **C.** $x + 2y = 0$. **D.** $x - 2y + 5 = 0$.

🔥 **Câu 25.** Hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 2t \end{cases}$ và $(d_2): 4x + 3y - 18 = 0$. Cắt nhau tại điểm có tọa độ:

- A.** $(2;3)$. **B.** $(3;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;1)$.

🔥 **Câu 26.** Góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ được xác định theo công thức:

- A.** $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$. **B.** $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.
C. $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$. **D.** $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \sqrt{\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{a^2 + b^2}}$.

🔥 **Câu 27.** Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 10x + 5y - 1 = 0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$.

- A. $\frac{3}{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. D. $\frac{3}{5}$.

🔥 **Câu 28.** Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: x + 2y - \sqrt{2} = 0$ và $\Delta_2: x - y = 0$.

- A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

🔥 **Câu 29.** Tìm cosin giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 2x + 3y - 10 = 0$ và $\Delta_2: 2x - 3y + 4 = 0$.

- A. $\frac{7}{13}$. B. $\frac{6}{13}$. C. $\sqrt{13}$. D. $\frac{5}{13}$.

🔥 **Câu 30.** Tìm góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 2x + 2\sqrt{3}y + \sqrt{5} = 0$ và $\Delta_2: y - \sqrt{6} = 0$

- A. 60° . B. 125° . C. 145° . D. 30° .

🔥 **Câu 31.** Tìm góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1: x + \sqrt{3}y = 0$ và $\Delta_2: x + 10 = 0$.

- A. 45° . B. 125° . C. 30° . D. 60° .

Câu 32. Tìm góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 2x - y - 10 = 0$ và $\Delta_2: x - 3y + 9 = 0$.

- A. 60° . B. 0° . C. 90° . D. 45° .

Câu 33. Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: x + 2y - 7 = 0$ và $\Delta_2: 2x - 4y + 9 = 0$.

- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{1}{5}$. D. $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Câu 34. Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng $\Delta_1: x + 2y - 6 = 0$ và $\Delta_2: x - 3y + 9 = 0$. Tính góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2

- A. 30° . B. 135° . C. 45° . D. 60° .

Câu 35. Cho hai đường thẳng $d_1: x + 2y + 4 = 0$; $d_2: 2x - y + 6 = 0$. Số đo góc giữa d_1 và d_2 là

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

- 🔥 **Câu 36.** Tìm góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 6x - 5y + 15 = 0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 10 - 6t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$.
- A. 90° . B. 60° . C. 0° . D. 45° .

- 🔥 **Câu 37.** Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 3x + 4y + 1 = 0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 15 + 12t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$.
- A. $\frac{56}{65}$. B. $\frac{63}{13}$. C. $\frac{6}{65}$. D. $\frac{33}{65}$.

- 🔥 **Câu 38.** Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 > 0$. Khi đó khoảng cách $d_{(M; \Delta)}$ là

- A. $d_{(M; \Delta)} = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. B. $d_{(M; \Delta)} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
- C. $d_{(M; \Delta)} = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. D. $d_{(M; \Delta)} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

- 🔥 **Câu 39.** Khoảng cách từ điểm $M(15; 1)$ đến đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = t \end{cases}$ là
- A. $\sqrt{5}$. B. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. C. $\sqrt{10}$. D. $\frac{16}{\sqrt{5}}$.

- 🔥 **Câu 40.** Khoảng cách từ điểm $M(5; -1)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x + 2y + 13 = 0$ là
- A. $\frac{13}{\sqrt{2}}$. B. 2. C. $\frac{28}{\sqrt{13}}$. D. $2\sqrt{13}$.

- 🔥 **Câu 41.** Khoảng cách từ điểm $M(0; 1)$ đến đường thẳng $\Delta: 5x - 12y - 1 = 0$ là
- A. $\frac{11}{13}$. B. $\frac{13}{17}$. C. 1. D. $\sqrt{13}$.

- 🔥 **Câu 42.** Cho ba điểm $A(0; 1)$, $B(12; 5)$, $C(-3; 5)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều ba điểm A , B , C ?
- A. $5x - y + 1 = 0$. B. $2x - 6y + 21 = 0$. C. $x + y = 0$. D. $x - 3y + 4 = 0$.

- 🔥 **Câu 43.** Tìm tọa độ điểm M nằm trên trục Ox và cách đều 2 đường thẳng: $\Delta_1: 3x - 2y - 6 = 0$ và $\Delta_2: 3x - 2y + 3 = 0$

- A. $(0; \sqrt{2})$. B. $(\frac{1}{2}; 0)$. C. $(1; 0)$. D. $(\sqrt{2}; 0)$.

- 🔥 **Câu 44.** Khoảng cách từ điểm $M(2; 0)$ đến đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ là

- A. 2. B. 1. C. $\frac{10}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

🔥 **Câu 45.** Khoảng cách từ điểm $M(1; -1)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x - 4y - 17 = 0$ là

A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{10}{\sqrt{5}}$.

C. 2.

D. $-\frac{18}{5}$.

🔥 **Câu 46.** Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$ và điểm $A(\frac{7}{2}; -2)$. Điểm $A \in d$ ứng với giá trị nào của t ?

A. $t = \frac{3}{2}$.

B. $t = \frac{1}{2}$.

C. $t = -\frac{1}{2}$.

D. $t = -\frac{3}{2}$.

🔥 **Câu 47.** Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(1; -3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-2; 1)$.

A. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$.

🔥 **Câu 48.** Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d: \frac{x}{5} - \frac{y}{7} = 1$. Phương trình tham số của d là:

A. $\begin{cases} x = 5 + 5t \\ y = -7t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 5 + 5t \\ y = 7t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 5 - 7t \\ y = 5t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 5 + 7t \\ y = 5t \end{cases}$.

Câu 49. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hệ số góc của d là $k = \frac{u_2}{u_1}, u_1 \neq 0$.

B. Hệ số góc của d là $k = \frac{u_1}{u_2}, u_2 \neq 0$.

C. Hệ số góc của d là $k = -\frac{u_1}{u_2}, u_2 \neq 0$.

D. Hệ số góc của d là $k = -\frac{u_2}{u_1}, u_1 \neq 0$.

Câu 50. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$.
Tìm điểm M có tọa độ nguyên nằm trên đường thẳng Δ và cách điểm $A(0;1)$ một khoảng bằng 5.

A. $M(-4;4)$.

B. $M(4;4)$.

C. $M(0;2)$.

D. $M(8;5)$.

Câu 51. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng Δ có phương trình tham số $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$.
Có bao nhiêu điểm thuộc đường thẳng Δ và cách điểm $A(0;1)$ một khoảng bằng 5.

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Câu 52. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$.
Gọi $M(a;b)$ là giao điểm của đường thẳng Δ với đường thẳng $d: x + y + 1 = 0$. Tính $a^2 + b^2$.

A. $a^2 + b^2 = 4$.

B. $a^2 + b^2 = 3$.

C. $a^2 + b^2 = 5$.

D. $a^2 + b^2 = 1$.

🔥 **Câu 53.** Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$ và $A(0;1)$. Gọi $M(a;b)$ là điểm trên Δ sao cho AM ngắn nhất. Tính $a + b$.

A. $\frac{9}{5}$. B. $\frac{-2}{5}$. C. $\frac{11}{5}$. D. $\frac{7}{5}$.

🔥 **Câu 54.** Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(1;1)$, $B(-2;5)$ trọng tâm G thuộc đường thẳng Δ_1 có phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1-2t}{3} \end{cases}$, đỉnh C thuộc đường thẳng Δ_2 có phương trình $\begin{cases} x = k \\ y = 1 - k \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm C .

A. $C(13;-12)$. B. $C(14;-13)$. C. $C(15;-14)$. D. $C(16;-15)$.

🔥 **Câu 55.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hình vuông $ABCD$ biết $A(-1;2)$ và phương trình của một đường chéo là $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t \end{cases}$. Biết tọa độ điểm $C(a;b)$. Tính $a.b$.

A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

🔥 **Câu 56.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(-1;2)$, $B(-2;3)$. Gọi $I(a;b)$ là điểm thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 3t + 10 \end{cases}$ sao cho $IA = IB$. Tính $a^2 + b^{2018}$.

A. 100. B. 2018. C. 10. D. 1000.

🔥 **Câu 57.** Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua 2 điểm $A(3; -7)$ và $B(1; -7)$.

A. $\begin{cases} x = t \\ y = -7 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = t \\ y = -7 - t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 3 - 7t \\ y = 1 - 7t \end{cases}$

🔥 **Câu 58.** Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và song song với đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$.

A. $\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -3t \\ y = 4t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 3t \\ y = -4t \end{cases}$

🔥 **Câu 59.** Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $A(-1; 2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 2x - y + 4 = 0$.

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

🔥 **Câu 60.** Cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là $A(-1; 1)$, $B(4; 7)$, $C(3; -2)$, M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Phương trình tham số của đường thẳng CM là:

A. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R có dạng

$$(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

2 DẠNG KHÁC CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $a^2 + b^2 - c > 0$, là phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

3 PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Cho đường tròn (C) có tâm I , bán kính R và đường thẳng Δ .

$$\Delta \text{ tiếp xúc } (C) \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$$

Khi đó Δ được gọi là phương trình tiếp tuyến của (C) .

4 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định tâm và bán kính của đường tròn

Phương pháp: Dựa vào định nghĩa đường tròn.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn đường tròn? Tìm tâm và bán kính nếu có:

① $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 100 = 0$.

② $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$.

③ $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 2 = 0$.

④ $2x^2 + y^2 + 2x - 3y + 9 = 0$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0$ (1).

- ① Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn.
- ② Nếu (1) là phương trình đường tròn hãy tìm tọa độ tâm và bán kính theo m .

Lời giải:

📁 Dạng 2. Lập phương trình đường tròn phần 1

Phương pháp: Để lập phương trình đường tròn (C) ta thường cần phải xác định tâm $I(a;b)$ và bán kính R của (C).

- ☑ (C) có tâm I và đi qua điểm A .
 - ✍ Bán kính $R = IA$.
- ☑ (C) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ .
 - ✍ Bán kính $R = d(I, \Delta)$.
- ☑ (C) có đường kính AB .
 - ✍ Tâm I là trung điểm của AB .
 - ✍ Bán kính $R = \frac{AB}{2}$.
- ☑ (C) đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ .
 - ✍ Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB .
 - ✍ Xác định tâm I là giao điểm của d và Δ .
 - ✍ Bán kính $R = IA$.
- ☑ (C) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ .
 - ✍ Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB .
 - ✍ Tâm I của (C) thỏa mãn:
$$\begin{cases} I \in d \\ d(I, \Delta) = IA \end{cases}$$
 - ✍ Bán kính $R = IA$.
- ☑ (C) đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm B .
 - ✍ Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB .
 - ✍ Viết phương trình đường thẳng Δ' đi qua B và vuông góc với Δ .
 - ✍ Xác định tâm I là giao điểm của d và Δ' .
 - ✍ Bán kính $R = IA$.

Dạng 3. Lập phương trình đường tròn phần 2

- ☑ (C) đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .
 - ✍ Tâm I của (C) thỏa mãn:
$$\begin{cases} d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) & (1) \\ d(I, \Delta_1) = IA & (2) \end{cases}$$
 - ✍ Bán kính $R = IA$.
- ☑ (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có tâm nằm trên đường thẳng d.
 - ✍ Tâm I của (C) thỏa mãn:
$$\begin{cases} d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) \\ I \in d \end{cases}$$
 - ✍ Bán kính $R = d(I, \Delta_1)$.
- ☑ (C) đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C (đường tròn ngoại tiếp tam giác).
 - ✍ Phương trình của (C) có dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (*).
 - ✍ Lần lượt thay tọa độ của A, B, C vào (*) ta được hệ phương trình.
 - ✍ Giải hệ phương trình này ta tìm được a, b, c.
 - ✍ Suy ra phương trình của (C).
- ☑ (C) nội tiếp tam giác ABC.
 - ✍ Viết phương trình của hai đường phân giác trong của hai góc trong tam giác
 - ✍ Xác định tâm I là giao điểm của hai đường phân giác trên.
 - ✍ Bán kính $R = d(I, AB)$.

 **Ví dụ 1.** Viết phương trình đường tròn (C) biết tâm $I(-2,3)$, bán kính $R = 3$.

Lời giải:

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** Viết phương trình đường tròn (C) biết tâm $I(-2,3)$ và qua $M(-2,7)$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 3.** Viết phương trình đường tròn tâm $I(5;6)$ và tiếp xúc với đường thẳng d : $3x - 4y - 6 = 0$.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

 **Ví dụ 4.** Viết phương trình đường tròn (C) có đường kính AB với $A(1,1); B(7,5)$.

Lời giải:

.....
.....
.....
.....
.....

 **Ví dụ 5.** Viết phương trình đường tròn (C) biết tâm I là trung điểm của đoạn AB và bán kính đường tròn bằng khoảng cách từ A đến đường thẳng $(\Delta): 4x - 3y + 11 = 0$. Với $A(2,3); B(4,1)$.

Lời giải:

.....
.....
.....
.....
.....

 **Ví dụ 6.** Viết phương trình đường tròn (C) đi qua 3 điểm $A(5;3); B(6;2); C(3;-1)$.

Lời giải:

.....
.....
.....
.....
.....

 **Ví dụ 7.** Cho hai đường thẳng: $d_1: 3x + 4y + 5 = 0$ và $d_2: 4x - 3y - 5 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng $d: x - 6y - 10 = 0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng d_1, d_2 .

Lời giải:

.....
.....
.....
.....
.....

B TỰ LUẬN

Câu 1. Viết phương trình đường tròn có tâm I và đi qua điểm A , với:

① $I(2;4), A(-1;3)$

② $I(-3;2), A(1;-1)$

③ $I(-1;0), A(3;-11)$

Câu 2. Viết phương trình đường tròn có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ , với:

① $I(3;4), \Delta : 4x - 3y + 15 = 0$

④ $I(5;0), \Delta : 2x - y - 15 = 0$

② $I(2;3), \Delta : 5x - 12y - 7 = 0$

⑤ $I(-3;2), \Delta \equiv Ox$

③ $I(-2;1), \Delta : x - 4y + 20 = 0$

⑥ $I(-3;-5), \Delta \equiv Oy$

Câu 3. Viết phương trình đường tròn có đường kính AB , với:

① $A(-2;3), B(6;5)$

② $A(0;1), C(5;1)$

③ $A(-3;4), B(7;2)$

Câu 4. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ , với:

① $A(2;3), B(-1;1), \Delta : x - 3y - 11 = 0$

② $A(0;4), B(2;6), \Delta : x - 2y + 5 = 0$

🔥 **Câu 5.** Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ , với:

① $A(1;2), B(3;4), \Delta : 3x + y - 3 = 0$

② $A(6;3), B(3;2), \Delta : x + 2y - 2 = 0$

③ $A(-1;-2), B(2;1), \Delta : 2x - y + 2 = 0$

④ $A(2;0), B(4;2), \Delta \equiv Oy$

🔥 **Câu 6.** Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm B , với:

① $A(-2;6), \Delta : 3x - 4y - 15 = 0, B(1;-3)$

② $A(-2;1), \Delta : 3x - 2y - 6 = 0, B(4;3)$

③ $A(6;-2), \Delta \equiv Ox, B(6;0)$

④ $A(4;-3), \Delta : x + 2y - 3 = 0, B(3;0)$

🔥 **Câu 7.** Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 , với:

① $A(2;3), \Delta_1 : 3x - 4y + 1 = 0, \Delta_2 : 4x + 3y - 7 = 0$

② $A(1;3), \Delta_1 : x + 2y + 2 = 0, \Delta_2 : 2x - y + 9 = 0$

③ $A \equiv O(0;0), \Delta_1 : x + y - 4 = 0, \Delta_2 : x + y + 4 = 0$

④ $A(3;-6), \Delta_1 \equiv Ox, \Delta_2 \equiv Oy$

🔥 **Câu 8.** Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có tâm nằm trên đường thẳng d , với:

① $\Delta_1 : 3x + 2y + 3 = 0, \Delta_2 : 2x - 3y + 15 = 0, d : x - y = 0$

- ② $\Delta_1 : x + y + 4 = 0, \Delta_2 : 7x - y + 4 = 0, d : 4x + 3y - 2 = 0$
 ③ $\Delta_1 : 4x - 3y - 16 = 0, \Delta_2 : 3x + 4y + 3 = 0, d : 2x - y + 3 = 0$
 ④ $\Delta_1 : 4x + y - 2 = 0, \Delta_2 : x + 4y + 17 = 0, d : x - y + 5 = 0$

🔥 Câu 9. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , với:

- ① $A(2;0), B(0;-3), C(5;-3)$
 ② $A(5;3), B(6;2), C(3;-1)$
 ③ $A(1;2), B(3;1), C(-3;-1)$
 ④ $A(-1;-7), B(-4;-3), C \equiv O(0;0)$
 ⑤ $AB : x - y + 2 = 0, BC : 2x + 3y - 1 = 0, CA : 4x + y - 17 = 0$
 ⑥ $AB : x + 2y - 5 = 0, BC : 2x + y - 7 = 0, CA : x - y + 1 = 0$

🔥 Câu 10. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC , với:

- ① $A(2;6), B(-3;-4), C(5;0)$
 ② $A(2;0), B(0;-3), C(5;-3)$
 ③ $AB : 2x - 3y + 21 = 0, BC : 3x - 2y - 6 = 0, CA : 2x + 3y + 9 = 0$
 ④ $AB : 7x - y + 11 = 0, BC : x + y - 15 = 0, CA : 7x + 17y + 65 = 0$

🕒 TRẮC NGHIỆM

🔥 Câu 1. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (1). Với điều kiện nào thì (1) là phương trình của đường tròn?

- A.** $a^2 + b^2 - 4c > 0$. **B.** $a^2 + b^2 - c > 0$. **C.** $a^2 + b^2 - 4c \geq 0$. **D.** $a^2 + b^2 - c \geq 0$.

🔥 **Câu 2.** Tìm m để phương trình $x^2 + y^2 - 2(m+1)x - 2(m+2)y + 6m + 7 = 0$ là phương trình đường tròn.

A. $m < 0$.

B. $m < 1$.

C. $m > 1$.

D. $m < -1$ hoặc $m > 1$.

🔥 **Câu 3.** Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. (C) có tâm $I(2;0)$.

B. (C) có bán kính $R = 1$.

C. (C) cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt.

D. (C) cắt trục Oy tại hai điểm phân biệt.

🔥 **Câu 4.** Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn?

A. $x^2 + y^2 - x - y + 9 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - x = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 2xy - 1 = 0$.

D. $x^2 - y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$.

🔥 **Câu 5.** Phương trình nào sau đây biểu diễn đường tròn đi qua điểm $A(4;-2)$?

A. $x^2 + y^2 - 4x + 7y - 8 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$.

D. $x^2 + y^2 + 2x - 20 = 0$.

Câu 6. Cho đường cong $(C_m): x^2 + y^2 - 8x + 10y + m = 0$. Với giá trị nào của m thì (C_m) là đường tròn có bán kính bằng 7?

A. $m = 4$.

B. $m = 8$.

C. $m = -8$.

D. $m = -4$.

Câu 7. Viết phương trình đường tròn tâm $I(3; -1)$ và bán kính $R = 2$.

A. $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

B. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

C. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

D. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2$.

Câu 8. Viết phương trình đường tròn tâm $I(-1; 2)$ và đi qua điểm $M(2; 1)$.

A. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$.

Câu 9. Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm $O(0; 0), A(a; 0), B(0; b)$.

A. $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$.

B. $x^2 + y^2 - ax - by + xy = 0$.

C. $x^2 + y^2 - ax - by = 0$.

D. $x^2 + y^2 - ax + by = 0$.

Câu 10. Trong các đường tròn cho bởi các phương trình sau, đường tròn nào tiếp xúc với trục Ox ?

A. $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 10x + 1 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 2x + 10 = 0$.

🔥 **Câu 11.** Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 4x = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 + 8y = 0$.

A. (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong.

B. (C_1) và (C_2) không cắt nhau.

C. (C_1) và (C_2) cắt nhau.

D. (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài.

🔥 **Câu 12.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phương trình nào sau đây là phương trình của một đường tròn?

A. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 2y + 3 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0$.

🔥 **Câu 13.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phương trình nào sau đây **không phải** là phương trình của một đường tròn?

A. $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 2 = 0$.

🔥 **Câu 14.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường tròn $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ tiếp xúc với đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?

A. $3x - 4y - 5 = 0$.

B. $3x - 4y + 10 = 0$.

C. $x + 2y + 5 = 0$.

D. $x - 2y - 5 = 0$.

🔥 Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $(\mathcal{C})$ có tâm $I(2; -3)$, bán kính $R = 5$.

B. $(\mathcal{C})$ có tâm $I(-2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

C. $(\mathcal{C})$ có tâm $I(2; -3)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

D. $(\mathcal{C})$ có tâm $I(-2; 3)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

🔥 Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $I(1; 2)$ và $d : 2x - y + 5 = 0$. Viết phương trình của đường tròn có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng d .

A. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

B. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = \sqrt{5}$.

C. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

D. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = \sqrt{5}$.

🔥 Câu 17. Tìm m để phương trình $x^2 + y^2 + 2x + 2y - m = 0$ là phương trình của một đường tròn.

A. $m \leq 2$.

B. $m > 2$.

C. $m \geq 2$.

D. $|m| > 2$.

🔥 Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường tròn $(\mathcal{C}_1) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$ và $(\mathcal{C}_2) : x^2 + (y - 5)^2 = 3$. Số tiếp tuyến chung của hai đường tròn là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

🔥 **Câu 19.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-3;1), B(1;5)$. Viết phương trình của đường tròn có đường kính là AB .

A. $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 2\sqrt{2}$.

B. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$.

C. $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 8$.

D. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 8$.

🔥 **Câu 20.** Trong các phương trình cho dưới đây, phương trình nào **không** phải là phương trình của một đường tròn?

A. $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$.

C. $3x^2 + 3y^2 + x - 2y - 1 = 0$.

D. $x^2 + (y+1)^2 = 2$.

🔥 **Câu 21.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0$. Tính chu vi của đường tròn (T) .

A. 5π .

B. $\frac{25\pi}{4}$.

C. $\frac{5\pi}{2}$.

D. $\frac{25\pi}{2}$.

🔥 **Câu 22.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho phương trình $x^2 + y^2 + 2x - 4y + m = 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho là phương trình của một đường tròn.

A. $m > 5$.

B. $m < \sqrt{5}$.

C. $m < 5$.

D. $m < 20$.

🔥 **Câu 23.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$. Trong các điểm M, N, P, Q cho dưới đây, tìm điểm nằm ngoài đường tròn (C) .

A. $M(3;0)$.

B. $N(3;-1)$.

C. $P(5;-2)$.

D. $Q(5;2)$.

🔥 **Câu 24.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(-1;-1)$, $B(1;1)$, $C(5;-3)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

A. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 10$.

B. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 10$.

C. $(x+2)^2 + (y+2)^2 = \sqrt{10}$.

D. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 100$.

🔥 **Câu 25.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3;0)$ và $B(0;4)$. Biết đường tròn nội tiếp $\triangle OAB$ có phương trình $(x-p)^2 + (y-q)^2 = R^2$. Tính giá trị của biểu thức $M = p + 2q + 3R$.

A. $M = 4$.

B. $M = 6$.

C. $M = 12$.

D. $M = 36$.

🔥 **Câu 26.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$ và $(C'): (x-2)^2 + (y+4)^2 = 20$. Tìm số tiếp tuyến chung của (C) và (C') .

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

🔥 **Câu 27.** Viết phương trình đường tròn tâm $I(3;2)$ bán kính $R = 3$.

A. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$.

B. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 3$.

C. $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 9$.

D. $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 3$.

🔥 **Câu 28.** Tìm điều kiện cần và đủ để phương trình $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c$ là phương trình của một đường tròn.

A. $a^2 + b^2 - c \geq 0$.

B. $a^2 + b^2 - c > 0$.

C. $a^2 + b^2 + c \geq 0$.

D. $a^2 + b^2 + c > 0$.

🔥 **Câu 29.** Biết tập các điểm $M(x;y)$ cho bởi $\begin{cases} x = 1 + 2\cos t \\ y = -3 + 2\sin t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ là một đường tròn. Tìm tâm I và bán kính R của đường tròn đó.

A. $I(-1;3), R = 4$.

B. $I(-1;3), R = 2$.

C. $I(1;-3), R = 4$.

D. $I(1;-2), R = 2$.

🔥 **Câu 30.** Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào tiếp xúc với (C) ?

A. $d_1: 3x + 2y - 1 = 0$.

B. $d_2: 2x - y + 1 = 0$.

C. $d_3: x - 2y + 2 = 0$.

D. $d_4: x + 4y - 1 = 0$.

🔥 **Câu 31.** Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ và điểm $M(u,v)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $u^2 + v^2 + 2au + 2bv + c < 0 \Leftrightarrow M$ nằm trên đường tròn.

- B. $u^2 + v^2 + 2au + 2bv + c < 0 \Leftrightarrow M$ nằm trong đường tròn.
 C. $u^2 + v^2 + 2au + 2bv + c < 0 \Leftrightarrow M$ trùng tâm của đường tròn.
 D. $u^2 + v^2 + 2au + 2bv + c < 0 \Leftrightarrow M$ nằm ngoài đường tròn.

🔥 Câu 32. Mệnh đề nào sau đây là đúng khi nói về hai đường tròn $(C_1): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ và $(C_2): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$?

- A. Hai đường tròn cắt nhau. B. Hai đường tròn ở ngoài nhau.
 C. Một đường tròn đựng đường tròn còn lại. D. Hai đường tròn tiếp xúc trong.

🔥 Câu 33. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ tại điểm $A(1;1)$.

- A. $x - 2y - 1 = 0$. B. $y = 1$. C. $y = -3$. D. $2x + y - 1 = 0$.

🔥 Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phương trình nào trong các phương trình dưới đây là phương trình đường tròn?

- A. $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 9 = 0$. B. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$.
 C. $2x^2 + y^2 - 3x + y = 0$. D. $2x^2 + 2y^2 + x + y - 1 = 0$.

🔥 Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm nào trong các điểm sau đây nằm trên đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$?

- A. $A(0;3)$. B. $B(-2;-6)$. C. $C(2;-6)$. D. $D(3;0)$.

🔥 **Câu 36.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường tròn tâm $I(2;3)$ bán kính $R = 3$ có phương trình là

A. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0.$

B. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0.$

C. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 4 = 0.$

D. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 4 = 0.$

🔥 **Câu 37.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là phương trình của một đường tròn khi và chỉ khi

A. $a^2 + c^2 - b > 0.$

B. $a^2 + b^2 - c > 0.$

C. $a^2 + c^2 - b > 0.$

D. $b^2 + c^2 - a > 0.$

🔥 **Câu 38.** Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0.$

A. $I(2;3); R = 4.$

B. $I(2;-3); R = 4.$

C. $I(3;2); R = 2.$

D. $I(-3;2); R = 2.$

🔥 **Câu 39.** Đường tròn đi qua 3 điểm $A(1;2), B(5;2), C(1;-3)$ có phương trình là

A. $x^2 + y^2 - 6x + y - 1 = 0.$

B. $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0.$

C. $x^2 + y^2 + 6x - y - 1 = 0.$

D. $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 1 = 0.$

🔥 Câu 40. Cho họ đường cong $(\mathcal{C}_m): x^2 + y^2 - 2(m+2)x - 2(m+4)y + 4m + 2 = 0$ (1). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (1) là phương trình của một đường tròn là

- A. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $-1 < m < 2$. D. $m \geq 3$.

🔥 Câu 41. Tiếp tuyến của đường tròn $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ tại điểm $A(4;2)$ có phương trình là

- A. $-3x - 4y + 20 = 0$. B. $3x + 4y + 20 = 0$. C. $3x - 4y - 20 = 0$. D. $-3x + 4y + 20 = 0$.

🔥 Câu 42. Cho phương trình $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với a, b, c là các số thực. Với điều kiện nào thì phương trình (C) là phương trình đường tròn.

- A. $a^2 + b^2 - 4c > 0$. B. $a^2 + b^2 - c > 0$. C. $a^2 + b^2 - 4c \geq 0$. D. $a^2 + b^2 - c \geq 0$.

🔥 Câu 43. Tìm m để phương trình $(C): x^2 + y^2 - 8x + 10y + m = 0$ là phương trình đường tròn có bán kính bằng 7.

- A. $m = 8$. B. $m = -8$. C. $m = 7$. D. $m = -7$.

🔥 **Câu 44.** Phương trình nào trong các phương án dưới đây **không** phải là phương trình đường tròn

A. $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + x + y + 2 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + x + y = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

🔥 **Câu 45.** Cho phương trình đường tròn (C): $3x^2 + 3y^2 - 6x + 9y - 4 = 0$. Tìm tâm I và bán kính R của đường tròn (C).

A. $I\left(1; \frac{3}{2}\right), R = \frac{165}{6}$.

B. $I\left(1; -\frac{3}{2}\right), R = \frac{\sqrt{165}}{6}$.

C. $I\left(-1; \frac{3}{2}\right), R = \sqrt{\frac{165}{6}}$.

D. $I\left(-1; -\frac{3}{2}\right), R = \frac{165}{6}$.

🔥 **Câu 46.** Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với trục hoành tại điểm A(6 ; 0) và đi qua điểm B(9 ; 9).

A. $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

B. $(x + 6)^2 + (y - 5)^2 = 125$.

C. $(x - 6)^2 + (y + 5)^2 = 125$.

D. $(x + 6)^2 + (y + 5)^2 = 25$.

🔥 **Câu 47.** Phương trình đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0$ và đường thẳng (d): $x - y - 1 = 0$. Phương trình đường thẳng nào trong các phương án dưới đây là phương trình tiếp tuyến của (C) song song với (d).

A. $-x + y + 4 = 0$.

B. $x - y - 4 = 0$.

C. $x - y - 4\sqrt{2} = 0$.

D. $x + y + 4\sqrt{2} = 0$.

🔥 Câu 48. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ $A(2; 1)$.

- A. $(d_1): x - 2 = 0, (d_2): 4x - 3y - 5 = 0$.
 B. $(d_1): 4x - 3y - 5 = 0, (d_2): y - 1 = 0$.
 C. Từ điểm A không kẻ được tiếp tuyến với (C) .
 D. $(d_1): 3x - 4y - 2 = 0, (d_2): y - 1 = 0$.

🔥 Câu 49. Tìm phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với Oy tại $A(0; -2)$ và qua $B(4; -2)$.

- A. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$.
 B. $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.
 C. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$.
 D. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

🔥 Câu 50. Với giá trị nào của m thì đường thẳng $d: 4x + 3y + m = 0$ tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 9 = 0$?

- A. $m = \pm 15$.
 B. $m = \pm \sqrt{3}$.
 C. $m = -3$.
 D. $m = 3$.

🔥 Câu 51. Đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ cắt đường thẳng $\Delta: x + y - 2 = 0$ theo một dây cung có độ dài K . Tính K .

- A. $K = 1$.
 B. $K = 2$.
 C. $K = \sqrt{2}$.
 D. $K = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

🔥 Câu 52. Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;3), B(3;1)$ và đường thẳng $d: 2x - y + 7 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua A, B và có tâm nằm trên đường thẳng d .

A. $(x - 7)^2 + (y - 7)^2 = 164$.

B. $(x + 7)^2 + (y + 7)^2 = 164$.

C. $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

D. $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$.

🔥 Câu 53. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(\mathcal{C})$ đi qua hai điểm $A(2;3), B(-1;1)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 3y - 11 = 0$. Viết phương trình của đường tròn $(\mathcal{C})$.

A. $x^2 + y^2 - 7x + 5y - 56 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + 7x - 5y - 56 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + 7x - 5y - 14 = 0$.

🔥 Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: 3x - 4y - 31 = 0$ và điểm $A(1; -7)$. Tìm tọa độ tâm của các đường tròn tiếp xúc với Δ tại A và có bán kính $R = 5$.

A. $I_1(-2; -3), I_2(4; -11)$.

B. $I_1(2; 3), I_2(-4; 11)$.

C. $I_1(2; -3), I_2(4; -11)$.

D. $I_1(-2; 3), I_2(4; -11)$.

🔥 Câu 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường tròn $(\mathcal{C}_1): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ và $(\mathcal{C}_2): x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$ không có điểm chung.

B. $(\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$ tiếp xúc với nhau.

C. $(\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

D. $(\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$ có bán kính bằng nhau.

🔥 Câu 56. Đường tròn đi qua ba điểm $A(1;3)$, $B(5;6)$ và $C(7;0)$ có tâm $I(a;b)$ và bán kính R . Tính $S = a + b + 2R^2$.

A. $S = 32$.

B. $S = 16$.

C. $S = 24$.

D. $S = 36$.

🔥 Câu 57. Đường tròn đi qua điểm $A(-1;-2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $(d): 7x - y - 5 = 0$ tại điểm $M(1;2)$ có phương trình là

A. $(x+6)^2 + (y-3)^2 = 50$.

B. $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 50$.

C. $(x+3)^2 + (y-6)^2 = 25$.

D. $(x+3)^2 + (y+6)^2 = 25$.

🔥 Câu 58. Đường tròn đi qua 2 điểm $A(3;1)$, $B(5;5)$ và có tâm nằm trên trục hoành có phương trình là

A. $x^2 + y^2 - 20x + 50 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 20x - 50 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 24x - 24 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 24x + 24 = 0$.

🔥 Câu 59. Cho (d) là đường thẳng đi qua hai điểm $A(0;-5)$ và $B(3;1)$ và đường tròn $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 20x + 50 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm của (d) và $(\mathcal{C})$.

A. $M(1;3)$.

B. Không có giao điểm.

C. $M(3;1)$ và $N(5;5)$.

D. $M(-3;1)$ và $N(3;5)$.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH ELIP

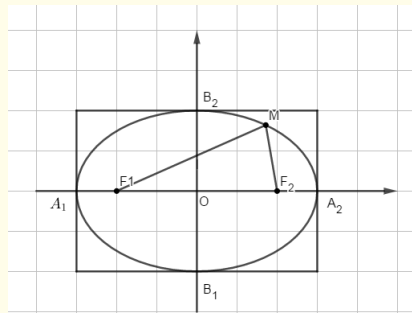
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Cho hai điểm cố định $F_1; F_2$ với $F_1F_2 = 2c$ và một độ dài không đổi $2a$ ($0 < c < a$).

Elip là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$. Khi đó ta gọi:

- F_1 và F_2 là tiêu điểm.
- $F_1F_2 = 2c$ là tiêu cự.
- $F_1M; F_2M$ là bán kính qua tiêu.



2 PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ELIP

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy với $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$:

$$M(x; y) \in E \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Trong đó $b^2 = a^2 - c^2$ và $a > b > 0$.

Phương trình (1) được gọi là phương trình chính tắc của Elip.

3 HÌNH DẠNG VÀ TÍNH CHẤT CỦA ELIP

Elip có phương trình (1) nhận các trục tọa độ làm trục đối xứng và gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

- Tiêu điểm: Tiêu điểm trái $F_1(-c; 0)$, tiêu điểm phải $F_2(c; 0)$.
- Các đỉnh $A_1(-a; 0), A_2(a; 0), B_1(0; -b), B_2(0; b)$.
- Trục lớn $A_1A_2 = 2a$ nằm trên trục Ox , trục nhỏ $B_1B_2 = 2b$ nằm trên trục Oy .
- Hình chữ nhật cơ sở là hình chữ nhật tạo bởi đường thẳng $x = \pm a$ và $y = \pm b$. Từ đó ta thấy hình chữ nhật cơ sở có chiều dài là $2a$ và chiều rộng là $2b$.
- Tâm sai $e = \frac{c}{a} < 1$.

4 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ELIP

Cho đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) và $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$).

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad (I).$$

Số nghiệm của hệ (I) bằng số giao điểm của đường thẳng d và elip (E) .

- Nếu hệ (I) vô nghiệm thì $d \cap E = \emptyset$.
- Nếu hệ (I) có nghiệm duy nhất thì $d \cap E = \{M(x_M; y_M)\}$.

— Nếu hệ (I) có hai nghiệm phân biệt thì $d \cap E = \{M(x_M; y_M); N(x_N; y_N)\}$.

5 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG TRÒN VÀ ELIP

Cho đường tròn (C): $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ ($R > 0$) và (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$).

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad (II).$$

Số nghiệm của hệ (II) bằng số giao điểm của đường tròn (C) và elip (E).

Hệ (II) có thể vô nghiệm, có 1 nghiệm, 2 nghiệm, 3 nghiệm hoặc 4 nghiệm.

Khi đó đường tròn (C) và elip (E) có thể có 0 điểm chung, 1 điểm chung, 2 điểm chung, 3 điểm chung hoặc 4 điểm chung theo thứ tự đó.

6 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định một số tính chất của elip khi biết phương trình elip

Phương pháp: Sử dụng các công thức của Elip.

Ví dụ 1. Xác định tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm, độ dài các trục, tiêu cự, tâm sai của elip có phương trình sau (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Lời giải:

Từ phương trình của (E) ta có $a = 2, b = 1 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$.

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A_1(-2; 0), A_2(2; 0), B_1(0; -1), B_2(0; 1)$.

Tọa độ các tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3}; 0), F_2(\sqrt{3}; 0)$.

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 4$, độ dài trục nhỏ $B_1B_2 = 2$, tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{3}$.

Tâm sai của (E) là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 2. Xác định tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm, độ dài các trục, tiêu cự, tâm sai của elip có phương trình sau $E: 4x^2 + 25y^2 = 100$.

Lời giải:

Ta có $4x^2 + 25y^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ suy ra $a = 5; b = 2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{21}$.

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A_1(-5; 0); A_2(5; 0); B_1(0; -2); B_2(0; 2)$.

Tọa độ các tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{21}; 0); F_2(\sqrt{21}; 0)$.

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 10$, độ dài trục nhỏ $B_1B_2 = 4$, tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{21}$.

Tâm sai của (E) là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Dạng 2. Lập phương trình chính tắc của elip khi biết một số yếu tố liên quan

Phương pháp: Dựa vào dữ kiện đề bài và các công thức của Elip

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình chính tắc của elip biết độ dài trục lớn là 10 và độ dài trục nhỏ là 8.

Lời giải:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$).
Do độ dài trục lớn là 10 và độ dài trục nhỏ là 8 nên $a = 5, b = 4$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình chính tắc của Elip biết độ dài trục bé là 6 và tiêu cự là 8.

Lời giải:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi phương trình chính tắc của Elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$.

Do độ dài trục bé là 6 và tiêu cự là 8 nên $b = 3, c = 4 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} = 5$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình chính tắc của Elip là $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Dạng 3. Tìm tọa độ điểm thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp: Để xác định tọa độ điểm M thuộc Elip có phương trình chính tắc là $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) ta làm như sau

- Giả sử $M(x_M; y_M)$, điểm $M \in E \Leftrightarrow \frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1$ ta thu được phương trình thứ nhất.
- Từ điều kiện của bài toán ta thu được phương trình thứ hai; giải phương trình, hệ phương trình ẩn x_M, y_M ta tìm được tọa độ của điểm M

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho Elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $d: x - 2y + 3 = 0$. Gọi A, B là hai đỉnh của Elip (E) với A thuộc tia Ox , B thuộc tia Oy . Tìm tọa độ điểm C trên d sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow A(4; 0) \\ b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow B(0; 3) \end{cases} \Rightarrow AB: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 0$ và $AB = 5$.

Vì $C \in d \Rightarrow C(2c - 3; c) \Rightarrow CH = d(C, AB) = \frac{|3(2c - 3) + 4c - 12|}{5} = \frac{|10c - 21|}{5}$.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{|10c - 21|}{5} = \frac{|10c - 21|}{2}$.

Mặt khác, theo giả thiết: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|10c - 21|}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 10c - 21 = 1 \\ 10c - 21 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{11}{5} \\ c = 2 \end{cases}$.

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $C_1\left(\frac{7}{5}; \frac{11}{5}\right)$ và $C_2(1; 2)$.

B TỰ LUẬN

Câu 1. Cho elip (E) . Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh, tâm sai, với (E) có phương trình:

① $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

② $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

③ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

④ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

⑤ $16x^2 + 25y^2 = 400$

⑥ $x^2 + 4y^2 = 1$

⑦ $4x^2 + 9y^2 = 5$

⑧ $9x^2 + 25y^2 = 1$

🔥 **Câu 2.** Lập phương trình chính tắc của (E) , biết:

- ① Độ dài trục lớn bằng 6, trục nhỏ bằng 4.
- ② Độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự bằng 6.
- ③ Độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục nhỏ bằng tiêu cự.
- ④ Tiêu cự bằng 8 và đi qua điểm $M(\sqrt{15}; -1)$.
- ⑤ Độ dài trục nhỏ bằng 6 và đi qua điểm $M(-2\sqrt{5}; 2)$.
- ⑥ Một tiêu điểm là $F_1(-2; 0)$ và độ dài trục lớn bằng 10.
- ⑦ Một tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ và đi qua điểm $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- ⑧ Đi qua hai điểm $M(1; 0), N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$.
- ⑨ Đi qua hai điểm $M(4; -\sqrt{3}), N(2\sqrt{2}; 3)$.

🔥 **Câu 3.** Lập phương trình chính tắc của (E) , biết:

- ① Độ dài trục lớn bằng 10, tâm sai bằng $\frac{3}{5}$.
- ② Một tiêu điểm là $F_1(-8; 0)$ và tâm sai bằng $\frac{4}{5}$.
- ③ Độ dài trục nhỏ bằng 6, phương trình các đường chuẩn là $x\sqrt{7} \pm 16 = 0$.
- ④ Một đỉnh là $A_1(-8; 0)$, tâm sai bằng $\frac{3}{4}$.
- ⑤ Đi qua điểm $M\left(2; -\frac{5}{3}\right)$ và có tâm sai bằng $\frac{2}{3}$.

TRẮC NGHIỆM

🔥 Câu 1. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) có tiêu điểm $F_1(-2;0)$ và qua $A_1(-3;0)$.

- A.** $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$
 B. $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$
 C. $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$
 D. $(E): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1.$

🔥 Câu 2. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) qua $A_2(3;0)$ và $B_1(0;-2)$.

- A.** $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$
 B. $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$
 C. $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1.$
 D. $(E): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1.$

🔥 Câu 3. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và độ dài trục bé bằng 4.

- A.** $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1.$
 B. $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1.$
 C. $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$
 D. $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$

🔥 Câu 4. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) có độ dài trục bé bằng 6 và tiêu cự bằng 8.

- A.** $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$
 B. $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1.$
 C. $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$
 D. $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$

🔥 Câu 5. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết hình chữ nhật cơ sở của elip (E) có một đỉnh có tọa độ là $(3;2)$.

A. $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1.$ **B.** $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$ **C.** $(E): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1.$ **D.** $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

🔥 Câu 6. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) có tiêu điểm $F_1(-2;0)$ và đi qua điểm $B_2(0;2)$.

A. $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1.$ **B.** $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1.$ **C.** $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1.$ **D.** $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$

🔥 Câu 7. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) đi qua $A(0;3)$ và nhận $F(4;0)$ làm tiêu điểm.

A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$ **B.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$ **C.** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$ **D.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1.$

🔥 Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E) . Biết (E) cắt trục hoành tại $A\left(\frac{1}{2};0\right)$, cắt trục tung tại điểm $B\left(0;\frac{1}{3}\right)$. Viết phương trình chính tắc của (E) .

A. $4x^2 + 9y^2 = 36.$ **B.** $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1.$ **C.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$ **D.** $4x^2 - 9y^2 = 36.$

🔥 Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E) . Viết phương trình chính tắc của (E) biết (E) có độ dài trục lớn bằng 13 và tiêu cự bằng 5.

A. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$

B. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1.$

C. $\frac{x^2}{\frac{169}{4}} + \frac{y^2}{36} = 1.$

D. $\frac{x^2}{\frac{169}{4}} - \frac{y^2}{36} = 1.$

🔥 **Câu 10.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E) . Viết phương trình chính tắc của (E) biết (E) có độ dài trục lớn bằng 6, độ dài trục bé bằng 4.

A. $9x^2 + 4y^2 = 36.$

B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$

C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$

D. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$

🔥 **Câu 11.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E) . Viết phương trình chính tắc của (E) biết (E) có độ dài trục bé bằng 8 và tiêu cự bằng 6.

A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$

C. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1.$

D. $16x^2 + 25y^2 = 400.$

🔥 **Câu 12.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E) . Hình chữ nhật cơ sở của (E) có độ dài hai cạnh là 8 và 6. Viết phương trình chính tắc của (E) .

A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$

B. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$

C. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$

D. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$

🔥 **Câu 13.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E) . Biết hình chữ nhật cơ sở của (E) nhận $A(3;5)$ làm đỉnh. Viết phương trình chính tắc của (E) .

A. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1.$

B. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1.$

C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

D. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$

🔥 **Câu 14.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E) . Biết hình chữ nhật cơ sở của (E) có diện tích bằng $16\sqrt{2}$ và chu vi bằng $4(\sqrt{2} + 1)$. Viết phương trình chính tắc của (E) .

A. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1.$

B. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{16} = 1.$

C. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1.$

D. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1.$

🔥 **Câu 15.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E) . Biết hình chữ nhật cơ sở của (E) có chiều dài bằng $4\sqrt{2}$ và (E) có tiêu cự bằng $2\sqrt{6}$. Viết phương trình chính tắc của (E) .

A. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{24} = 1.$

B. $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{8} = 1.$

C. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$

D. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1.$

🔥 **Câu 16.** Cho phương trình elip $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$. Tính khoảng cách giữa hai tiêu điểm F_1, F_2 của elip (E) .

A. $F_1F_2 = \sqrt{5}.$

B. $F_1F_2 = 2\sqrt{5}.$

C. $F_1F_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}.$

D. $F_1F_2 = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$

🔥 **Câu 17.** Cho elip (E) và điểm $M \in (E)$ thỏa $MF_1 = 2, MF_2 = 1$. Tìm độ dài trục lớn A_1A_2 của (E) .

A. $A_1A_2 = 3.$

B. $A_1A_2 = 4.$

C. $A_1A_2 = 5.$

D. $A_1A_2 = 6.$

🔥 **Câu 18.** Cho phương trình elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Tìm e là tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip (E) .

A. $e = 5$.

B. $e = 4$.

C. $e = \frac{3}{5}$.

D. $e = \frac{4}{5}$.

🔥 **Câu 19.** Cho phương trình elip $(E): x^2 + 4y^2 = 1$. Tìm phương trình đường thẳng chứa các cạnh của hình chữ nhật cơ sở của elip (E) .

A. $x = \pm 1, y = \pm 2$.

B. $x = \pm 1, y = \pm \frac{1}{2}$.

C. $x = \pm 1, y = \pm \frac{1}{4}$.

D. $x = \pm 1, y = \pm 4$.

🔥 **Câu 20.** Cho phương trình elip $(E): 4x^2 + 5y^2 = 20$. Tìm độ dài trục lớn A_1A_2 của elip (E) .

A. $A_1A_2 = 4$.

B. $A_1A_2 = 1$.

C. $A_1A_2 = \sqrt{5}$.

D. $A_1A_2 = 2\sqrt{5}$.

🔥 **Câu 21.** Cho phương trình elip $(E): x^2 + 4y^2 = 4$. Tìm độ dài trục bé B_1B_2 của elip (E) .

A. $B_1B_2 = 1$.

B. $B_1B_2 = 2$.

C. $B_1B_2 = 3$.

D. $B_1B_2 = 4$.

🔥 Câu 22. Cho phương trình elip $(E): 4x^2 + 16y^2 - 1 = 0$. Tính độ dài l là đường chéo hình chữ nhật cơ sở của elip (E) .

A. $l = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $l = \frac{1}{4}$.

C. $l = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

D. $l = \frac{1}{2}$.

🔥 Câu 23. Cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < a$). Gọi $2c$ là tiêu cự của (E) . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $c = a + b$.

B. $c^2 = a^2 + b^2$.

C. $b^2 = a^2 + c^2$.

D. $a^2 = b^2 + c^2$.

🔥 Câu 24. Cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Các tiêu điểm của (E) là

A. $F_1(-5;0)$ và $F_1(5;0)$.

B. $F_1(-4;0)$ và $F_1(4;0)$.

C. $F_1(-3;0)$ và $F_1(3;0)$.

D. $F_1(-8;0)$ và $F_1(8;0)$.

🔥 Câu 25. Cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Điểm nào sau đây là một đỉnh của (E) ?

A. $A_3(-5;0)$.

B. $A_1(25;9)$.

C. $A_2(5;3)$.

D. $A_4(3;0)$.

🔥 Câu 26. Cho elip $(E): \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$. Độ dài trục nhỏ của (E) là

A. 36.

B. 18.

C. 12.

D. 8.

❖ **Câu 27.** Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và đi qua điểm $M\left(3; \frac{1}{2}\right)$.

A. $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{7}{4}} = 1.$ **B.** $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{4}{7}} = 1.$ **C.** $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1.$ **D.** $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$

❖ **Câu 28.** Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) đi qua các điểm $M(2; 1)$ và $N\left(1; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

A. $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1.$ **B.** $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$ **C.** $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{3} = 1.$ **D.** $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1.$

❖ **Câu 29.** Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) đi qua các điểm $B_1(0; -3)$ và $M(-2; \sqrt{6})$.

A. $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1.$ **B.** $(E): \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1.$ **C.** $(E): \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{9} = 1.$ **D.** $(E): \frac{x^2}{2\sqrt{3}} + \frac{y^2}{3} = 1.$

❖ **Câu 30.** Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) đi qua các điểm $A_2(5; 0)$ và $M(3; -2)$.

A. $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{5}{2}} = 1.$ **B.** $(E): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1.$ **C.** $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1.$ **D.** $(E): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{\frac{5}{2}} = 1.$
