SỞ GD&ĐT HÀ NỘI
CỤM TRƯỜNG THPT
THANH XUÂN-CẦU GIẤY

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI OLYMPIC MÔN TOÁN LỚP 11
NĂM HỌC 2017-2018
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1 *(4 điểm).* Giải các phương trình sau:

1. $2\cos 2x - 8\cos x + 5 = 0$
2. $\dfrac{\sin 2x - \sin x + 2\cos x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$.

Câu 2 *(4 điểm).* Một đoàn tàu có 6 toa ở sân ga, trên sân ga có 6 hành khách chuẩn bị lên tàu, mỗi người độc lập với nhau và chọn toa tàu một cách ngẫu nhiên.

1. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 hành khách lên các toa tàu đó sao cho 6 người cùng lên một toa hoặc mỗi người lên một toa khác nhau ?
2. Tính xác suất sao cho một toa có 3 hành khách, một toa có 2 hành khách, một toa có 1 hành khách, còn ba toa còn lại không có ai lên.

Câu 3 *(2 điểm).* Xét khai triển $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^n$ $(x \neq 0; n \geq 3, n \in N^*)$. Biết tích của số hạng thứ tư tính từ phải sang và số hạng thứ tư kể từ trái sang bằng 14400. Tìm *n*.

Câu 4 *(4 điểm).*

1. Biết rằng các số $x;\ 2y - x;\ x + 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Đồng thời các số $1;\ y - 1;\ x + 2y - 1$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Hãy tìm x, y.
2. Cho dãy số (u_n) biết: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{n(u_n + 2) + n^2 + 1}{n+1} \quad (n \in \mathrm{N}^*) \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

Câu 5 *(6 điểm).* Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G', I lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C'$ và ABB'.

1. Chứng minh rằng:
   a. $(A'BG') // (AGC')$
   b. $IG' // (BCC'B')$
2. Gọi *E, F* lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Một đường thẳng *d* đi qua *G* cắt AB' tại *H* và *EF* tại *K*.
   a. Xác định các điểm *H, K*.
   b. Giả sử tất cả các cạnh của hình lăng trụ bằng *a* và các mặt bên là các hình vuông. Tính độ dài đoạn *GH* theo *a*.

------- *Hết* -------

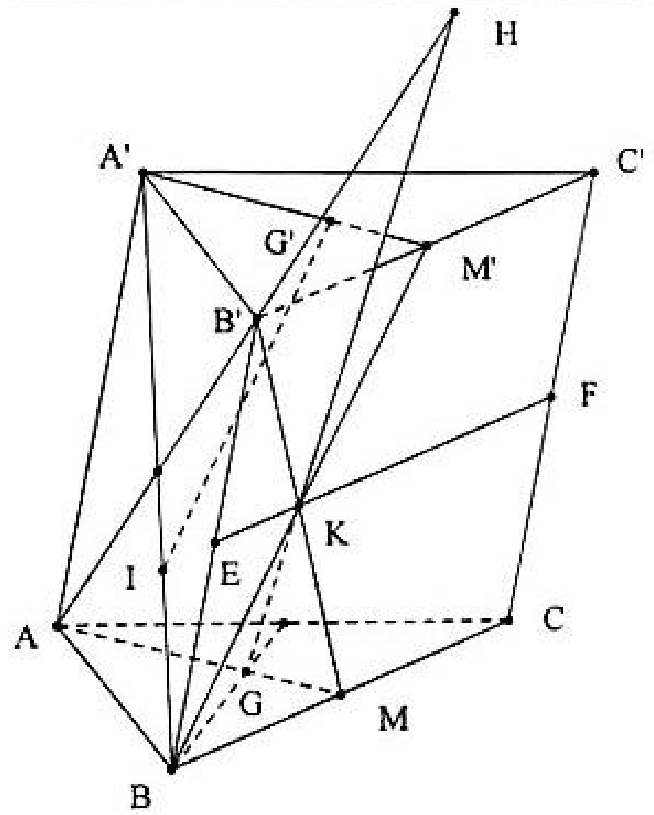
Họ và tên thí sinh: ...., *SBD:* ....

SỞ GD & ĐT HÀ NỘI
CỤM TRƯỜNG THPT
THANH XUÂN – CẦU GIẤY

HƯỚNG DẪN CHẤM THI OLYMPIC MÔN TOÁN LỚP 11
NĂM HỌC 2017 - 2018

Câu	Nội dung	Điểm
1/1	Giải PT $2\cos 2x - 8\cos x + 5 = 0$	**2,0**
	• $PT \Leftrightarrow 4cos^2x - 8cosx + 3 = 0$	0,5
	• $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} cosx = \frac{1}{2}\ (TM) \\ cosx = \frac{3}{2}\ (KTM) \end{array}\right.$	0,75
	• $\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in Z)$. Vậy $S = \{\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \| k \in Z\}$	0,75
1/2	Giải PT $\dfrac{\sin 2x - \sin x + 2\cos x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$	**2,0**
	• ĐK $\begin{cases} cosx \neq 0 \\ \tan x \neq -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in Z)$	0,5
	• $PT \Leftrightarrow (2cosx - 1)(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1\ (\text{KTM}) \\ cosx = \frac{1}{2} \end{array}\right.$	0,5
	• $\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in Z)$	0,5
	• Kết hợp với ĐK ta có $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in Z\right\}$	0,5
2/1	Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 hành khách lên các toa tàu đó sao cho 6 người cùng lên một toa hoặc mỗi người lên một toa ?	**2,0**
	• TH1. Xếp 6 người cùng lên một toa có 6 cách. • TH2. Xếp 6 người mỗi người lên một toa có 6! Cách. • Vậy có 6 + 6! = 726 cách.	0,75 0,75 0,5
2/2	Tính xác suất sao cho một toa có 3 hành khách, một toa có 2 hành khách, một toa có 1 hành khách, còn ba toa còn lại không có ai lên.	**2,0**
	• Ta có $\|\Omega\| = 6^6$	0,5
	• Chọn 3 hành khách và xếp họ lên 1 toa có $C_6^3.C_6^1$ cách .	0,25
	• Chọn 2 hành khách tiếp theo và xếp họ lên 1 toa có $C_3^2.C_5^1$ cách.	0,25
	• Khi đó 1 hành khách còn lại lên một toa có C_4^1 cách.	0,25
	• Số kết quả thuận lợi cho biến cố là $(C_6^3.C_6^1).(C_3^2.C_5^1).C_4^1 = 7200$.	0,5

	• Xác suất cần tìm là $\frac{7200}{6^6}=\frac{25}{162}$.	0,25
3	**Tìm n.**	**2,0**
	• Ta có $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{n-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{n-2k}\ (x\neq 0)$, mọi số hạng trong khai triển có dạng $T_{k+1}=C_n^k x^{n-2k}$.	0,5
	• Tích số hạng cần tìm là $T_4.T_{n-2}=C_n^3x^{n-6}.C_n^{n-3}.x^{6-n}=(C_n^3)^2$.	0,5
	• Theo giả thiết ta có: $(C_n^3)^2=14400\Leftrightarrow C_n^3=120\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)=720\quad(1)$	0,5
	• Giải PT (1) tìm được n = 10 (*TM*). Vậy n = 10.	0,5
4/1	Tìm x, y.	**2,0**
	• Theo gt ta có hệ PT $\begin{cases}2(2y-x)=x+(x+2y)\\(y-1)^2=x+2y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=0 & (1)\\y^2-4y-x+2=0 & (2)\end{cases}$	1,0
	• Thế (1) vào (2) ta có: $2y^2-9y+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=4\\y=\frac{1}{2}\end{array}\right.$	0,5
	• $\left[\begin{array}{l}y=4\Rightarrow x=2\\y=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{4}\end{array}\right.$. Thử lại và kết luận $x=2,y=4$ hoặc $x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{2}$	0,5
4/2	Tìm $\lim u_n$.	**2,0**
	• Từ hệ thức truy hồi ta có : $(n+1).u_{n+1}=n.u_n+(n+1)^2\quad(3)$	0,5
	• Xét dãy số (v_n) với $v_n=n.u_n\quad(4)\quad\Rightarrow v_1=1$ Từ (3), (4) $\Rightarrow v_{n+1}=v_n+(n+1)^2\Leftrightarrow v_{n+1}-v_n=(n+1)^2$	0,5
	• $v_n=(v_n-v_{n-1})+(v_{n-1}-v_{n-2})+(v_{n-2}-v_{n-3})+...+(v_3-v_2)+(v_2-v_1)+v_1$ $=n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+...+3^2+2^2+1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	0,5
	• $\Rightarrow u_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n}$, $\lim u_n=\lim\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n}=+\infty$	0,5
5/1/a	CMR: $(A'BG')//(AGC')$	**2,0**
	• Gọi M,M' là trung điểm của BC và $B'C'$ $\Rightarrow$ Mặt phẳng $(A'BG')$ là mf $(A'BM')$, mf$((AGC')$ là mf $((AMC')$.	0,5
	• CM: $AM//A'M'$, $BM'//C'M$	1,0
	• CM: $(A'BG')//(AGC')$	0,5
5/1/b	CMR: $IG'//(BCC'B')$	**1,0**

	• CM : $BI=\frac{1}{3}BA'$ • $\frac{A'I}{A'B}=\frac{A'G'}{A'M'}$, từ đó suy ra $IG'//BM'$ • $\left.\begin{matrix}IG'//BM'\\ BM'\subset(BCC'B')\\ IG'\not\subset(BCC'B')\end{matrix}\right\}\Rightarrow IG'//(BCC'B')$	0,25 0,5 0,25
5	 	
5/2/a	Xác định các điểm *H, K*	**1,0**
	• Ta có $\left.\begin{matrix}G\in AM\Rightarrow G\in(AB'M)\\ H\in AB'\Rightarrow H\in(AB'M)\end{matrix}\right\}\Rightarrow GH\subset(AB'M)$, hay $d\subset(AB'M)$ • K là giao điểm của d với $EF\Rightarrow K\in(AB'M)\Rightarrow K$ là giao điểm EF với $mf(AB'M)$ • Trong $mf(BCC'B')$ có $EF\cap B'M=\{K\}\Rightarrow d$ là đường thẳng GK • Trong $mf(AB'M)$ kéo dài AB' và GK cắt nhau tại H.	0,25 0,25 0,25 0,25
5/2/b	Tính độ dài đoạn *GH* theo *a*	**2,0**
	• CM: $\frac{HA}{HB'}=2$ • CM: $GH=4GK$	0,5 0,25

	• Tính $AB' = a\sqrt{2}, AM = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}, B'M = a\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ CM: $AB'^2 = AM^2 + B'M^2 \Rightarrow \Delta AB'M$ vuông tại M • Tính $GM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}, KM = \dfrac{a\sqrt{5}}{4}$ • Xét ΔGKM vuông tại M, tính $GK = \dfrac{a\sqrt{19}}{4\sqrt{3}} \Rightarrow GH = \dfrac{a\sqrt{57}}{3}$	0,5 0,25 0,5

<u>Ghi chú:</u>

- HD chấm chỉ giải tóm tắt, học sinh phải làm chi tiết và suy luận đầy đủ, chặt chẽ mới cho điểm tối đa.
- Cách giải khác mà đúng vẫn cho điểm (GK tự chia điểm thành phần).
- Không làm tròn điểm bài thi.