

Câu 1. (4,0 điểm)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 6x^2 + 13x - y + 10 = 0 \\ \sqrt{1-x^2} + 1 = \sqrt{x-2y+5} + \sqrt{y-1} \end{cases}$$

Câu 2. (4,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{5 - u_n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và tìm giới hạn đó.

Câu 3. (4,0 điểm)

Cho đa thức $f(x) = x^{2021} + a_1x^{2020} + \dots + a_{2020}x + a_{2021}$ với hệ số nguyên thỏa mãn phương trình $(f(x))^4 + (f(x))^2 - 2 = 0$ có 2021 nghiệm nguyên (các nghiệm đôi một phân biệt). Chứng minh rằng không thể phân tích $f(x)$ thành tích $f(x) = p(x).q(x)$ với $p(x), q(x)$ là các đa thức có hệ số nguyên.

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho tam giác nhọn không cân ABC có trục tâm H và nội tiếp đường tròn (O) . Gọi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ B, C của tam giác ABC . M là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF với đường tròn (O) (M không trùng A). Đường thẳng BH cắt đường tròn (O) tại D (D không trùng B). I là trung điểm BC .

a) Chứng minh rằng ba đường thẳng AM, EF, BC đồng quy tại một điểm.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác HEI cắt BC tại N (N không trùng I). Đường thẳng EN cắt đường thẳng qua H và song song với BC tại K . Chứng minh rằng bốn điểm M, H, K, D cùng thuộc một đường tròn.

Câu 5. (4,0 điểm)

a) Cho n là một số nguyên dương, xét tập hợp $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Gọi p, q lần lượt là số tập con khác rỗng của S và có số phần tử là chẵn, lẻ. Chứng minh rằng $p - q = -1$.

b) Cho m, n là các số nguyên dương và một bảng hình chữ nhật kẻ ô vuông có m hàng và n cột (nghĩa là bảng gồm $m \times n$ ô vuông). Xét các tập hợp T khác rỗng gồm một số các ô vuông thuộc bảng trên sao cho mỗi hàng và mỗi cột của bảng đều có chứa ít nhất một ô vuông của T . Gọi $p_{m,n}$ là số các tập hợp T có số phần tử là số chẵn và $q_{m,n}$ là số các tập hợp T có số phần tử là số lẻ. Chứng minh rằng $p_{m,n} - q_{m,n} = (-1)^{m+n+1}$.