

BÀI GIẢNG HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nhận biết được hai đường thẳng song song với nhau
- + Trình bày được tính chất về mối quan hệ giữa giao tuyến của hai mặt phẳng và quan hệ song song

❖ Kỹ năng

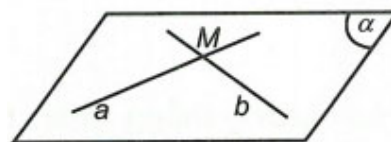
- + Chứng minh được hai đường thẳng song song với nhau
- + Biết cách xác định giao tuyến của hai mặt phẳng dựa vào quan hệ song song

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

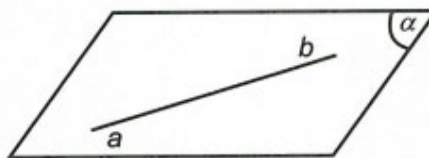
Hai đường thẳng a và b cắt nhau khi chúng có một điểm chung.

Lưu ý: Hai đường thẳng cắt nhau sẽ cùng nằm trên một mặt phẳng



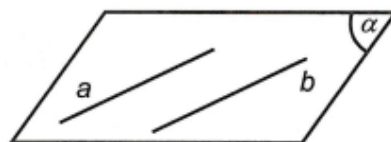
$$a \cap b = M$$

Hai đường thẳng a và b trùng nhau khi chúng có vô số điểm chung



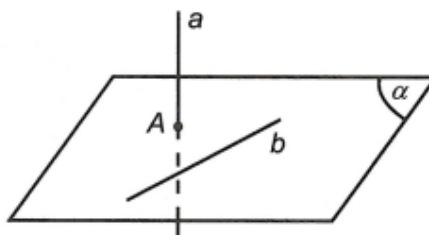
$$a \equiv b$$

Hai đường thẳng a và b song song với nhau khi chúng cùng thuộc một mặt phẳng và không có điểm chung.



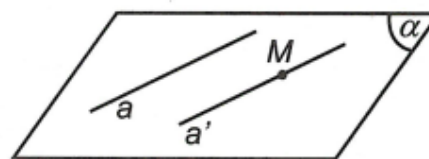
$$a // b \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = \emptyset \end{cases}$$

Hai đường thẳng a và b chéo nhau khi chúng không cùng một mặt phẳng



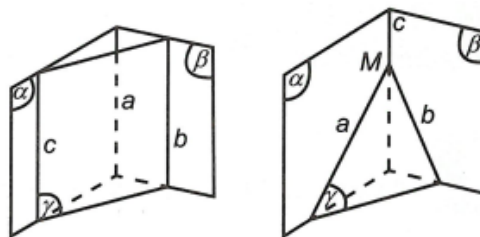
2. Tính chất

a) Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.



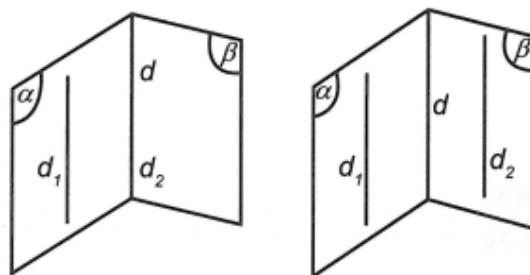
Cho $M \notin a \Rightarrow \exists a'$ đi qua M và $a' // a$

b) Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.



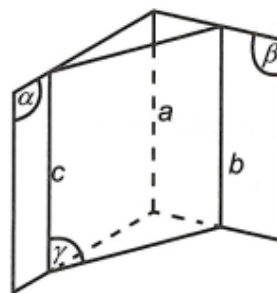
$$\begin{cases} (\alpha) \cap (\beta) = a \\ (\alpha) \cap (\gamma) = c \\ (\beta) \cap (\gamma) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \parallel b \parallel c \\ a \cap b \cap c = M \end{cases}$$

c) Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



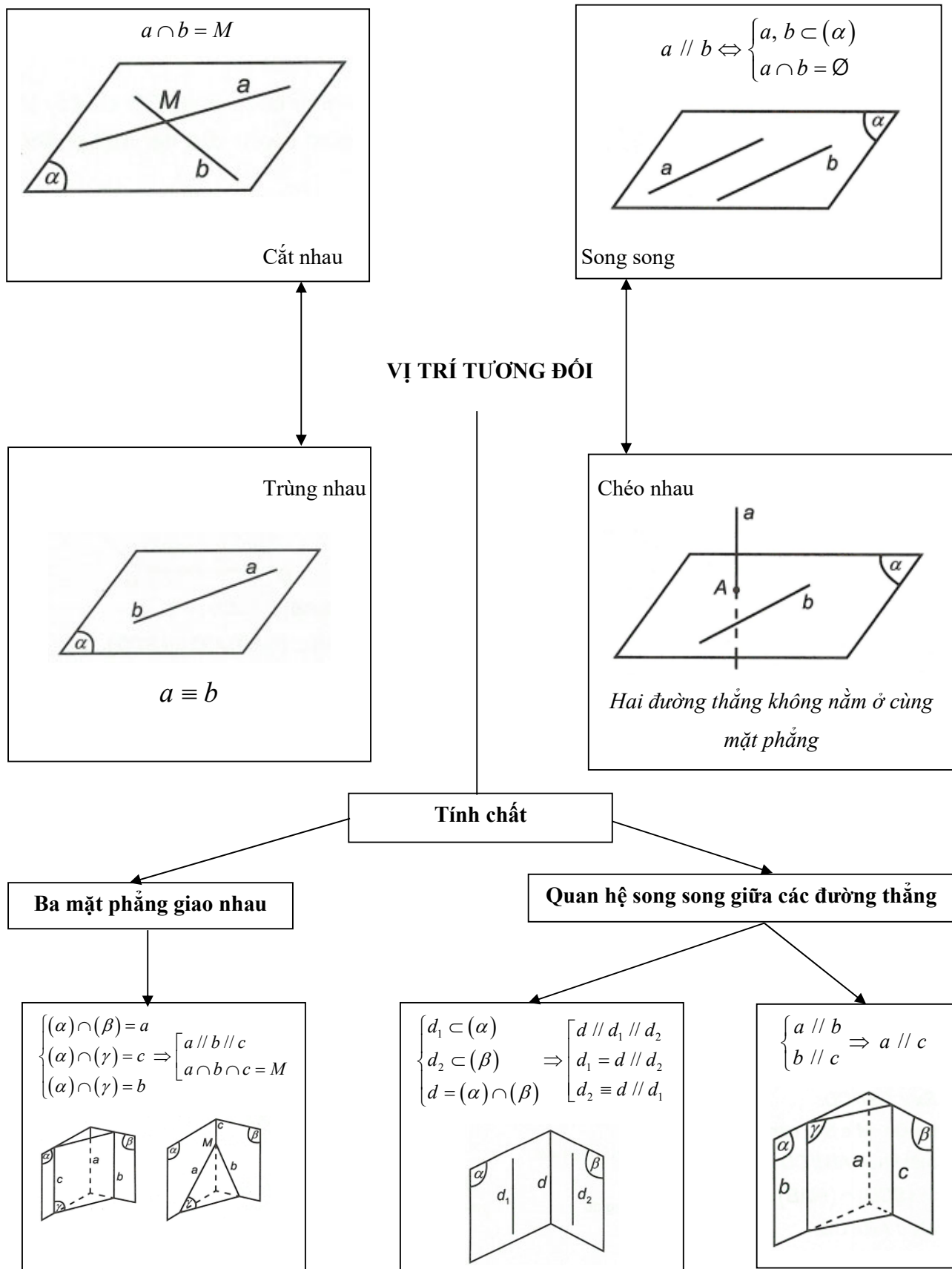
$$\begin{cases} d_1 \subset (\alpha) \\ d_2 \subset (\beta) \\ d = (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \parallel d_1 \parallel d_2 \\ d_1 = d \parallel d_2 \\ d_2 \equiv d \parallel d_1 \end{cases}$$

d) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.



$$\begin{cases} a \parallel b \\ b \parallel c \end{cases} \Rightarrow a \parallel c$$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng sử dụng quan hệ song song

Phương pháp giải

Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) và (β)

- Xác định giao điểm chung của hai mặt phẳng.

$$(\alpha) \cap (\beta) = S$$

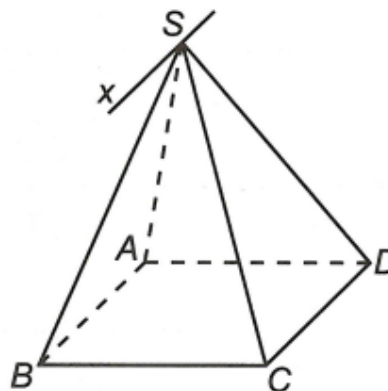
- Tìm hai đường thẳng song song với nhau thuộc hai đường thẳng đó

$$\begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \\ a \parallel b \end{cases}$$

Giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng đi qua S và song song với a (hoặc b).

Ví dụ: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

Hướng dẫn giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \cap (SCD) = S \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \end{cases}$$

Suy ra $(SAB) \cap (SCD) = Sx$ với $Sx \parallel AB \parallel CD$

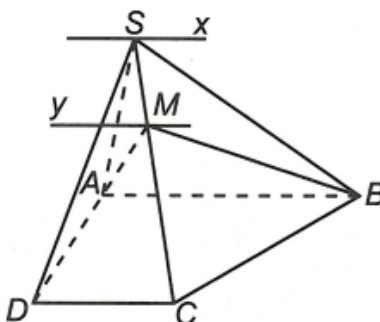
Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang ($AB \parallel CD$), đáy lớn AB. Cho M là điểm bất kì thuộc cạnh SC. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng:

a) $(SAB) \cap (SCD)$

b) $(SCD) \cap (MAB)$

Hướng dẫn giải



a) Ta có $(SAB) \cap (SCD) = S$, mà $AB \parallel CD$

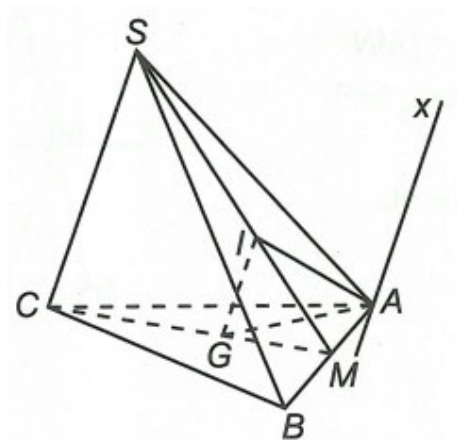
Suy ra $(SAB) \cap (SCD) = Sx$, trong đó $Sx \parallel AB \parallel CD$

b) Do $M \in SC$ nên $(SCD) \cap (MAB) = M$, mặt khác $AB \parallel CD$

$$\Rightarrow (SCD) \cap (MAB) = My, \text{ trong đó } My \parallel AB \parallel CD$$

Ví dụ 2. Cho tứ diện SABC. Gọi G, I lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và SAB. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (AIG) và mặt phẳng (SAC)

Hướng dẫn giải



Gọi M là trung điểm của AB .

Do I là trọng tâm của tam giác SAB suy ra $\frac{MI}{MS} = \frac{1}{3}$.

Tương tự ta có $\frac{MG}{MC} = \frac{1}{3}$

Suy ra $\frac{MI}{MS} = \frac{MG}{MB} \Rightarrow GI \parallel SC$

Từ đó ta có $(SAC) \cap (AIG) = Ax$, trong đó $Ax \parallel SC \parallel GI$

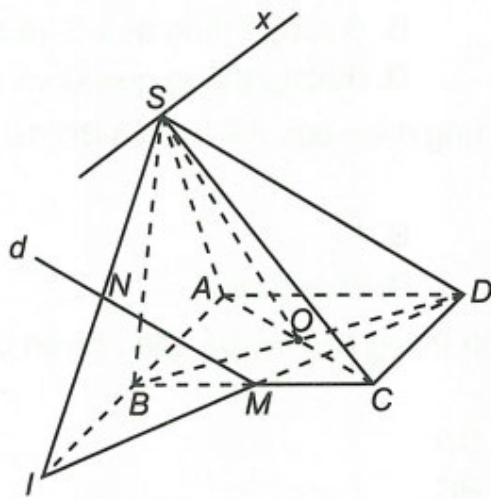
Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng (SAB) và (SCD); (SAC) và (SBD)

b) Gọi M là trung điểm BC, đường thẳng d qua M và song song SD.

Tìm giao điểm của d và mặt phẳng (SAB)

Hướng dẫn giải



a) Ta có
$$\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB); CD \subset (SCD) \\ AB // CD \end{cases}$$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx$, trong đó $Sx // AB // CD$

Trong (ABCD) gọi $\{O\} = AC \cap BD$, suy ra $O \in (SAC) \cap (SBD)$ (1)

Lại có $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SO = (SAC) \cap (SBD)$

b) Vì d qua M và song song SD nên $d \subset (SDM)$

Lại có $S \in (SDM) \cap (SAB)$

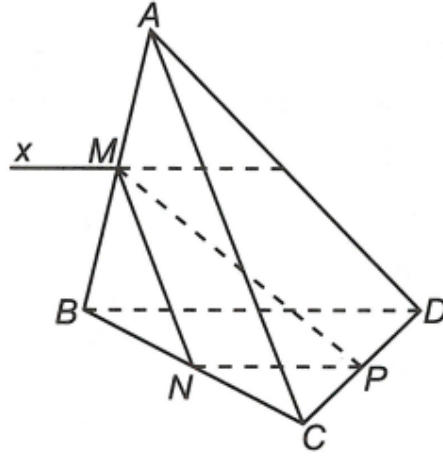
Trong (ABCD) có $\{I\} = AB \cap DM$ suy ra $I \in (SDM) \cap (SAB)$

Khi đó $(SDM) \cap (SAB) = SI$

Trong (SDM) có $\{N\} = SI \cap d$ suy ra $N = d \cap (SAB)$

Ví dụ 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (MNP)

Hướng dẫn giải



Ta có $M \in AB$ nên $M \in (ABD) \cap (MNP)$

Xét $\triangle BCD$, có NP là đường trung bình $\Rightarrow NP \parallel BD$

Từ đó suy ra $(ABD) \cap (MNP) = Mx$, trong đó $Mx \parallel NP \parallel BD$

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC, G là trọng tâm tam giác SAB. Giao tuyến của (SAB) và (IJG) là

- A. SC
B. đường thẳng qua S và song song với AB
C. đường thẳng qua G và song song với CD
D. đường thẳng qua G và cắt BC

Câu 2: Cho tứ diện ABCD, gọi I, J và K lần lượt là trung điểm của AB, BC và BD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là

- A. KD
B. KI
C. đường thẳng đi qua K và song song với AB
D. không có

Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là ABCD hình thang ($AB \parallel CD$). Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCO) là

- A. đường thẳng qua S và song song với AB và CD
B. đường thẳng qua S và song song với AD và BC
C. đường thẳng qua S và giao điểm của AD và CD
D. đường thẳng qua S và giao điểm của AC và BD

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng song song với

- A. AD
B. BJ
C. BI
D. IJ

Câu 5: Cho tứ diện ABCD, gọi $M \in AB$ (M không trùng với A, B). N và K lần lượt là trung điểm BC, CD. Giao tuyến của (ABD) và (MNK) là

- A. MN
B. MD
C. MC
D. Mx song song với BD và NK

Câu 6: Cho tứ diện ABCD, gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện ABCD là

- A. tam giác MNE
B. tứ giác MNEF với F là điểm bất kì trên cạnh BD

C. hình bình hành MNEF với F là điểm bất kì trên cạnh BD mà EF song song với BC

D. hình thang MNEF với F là điểm trên cạnh BD mà EF song song với BC.

Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp giải

Một số cách chứng minh

a) Chứng minh chúng cùng thuộc một mặt phẳng và dùng phương pháp chứng minh hai đường thẳng song song trong hình học phẳng.

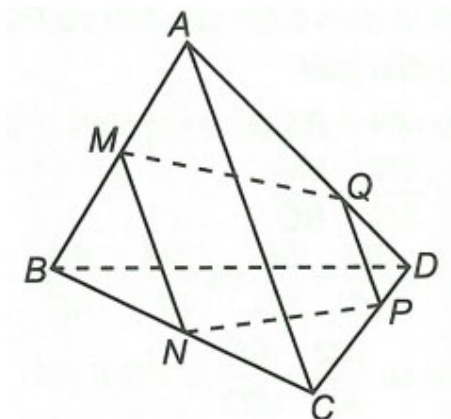
b) Chứng minh chúng cùng song song với đường thẳng thứ ba.

c) Dùng tính chất: Hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng ấy.

d) Dùng định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng.

Ví dụ: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N là trung điểm của AB, BC và P là điểm nằm trên cạnh CD. Gọi Q là giao điểm của DA với mặt phẳng (MNP). Chứng minh $PQ \parallel MN$ và $PQ \parallel AC$

Hướng dẫn giải



Ta có $CD \cap (MNP) = \{P\}$ và $MN \parallel AC$

Suy ra $(MNP) \cap (ACD) = Px$

Trong đó $Px \parallel MN \parallel AC$

Mặt khác $DA \cap (MNP) = \{Q\}$ nên $Q \in Px$

Vậy $PQ \parallel MN \parallel AC$

Ví dụ mẫu

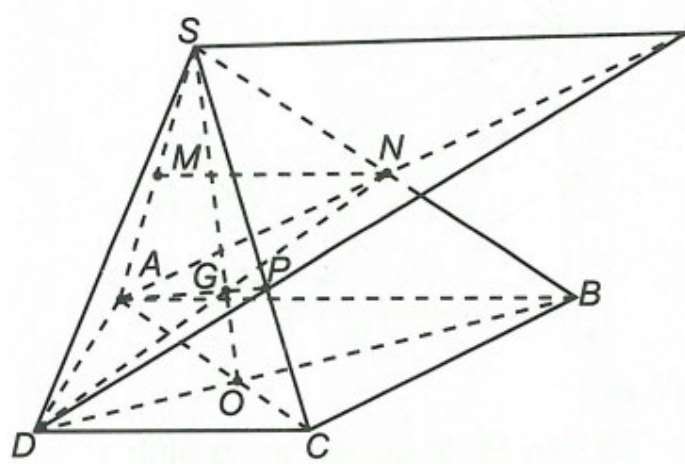
Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang với cạnh đáy AB và CD ($AB > CD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB.

a) Chứng minh $MN \parallel CD$

b) Tìm giao điểm P của SC và mặt phẳng (AND). Kéo dài AN và DP cắt nhau tại I.

Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$

Hướng dẫn giải



a) Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAB suy ra $MN \parallel AB$. Mà $AB \parallel CD$ nên $MN \parallel CD$

b) Gọi $\{O\} = AC \cap BD$, $\{G\} = SO \cap DN$ và $\{P\} = AG \cap SC$

suy ra $\{P\} = SC \cap (ADN)$.

Ta có $AB \parallel CD$ nên $(SAB) \cap (SCD) = Sx$ sao cho $Sx \parallel AB \parallel CD$

Theo đầu bài $\{I\} = AN \cap DP$ nên $I \in (SAB)$ và $I \in (SCD) \Rightarrow I \in Sx$

Từ đó ta có $SI \parallel AB \parallel CD$

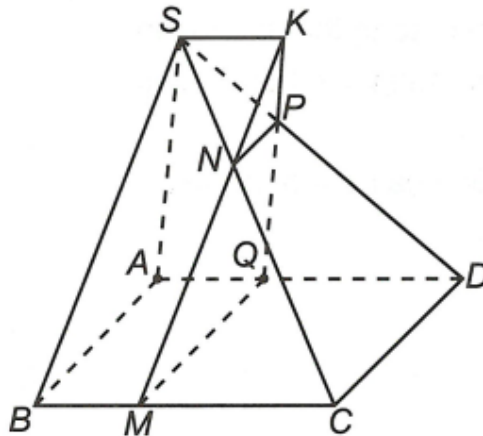
Chú ý: Ta thấy $I = AN \cap DP$, nên I là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Để chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$ ta sử dụng phương pháp chứng minh giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song và giao tuyến đó sẽ song song với hai đường thẳng đó.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt trên BC, SC, SD, AD sao cho $MN \parallel BS$, $NP \parallel CD$, $MQ \parallel CD$

a) Chứng minh $PQ \parallel SA$

b) Gọi K là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh $SK \parallel SD \parallel BC$

Hướng dẫn giải



a) Ta có $MN \parallel BS$ áp dụng định lý Ta-lét ta được $\frac{SN}{SC} = \frac{BM}{BC}$

Tương tự $\frac{SN}{SC} = \frac{SP}{SD}$ và $\frac{BM}{BC} = \frac{AQ}{AD}$

Từ đó ta có $\frac{AQ}{AD} = \frac{SP}{SD} \Rightarrow PQ \parallel SA$

b) Do $AD \parallel BC$ nên $(SAD) \cap (SBC) = Sx$ trong đó $Sx \parallel AD \parallel BC$

Mặt khác $\{K\} = MN \cap QP$ nên K là điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) suy ra $K \in Sx$.

Vậy $Sx \parallel AD \parallel BC$

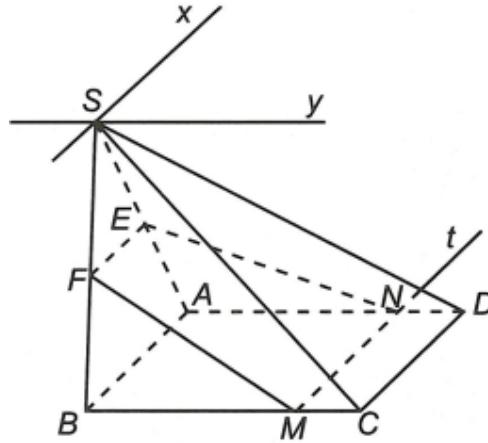
Chú ý: Do $MN \parallel BS$, $NP \parallel CD$, $MQ \parallel CD$ ta có thể suy ra các tỉ số bằng nhau từ đó có thể suy ra được $PQ \parallel SA$ theo định lý Ta-lét đảo.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật.

$SA = SB = a$, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi E, G lần lượt là trung điểm của SA và SB. M là điểm tùy ý trên cạnh BC (không trùng với B, C).

- Xác định giao tuyến của các mặt phẳng (SAB) và (SCD); (SAD) và (SBC)
- Xác định giao tuyến của các mặt phẳng (MEF) và (ABCD)

Hướng dẫn giải



a) Ta có

$$\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD, AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx, \text{ trong đó } Sx \parallel AB \parallel CD$$

Tương tự

$$\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \parallel BC, AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sy, \text{ trong đó } Sy \parallel AD \parallel BC.$$

b) Do E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB nên EF là đường trung bình của ΔSAB

Do đó $EF \parallel AB$ và $EF = \frac{1}{2}AB$

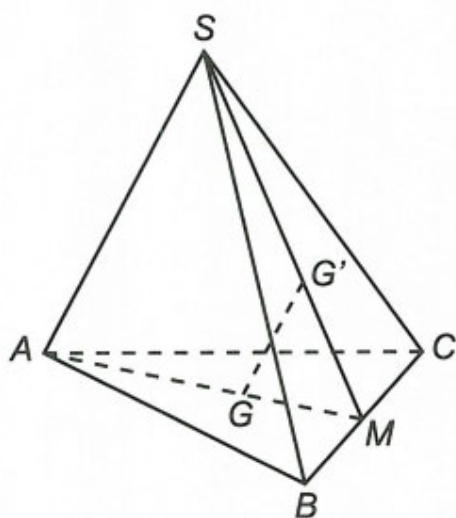
Ta có $\begin{cases} M \in (MEF) \cap (ABCD) \\ EF \parallel AB \\ EF \subset (MEF), AB \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (MEF) \cap (ABCD) = Mt$ trong đó $Mt \parallel AB \parallel CD$ hay $(MEF) \cap (ABCD) = MN$

(với $AD \cap Mt = \{N\}$ và $MN \parallel AB \parallel CD$).

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác SBC . Chứng minh GG' song song với SA .

Hướng dẫn giải



Gọi M là trung điểm của BC nên $\frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}$; $\frac{MG'}{MS} = \frac{1}{3}$ (tính chất của trọng tâm).

Xét ΔSAM , có $\frac{MG}{MA} = \frac{MG'}{MS}$ theo định lí Ta-lét đảo suy ra $GG' \parallel SA$

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Giao tuyến của mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SBC) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây

- A. AD B. BD C. AC D. SC

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt thì chéo nhau
B. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau
C. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung
D. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$, gọi G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. GE và CD chéo nhau

B. $GE \parallel CD$

C. GE cắt AD

D. GE cắt CD

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn là CD . Gọi M là trung điểm của SA , N là giao điểm của cạnh SB và mặt phẳng (MCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. MN và SD cắt nhau

B. $MN \parallel CD$

C. MN và SC cắt nhau

D. MN và CD chéo nhau

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SIJ) là một đường thẳng song song với

A. đường thẳng AD

B. đường thẳng AB

C. đường thẳng AC

D. đường thẳng BD

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$. Có bao nhiêu cặp đường thẳng chéo nhau?

A. 3

B. 4

C. 5

D. 2

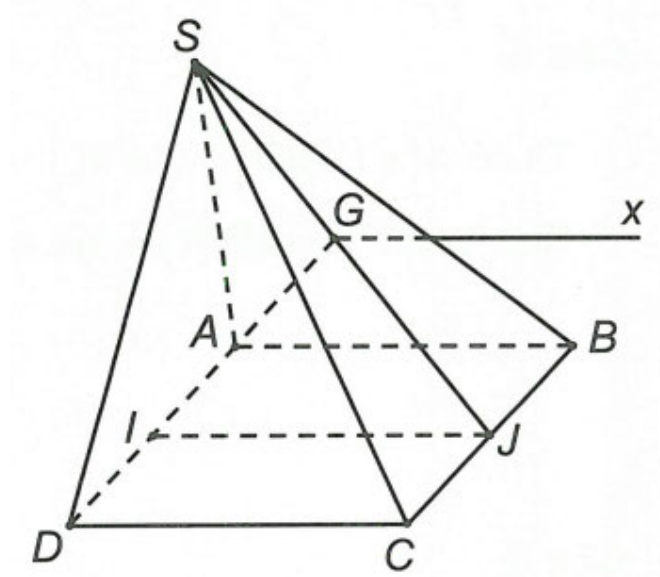
ĐÁP ÁN

Dạng 1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng sử dụng quan hệ song song

1-C	2-B	3-A	4-D	5-D	6-D				
-----	-----	-----	-----	-----	-----	--	--	--	--

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

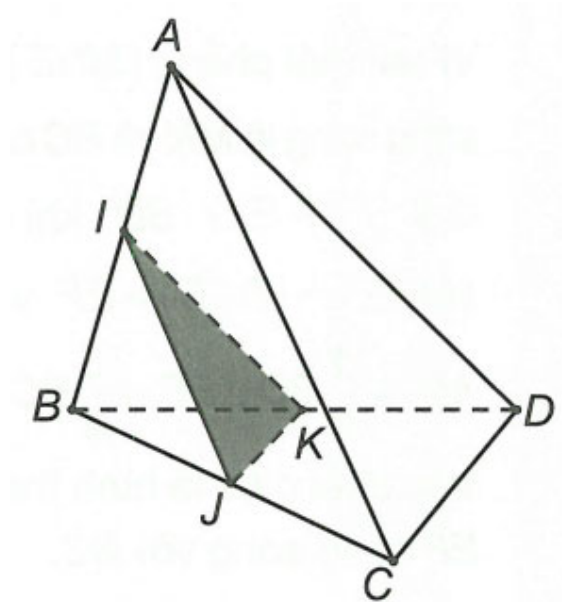
Câu 1:



Ta có $\begin{cases} G \in (GAB) \cap (GIJ) \\ AB \parallel IJ \end{cases} \Rightarrow (GAB) \cap (GIJ) = Gx \text{ sao cho } Gx \parallel AB \parallel IJ.$

Mà $AB \parallel CD \Rightarrow Gx \parallel AB \parallel IJ \parallel CD$

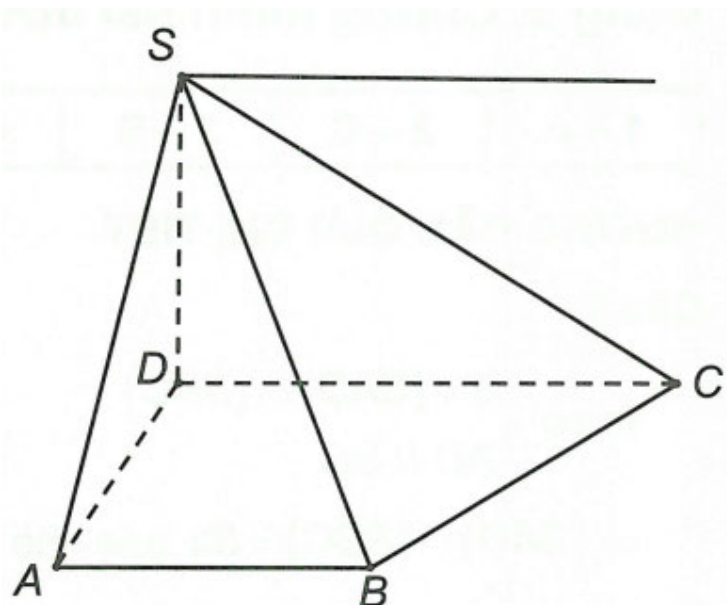
Câu 2:



Ta có $I \in AB \subset (ABD)$ nên I là điểm chung của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK)

Tương tự có K là điểm chung của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK). Vậy giao tuyến là KI

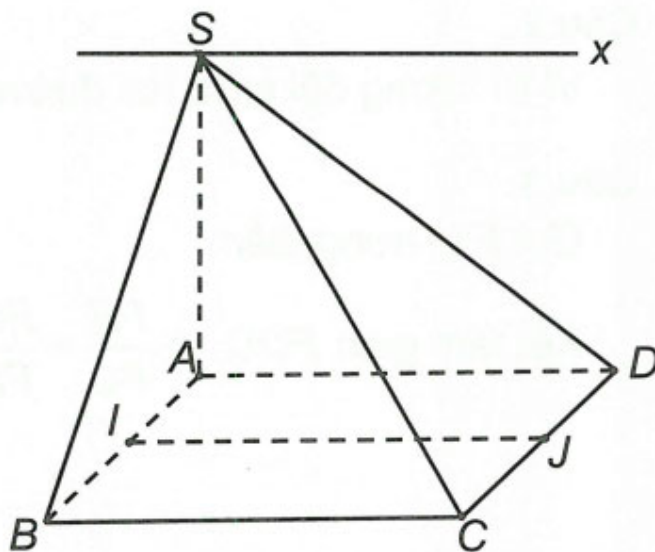
Câu 3:



Ta có $\begin{cases} S \in (SAB), S \in (SCD) \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow$ giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S

và song song với AB; CD

Câu 4:

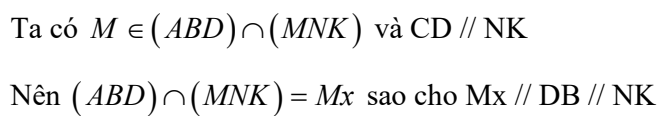


Ta có: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow$ giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S

và song song với AB. Mà I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $IJ \parallel AB$.

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng qua S và song song với IJ

Câu 5:



Nên $(ABD) \cap (MNK) = Mx$ sao cho $Mx \parallel DB \parallel NK$

Vì hai mặt phẳng (MNE) và (BCD) lần lượt chứa hai đường thẳng song song là MN và BC nên $(MNE) \cap (BCD) = Ex$ sao cho $Ex \parallel BC$.

$$(MNE) \cap (BCD) = EF \text{ v\`a } (MNE) \cap (ABD) = FM \text{ v\`a } MN = \frac{1}{2}BC; EF = \frac{3}{4}BC$$

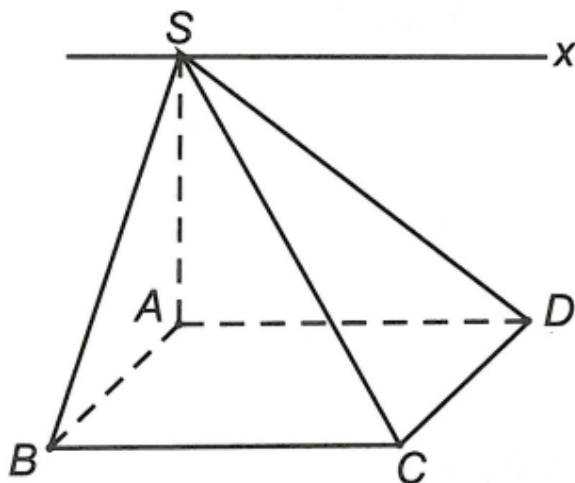
Vậy thiết diện là hình thang MNEF với F là điểm trên cạnh BD mà EF song song với BC.

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng song song

1-A	2-C	3-B	4-B	5-A	6-C	7-A			
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	--	--	--

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1:



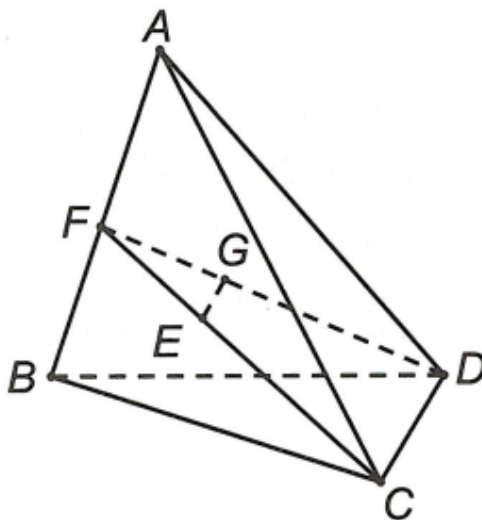
$$\text{Ta có } \begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

$$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx \text{ sao cho } Sx \parallel AD \parallel BC$$

Câu 2:

Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung

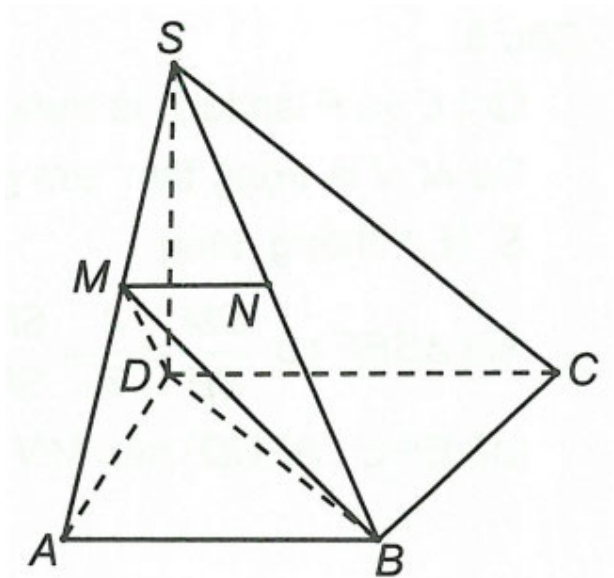
Câu 3:



Gọi F là trung điểm

$$\text{Xét tam giác FDC vì } \frac{FE}{FC} = \frac{FG}{FD} = \frac{1}{3} \text{ nên } EG \parallel CD$$

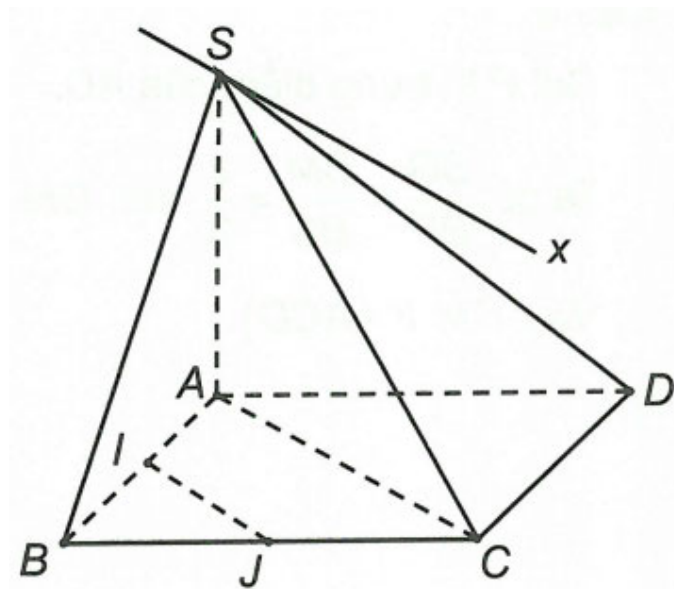
Câu 4:



Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} MN = (MCD) \cap (SAB) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (MCD) \\ AB \parallel CD \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel CD$$

Câu 5:



Xét hai mặt phẳng (SAC) và (SIJ) ta có S là điểm chung IJ // AC (đường trung bình trong tam giác).
Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SIJ) là một đường thẳng qua S song song với AC

Câu 6:

Các cặp đường thẳng chéo nhau trong tứ diện ABCD là: AB và CD; AD và BC; AC và BD