

SBÀI 8.

MỘT SỐ ĐIỂM ĐẶC BIỆT

A. LÝ THUYẾT.

I. Tìm điểm cố định của họ đường cong

① **Bài toán:** Xét họ đường cong (C_m) có phương trình $y = f(x, m)$, trong đó f là hàm đa thức theo biến x với m là tham số sao cho bậc của m không quá 2. Hãy tìm những điểm cố định thuộc họ đường cong khi m thay đổi?

② Phương pháp.

○ **Bước 1:** Đưa phương trình $y = f(x, m)$ về dạng phương trình theo ẩn m có dạng sau:

$$Am + B = 0 \text{ hoặc } Am^2 + Bm + C = 0.$$

○ **Bước 2:** Cho các hệ số bằng 0, ta thu được hệ phương trình và giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

○ **Bước 3:** Kết luận

✓ Nếu hệ vô nghiệm thì họ đường cong (C_m) không có điểm cố định.

✓ Nếu hệ có nghiệm thì nghiệm đó là điểm cố định của (C_m) .

③ Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.(THPT Chuyên Thái Bình 2020) Họ parabol $(P_m): y = mx^2 - 2(m-3)x + m - 2$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với đường thẳng d cố định khi m thay đổi. Đường thẳng d đó đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(0; -2)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(1; 8)$.

D. $(1; -8)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2.(THPT Chuyên Lê Hồng Phong 2018)

Biết đồ thị hàm số $y = (m-4)x^3 - 6(m-4)x^2 - 12mx + 7m - 18$ (với m là tham số thực) có ba điểm cố định thẳng hàng. Viết phương trình đường thẳng đi qua ba điểm cố định đó.

A. $y = -48x + 10$.

B. $y = \sqrt{3}x - 1$.

C. $y = x - 2$.

D. $y = 2x - 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + m$ (m là tham số) luôn đi qua một điểm M cố định có tọa độ là

- A. $M(-1; -4)$. B. $M(1; -4)$. C. $M(-1; 2)$. D. $M(1; -2)$.

Lời giải

④ Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 1. Đồ thị của hàm số $y = (m-1)x + 3 - m$ (m là tham số) luôn đi qua một điểm M cố định có tọa độ là

- A. $M(0; 3)$. B. $M(1; 2)$. C. $M(-1; -2)$. D. $M(0; 1)$.

Lời giải

Câu 2. Đồ thị của hàm số $y = x^2 + 2mx - m + 1$ (m là tham số) luôn đi qua một điểm M cố định có tọa độ là

- A. $M(0; 1)$. B. $M\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. C. $M\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$. D. $M(-1; 0)$.

Lời giải

Câu 3. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + m$ (m là tham số) luôn đi qua một điểm M cố định có tọa độ là

- A. $M(-1; 2)$. B. $M(-1; -4)$. C. $M(1; -2)$. D. $M(1; -4)$.

Lời giải

Câu 4. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3$ luôn đi qua một điểm M cố định khi m thay đổi, khi đó tọa độ của điểm M là

- A. $M(-1;1)$. B. $M(1;4)$. C. $M(0;-2)$. D. $M(0;3)$.

Lời giải

Câu 5. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y = \frac{(m+1)x+m}{x+m}$ ($m \neq 0$) luôn đi qua một điểm M cố định khi m thay đổi. Tọa độ điểm M khi đó là

- A. $M\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$. B. $M(0;1)$. C. $M(-1;1)$. D. $M(0;-1)$.

Lời giải

Câu 6. Hỏi khi m thay đổi đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - x + 3m$ đi qua bao nhiêu điểm cố định ?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Lời giải

Câu 7. Hỏi khi m thay đổi đồ thị (C_m) của hàm số $y = (1-2m)x^4 + 3mx^2 - m - 1$ đi qua bao nhiêu điểm cố định ?

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

Lời giải

Câu 8. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^4 + mx^2 - m + 2016$ luôn luôn đi qua hai điểm M và N cố định khi m thay đổi. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là

- A. $I(-1;0)$. B. $I(1;2016)$. C. $I(0;1)$. D. $I(0;2017)$.

Lời giải

Câu 9. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{-x + m}$ ($m \neq -2$) luôn luôn đi qua một điểm $M(x_M; y_M)$ cố định khi m thay đổi, khi đó $x_M + y_M$ bằng

- A. -1 . B. -3 . C. 1 . D. -2 .

Lời giải

Câu 10. Cho hàm số $y = -x^3 + mx^2 - x - 4m$ có đồ thị (C_m) và A là điểm cố định có hoành độ âm của (C_m) . Giá trị của m để tiếp tuyến tại A của (C_m) vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất là

- A. $m = -3$. B. $m = -6$. C. $m = 2$. D. $m = -\frac{7}{2}$.

Lời giải

Câu 11. Cho hàm số $y = (m+2)x^3 - 3(m-2)x + m+7$ có đồ thị (C_m) .

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. (C_m) không đi qua điểm cố định nào.

B. (C_m) có đúng hai điểm cố định.

C. (C_m) có đúng ba điểm cố định.

D. (C_m) có đúng một điểm cố định.

Lời giải

Câu 12. Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m+1$ có đồ thị (C_m) . Gọi A là điểm cố định có hoành độ dương của (C_m) . Khi tiếp tuyến tại A của (C_m) song song với đường thẳng $d: y = 16x$ thì giá trị của m là

A. $m = 5$.

B. $m = 4$.

C. $m = 1$.

D. $m = \frac{63}{64}$.

Lời giải

II. Tìm điểm có tọa độ nguyên:

① **Bài toán:** Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$ (hàm phân thức). Hãy tìm những điểm có tọa độ nguyên của đường cong?

|| **Nhận xét:** những điểm có tọa độ nguyên là những điểm sao cho cả hoành độ và tung độ của điểm đó đều là số nguyên.

② Phương pháp.

○ **Bước 1:** Thực hiện phép chia đa thức chia tử số cho mẫu số.

○ **Bước 2:** Lí luận để giải bài toán.

③ Ví dụ minh họa.

Ví dụ 4. Trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{3x+4}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Ví dụ 5. Số điểm có tọa độ là các số nguyên của đồ thị hàm số: $y = \frac{2x+3}{x-1}$ là:

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Lời giải

④ Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 13. Trên đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2}{x+2}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Câu 14. Trên đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{3}{2x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ là các số nguyên dương

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải

Câu 15. Trên đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{4}{3x-2}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

- A. 6. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Câu 16. Trên đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{6}{4x-1}$ số điểm có tọa độ nguyên là

- A. 4. B. 8. C. 3. D. 2.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 17. Trên đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+10}{x+1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

- A. 4. B. 2. C. 10. D. 6.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 18. Trên đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+2}{2x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 6.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 19. Trên đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{5x-2}{3x+1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 6.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 20. Trên đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{8x+11}{4x+2}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 6.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 21. Trong tất cả các điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{3x+5}{x-1}$, số điểm có hoành độ lớn hơn tung độ là

A. 2.

B. 8.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 22. Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2}{x^2+2x+2}$ có tọa độ nguyên ?

A. 1.

B. 8.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 23. Cho hàm số $y = \frac{x^2-5x+2}{2x+2}$ có đồ thị (C). Hỏi trên (C) có bao nhiêu điểm có hoành độ và tung độ là các số tự nhiên.

A. 3.

B. 2.

C. 8.

D. 4.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	

III. Tìm điểm có tính chất đối xứng:

Bài toán: Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm những điểm đối xứng nhau qua một điểm, qua đường thẳng.

① **Loại 1:** Cho đồ thị $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I(x_I, y_I)$.

② Phương pháp.

○ Gọi $M(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D)$, $N(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua điểm I .

○ Ta có
$$\begin{cases} a + b = 2x_I \\ A(a^3 + b^3) + B(a^2 + b^2) + C(a + b) + 2D = 2y_I \end{cases}$$

Giải hệ phương trình tìm được a, b từ đó tìm được tọa độ M, N .

③ Ví dụ minh họa.

Ví dụ 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để trên đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + m - 1$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua điểm $I(0; 1)$.

A. $m > 2$. B. $1 < m < 2$. C. $m > 1$. D. $m < 1$.

Lời giải

Chọn A.

Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số đã cho, ta được $y_0 = x_0^3 - x_0^2 + m - 1$ (1).

Khi đó nếu $N(x_N; y_N)$ là điểm đối xứng với M qua I thì

$$\begin{cases} \frac{x_0 + x_N}{2} = 0 \\ \frac{y_0 + y_N}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = -x_0 \\ y_0 = 2 - y_0 \end{cases} \Rightarrow N(-x_0; 2 - y_0).$$

Để N cũng thuộc đồ thị hàm số đã cho thì ta có phương trình $2 - y_0 = -x_0^3 - x_0^2 + m - 1$ (2).

Lấy (1) cộng (2) vế theo vế và biến đổi ta được phương trình $x_0^2 = m - 2$, phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq 2$.

Hơn nữa để $M \neq N \Rightarrow x_0 \neq -x_0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0$, ta chọn $m > 2$.

Đặc biệt: Trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ $O(0; 0)$

thì ta có
$$\begin{cases} a + b = 0 \\ A(a^3 + b^3) + B(a^2 + b^2) + C(a + b) + 2D = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình tìm được a, b từ đó tìm được tọa độ M, N .

Ví dụ 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m lớn hơn -2019 để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1 - m^2$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

A. 2017. B. Vô số. C. 2019. D. 2018.

Lời giải

④ Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 24. Tìm cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ

A. $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ và $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

B. $(\sqrt{3}; -\sqrt{2})$ và $(-\sqrt{3}; \sqrt{2})$.

C. $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ và $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

D. $(2; -2)$ và $(-2; 2)$.

Lời giải

Câu 25. Trên đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 6x + 3$ có bao nhiêu cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ ?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Câu 26. Số cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ đối xứng với nhau qua điểm $I(2; 18)$ là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Câu 27. Cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 + 3x - 2$ đối xứng nhau qua điểm $I(2;18)$ là
A. (1;2) và (3;34). **B.** (3;2) và (1;34). **C.** (0;-2) và (4;74). **D.** (1;2) và (-1;-6).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 28. Cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 9x + 4$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ O .
A. (3;22) và (-3;-22). **B.** (2;14) và (-2;-14). **C.** (1;10) và (-1;-10). **D.** (0;4) và (4;40).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 29. Các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ là
A. $-1 < m < 0$. **B.** $m \neq 0$. **C.** $m > -3$. **D.** $m > 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 30. Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để trên đồ thị (C_m) của hàm số $y = \frac{x^2 - 4mx + 5m}{x - 2}$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ là
A. $(0; +\infty)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \setminus \left\{-\frac{4}{13}\right\}$. **C.** $[1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 31. Tọa độ hai điểm trên đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ sao cho hai điểm đó đối xứng nhau qua điểm $M(-1; 3)$ là

- A. $(-1; 0); (1; 6)$. B. $(1; 0); (1; 6)$. C. $(0; 2); (-2; 4)$. D. $(1; 0); (-1; 6)$.

Lời giải

① **Loại 2:** Cho đồ thị $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = A_1x + B_1$.

② **Phương pháp.**

- Gọi $M(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D)$, $N(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua đường thẳng d .
- Ta có:
$$\begin{cases} I \in d & (1) \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_d = 0 & (2) \end{cases}$$
 (với I là trung điểm của MN và $\vec{u}_d$ là vectơ chỉ phương của d).
- Giải hệ phương trình tìm được M, N .

③ **Ví dụ minh họa.**

Ví dụ 8. Tọa độ cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+4}{x-2}$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x - 2y - 6 = 0$ là

- A. $(4; 4)$ và $(-1; -1)$. B. $(1; -5)$ và $(-1; -1)$. C. $(0; -2)$ và $(3; 7)$. D. $(1; -5)$ và $(5; 3)$.

Lời giải

④ Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 32. Tìm trên đồ thị hàm số $y = x^3 - 9x + 7$ hai điểm phân biệt mà chúng đối xứng với nhau qua trục tung.

A. $A(2; -3), B(-2; -3)$.

B. $A(3; 7), B(-3; 7)$.

C. $A(4; 4), B(4; -4)$.

D. Không tồn tại.

Lời giải

Câu 33. (THPT Nguyễn Huệ 2020)

Cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 + x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d : y = -\frac{1}{2}x$ là

A. $(1; 2)$ và $(-2; -10)$.

B. $(2; -1)$ và $(-2; 1)$.

C. $(1; -2)$ và $(-1; 2)$.

D. $(1; 2)$ và $(-1; -2)$.

Lời giải

Câu 34. (THPT Hai Bà Trưng 2020)

Cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$ mà chúng đối xứng nhau qua trục tung là

A. $\left(3; -\frac{16}{3}\right)$ và $\left(-3; -\frac{16}{3}\right)$.

B. $\left(3; \frac{16}{3}\right)$ và $\left(-3; \frac{16}{3}\right)$.

C. $\left(2; \frac{11}{3}\right)$ và $\left(-2; \frac{11}{3}\right)$.

D. $\left(2; -\frac{11}{3}\right)$ và $\left(-2; -\frac{11}{3}\right)$.

Lời giải

Câu 35. Điều kiện của tham số m để trên đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^3 - (3m-1)x^2 + 2mx + m+1$ có ít nhất hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua trục Oy là

A. $m \leq 0$.

B. $m < 0$.

C. $m = -2$.

D. $m \leq -2$.

Lời giải

IV. Tính chất các điểm liên quan đến khoảng cách:

1. Lí thuyết:

○ Cho hai điểm $P(x_1; y_1); Q(x_2; y_2) \Rightarrow PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

○ Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$ thì khoảng cách từ M đến d là

$$h(M; d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

○ Khoảng cách từ $M(x_0; y_0)$ đến tiệm cận đứng $x = a$ là $h = |x_0 - a|$.

○ Khoảng cách từ $M(x_0; y_0)$ đến tiệm cận ngang $y = b$ là $h = |y_0 - b|$.

2. Các bài toán thường gặp:

① **Bài toán 1:** Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$) có đồ thị (C) . Hãy tìm trên (C) hai điểm A và B thuộc hai nhánh đồ thị hàm số sao cho khoảng cách AB ngắn nhất.

② Phương pháp.

- (C) có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$ do tính chất của hàm phân thức, đồ thị nằm về hai phía của tiệm cận đứng. Nên gọi hai số α, β là hai số dương.
- Nếu A thuộc nhánh trái thì $x_A < -\frac{d}{c} \Rightarrow x_A = -\frac{d}{c} - \alpha < -\frac{d}{c}; y_A = f(x_A)$.
- Nếu B thuộc nhánh phải thì $x_B > -\frac{d}{c} \Rightarrow x_B = -\frac{d}{c} + \beta > -\frac{d}{c}; y_B = f(x_B)$.
- Sau đó tính $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = [(a + \beta) - (a - \alpha)]^2 + (y_B - y_A)^2$.
- Áp dụng bất đẳng thức Côsi (Cauchy), ta sẽ tìm ra kết quả.

③ Ví dụ minh họa.

Ví dụ 9.(THPT Chuyên Thái Bình 2018) Cho A, B là hai điểm di động và thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị $y = \frac{2x-1}{x+2}$. Khi đó khoảng cách AB bé nhất là?

A. $\sqrt{10}$.

B. $2\sqrt{10}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. $2\sqrt{5}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 10.(Tạp chí THPT 2018) A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 11.(Sở GD & ĐT Hà Nam 2018) Biết $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{x+4}{x+1}$ sao cho độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất. Tính $P = y_A^2 + y_B^2 - x_A \cdot x_B$

A. $P = 10$. B. $P = 6$. C. $P = 6 - 2\sqrt{3}$. D. $P = 10 - \sqrt{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 12.(THPT Chuyên Thái Bình 2018) Cho A, B là hai điểm di động và thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị $y = \frac{2x-1}{x+2}$. Khi đó khoảng cách AB bé nhất là?

A. $\sqrt{10}$. B. $2\sqrt{10}$. C. $\sqrt{5}$. D. $2\sqrt{5}$.

Lời giải

.....

.....

④ Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 36. Gọi A, B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau trên đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+3}{x-3}$, độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng AB là
 A. $4\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{3}$. C. 4. D. 2.

Lời giải

① **Bài toán 2:** Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) để tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.

② **Phương pháp.**

- Gọi $M(x; y)$ và tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là d thì $d = |x| + |y|$.
- Xét các khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ khi M nằm ở các vị trí đặc biệt: Trên trục hoành, trên trục tung.
- Sau đó xét tổng quát, những điểm M có hoành độ, hoặc tung độ lớn hơn hoành độ hoặc tung độ của M khi nằm trên hai trục thì loại đi không xét đến.
- Những điểm còn lại ta đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của đồ thị hàm số dựa vào đạo hàm rồi tìm được giá trị nhỏ nhất của d .

③ **Ví dụ minh họa.**

Ví dụ 13.(THPT Triệu Sơn 2018) Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ (C) và điểm $M(a; b)$ thuộc đồ thị (C) . Đặt $T = 3(a+b) + 2ab$, khi đó để tổng khoảng cách từ điểm M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất thì mệnh đề nào sau đây là đúng?
 A. $-3 < T < -1$. B. $-1 < T < 1$. C. $1 < T < 3$. D. $2 < T < 4$.

[illegible]

A. $MN = 4\sqrt{2}$. **B.** $MN = 6$. **C.** $MN = 4\sqrt{3}$. **D.** $MN = 6\sqrt{2}$.

[illegible]

- [illegible]

[illegible]

Câu 38. Tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận của đồ thị hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $M(4; 3)$. B. $M(3; 5)$. C. $M(1; -3)$. D. $M(0; -1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 39. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi M là một điểm thuộc đồ thị (C) và d là tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) . Giá trị nhỏ nhất của d có thể đạt được là

A. 6. B. 10. C. 2. D. 5.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 40. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai tiệm cận của (C) đạt giá trị nhỏ nhất bằng ?

A. 3. B. 2. C. $\frac{2}{3}$. D. 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 41. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất bằng ?

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 42. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai tiệm cận của (C) đạt giá trị nhỏ nhất bằng

- A. 3. B. 4. C. $2\sqrt{2}$. D. 2.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 43. Tọa độ tất cả các điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến 2 tiệm cận là nhỏ nhất là

- A. (1;1). B. $(1 + \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$.
 C. $(1 - \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$. D. $(2 + \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$ và $(2 - \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 44. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-3}$ có đồ thị (C) . Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất bằng ?

- A. 2. B. $\frac{2}{3}$. C. 1. D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

① **Bài toán 3:** Cho đồ thị (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến Ox bằng k lần khoảng cách từ M đến trục Oy .

② **Phương pháp.**

○ Theo đầu bài ta có $|y| = k|x| \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx \\ y = -kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = kx \\ f(x) = -kx \end{cases}$.

③ **Ví dụ minh họa.**

Ví dụ 16. Cho điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x-7}{x+1}$, biết M có hoành độ a và khoảng cách từ M đến trục Ox bằng ba lần khoảng cách từ M đến trục Oy . Giá trị có thể có của a là

- A. $a = 1$ hoặc $a = \frac{7}{3}$. B. $a = -1$ hoặc $a = \frac{7}{3}$. C. $a = -1$ hoặc $a = -\frac{7}{3}$. D. $a = 1$ hoặc $a = -\frac{7}{3}$.

Lời giải

Ví dụ 17. Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận ngang bằng 5 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 18. Tọa độ các điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ cách đều tiệm cận đứng và trục hoành là

- A. $M(2;1), M(4;3)$. B. $M(0;-1), M(4;3)$. C. $M(0;-1), M(3;2)$. D. $M(2;1), M(3;2)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 19. Tọa độ các điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{3x-5}{x-2}$ cách đều hai tiệm cận của (C).

- A. $M(-1;1); N(-4;-6)$. B. $M(1;1); N(3;4)$. C. $M(-1;3); N(-3;3)$. D. $M(-1;3); N(-3;3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 20. Tọa độ điểm $M \in (C)$ của hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ cách đều hai đường tiệm cận của (C) là

- A. $M(2;1)$. B. $M(0;-1), M(4;3)$. C. $M\left(5; \frac{7}{3}\right), M\left(-3; \frac{1}{5}\right)$. D. $M(-2;2)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

④ Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 45. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ cách đều hai trục tọa độ là

- A. $M(-1; -1), M(3; 3)$. B. $M(-1; 3)$. C. $M(-1; -1)$. D. $M(3; 3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 46. Đồ thị hàm số $y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$ có hai điểm cực trị cách đều trục tung khi và chỉ khi:

- A. $m = -1$. B. $m = 0$. C. $m = -1; m = -2$. D. $m = -2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 47. Hỏi trên đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$ có bao nhiêu điểm cách đều hai trục tọa độ?

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 0.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

① Bài toán 4: Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$). Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài MI ngắn nhất (với I là giao điểm hai tiệm cận).

② Phương pháp.

- Tiệm cận đứng $x = \frac{-d}{c}$; tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.
- Ta tìm được tọa độ giao điểm $I\left(\frac{-d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ của hai tiệm cận.
- Gọi $M(x_M; y_M)$ là điểm cần tìm. Khi đó:

$$IM^2 = \left(x_M + \frac{d}{c}\right)^2 + \left(y_M - \frac{a}{c}\right)^2 = g(x_M)$$

- Sử dụng phương pháp tìm GTLN - GTNN cho hàm số g để thu được kết quả.

③ Ví dụ minh họa.

Ví dụ 21. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C) . Biết tọa độ điểm $M(x_M; y_M)$ có hoành độ dương thuộc đồ thị (C) sao cho MI ngắn nhất. Khi đó giá trị $x_M - y_M$ bằng

- A. 0. B. $2\sqrt{3}$. C. 2. D. -2.

Lời giải

Ví dụ 22. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là khoảng cách từ một điểm M trên (C) đến giao điểm của hai tiệm cận. Giá trị nhỏ nhất có thể có của d là

A. $\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $3\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Ví dụ 23. Khoảng cách ngắn nhất từ điểm $M \in (C)$ của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$ đến $I(1, 4)$

A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$. D. $\sqrt{2\sqrt{2} - 2}$.

Lời giải

① **Bài toán 5:** Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x)$ và đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$. Tìm điểm I trên (C) sao cho khoảng cách từ I đến d là ngắn nhất.

② **Phương pháp.**

- Gọi I thuộc $(C) \Rightarrow I(x_0; y_0); y_0 = f(x_0)$.
- Khoảng cách từ I đến d là $g(x_0) = h(I; d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
- Khảo sát hàm số $y = g(x)$ để tìm ra điểm I thỏa mãn yêu cầu.

③ Ví dụ minh họa.

Ví dụ 24. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$ cách đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số một khoảng bằng 1 là
A. $(0; -1); (-2; 7)$. **B.** $(-1; 0); (2; 7)$. **C.** $(0; 1); (2; -7)$. **D.** $(0; -1); (2; 7)$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 25.(THPT Chuyên Bắc Ninh 2018) Gọi $M(a; b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ mà có khoảng cách đến đường thẳng $d: y = 3x + 6$ nhỏ nhất. Khi đó
A. $a + 2b = 1$. **B.** $a + b = 2$. **C.** $a + b = -2$. **D.** $a + 2b = 3$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 26.(Đề Chính Thức 2018) Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C) . Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng
A. $2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

④ Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 48. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận đứng bằng 1 là

- A. $M(0;1), M(2;3)$. B. $M(2;1)$. C. $M\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. D. $M\left(3; \frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Câu 49. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ mà có khoảng cách đến tiệm cận ngang của (C) bằng 1 là

- A. $M(3;2)$. B. $M(5;2)$. C. $M(5;2), M(-1;0)$. D. $M\left(4; \frac{5}{2}\right), M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Câu 50. Tọa độ điểm M có hoành độ nguyên thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có khoảng cách đến đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$ bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$ là

- A. $M(-2;0)$. B. $M(2;4)$. C. $M(2;4); M(-2;0)$. D. $M(2;-2)$.

Lời giải

Câu 51. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) . Tiếp tuyến tại một điểm M bất kỳ của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A và B . Diện tích của tam giác ABI bằng

A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Lời giải

Câu 52. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1; 2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.là

A. $M_1(-1+\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}), M_2(-1-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$. B. $M_1(-1+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}), M_2(-1+\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$.
 C. $M_1(-1+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}), M_2(-1-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$. D. $M_1(-1-\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}), M_2(-1-\sqrt{3}; -2-\sqrt{3})$.

Lời giải

A. 4. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

[illegible]