

Câu I (4,0 điểm).

1. Giải phương trình $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)+\sqrt{3}\cos 4x=4\cos^2 x-1$

2. Cho các số $x+5y; 5x+2y; 8x+y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $(y-1)^2; xy-1; (x+2)^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x, y .

Câu II (5,0 điểm).

1. Tính tổng $S = 2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 + 4.3C_n^4 + \dots + n(n-1)C_n^n$

2. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau. Tính xác suất để chọn được một số có 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ.

Câu III (5,0 điểm).

1. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x+4+\sqrt{x^2+8x+17}=y+\sqrt{y^2+1} \\ x+\sqrt{y}+\sqrt{y+21}+1=2\sqrt{4y-3x} \end{cases}$$

Câu IV (2,0 điểm).

Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(3; 4), B(1; 2), đỉnh C thuộc đường thẳng $d: x+2y+1=0$, trọng tâm G. Biết diện tích tam giác GAB bằng 3 đơn vị diện tích, hãy tìm tọa độ đỉnh C.

Câu V (4,0 điểm).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, đáy lớn $BC=2a$ đáy bé $AD=a$, $AB=b$. Mặt bên SAD là tam giác đều. M là một điểm di động trên AB, Mặt phẳng (P) đi qua M và song song với SA, BC.

1. Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi $mp(P)$. Thiết diện là hình gì?
2. Tính diện tích thiết diện theo a, b và $x=AM, (0 < x < b)$. Tìm x theo b để diện tích thiết diện lớn nhất

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh : Số báo danh

Họ và tên, chữ ký: Giám thị 1:

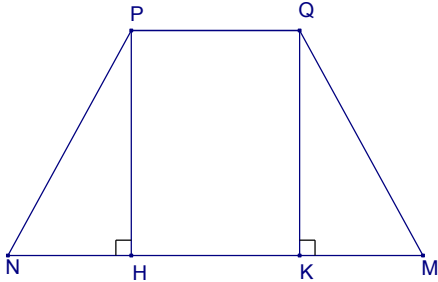
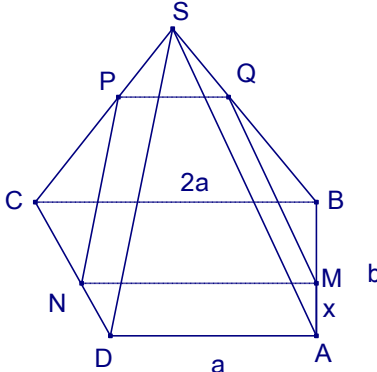
Họ và tên, chữ ký: Giám thị 2:

Hướng dẫn chấm

Câu	Nội dung	Điểm
Câu I.		
1	$2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) + \sqrt{3} \cos 4x = 4 \cos^2 x - 1$	
	PT $1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - 4x \right) + \sqrt{3} \cos 4x = 2(1 + \cos 2x) - 1$ $\Leftrightarrow \sin 4x + \sqrt{3} \cos 4x = 2 \cos 2x$	0.5
	$\Leftrightarrow \cos \left(4x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos 2x$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{6} = 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$	1.0
2	$x + 5y; 5x + 2y; 8x + y$ theo thứ tự lập thành CSC nên ta có: $x + 5y + 8x + y = 2(5x + 2y)$ $\Leftrightarrow x = 2y$ (1)	0.5
	$(y - 1)^2; xy - 1; (x + 2)^2$ theo thứ tự lập thành CSN nên ta có: $(y - 1)^2 (x + 2)^2 = (xy - 1)^2$ (2)	0.5
	$(y - 1)^2 (2y + 2)^2 = (2y^2 - 1)^2$ Thay (1) vào (2) ta đc: $\Leftrightarrow 4(y^4 - 2y^2 + 1) = 4y^4 - 4y^2 + 1$ $\Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = -\sqrt{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \sqrt{3} \end{cases}$	1.0
Câu II		
1	$S = 2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 + 4.3C_n^4 + \dots + n(n-1)C_n^n$	
	Số hạng tổng quát:	1.0

	$u_k = k(k-1)C_n^k = k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}$ $= \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!\left[(n-2)! - (k-2)!\right]}$ $= n(n-1)C_{n-2}^{k-2} \quad (2 \leq k \leq n)$	
	$S = n(n-1)\left(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + \dots + C_{n-2}^{n-2}\right)$	1.0
	$= n(n-1)2^{n-2}$	0.5
2.	Số phần tử của không gian mẫu: $n_\Omega = A_{10}^6 - A_9^5 = 136080$	0.5
	*Số các số tự nhiên có 6 chữ số có 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ là TH1: (số tạo thành không chứa số 0) - Lấy ra 3 số chẵn có: C_4^3 - Lấy ra 3 số lẻ có: C_5^3 - Số các hoán vị của 6 số trên: $6!$ Suy ra số các số tạo thành: $C_4^3 \cdot C_5^3 \cdot 6! = 28800$	0.5
	TH2: (số tạo thành có số 0) - Lấy ra hai số chẵn khác 0: C_4^2 - Lấy ra 3 số lẻ: C_5^3 - Số các hoán vị không có số 0 đứng đầu: $6! - 5! = 5 \cdot 5!$ Số các số tạo thành: $C_4^2 \cdot C_5^3 \cdot 5 \cdot 5! = 36000$	0.5
	Gọi biến cố A: “số được chọn có 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ” Suy ra: $n_A = 28800 + 36000 = 64800$ Xác suất xảy ra biến cố A: $P_A = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{64800}{136080} = \frac{10}{21}$	1
Câu III		
1	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{4n^2 + 3n} + 2n)}{3n(\sqrt{n^2 + n} + n)}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{3}{n}} + 2}{3\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{2}{3}$	2.0

2	$\begin{cases} x+4+\sqrt{x^2+8x+17}=y+\sqrt{y^2+1} & (1) \\ x+\sqrt{y}+\sqrt{y+21}+1=2\sqrt{4y-3x} & (2) \end{cases}$	
	Điều kiện: $y \geq 0$	
	$(1) \Leftrightarrow (x-y+4)+\sqrt{x^2+8x+17}-\sqrt{y^2+1}=0$ $\Leftrightarrow (x-y+4)+\frac{(x+4)^2-y^2}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}=0$	0.5
	$\Leftrightarrow (x-y+4)+\frac{(x+4+y)(x+4-y)}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}=0$	
	$\Leftrightarrow (x-y+4)\left(1+\frac{(x+4+y)}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}\right)=0$ $\Leftrightarrow y=x+4$	0.5
	$\text{Vi: } 1+\frac{(x+4+y)}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}=\frac{\sqrt{(x+4)^2+1}+(x+4)+\sqrt{y^2+1}+y}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}>0 \forall x,y$	0.5
	Thay $y=x+4$ vào 2 ta được : $(2) \Leftrightarrow x+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+25}+1=2\sqrt{x+16}$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x+4}-2)+(\sqrt{x+25}-5)+(x+8-2\sqrt{x+16})=0$ $\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+25}+5}+\frac{x+12}{x+8+2\sqrt{x+16}}\right)=0$	0.5
	$\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=4 \\ \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+25}+5}+\frac{x+12}{x+8+2\sqrt{x+16}}=0 \quad (vn) \end{cases}$	0.5
		0.5
Câu IV	Ta có: $\overline{BA}=(2;2), AB=2\sqrt{2}$ Phương trình đường thẳng AB: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1} \Leftrightarrow x-y+1=0$	0.5
	$C \in d: x+2y+1=0 \Rightarrow C(-1-2t;t)$ Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC suy ra: $G\left(1-\frac{2}{3}t;2+\frac{t}{3}\right)$	0.5
	Khoảng cách từ G đến AB: $d_{(G;AB)}=\frac{ t }{\sqrt{2}}$	0.5
	Vì diện tích GAB bằng 3 đơn vị nên ta có:	0.5

	$\frac{1}{2}d_{(G;AB)}.AB = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \Rightarrow C(-7;3) \\ t = -3 \Rightarrow C(5;-3) \end{cases}$	
Câu V	+ Từ M kẻ đường thẳng song song với BC và SA lần lượt cắt DC tại N, SB tại Q. + Từ Q kẻ đường thẳng song song với BC cắt SC tại P. Thiết diện hình thang cân MNPQ  	0.5 0.5
	+ Tính diện tích MNPQ Ta tính được $MQ = NP = \frac{b-x}{b}a, PQ = \frac{2.a.x}{b}; MN = \frac{ab+ax}{b}$ từ đó tính được $QK = \frac{ab - a.x}{b} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	1.5
	Suy ra diện tích MNPQ là: $x S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).QK = \frac{\sqrt{3}.a^2}{4b^2}(b-x)(b+3x)$	0.5
	$S_{MNPQ} = \frac{\sqrt{3}.a^2}{4b^2}(b-x)(b+3x) \leq \frac{\sqrt{3}.a^2}{12b^2} \left(\frac{3b - 3.x + b + 3.x}{2} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}.a^2}{12}$ Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{b}{3}$.	1