| SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO<br>HÀ NỘI | KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ<br>LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2018-2019 |
| --- | --- |
| **ĐỀ CHÍNH THỨC** | Môn thi: **TOÁN**<br>Ngày thi: *14 tháng 9 năm 2018*<br>Thời gian làm bài: *180 phút*<br>*(Đề thi có 01 trang)* |

**Bài I** *(4 điểm)*

Cho hàm số $y=\dfrac{-x}{2x+1}$ có đồ thị là $(C)$ và đường thẳng $d$ có phương trình $y=x+m$, $m$ là tham số. Tìm $m$ để $d$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A$ và $B$ sao cho tổng các hệ số góc của các tiếp tuyến với $(C)$ tại $A$ và $B$ là lớn nhất.

**Bài II** *(5 điểm)*

1) Giải phương trình $\cos x=1-x^2$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+3y^2+2xy-6x-2y+3=0 \\ x^2-y+5=2x\sqrt{y+3} \end{cases}$.

**Bài III** *(3 điểm)*

Cho dãy số $(a_n)$ xác định bởi $a_1=\dfrac{1}{2}$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}$; $n=1,2,...$

1) Chứng minh dãy số $(a_n)$ là dãy số giảm.

2) Với mỗi số nguyên dương *n*, đặt $b_n=a_1+a_2+...+a_n$. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ .

**Bài IV** *(6 điểm)*

1) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn tâm *I*, có đường cao $AH$. Gọi $E$ là hình chiếu của $B$ lên tia *AI*, *HE* cắt $AC$ tại *P*. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác $ABC$ biết $H(6;-4)$; $P(11;1)$ và $M(10;-4)$ là trung điểm của $BC$.

2) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng $(P)$ cắt các tia $AB, AD, AA'$ $AC'$ lần lượt tại $M,N,P,Q$.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt{3}}{AQ}=\dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{AN}+\dfrac{1}{AP}$.

b) Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ lên $(P)$. Chứng minh rằng $AQ<\sqrt{3}AH$.

**Bài V** *(2 điểm)*

Cho các số thực $a,b,c$ không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a+b+c-4abc$.

--------------- Hết ---------------

*Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

*Họ và tên thí sinh:............................................ Số báo danh:....................*

*Chữ kí cán bộ coi thi số 1:* *Chữ kí cán bộ coi thi số 2:*

# LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12, THÀNH PHỐ HÀ NỘI

# NĂM HỌC 2018-2019

**Câu 1:** ***(4 điểm)*** Cho hàm số $y=\frac{-x}{2x+1}$ có đồ thị $(C)$ và đường thẳng $d$ có phương trình $y=x+m$, $m$ là tham số. Tìm $m$ để $d$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A$ và $B$ sao cho tổng hệ số góc của các tiếp tuyến với $(C)$ tại $A$ và $B$ là lớn nhất.

**Lời giải**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Ta có đạo hàm $y'=\frac{-1}{(2x+1)^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{-x}{2x+1}=x+m \Leftrightarrow g(x)=2x^2+2(m+1)x+m=0$.

Ta có $\begin{cases}\Delta'=m^2+2m+1-2m=m^2+1>0,\forall m\\ g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\neq 0,\forall m\end{cases}$ nên đường thẳng $d$ luôn cắt đồ thị $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ với mọi giá trị thực $m$.

Gọi $x_1$, $x_2$ là hoành độ của điểm $A$ và $B$ khi đó $\begin{cases}S=-(m+1)\\ P=\frac{m}{2}\end{cases}$.

Suy ra $K=-\left[\frac{1}{(2x_1+1)^2}+\frac{1}{(2x_2+1)^2}\right]=-\frac{4S^2-8P+4S+2}{(4P+2S+1)^2}=-(4m^2+2)\leq -2$.

Vậy tổng hệ số góc lớn nhất của các tiếp tuyến với $(C)$ tại $A$ và $B$ bằng $-2$ đạt được khi $m=0$.

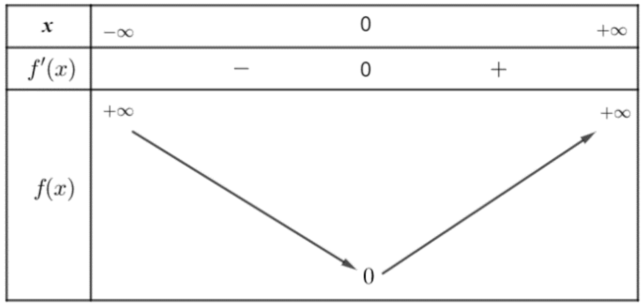
**Câu 2:** ***(5 điểm)***

a) Giải phương trình $\cos x=1-x^2$

**Lời giải**

Xét hàm số $f(x)=\cos x+x^2-1$ với $x\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(x)=-\sin x+2x$;
$f''(x)=-\cos x+2$. Vì $f''(x)>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $f'(0)=0$ suy ra phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bảng biến thiên:




Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+3y^2+2xy-6x-2y+3=0 \\ x^2-y+5=2x\sqrt{y+3} \end{cases}$

**Lời giải**

Ta có: $x^2+3y^2+2xy-6x-2y+3=0$

$\Leftrightarrow x^2+2(y-3)x+(y-3)^2+2y^2+4y-6=0$

$\Rightarrow 2y^2+4y-6\le 0 \;\Leftrightarrow\; 1\le y\le 3 \;(1)$.

Lại có: $x^2-y+5=2x\sqrt{y+3} \;\Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{y+3}+y+3+2(1-y)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{y+3}\right)^2+2(1-y)=0 \;\Rightarrow 2(1-y)\le 0 \Leftrightarrow y\ge 1 \;(2)$.

Từ $(1)$ và $(2)$ $\Rightarrow y=1$.Thay $y=1$ vào hệ được $x=2$.

Vậy hệ có nghiệm là $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

**Câu 3:** ***(3 điểm)*** Cho dãy số $(a_n)$ xác định bởi $a_1=\dfrac{1}{2}, a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}; n=1,2,...$

a) Chứng minh dãy số $(a_n)$ là dãy số giảm.

b) Với mỗi số nguyên dương $n$, đặt $b_n=a_1+a_2+...+a_n$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

**Lời giải**

a) Xét hiệu $a_{n+1}-a_n=\dfrac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}-a_n=\dfrac{-a_n(a_n-1)^2}{a_n^2-a_n+1}$.

Từ cách xác định dãy số ta có $a_n > 0 \forall n$ và $a_n^2 - a_n + 1 > 0 \Rightarrow a_{n+1} - a_n < 0 \forall n \in N^*$

Vậy $\left(a_n\right)$ là dãy số giảm.

b) Ta có $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - a_n + 1 + a_n - 1}{a_n^2 - a_n + 1} = 1 + \dfrac{a_n - 1}{a_n^2 - a_n + 1}$

$\Rightarrow a_{n+1} - 1 = \dfrac{a_n - 1}{a_n^2 - a_n + 1} \Rightarrow \dfrac{1}{a_{n+1} - 1} = \dfrac{a_n^2 - a_n + 1}{a_n - 1} = a_n + \dfrac{1}{a_n - 1}$

$\Rightarrow a_n = \dfrac{1}{a_{n+1} - 1} - \dfrac{1}{a_n - 1}$

Suy ra $b_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \dfrac{1}{a_{n+1} - 1} - \dfrac{1}{a_1 - 1} = \dfrac{1}{a_{n+1} - 1} + 2$ (1)

Lại có: Dãy số $\left(a_n\right)$ là dãy số giảm, bị chặn dưới bởi $0$ nên có giới hạn, giả sử

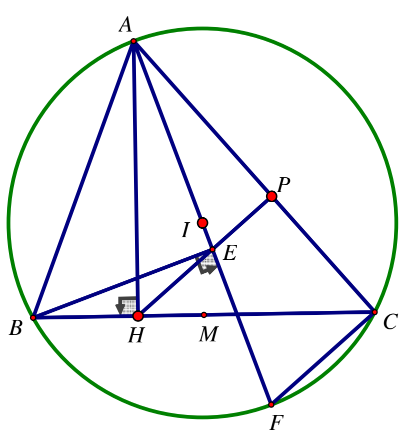
$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_{n+1} = a \Rightarrow a = \dfrac{a^2}{a^2 - a + 1} \Rightarrow a = 0$ hay $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 1$.

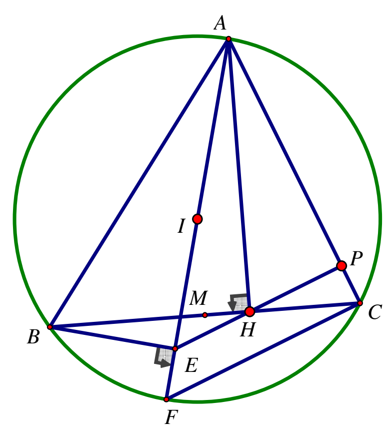
**Câu 4:** ***(6 điểm)***

1) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn tâm $I$, đường cao $AH$. Gọi $E$ là hình chiếu của $B$ trên $AI$, $HE$ cắt $AC$ tại $P$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Biết $H(6;-4)$; $P(11;1)$ và $M(10;-4)$.

**Lời giải**




**Hình 1**




**Hình 2**

$H$ không trùng $M$ nên tam giác $ABC$ không cân.

Vẽ đường kính $AF$ của đường tròn $(I)$.

Ta có $\widehat{AHB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$ nên bốn điểm $A, E, H, B$ cùng thuộc một đường tròn.

Từ đó ta có $\widehat{ABH} = \widehat{HEF} = \widehat{AFC}$ (với hình 1) hoặc $\widehat{ABH} = \widehat{AEH} = \widehat{AFC}$ (với hình 2).

nên $HP // CF$, lại có $AC \perp CF$ suy ra $HP \perp AC$.

Ta có $\overrightarrow{HP}(5;5)$

Do vậy đường thẳng $AC$ qua $P(11;\ 1)$ có vtpt là $\vec{n}(1;1)$ có phương trình $x + y - 12 = 0$

Đường thẳng $BC$ qua $H(6;-4)$ *và* $M(10;-4)$ có phương trình $y = -4$.

$C$ là giao điểm của $AC$ và $BC$, tọa độ điểm $C$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 12 = 0 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = -4 \end{cases}$$

Vậy $C(16;-4)$ và do $M(10;-4)$ là trung điểm của $BC$ nên $B(4;-4)$.

Đường thẳng $AH$ vuông góc với $BC$ và qua $H(6;-4)$ có phương trình $x = 6$.

$A$ là giao điểm của $AH$ và $AC$ nên tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 12 = 0 \\ x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases}$

Vậy $A(6;6); B(4;-4); C(16;-4)$.

2)

a) Theo quy tắc hình hộp ta có:

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \frac{AC'}{AQ}\overrightarrow{AQ} = \frac{AB}{AM}\overrightarrow{AM} + \frac{AD}{AN}\overrightarrow{AN} + \frac{AA'}{AP}\overrightarrow{AP}.$$

Mà M, N, P, Q đồng phẳng nên $\frac{AC'}{AQ} = \frac{AB}{AM} + \frac{AD}{AN} + \frac{AA'}{AP} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{AQ} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AP}$. ( Vì AC' là đường chéo hình lập phương ABCDA'B'C'D' nên $AB = AD = AA' = \frac{1}{\sqrt{3}}AC'$).

b) Dễ dàng chứng minh kết quả quen thuộc của tứ diện vuông là: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AP^2}$.

Mà $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AP^2} < \left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AP}\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH} < \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AP} = \frac{\sqrt{3}}{AQ} \Rightarrow AQ < \sqrt{3}AH$$

**Câu 5:** ***(2 điểm)*** Cho $a, b, c$ là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a+b+c-4abc$.

**Lời giải**

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$ thì từ $1=a^2+b^2+c^2\Rightarrow 1\le 3a^2\Rightarrow a^2\ge\frac{1}{3}$.

Mặt khác: $2bc\le b^2+c^2=1-a^2\Rightarrow 0\le 2bc\le 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow 0\le bc\le\frac{1}{3}$.

Ta có:

$$P^2=\left[a(1-4bc)+(b+c).1\right]^2\le\left[a^2+(b+c)^2\right]\left[(1-4bc)^2+1\right]=(1+2bc)\left[(1-4bc)^2+1\right]$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{1-bc}=b+c(*)$

Đặt $t=bc\Rightarrow 0\le t\le\frac{1}{3}$, suy ra được $P^2\le(1+2t)(16t^2-8t+2)=32t^3-4t+2$

Xét hàm số $f(t)=32t^3-4t+2,\ t\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$; $f'(t)=96t^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\sqrt{6}}{12}\\ t=\frac{-\sqrt{6}}{12}(l)\end{array}\right.$.

$f(0)=2, f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{50}{27}, f\left(\frac{\sqrt{6}}{12}\right)\approx 1,4556$.

Suy ra GTLN $f(t)=2$ khi $t=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ c=0\end{array}\right.\overset{(*)}{\Longrightarrow}\left[\begin{array}{l}a=c=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$.

**Kết luận:** $\max P=\sqrt{2}$, đạt được khi $\begin{cases}a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ c=0\end{cases}$, hoặc các hoán vị của nó.

**Tập thể thầy cô trên Nhóm Toán VD -VDC giải bài:**

1. Thầy Binh Nguyen
2. Thầy Khải Nguyễn
3. Cô Trang Nguyễn Thị Thu
4. 1. Thầy Lê Thanh Bình – 2. Thầy Huỳnh Đức Vũ
5. Thầy Trần Minh Ngọc

**Tổng hợp :** Thầy Lê Tài Thắng