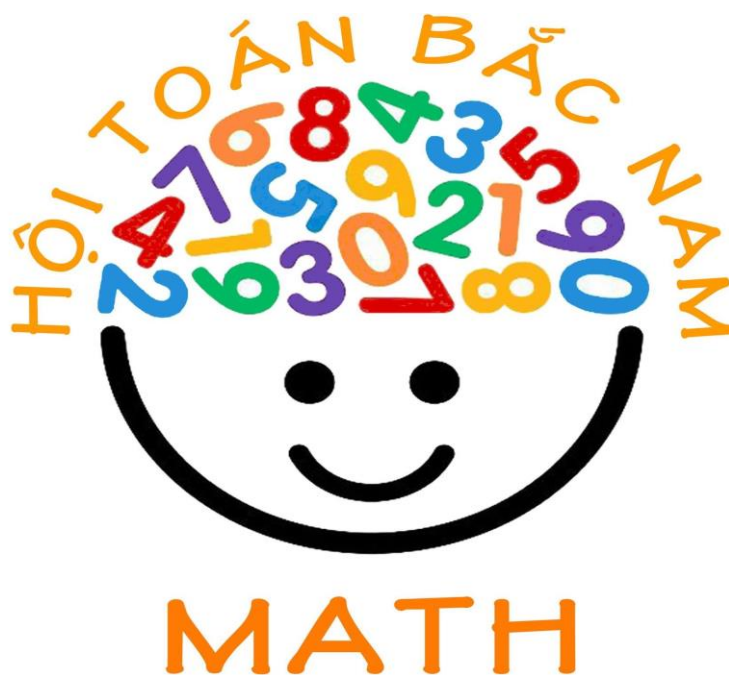




MỖI THÁNG MỘT CHỦ ĐỀ

Một số bài toán về lãi suất

Tháng 06, năm 2017

Mở đầu

Trong thời điểm kỳ thi THPT quốc gia đang cận kề, tôi mạnh dạn tổng hợp một số bài toán liên quan đến lãi suất ngân hàng để các bạn học sinh có thêm tài liệu ôn tập trong kỳ thi sắp tới. Mặc dù không xuất hiện trong đề thi tham khảo của bộ giáo dục và đào tạo nhưng khả năng dạng toán này xuất hiện trong đề thi chính thức không phải là không có; đối với những bài toán gắn liền với thực tế, các bạn học sinh gặp rất nhiều khó khăn trong việc tiếp cận và xử lý, hi vọng thông qua bài viết này tôi có thể giúp các bạn giải quyết được phần nào vấn đề đó. Bài viết được chia làm ba phần:

Phần 1: Giới thiệu một số bài toán liên quan đến lãi suất ngân hàng.

Phần 2: Phân tích một số kỹ năng xử lý bài toán.

Phần 3: Trình bày một số bài tập trích từ đề thi thử của một số trường THPT trên toàn quốc.

Dù đã cố gắng hết sức để bài viết được hoàn thiện song không tránh khỏi sai sót, tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp từ phía bạn đọc. Mọi ý kiến đóng góp, bạn đọc vui lòng gửi về hòm thư điện tử: thongqna@gmail.com.

Quảng Nam, ngày 15, tháng 06, năm 2017

Trần Thông

A. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN LÃI SUẤT

1. LÃI ĐƠN: là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do gốc sinh ra, tức là tiền lãi của kỳ hạn trước không được tính vào vốn để tính lãi cho kỳ hạn kế tiếp, cho dù đến kỳ hạn người gửi không đến rút tiền gửi ra.

Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi suất đơn $r\%$ /kỳ hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là: $S_n = A(1 + nr)$.

Chú ý trong các bài toán lãi suất cả các bài toán liên quan $r\%$ là $\frac{r}{100}$.

2. LÃI KÉP: là tiền lãi của kỳ hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kỳ hạn sau.

Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng a đồng với lãi kép $r\%$ /kỳ hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là: $S_n = a \cdot (1 + r)^n$.

Chứng minh: Gọi A là tiền vốn lẫn lại sau n tháng ta có:

Tháng 1 ($n=1$): $T_1 = a + ar = a(1 + r)$

Tháng 2 ($n=2$): $T_2 = a(1 + r) + a(1 + r)r = a(1 + r)^2$

.....

Tháng ($n=n$): $T_n = a(1 + r)^{n-1} + a(1 + r)^{n-1} \cdot r = a(1 + r)^n$

Vậy $T_n = a(1 + r)^n$ (*)

Từ công thức (*) $T_n = a(1 + r)^n$ ta tính được các đại lượng khác như sau:

$$1) \ n = \frac{\ln \frac{T_n}{a}}{\ln(1 + r)};$$

$$2) \ r = \sqrt[n]{\frac{T_n}{a}} - 1; a = \frac{T_n}{(1 + r)^n}$$

3. TIỀN GỬI HÀNG THÁNG: Mỗi tháng gửi đúng cùng một số tiền vào một thời gian cố định.

Công thức tính : Đầu mỗi tháng khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền a đồng với lãi kép $r\%$ một tháng thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$) là :

$$S_n = \frac{a}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r).$$

Chứng minh: Cuối thứ I, người đó có số tiền là: $T_1 = a + a.r = a(1+r)$

Đầu tháng thứ II, người đó có số tiền là:

$$a(1+r) + a = a \left[(1+r) + 1 \right] = \frac{a}{(1+r)-1} \left[(1+r)^2 - 1 \right] = \frac{a}{r} \left[(1+r)^2 - 1 \right]$$

Cuối tháng thứ II, người đó có số tiền là:

$$T_2 = \frac{a}{r} \left[(1+r)^2 - 1 \right] + \frac{a}{r} \left[(1+r)^2 - 1 \right].r = \frac{a}{r} \left[(1+r)^2 - 1 \right] (1+r)$$

Cuối tháng thứ n , người đó có số tiền cả gốc lẫn lãi là T_n : $T_n = \frac{a}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r)$

$$\Rightarrow a = \frac{T_n.r}{(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln \left(\frac{T_n.r}{a} + 1 + r \right)}{\ln(1+r)} - 1$$

4. GỬI NGÂN HÀNG VÀ RÚT TIỀN GỬI HÀNG THÁNG.

Công thức: Gửi ngân hàng số tiền a đồng với lãi suất $r\%$ một tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền X đồng. Tính số tiền còn lại sau n tháng là bao nhiêu?

Công thức số tiền còn lại sau n tháng là: $S_n = A(1+r)^n - X \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Chứng minh:

Cuối thứ I, người đó có số tiền là: $T_1 = a + a.r = a(1+r)$

Đầu tháng thứ II, người đó có số tiền là:

$$a(1+r) + a = a \left[(1+r) + 1 \right] = \frac{a}{(1+r)-1} \left[(1+r)^2 - 1 \right] = \frac{a}{r} \left[(1+r)^2 - 1 \right]$$

Cuối tháng thứ II, người đó có số tiền là:

$$T_2 = \frac{a}{r} \left[(1+r)^2 - 1 \right] + \frac{a}{r} \left[(1+r)^2 - 1 \right].r = \frac{a}{r} \left[(1+r)^2 - 1 \right] (1+r)$$

Cuối tháng thứ n , người đó có số tiền cả gốc lẫn lãi là T_n : $T_n = \frac{a}{r}[(1+r)^n - 1](1+r)$

$$\Rightarrow a = \frac{T_n \cdot r}{(1+r)[(1+r)^n - 1]}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\text{Ln}\left(\frac{T_n \cdot r}{a} + 1 + r\right)}{\text{Ln}(1+r)} - 1$$

5.VAY VỐN TRẢ GÓP: Vay ngân hàng số tiền là N đồng với lãi suất $r\%$ /tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi tháng hoàn nợ số tiền là A đồng và trả hết tiền nợ sau đúng n tháng.

Công thức: Cách tính số tiền còn lại sau n tháng giống hoàn toàn công thức tính gửi ngân hàng và rút tiền hàng tháng: $S_n = N(1+r)^n - A \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Chứng minh:

Số tiền gốc cuối tháng 1: $N + Nr - A = N(r+1) - A$

Cuối tháng 2: $[N(r+1) - A] + [N(r+1) - A]r - A = N(r+1)^2 - A[(r+1) + 1]$

Cuối tháng 3: $[N(r+1)^2 - A[(r+1) + 1]](1+r) - A = N(r+1)^3 - A[(r+1)^2 + (r+1) + 1]$

.....

Cuối tháng n : $N(r+1)^n - A[(r+1)^{n-1} + (r+1)^{n-2} + \dots + (r+1) + 1]$

Trả hết nợ thì sau n tháng, số tiền sẽ bằng 0

$$\Leftrightarrow N(r+1)^n - A[(r+1)^{n-1} + (r+1)^{n-2} + \dots + (r+1) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow N(r+1)^n = A[(r+1)^{n-1} + (r+1)^{n-2} + \dots + (r+1) + 1]$$

Đặt $y = r+1$

Ta có: $N \cdot y^n = A(y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1)$

$$\Leftrightarrow A = \frac{N \cdot y^n}{(y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1)} = \frac{N y^n (y-1)}{y^n - 1} = \frac{N(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1} \Rightarrow A = \frac{N(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1}$$

6.BÀI TOÁN RÚT SỐ TIẾT KIỆM THEO ĐỊNH KỲ: Một người gửi vào sổ tiết kiệm ngân hàng số tiền là N đồng lãi suất $r\%$ /tháng. Nếu mỗi tháng anh sinh viên đó rút ra

một số tiền như nhau là A đồng vào ngày ngân hàng trả lãi thì hàng tháng anh ta rút ra bao nhiêu tiền (làm tròn đến 1000 đồng) để sau đúng n năm sẽ vừa hết số tiền cả vốn lẫn lãi.

Sau tháng thứ nhất số tiền trong sổ còn lại là $N(1+r) - A$

Sau tháng thứ hai số tiền trong sổ còn lại là:

$$(N(1+r) - A)(1+r) - A = N(1+r)^2 - A((1+r) + 1)$$

Sau tháng thứ ba số tiền trong sổ còn lại là:

$$(N(1+r)^2 - A((1+r) + 1))(1+r) - A = N(1+r)^3 - A((1+r)^2 + 1 + r + 1)$$

Sau tháng thứ tư số tiền trong sổ còn lại là:

$$(N(1+r)^3 - A((1+r)^2 + 1 + r + 1))(1+r) - A = N(1+r)^4 - A((1+r)^3 + (1+r)^2 + (1+r) + 1)$$

Sau tháng thứ n số tiền trong sổ còn lại là:

$$N(1+r)^n - A((1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r) + 1) = N(1+r)^n - A \left(\frac{(1+r)^n - 1}{r} \right)$$

Nếu sau tháng thứ n số tiền trong sổ anh ta vừa hết thì:

$$N(1+r)^n - A \left(\frac{(1+r)^n - 1}{r} \right) = 0 \Rightarrow N(1+r)^n = A \left(\frac{(1+r)^n - 1}{r} \right) \Rightarrow A = \frac{N(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1}$$

Nhận xét: thực chất thì bài toán trên giống bài toán 3, vay trả góp, trong toán vay trả góp thì người vay nợ ngân hàng, còn trong bài toán rút tiền này thì ngân hàng nợ người vay. Nên bản chất cũng không có gì khác.

B.KỸ NĂNG SỬ LÝ BÀI TOÁN

Ví dụ 1: Anh A gửi tiếp kiệm hàng tháng với số tiền 20 000 000 đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,7% một tháng dự định gửi trong vào 36 tháng. Nhưng đến đầu tháng thứ 25 thì Anh A làm ăn thua lỗ không còn tiền để gửi vào ngân hàng nên buộc phải rút tiền ra khỏi ngân hàng đó. Biết số tiền thua lỗ là 500 000 000 đồng. Hỏi sau khi rút tiền ra ngân hàng thì số tiền T bao nhiêu? Công ty A còn nợ hay đã trả hết rồi?

A. Vẫn còn nợ, $T = 524\,343\,391$ đồng

B. Đã trả hết, $T = 548\,153\,795$ đồng

C. Đã trả hết , $T = 524\,343\,391$ đồngD. Vẫn còn nợ , $T = 548\,153\,795$ đồng .

Phân tích: Gọi T , m, r lần lượt là số tiền vốn lẫn lãi cuối tháng thứ n được lấy ra, số tiền gửi vào ngân hàng, lãi suất định kỳ của ngân hàng .

Gọi H là số tiền mà người đó có thể nhận được sau một tháng đã gửi .

Cuối tháng thứ nhất ($n=1$) thì : $T_1 = m + mr = m(r+1)$

Đầu tháng thứ 2 thì $H_2 = T_1 + m = m(r+1) + m = m[(r+1)+1] = \frac{m}{r}[(r+1)^2 - 1]$

Cuối tháng thứ 2 ($n=2$) thì $T_2 = H_2 + r.H_2 = (1+r)H_2 = \frac{m}{r}[(r+1)^2 - 1](r+1) =$

Đầu tháng thứ 3 thì $H_3 = T_2 + m = \frac{m}{r}[(r+1)^2 - 1](r+1) + m = \frac{m}{r}[(r+1)^3 - (r+1) + r] = \frac{m}{r}[(r+1)^3 - 1]$

Cuối tháng thứ 3 ($n=3$) thì $T_3 = H_3 + r.H_3 = (1+r)H_3 = \frac{m}{r}[(r+1)^3 - 1](r+1)$

.....

Đầu tháng thứ n thì $H_n = H_{n-1} + m = \frac{m}{r}[(r+1)^n - 1]$

Cuối tháng thứ n ($n=n$) thì $T_n = H_n + r.H_n = (1+r)H_n = \frac{m}{r}[(r+1)^n - 1](r+1)$

Áp dụng công thức trên ta có : $T = \frac{m}{r}[(r+1)^n - 1](r+1) = \frac{20.10^6}{\frac{0,7}{100}} \left[\left(\frac{0,7}{100} + 1 \right)^{24} - 1 \right] = 524\,343\,391$ đồng

Ví dụ 2: Ước mơ của anh T là mua được căn nhà ở Quận 1- Thành phố Hồ Chí Minh với giá T đồng. Với số tiền quá lớn buộc anh phải trả góp do giá nhà ở ngày càng cao nên lãi suất hàng tháng là $r\%$. Anh T đã lên kế hoạch dài hạn là mỗi tháng anh phải trả M đồng. Hỏi sau n tháng thì số tiền anh đã trả còn lại là :

A. $T(r+1)^n - M \cdot \left[\frac{(r+1)^n - (r+1)}{r} \right]$

B. $T(r+1)^n - M \cdot \left[\frac{(r+1)^{n+1} - (r+1)}{r} \right]$

C. $T(r+1)^{n+1} - M \cdot \left[\frac{(r+1)^{n+1} - (r+1)}{r} \right]$

D. $T(r+1)^{n+1} - M \cdot \left[\frac{(r+1)^n - (r+1)}{r} \right]$

Phân tích:

Gọi T, m, r lần lượt là số tiền vốn lần lãi cuối tháng thứ n được lấy ra, số tiền gửi vào ngân hàng, lãi suất định kì của ngân hàng.

Gọi H là số tiền mà người đó có thể nhận được sau một tháng đã gửi.

Cuối tháng thứ nhất ($n=1$) thì : $T_1 = m + mr = m(r+1)$

Đầu tháng thứ 2 thì $H_2 = T_1 + m = m(r+1) + m = m[(r+1)+1] = \frac{m}{r}[(r+1)^2 - 1]$

Cuối tháng thứ 2 ($n=2$) thì $T_2 = H_2 + r.H_2 = (1+r)H_2 = \frac{m}{r}[(r+1)^2 - 1](r+1) =$

Đầu tháng thứ 3 thì $H_3 = T_2 + m = \frac{m}{r}[(r+1)^2 - 1](r+1) + m = \frac{m}{r}[(r+1)^3 - (r+1) + r] = \frac{m}{r}[(r+1)^3 - 1]$

Cuối tháng thứ 3 ($n=3$) thì $T_3 = H_3 + r.H_3 = (1+r)H_3 = \frac{m}{r}[(r+1)^3 - 1](r+1)$

.....

Đầu tháng thứ n thì $H_n = H_{n-1} + m = \frac{m}{r}[(r+1)^n - 1]$

Cuối tháng thứ n ($n=n$) thì $T_n = H_n + r.H_n = (1+r)H_n = \frac{m}{r}[(r+1)^n - 1](r+1)$

Áp dụng công thức trên ta có : $T = \frac{m}{r}[(r+1)^n - 1](r+1) = \frac{20.10^6}{\frac{0,7}{100}} \left[\left(\frac{0,7}{100} + 1 \right)^{24} - 1 \right] = 524343391$ đồng

Ví dụ 3: Một giáo viên trường THPT-A với lương khởi điểm là 5000000 đồng/Tháng. Cứ mỗi tháng đi dạy thì giáo viên đó sẽ được tăng thêm 2% so với mức lương khởi điểm. Mỗi tháng giáo viên gửi vào ngân hàng x đồng với lãi suất $y\%$ trên tháng. Gọi T, H

lần lượt là số tiền cả vốn lẫn lãi sau đúng 1 năm rút khỏi ngân hàng, mức lương của giáo viên sau đúng 2 năm sau là ?

$$\text{A. } T = \frac{x}{y}(y+1)\left[(y+1)^{24} - 1\right]; H = \frac{5.102^{24}}{10^{40}}$$

$$\text{B. } T = \frac{x}{y}(y+1)\left[(y+1)^{12} - 1\right]; H = \frac{5.102^{23}}{10^{40}}$$

$$\text{C. } T = \frac{x}{y}(y+1)\left[(y+1)^{12} - 1\right]; H = \frac{5.102^{23}}{10^{40}}$$

$$\text{D. } T = \frac{x}{y}(y+1)\left[(y+1)^{24} - 1\right]; H = \frac{5.102^{24}}{10^{40}}.$$

Phân tích:

Gọi T, m, r lần lượt là số tiền vốn lẫn lãi cuối tháng thứ n được lấy ra, số tiền gửi vào ngân hàng, lãi suất định kì của ngân hàng.

Gọi H là số tiền mà người đó có thể nhận được sau một tháng đã gửi.

Cuối tháng thứ nhất ($n=1$) thì $T_1 = m + mr = m(r+1)$

Đầu tháng thứ 2 thì $H_2 = T_1 + m = m(r+1) + m = m[(r+1)+1] = \frac{m}{r}[(r+1)^2 - 1]$

Cuối tháng thứ 2 ($n=2$) thì $T_2 = H_2 + r.H_2 = (1+r)H_2 = \frac{m}{r}[(r+1)^2 - 1](r+1) =$

Đầu tháng thứ 3 thì $H_3 = T_2 + m = \frac{m}{r}[(r+1)^2 - 1](r+1) + m = \frac{m}{r}[(r+1)^3 - (r+1) + r] = \frac{m}{r}[(r+1)^3 - 1]$

Cuối tháng thứ 3 ($n=3$) thì $T_3 = H_3 + r.H_3 = (1+r)H_3 = \frac{m}{r}[(r+1)^3 - 1](r+1)$

.....

Đầu tháng thứ n thì $H_n = H_{n-1} + m = \frac{m}{r}[(r+1)^n - 1]$

Cuối tháng thứ n ($n=n$) thì $T_n = H_n + r.H_n = (1+r)H_n = \frac{m}{r}[(r+1)^n - 1](r+1)$

Áp dụng công thức trên ta có : $T = \frac{m}{r}[(r+1)^n - 1](r+1) = \frac{20.10^6}{\frac{0,7}{100}} \left[\left(\frac{0,7}{100} + 1 \right)^{24} - 1 \right] = 524343391$ đồng

Ví dụ 4: Trong một mùa lúa ở quê ba người trong một làng là anh Tiến, anh Dũng, anh Nhật đã lên kế hoạch góp vốn mua máy giặt đập liên hoàn KUBOTA DC70 với giá là 630000000 vn đồng. Số tiền ba người đã vay ngân hàng là 650000000 vn đồng lãi suất mỗi tháng là 0,5% tiền lãi mỗi tháng sẽ không cộng vào tiền đã vay. Hỏi số tiền phải trả sau 48 tháng vay cả vay lẫn lãi của mỗi người là bao nhiêu? nếu tỉ lệ góp vốn Tiến

Dũng Nhật lần lượt là $x:y:z$ so với số tiền phải trả. Biết x, y, z thỏa mãn biểu thức

$$Q(x, y, z) = \sum \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)(y+1)(z+1)} \text{ nhỏ nhất và } x = \frac{y+z}{y^2+z^2}.$$

A. Tiến : $\frac{65}{51} \cdot 10^7 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{48}$ Dũng : $\frac{65}{51} \cdot 10^7 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{48}$ Nhật : $\frac{1625}{51} \cdot 10^7 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{48}$

B. Tiến : $\frac{65}{3} \cdot 10^7 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{48}$ Dũng : $\frac{65}{3} \cdot 10^7 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{48}$ Nhật : $\frac{65}{3} \cdot 10^7 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{48}$

C. Tiến : $\frac{65}{51} \cdot 10^7 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{48}$ Dũng : $\frac{1625}{51} \cdot 10^7 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{48}$ Nhật : $\frac{1625}{51} \cdot 10^7 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{48}$

D. Tiến : $\frac{1625}{51} \cdot 10^7 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{48}$ Dũng : $\frac{65}{51} \cdot 10^7 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{48}$ Nhật : $\frac{1625}{51} \cdot 10^7 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{48}$.

Phân tích:

Gọi m, r, T lần lượt là số tiền vay ngân hàng, lãi suất hàng tháng, tổng số tiền vay còn lại sau mỗi tháng.

Sau khi hết tháng thứ nhất ($n=1$) thì : $T_1 = m + mr = m(r+1)$

Sau khi hết tháng thứ 2 ($n=2$) thì : $T_2 = m(r+1)^2$

.....

Tương tự đến hết tháng thứ 48 ($n=48$) thì : $T = m(1+r)^{48} = 65 \cdot 10^7 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{48}$

Ta có : $x, y, z > 0$ và $x = \frac{y+z}{y^2+z^2} \leq \frac{2}{y+z} \Leftrightarrow \frac{2}{x} \geq y+z$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có :

$$\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^2} \geq \frac{2}{(y+1)(z+1)} \geq \frac{8}{(y+z+2)^2} \geq \frac{2x^2}{(x+1)^2}$$

$$\frac{4}{(x+1)(y+1)(z+1)} \geq \frac{16}{(x+1)(y+z+2)^2} \geq \frac{4x^2}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow Q \geq \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2x^2}{(x+1)^2} + \frac{4x^2}{(x+1)^3} = \frac{2x^3 + 6x^2 + x + 1}{(x+1)^3}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + x + 1}{(x+1)^3}$ trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có :

$$f'(x) = \frac{10x-2}{(x+1)^4}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow Q = f(x) \geq f\left(\frac{1}{5}\right)$$

Do đó $x = \frac{1}{5}$ thì biểu thức $Q(x, y, z)$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$\text{Với } x = \frac{1}{5} \Rightarrow y = z = 5$$

$$\text{Số tiền vay của anh Tiến phải trả là : } \frac{xT}{(x+y+z)} = \frac{65}{51} \cdot \left(\frac{0,5}{100} + 1\right)^{48}$$

$$\text{Số tiền vay của anh Dũng phải trả là : } \frac{yT}{(x+y+z)} = \frac{1625}{51} \cdot \left(\frac{0,5}{100} + 1\right)^{48}$$

$$\text{Số tiền vay của anh Nhật phải trả là : } \frac{zT}{(x+y+z)} = \frac{1625}{51} \cdot \left(\frac{0,5}{100} + 1\right)^{48}$$

So sánh với đáp án thì đáp án đúng là đáp án C .

Ví dụ 5: Một bà mẹ Việt Nam anh hùng được hưởng số tiền là 4 triệu đồng trên một tháng (chuyển vào tài khoản của mẹ ở ngân hàng vào đầu tháng). Từ tháng 1 năm 2016 mẹ không đi rút tiền mà để lại ngân hàng và được tính lãi suất 1% trên một tháng. Đến đầu tháng 12 năm 2016 mẹ rút toàn bộ số tiền (gồm số tiền của tháng 12 và số tiền đã gửi từ tháng 1). Hỏi khi đó mẹ lĩnh về bao nhiêu tiền? (Kết quả làm tròn theo đơn vị nghìn đồng).

A. 50 triệu 730 nghìn đồng

B. 48 triệu 480 nghìn đồng

C. 53 triệu 760 nghìn đồng

D. 50 triệu 640 nghìn đồng

Phân tích:

Số tiền tháng 1 mẹ được nhận là 4 triệu, gửi đến đầu tháng 12 (được 11 kỳ hạn), vậy cả vốn lẫn lãi do số tiền tháng 1 nhận sinh ra là: $4 \cdot (1 + \frac{1}{100})^{11} = 4 \times 1,01^{11}$ (triệu đồng).

Tương tự số tiền tháng 2 nhận sẽ sinh ra: $4 \times 1,01^{10}$ (triệu đồng)

.....

Số tiền tháng 12 mẹ lĩnh luôn nên là: 4 (triệu đồng).

Vậy tổng số tiền mẹ lĩnh là: $4 \times 1,01^{11} + 4 \times 1,01^{10} + \dots + 4 \times 1,01 + 4 = 4 \frac{1 - 1,01^{12}}{1 - 1,01} \approx 50,730$ (50 triệu 730 nghìn đồng).

Ví dụ 6: Một người vay 100 triệu đồng, trả góp theo tháng trong vòng 36 tháng, lãi suất là 0,75%/ tháng. Số tiền người đó phải trả hàng tháng (trả tiền vào cuối tháng, số tiền làm tròn đến hàng nghìn) là:

- A. 3180000 B. 3179000 C. 75000000 D. 8099000

Vay A đồng, lãi suất r/ tháng. Hỏi hàng tháng phải trả bao nhiêu để sau n tháng thì hết nợ (trả tiền vào cuối tháng)?

Gọi a là số tiền trả hàng tháng

Cuối tháng 1: còn nợ $A(1+r) - a$

Cuối tháng 2: còn nợ $[A(1+r) - a](1+r) - a = A(1+r)^2 - a(1+r) - a$

Cuối tháng 3: còn nợ $[A(1+r)^2 - a(1+r) - a](1+r) - a = A(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r) - a$

....

Cuối tháng n: còn nợ $A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - a(1+r)^{n-2} - \dots - a = A(1+r)^n - a \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

Để hết nợ sau n tháng thì số tiền a phải trả là: $A(1+r)^n - a \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

Giải: Số tiền người đó phải trả hàng tháng: $\frac{1000000000,75\% \cdot (1+0,75\%)^{36}}{(1+0,75\%)^{36} - 1} \approx 3180000$

Ví dụ 7: Một anh công nhân được lĩnh lương khởi điểm là 700.000đ/tháng. Cứ ba năm anh ta lại được tăng lương thêm 7%. Hỏi sau 36 năm làm việc anh công nhân được lĩnh tổng cộng bao nhiêu tiền (lấy chính xác đến hàng đơn vị)

- A. 456.788.972 B. 450.788.972 C. 452.788.972 D. 454.788.972

+ Tiền lương 3 năm đầu: $T_1 = 36 \times 700 \text{ nghìn}$

+ Tiền lương 3 năm thứ hai: $T_2 = T_1 + T_1 \times 7\% = T_1(1+7\%)$

+ Tiền lương 3 năm thứ ba: $T_3 = T_1(1 + 7\%) + T_1(1 + 7\%) \times 7\% = T_1(1 + 7\%)^2$

+ Tiền lương 3 năm thứ tư: $T_4 = T_1(1 + 7\%)^3$

.....

+ Tiền lương 3 năm thứ 12: $T_{12} = T_1(1 + 7\%)^{11}$

$$\text{Tổng tiền lương sau 36 năm } T = T_1 + T_2 + \dots + T_{12} = \frac{u_1(1 - q^{12})}{1 - q} = \frac{T_1[1 - (1 + 7\%)^{12}]}{1 - (1 + 7\%)} = 450.788972$$

Ví dụ 8: Một học sinh muốn mua Iphone 7 có giá 20 triệu đồng. Vì không có tiền nên em giấu bố mẹ đi mua trả góp kì hạn theo tháng với lãi suất 5% mỗi tháng. Nếu em muốn sau 18 tháng trả hết nợ thì mỗi tháng em cần trả số tiền là m (kết quả được quy tròn về hàng nghìn đồng). Biết trong thời gian đó, lương của mẹ em mỗi tháng bằng 2,5 triệu, so sánh m với lương của mẹ bạn đó ta có

A. Ít hơn 958.000 đồng

B. Nhiều hơn 912.000 đồng

C. Ít hơn 789.000 đồng

D. Nhiều hơn 128.000 đồng

Đặt $T = 20$ triệu đồng.

Số tiền học sinh còn nợ sau 1 tháng là: $T + Tr - m = T(1+r) - m$

Số tiền còn nợ sau 2 tháng là: $[T(1+r) - m] + T(1+r) - m - m = T(1+r)^2 - m[(1+r) + 1]$

Số tiền còn nợ sau 3 tháng là: $T(1+r)^3 - m[(1+r)^2 + 1 + r + 1] = 0$

Số tiền còn nợ sau n tháng là: $T(1+r)^n - m[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + 1]$

$$\text{Do vậy } m = \frac{T(1+r)^{18}}{(1+r)^{18} + (1+r)^{17} + \dots + 1} = \frac{T(1+r)^{18} \cdot r}{(1+r)^{18} - 1} \Rightarrow m = \frac{T(1+0,05)^{18} \cdot 0,05}{1,05^{18} - 1} \approx 1,71 \text{ triệu đồng}$$

Do đó số tiền trả góp ít hơn $2,5 - 1,71 \approx 0,789$ triệu đồng.

C.BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1: Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn một quý với lãi suất 1,65% một quý. Hỏi sau bao nhiêu quý thì người đó có được ít nhất 20 triệu ?

1 A. 15 quý.

B. 16 quý.

C. 17 quý.

D. 18 quý.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức (2): $P_n = P_0(1+r)^n$

Với $P_0 = 15, P_n = 20, r = 1,65\%$. Tính n

Theo yêu cầu bài toán ta có: $P_n \geq 20 \Leftrightarrow 15(1 + 1,65\%)^n \geq 20 \Leftrightarrow n \geq \log_{1,0165} \left(\frac{20}{15} \right) \approx 17,5787 \Rightarrow n = 18$

Bài 2: Một người gửi tiết kiệm theo ngân hàng một số tiền là 500 triệu đồng, có kì hạn 3 tháng (sau 3 tháng mới được rút tiền), lãi suất 5,2% một năm, lãi nhập gốc (sau 3 tháng người đó không rút tiền ra thì tiền lãi sẽ nhập vào gốc ban đầu). Để có số tiền ít nhất là 561 triệu đồng thì người đó phải gửi bao nhiêu tháng ? (Kết quả làm tròn hàng đơn vị)3

- A. 25 tháng. B. 27 tháng. C. 26 tháng. D. 28 tháng.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức (2) $P_n = P_0(1 + r)^n$

Với $P_0 = 500, P_n = 561, r = \frac{5,2\%}{4} = 1,3\%$ một quý . Tính n

Theo yêu cầu bài toán ta có: $P_n = 561 \Leftrightarrow 500(1,013)^n = 561 \Leftrightarrow n = \log_{1,013} \left(\frac{561}{500} \right) \approx 8,9122 \Rightarrow n = 9$

Do đó cần gửi $3.9 = 27$ tháng.

Bài 3: Một học sinh 16 tuổi được hưởng tài sản thừa kế 200 000 000 VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong một ngân hàng với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh này chỉ nhận được số tiền này khi đã đủ 18 tuổi. Biết rằng khi đủ 18 tuổi, số tiền mà học sinh này được nhận sẽ là 228 980 000 VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn 1 năm của ngân hàng này là bao nhiêu ?4

- A. 6% / năm. B. 5% / năm. C. 7% / năm. D. 8% / năm.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức (2) $P_n = P_0(1 + r)^n$

Với $P_0 = 200000000, P_2 = 228980000, r = n = 2$. Tính r

Khi đó: $P_2 = 228.980.000 \Leftrightarrow 200.000.000(1 + r)^2 = 228.980.000 \Leftrightarrow (1 + r)^2 = 1,1499$
 $\Rightarrow r = \sqrt{1,1499} - 1 = 0,07 = 7\%$

Bài 4: Lãi suất của tiền gửi tiết kiệm của một ngân hàng thời gian qua liên tục thay đổi. Bạn Hùng gửi số tiền ban đầu là 5 triệu đồng với lãi suất 0,7% tháng. Chưa đầy một năm, thì lãi suất tăng lên 1,15% tháng trong nửa năm tiếp theo và bạn Hùng tiếp tục gửi. Sau nửa năm đó lãi suất giảm xuống còn 0,9% tháng. Bạn Hùng tiếp tục gửi thêm một số tháng tròn nữa. Biết rằng khi rút ra số tiền bạn Hùng nhận được cả vốn lẫn lãi là 5747478,359 đồng (chưa làm tròn). Hỏi bạn Hùng đã gửi tiết kiệm trong bao nhiêu tháng? (Trong suốt quá trình gửi thì lãi nhập gốc)⁵

- A. 15 tháng. B. 16 tháng. C. 14 tháng. D. 19 tháng.

Hướng dẫn giải

Gọi n là số tháng gửi với lãi suất 0,7% tháng và m là số tháng gửi với lãi suất 0,9% tháng.

Khi đó, số tiền gửi cả vốn lẫn lãi là: $5000000 \cdot (1 + 0,07)^n \cdot (1 + 0,115)^6 \cdot (1 + 0,09)^m = 5747478,359$

Do $n \in \mathbb{N}, n \in [1; 12]$ nên ta thử lần lượt các giá trị là 2, 3, 4, 5, ... đến khi tìm được $m \in \mathbb{N}$

Sử dụng MTCT ta tìm được $n = 5 \Rightarrow m = 4$. Do đó số tháng bạn Hùng đã gửi là 15.

Bài 5: Bố Hùng để dành cho Hùng 11000 USD để học đại học trong ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,73% một tháng. Mỗi tháng Hùng đến rút 60USD để sinh sống. Nếu mỗi tháng rút 200 USD thì sau bao lâu sẽ hết tiền? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)⁷

- A. 65 tháng. B. 81 tháng. C. 71 tháng. D. 75 tháng.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $P_{n+1} = a(1+r)^n - x \frac{(1+r)^n - 1}{r} \Leftrightarrow P_{n+1} = \frac{ar(1+r)^n - x[(1+r)^n - 1]}{r}$

Hết tiền trong ngân hàng suy ra $P_{n+1} = 0$

$$\Rightarrow \frac{11000 \times 0,73\% (1 + 0,73\%)^n - 60 \left[(1 + 0,73\%)^n - 1 \right]}{0,73\%} = 0$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln \left(\frac{-200}{11000 \times 0,0073 - 200} \right)}{\ln(1,0073)} \approx 71$$

Bài 6: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với kì hạn 3 tháng (1 quý), lãi suất 6% một quý theo hình thức lãi kép (lãi cộng với vốn). Sau đúng 6 tháng, người đó lại gửi thêm 100 triệu đồng với hình thức và lãi suất như trên. Hỏi sau 1 năm tính từ lần gửi đầu tiên người đó nhận số tiền gần với kết quả nào nhất?22

- A. 239 triệu đồng. B. 230 triệu đồng. C. 243 triệu đồng. D. 236 triệu đồng.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức (2) $P_n = P_0(1+r)^n$

Giai đoạn 1: Gửi 100 triệu : Áp dụng công thức trên với $P_0 = 100, r = 6\% = 0.06; n = 4$. Số tiền thu được sau 1 năm là: $P_4 = 100(1 + 0.06)^4$ triệu đồng.

Giai đoạn 2: Sau đúng 6 tháng gửi thêm 100 triệu : Áp dụng công thức trên với $P_0 = 100, r = 6\% = 0.06; n = 2$. Số tiền thu được sau 2 quý cuối năm là: $P_2 = 100(1 + 0.06)^2$ triệu đồng.

Vậy tổng số tiền người đó thu được sau một năm là: $P = P_4 + P_0 = 238,307696$ triệu đồng

Bài 7: Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi đơn, kì hạn 3 tháng với lãi suất 3% một quý. Hỏi người đó phải gửi trong ngân hàng ít nhất bao lâu, số tiền thu về hơn gấp hai số tiền vốn ban đầu?28

- A. 102 tháng. B. 103 tháng. C. 100 tháng. D. 101 tháng.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức lãi đơn ta có: $P_n = P_0(1 + nr)$, số tiền thu về hơn gấp hai lần số vốn ban đầu ta có: $P_n > 2P_0 \Leftrightarrow P_0(1 + n.3\%) > 2P_0 \Leftrightarrow n > \frac{100}{3}$ quý = 100 tháng

Suy ra để số tiền thu về hơn gấp hai số tiền vốn ban đầu cần gửi ít nhất 102 tháng.

Bài 8: Một sinh viên được gia đình gửi tiết kiệm số tiền vào ngân hàng với số tiền là 20 triệu đồng theo mức kì hạn 1 tháng với lãi suất tiết kiệm là 0,4%/tháng. Nếu mỗi tháng anh sinh viên rút ra một số tiền như nhau vào ngày ngân hàng tính lãi thì hàng tháng anh ta rút ra bao nhiêu tiền để sau 5 năm, số tiền vừa hết?30

A. 375.594,84 đồng. B. 357.549,84 đồng. C. 537.594,84 đồng. D. 573.594,84 đồng.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức đã thiết lập, với $k=r+1=1,004, n=60, M=2.10^6$

Sau 5 năm (60 tháng) ta có

$$B_{60} = 0 \Leftrightarrow 20.10^6 (1 + 0,004)^{60} - X \frac{1,004^{60} - 1}{1,004 - 1} = 0 \Rightarrow X \approx 375594,8402$$

Bài 9: Nam định mua một chiếc xe máy theo phương thức trả góp. Theo phương thức này sau một tháng kể từ khi nhận xe phải trả đều đặn mỗi tháng một lượng tiền nhất định nào đó, liên tiếp trong vòng 24 tháng. Giả sử giá xe máy thời điểm Nam mua là 16 triệu (đồng) và giả sử lãi suất công ty tài chính cho vay tiền là 1% một tháng trên số tiền chưa trả. Với mức phải trả hàng tháng gần với kết quả nào sau đây nhất thì việc mua trả góp là chấp nhận được ?³⁴

A. 755 ngàn mỗi tháng.

B. 751 ngàn mỗi tháng.

C. 826 ngàn mỗi tháng.

D. 861 ngàn mỗi tháng.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức 5b: $x = \frac{a(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1} \Rightarrow x = \frac{16(1+1\%)^{24} \times 1\%}{(1+1\%)^{24} - 1} = 753175,5556$ (đồng)

Bài 10: Một người gửi 6 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất 7,56% một năm. Hỏi sau bao nhiêu năm người gửi sẽ có ít nhất 12 triệu đồng từ số tiền gửi ban đầu? (giả sử lãi suất không thay đổi)⁴¹

A. 10 năm. B. 9 năm. C. 8 năm. D. 15 năm.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức lãi kép ta có số tiền cả vốn lẫn lãi người gửi sau n năm là

$$P_n = 6(1 + 7,56\%)^n = 6.1,0756^n \text{ (triệu đồng)}$$

Từ đó ta có : $n = \log_{1,0756} \frac{P_n}{6}$

Để có số tiền $P_n = 12$ triệu đồng thì phải sau một thời gian là: $n = \log_{1,0756} \frac{12}{6} \approx 9,5$ (năm)

Vậy sau 10 năm, người gửi sẽ có ít nhất 12 triệu đồng từ số vốn ban đầu 6 triệu đồng .

Bài 11: Ông B đến siêu thị điện máy để mua một cái laptop với giá 15,5 triệu đồng theo hình thức trả góp với lãi suất 2,5% một tháng. Để mua trả góp ông B phải trả trước 30% số tiền, số tiền còn lại ông sẽ trả dần trong thời gian 6 tháng kể từ ngày mua, mỗi lần trả cách nhau 1 tháng. Số tiền mỗi tháng ông B phải trả là như nhau và tiền lãi được tính theo nợ gốc còn lại ở cuối mỗi tháng. Hỏi, nếu ông B mua theo hình thức trả góp như trên thì số tiền phải trả nhiều hơn so với giá niêm yết là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất không đổi trong thời gian ông B hoàn nợ và hàng tháng ông B đều trả tiền đúng hạn. (Kết quả làm tròn đến chữ số hàng chục nghìn)4

- A. 1628000 đồng . B. 2325000 đồng . C. 1384000 đồng . D. 970000 đồng .

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức (2) $P_n = P_0(1+r)^n$

Với $P_0 = 200000000, P_2 = 228980000, r = n = 2$. Tính r

$$\text{Khi đó: } P_2 = 228.980.000 \Leftrightarrow 200.000.000(1+r)^2 = 228.980.000 \Leftrightarrow (1+r)^2 = 1,1499$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{1,1499} - 1 = 0,07 = 7\%$$

Bài 12: Anh A gửi tiết kiệm hàng tháng với số tiền 20 000 000 đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,7% một tháng dự định gửi trong vào 36 tháng . Nhưng đến đầu tháng thứ 25 thì Anh A làm ăn thua lỗ không còn tiền để gửi vào ngân hàng nên buộc phải rút tiền ra khỏi ngân hàng đó . Biết số tiền thua lỗ là 500 000 000 đồng . Hỏi sau khi rút tiền ra ngân hàng thì số tiền T bao nhiêu ? Công ty A còn nợ hay đã trả hết rồi ? 5

- A. Vẫn còn nợ , $T = 524\,343\,391$ đồng B. Đã trả hết , $T = 548\,153\,795$ đồng
C. Đã trả hết , $T = 524\,343\,391$ đồng D. Vẫn còn nợ , $T = 548\,153\,795$ đồng .

Hướng dẫn giải

$$\text{Áp dụng công thức trên ta có : } T = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r) = \frac{20 \cdot 10^6}{\frac{0,7}{100}} \left[\left(\frac{0,7}{100} + 1 \right)^{24} - 1 \right] = 524\,343\,391 \text{ đồng}$$

Bài 13: Sau 13 năm ra trường, thầy An đã tiết kiệm được cho mình số tiền 300 triệu đồng, thầy dự định sẽ dùng số tiền đó để mua một căn nhà. Nhưng hiện nay để mua được căn nhà như ý, thầy An cũng cần phải có 600 triệu đồng. Rất may một học trò cũ của thầy sau khi ra trường công tác đã lập gia đình và mua nhà ở thành phố nên đồng ý để thầy An ở lại căn nhà của mình trong khoảng thời gian tối đa 10 năm, đồng thời chỉ bán lại căn nhà trong khi khoảng thời gian đó thầy An giao đủ số tiền 600 triệu đồng. Sau

khi tính toán thầy quyết định gửi toàn bộ số tiền 300 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 9,1%/năm và lãi hàng năm nhập vào vốn. Hỏi phải mất thời gian tối thiểu bao nhiêu năm nữa thầy An mới mua được căn nhà này?

- A. 8 năm B. 6 năm C. 9 năm D. 7 năm

Hướng dẫn giải

Gọi x năm là thời gian cần để gửi ngân hàng ra 600 triệu, khi đó ta có $600 = 300(1 + 0,091)^x \Leftrightarrow x \approx 8$

.Vậy sau 8 năm thầy sẽ trả đủ.

Bài 14: Một người đầu tư 100 triệu đồng vào một công ty theo thể thực lãi kép với lãi suất 13% một năm. Hỏi nếu sau 5 năm mới rút lãi thì người đó thu được bao nhiêu tiền lãi ? (Giả sử rằng lãi suất hàng năm không thay đổi)

- A. $100[(1,13)^5 - 1]$ (triệu đồng) B. $100[(1,13)^5 + 1]$ (triệu đồng)
C. $100[(0,13)^5 - 1]$ (triệu đồng) D. $100(0,13)^5$ (triệu đồng)

Hướng dẫn giải

Ta có số tiền lãi là $100[(1 + 13\%)^5 - 1] = 100(1,13^5 - 1)$.

Bài 15: Nhằm tạo sân chơi có thưởng cho các em học sinh học tập trên website **tailieutoan.tk** . thầy **Lê Ngọc Linh** đã lập quỹ cho phần thưởng đó bằng cách gửi tiết kiệm vào ngân hàng một số tiền “ kha khá ” mỗi tháng vào tài khoản tiết kiệm của mình với lãi suất $x\%$ /tháng để có quỹ ngày tổng kết trao học bổng vinh danh các học sinh trên **tailieutoan.tk** đã có thành tích học tập tốt trong 9 tháng làm việc với học sinh trên website trong năm 2017 thì mỗi tháng thầy **Linh** gửi vào tài khoản tiết kiệm của mình 6 triệu đồng và số tiền ngày lấy quỹ là 60 triệu , (biết rằng số tiền được gửi định kỳ và đều đặn vào đầu mỗi tháng). Vậy hỏi lãi suất ngân hàng phải chi trả cho thầy **Linh** gần với giá trị nào sau đây nhất

- A. $x\%$ /tháng = 2,1%/tháng
B. $x\%$ /tháng = 1,7%/tháng
C. $x\%$ /tháng = 2,3%/tháng
D. $x\%$ /tháng = 1,9%/tháng

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức : gửi a đồng (lãi kép – tháng nào cũng gửi thêm tiền vào đầu mỗi tháng) với lãi suất $x\%/tháng$ tính số tiền thu được sau n tháng, ta có công thức tính như sau:

$$A = \frac{a}{x\%} (1 + x\%) \left[(1 + x\%)^n - 1 \right] \rightarrow 60 = \frac{6}{x\%} (1 + x\%) \left[(1 + x\%)^9 - 1 \right] \rightarrow x \approx 2,1.$$

Bài 16: Một người gửi ngân hàng với hình thức lãi kép theo lãi suất 12% / năm. Cứ mỗi tháng người đó gửi vào ngân hàng 10 triệu đồng. Số tiền người đó nhận được sau 2 năm (lấy gần đúng 2 chữ thập phân) là

- A. 272,43 triệu B. 292,34 triệu C. 279, 54 triệu D. 240 triệu

Hướng dẫn giải

Ta có: $A_n = A(1 + r) + \frac{(1 + r)^n - 1}{r} = 272,43$ triệu.