

TỔNG ÔN SỐ PHỨC
LỜI GIẢI CHI TIẾT 50 CÂU TRẮC NGHIỆM SỐ
PHỨC CHỌN LỘC TRONG CÁC ĐỀ
THI THỬ THPT QUỐC GIA – 2017

Tác giả - Nguyễn Thế Duy - <https://www.facebook.com/theduy1995>

CÁC CÔNG THỨC QUAN TRỌNG CẦN NẮM VỮNG

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$	$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$	$ z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2 $
$\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$	$ z = -z = \overline{z} $	$z \cdot \overline{z} = z ^2$
$ z_1 \cdot z_2 ^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2})$	$\left \frac{z_1}{z_2} \right = \frac{ z_1 }{ z_2 }$	$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2}$
$ z_1 - z_2 \leq z_1 - z_2 \leq z_1 + z_2 $	$ z_1 - z_2 \leq z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2 $	$- z \leq \{\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)\} \leq z $

45 CÂU TRẮC NGHIỆM + 5 CÂU VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn điều kiện $|z^2 + 4| = 2|z|$. Đặt $P = 8(b^2 - a^2) - 12$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $P = (|z| - 2)^2$. B. $P = (|z|^2 - 4)^2$. C. $P = (|z| - 4)^2$. D. $P = (|z|^2 - 2)^2$.

(THPT ĐẶNG THỨC HỨA - NGHỆ AN)

Lời giải

Cách 1. Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi \Rightarrow z^2 + 4 = a^2 - b^2 + 4 + 2abi$.

Khi đó, giả thiết $|z^2 + 4| = 2|z| \Leftrightarrow (a^2 - b^2 + 4)^2 + 4a^2b^2 = 4(a^2 + b^2)$

$$\Leftrightarrow 8(b^2 - a^2) = 16 - 4(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)^2$$

$$\Rightarrow P = (a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 + b^2) + 4 = |z|^4 - 4|z|^2 + 4 = (|z|^2 - 2)^2.$$

Cách 2. Từ giả thiết, ta có $|z^2 + 4|^2 = (2|z|)^2 \Leftrightarrow (z^2 + 4)(\overline{z^2} + 4) = 4|z|^2 = 4z \cdot \overline{z}$

$$\Leftrightarrow z^2 \cdot \overline{z^2} + 4z^2 + 4\overline{z^2} + 16 = 4z \cdot \overline{z} \Leftrightarrow (z \cdot \overline{z})^2 - 4z \cdot \overline{z} + 4 = -12 - 4(z^2 + \overline{z^2})$$

$$\Leftrightarrow (z \cdot \overline{z} - 2)^2 = -12 - 4(z^2 + \overline{z^2}) \Leftrightarrow -12 - 4(z^2 + \overline{z^2}) = (|z|^2 - 2)^2 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } z = a + bi \rightarrow \overline{z} = a - bi \Rightarrow z^2 + \overline{z^2} = 2(a^2 - b^2) \quad (2).$$

Từ (1), (2) suy ra $P = 8(b^2 - a^2) - 12 = (|z|^2 - 2)^2$. **Chọn D.**

Câu 2. Cho các số phức $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{2}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2}$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1} \right|$.

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

B. $\sqrt{2}$.

C. 2.

D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(THPT ĐẶNG THỨC HỨA - NGHỆ AN)

Lời giải

Cách 1. Ta có $\frac{2}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2} \Leftrightarrow \frac{z_1 + 2z_2}{z_1 z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2} \Leftrightarrow (z_1 + 2z_2)(z_1 + z_2) = z_1 z_2$.

$$\Leftrightarrow (z_1)^2 + 2z_1 z_2 + 2(z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + 2\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = i - 1 \text{ hoặc } \frac{z_1}{z_2} = -1 - i.$$

Khi đó $P = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = |i - 1| + \left|\frac{1}{i - 1}\right| = |i - 1| + \frac{1}{|i - 1|} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Cách 2. Chọn $z_1 = i \Rightarrow \frac{2}{i} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{i + z_2} \Rightarrow z_2 = \frac{1 - i}{2} \Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{2} \Rightarrow P = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. **Chọn D.**

Câu 3. Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\frac{iz - (3i + 1)\bar{z}}{1 + i} = |z|^2$. Số phức $w = \frac{26}{9}iz$ có môđun là

A. 9.

B. $\sqrt{26}$.

C. $\sqrt{6}$.

D. 5.

(THPT PHẠM HỒNG THÁI - HÀ NỘI)

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), khi đó giả thiết $\Leftrightarrow i(x + yi) - (3i + 1)(x - yi) = (1 + i)(x^2 + y^2)$.

$$\Leftrightarrow xi - y - 3xi - 3y - x + yi = -x - 4y + (y - 2x)i = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)i.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x - 4y = x^2 + y^2 & (1) \\ -2x + y = x^2 + y^2 & (2) \end{cases}. \text{ Lấy } (1) - (2), \text{ ta được } -x - 4y - (-2x + y) = 0 \Leftrightarrow x = 5y.$$

Thế $x = 5y$ vào phương trình (1), ta có $26y^2 = -9y \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = -\frac{9}{26} \Rightarrow x = -\frac{45}{26} \end{cases}$

Vậy $z = x + yi = -\frac{45}{26} - \frac{9}{26}i \Rightarrow |w| = \left|\frac{26}{9}i\left(-\frac{45}{26} - \frac{9}{26}i\right)\right| = |1 - 5i| = \sqrt{26}$. **Chọn C.**

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = |z + i| + |z - 2 - i|.$$

A. $\max T = 8\sqrt{2}$.

B. $\max T = 4$.

C. $\max T = 4\sqrt{2}$.

D. $\max T = 8$.

(THPT CHU VĂN AN - HÀ NỘI)

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có $|z - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |x - 1 + yi| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x + 1 \quad (*)$$

Lại có $T = |z + i| + |z - 2 - i| = |x + (y + 1)i| + |x - 2 + (y - 1)i|$

$$= \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5}$$

Kết hợp với (*), ta được $T = \sqrt{2x + 2y + 2} + \sqrt{6 - 2x - 2y} = \sqrt{2(x + y) + 2} + \sqrt{2 - 2(x + y)}$

Đặt $t = x + y$, khi đó $T = f(t) = \sqrt{2t + 2} + \sqrt{6 - 2t}$ với $t \in [-1; 1]$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+2}} - \frac{1}{\sqrt{6-2t}}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow f(t)_{\max} = f(1) = 4$. **Chọn B.**

Câu 5. Tìm môđun của số phức z biết $z - 4 = (1+i)|z| - (4+3z)i$.

A. $|z| = 1$.

B. $|z| = 4$.

C. $|z| = 2$.

D. $|z| = \frac{1}{2}$.

(SỞ GD&ĐT NAM ĐỊNH)

Lời giải

Cách 1. Từ giả thiết, ta có $z - 4 = |z| + i|z| - 4i - 3zi \Leftrightarrow z(1+3i) = |z| + 4 + (|z|-4)i$ (*)

Lấy môđun hai vế của (*), ta được $|z(1+3i)| = ||z| + 4 + (|z|-4)i|$

$$\Leftrightarrow |z| \cdot |1+3i| = \sqrt{(|z|+4)^2 + (|z|-4)^2} \Leftrightarrow |z|\sqrt{10} = \sqrt{(|z|+4)^2 + (|z|-4)^2}$$

$$\Leftrightarrow 10|z|^2 = (|z|+4)^2 + (|z|-4)^2 \Leftrightarrow 8|z|^2 = 32 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Rightarrow |z| = 2. \text{ **Chọn C.**}$$

Cách 2. Ta biến đổi $z - 4 = (1+i)|z| - (4+3z)i \Leftrightarrow z = \frac{(1+i)|z| - 4i + 4}{1+3i}$

Thử lần lượt với các đáp án, ta thấy

- $|z| = 1 \rightarrow z = \frac{1+i-4i+4}{1+3i} = \frac{5-3i}{1+3i} = -\frac{2}{5} - \frac{9}{5}i \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{85}}{5} \neq 1$ (loại).

- $|z| = 4 \rightarrow z = \frac{4(1+i)-4i+4}{1+3i} = \frac{8}{1+3i} = \frac{4}{5} - \frac{12}{5}i \Rightarrow |z| = \frac{4\sqrt{10}}{5} \neq 1$ (loại).

- $|z| = 2 \rightarrow z = \frac{2(1+i)-4i+4}{1+3i} = \frac{6-2i}{1+3i} = -2i \Rightarrow |z| = 2$ (chọn).

•

Câu 6. Cho số phức $z \neq 0$ sao cho z không phải là số thực và $w = \frac{z}{1+z^2}$ là số thực. Tính

giá trị biểu thức $\frac{|z|}{1+|z|^2}$.

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{3}$.

(THPT CHUYÊN QUỐC HỌC - HUẾ)

Lời giải

Cách 1. Tư duy nhanh. w là số thực $\rightarrow \frac{1}{w}$ là số thực $\rightarrow z + \frac{1}{z}$ là số thực.

Mà dễ thấy $z + \bar{z}$ là số thực nên $\bar{z} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow \bar{z} \cdot z = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Rightarrow \frac{|z|}{1+|z|^2} = \frac{1}{2}$.

Cách 2. Ta có biến đổi $\frac{z}{1+z^2} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2} \Leftrightarrow z + z \cdot \bar{z}^2 = \bar{z} + \bar{z} \cdot z^2 \Leftrightarrow z - \bar{z} = (z - \bar{z}) \cdot z \cdot \bar{z}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - \bar{z} = 0 \\ z \cdot \bar{z} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow \frac{|z|}{1+|z|^2} = \frac{1}{2}.$$

Cách 3. Chọn $w = \frac{z}{1+z^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (z-1)^2 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow \frac{|z|}{1+|z|^2} = \frac{1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 7. Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M' . Số phức $z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N' . Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

(THPT CHUYÊN LÀO CAI)

Lời giải

Gọi $M(x; y) \rightarrow M'(x; -y)$ và $(4+3i)z = 4x-3y + (3x+4y)i \Rightarrow \begin{cases} N(4x-3y; 3x+4y) \\ N'(4x-3y; -3x-4y) \end{cases}$

Dễ thấy $MM' \parallel NN'$ vì cùng vuông góc với Ox nên để $MM'N'N$ là hình chữ nhật.

Khi và chỉ khi $\begin{cases} MM' = NN' \\ MN = M'N' \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow z=x-xi \Rightarrow |z+4i-5| = \sqrt{(x-5)^2 + (x-4)^2} \\ MN \parallel Ox \end{cases}$

Ta có $(x-5)^2 + (x-4)^2 = \frac{1}{2}(2x-9)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |z+4i-5|_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **Chọn C.**

Câu 8. Tính môđun của số phức z , biết $\frac{|z|^2}{z} + iz + \frac{z-i}{1-i} = 0$.

- A. 2. B. $\frac{\sqrt{13}}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{9}$.

(THPT YÊN MÔ A - NINH BÌNH)

Lời giải

Dễ thấy $z\bar{z} = |z|^2 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{|z|^2}{z}$, khi đó giả thiết $\Leftrightarrow iz + \bar{z} + \frac{z-i}{1-i} = 0 \Leftrightarrow iz + \bar{z} + \frac{(1+i)(z-i)}{2} = 0$
 $\Leftrightarrow 2iz + 2\bar{z} + z - i + iz - i^2 = 0 \Leftrightarrow (3i+1)z + \bar{z} = i-1$ (*)

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) suy ra $\bar{z} = x - yi$, do đó (*) $\Leftrightarrow (3i+1)(x+yi) + x - yi = i-1$.

$$\Leftrightarrow 3xi - 3y + x + yi + x - yi = i - 1 \Leftrightarrow 2x - 3y + 3xi = i - 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy $z = \frac{i}{3} \Rightarrow |z| = \left|\frac{i}{3}\right| = \frac{1}{3}$. **Chọn C.**

Câu 9. Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. B. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$. C. $|z| > 2$. D. $|z| < \frac{1}{2}$.

(THPT NHÂN CHÍNH - HÀ NỘI)

Lời giải

Cách 1. Từ giả thiết, ta có $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i \Leftrightarrow (1+2i)|z| + 2 - i = \frac{\sqrt{10}}{z}$
 $\Leftrightarrow |z| + 2|z|i + 2 - i = \frac{\sqrt{10}}{z} \Leftrightarrow |z| + 2 + (2|z|-1)i = \frac{\sqrt{10}}{z}$ (*)

$$= 2|i-1| + |z-i| = 2\sqrt{2} + |z-i| \Leftrightarrow |z-i| \leq 0 \Rightarrow z=i \Rightarrow |z|=1.$$

Cách 2. Sử dụng hình học, giả sử điểm $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) có điểm biểu diễn là $M(x; y)$.

Số phức $z-1$ có điểm biểu diễn là $A(x-1; y)$, $z-i$ có điểm biểu diễn là $B(x; y-1)$.

Ta có $2|z-1| + 3|z-i| \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2.OA + 3.OB \leq 2.AB$ (1) vì $\overline{AB} = (1; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$.

Mặt khác $2.OA + 3.OB = 2.(OA + OB) + OB \geq 2.AB + OB$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $2.AB \geq 2.AB + OB \Leftrightarrow OB \leq 0 \Rightarrow OB = 0 \Rightarrow O \equiv B(0; 0) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow z=i$

Vậy môđun của số phức z là $|z| = |i| = 1$. **Chọn D.**

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$.

Tính $\min |w|$, với số phức $w = z - 2 + 2i$.

A. $\min |w| = \frac{3}{2}$.

B. $\min |w| = 2$.

C. $\min |w| = 1$.

D. $\min |w| = \frac{1}{2}$.

(THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH - ĐỒNG NAI)

Lời giải

Ta có $z^2 - 2z + 5 = (z-1)^2 + 4 = (z-1)^2 - (2i)^2 = (z-1+2i)(z-1-2i)$.

Khi đó, giả thiết $\Leftrightarrow |(z-1+2i)(z-1-2i)| = |(z-1+2i)(z+3i-1)| \Leftrightarrow \begin{cases} z=1-2i \\ |z-1-2i| = |z+3i-1| \end{cases}$

TH1. Với $z=1-2i$, ta có $w = z - 2 + 2i = 1 - 2i - 2 + 2i = -1 \Rightarrow |w| = 1$.

TH2. Với $|z-1-2i| = |z+3i-1|$ (*), đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có

(*) $\Leftrightarrow |x-1+(y-2)i| = |x-1+(y+3)i| \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$.

Do đó $w = z - 2 + 2i = x - \frac{1}{2}i - 2 + 2i = x - 2 + \frac{3}{2}i \Rightarrow |w| = \sqrt{(x-2)^2 + \frac{9}{4}} \geq \frac{3}{2}$. **Chọn A.**

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = |z+1| + 2|z-1|.$$

A. $\max T = 2\sqrt{5}$.

B. $\max T = 2\sqrt{10}$.

C. $\max T = 3\sqrt{5}$.

D. $\max T = 3\sqrt{2}$.

(THPT CHUYÊN NGOẠI NGỮ - HÀ NỘI)

Lời giải

Cách 1. Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow M(x; y)$.

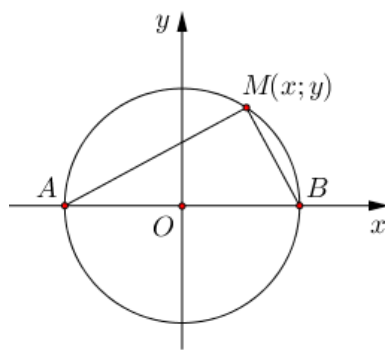
Và $A(-1; 0), B(1; 0)$. Ta có $|z|=1 \Rightarrow |x+yi|=1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính AB .

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = AB^2 = 4$. Khi đó, theo Bunhiacopski, ta có

$$T = MA + 2MB \leq \sqrt{(1^2 + 2^2)(MA^2 + MB^2)} = \sqrt{5.4} = 2\sqrt{5}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $\max T = 2\sqrt{5}$. **Chọn A.**



Cách 2. Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow |z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ và $|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

Mặt khác $|z|=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, khi đó

$$\begin{aligned}
T &= \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\
&\leq \sqrt{(1^2 + 2^2) \left[(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 \right]} \\
&= \sqrt{10(x^2 + y^2 + 1)} = \sqrt{10 \cdot 2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \max T = 2\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Câu 14. Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn $|2z - i| = |2 + iz|$, biết $|z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2|$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $P = \sqrt{2}$.

C. $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $P = \sqrt{3}$.

(THPT THANH CHƯƠNG I - NGHỆ AN)

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có $|2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow |2x + (2y - 1)i| = |2 - y + xi|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + (2y - 1)^2} = \sqrt{(2 - y)^2 + x^2} \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 - 4y + 1 = 4 - 4y + y^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1. \text{ Sử dụng công thức (chứng minh ở câu 16)}$$

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{2(|z_1|^2 + |z_2|^2) - |z_1 - z_2|^2} = \sqrt{3}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 15. Cho ba số phức $z_1; z_2; z_3$ thỏa mãn điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Tính giá trị biểu thức $A = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

A. 1.

B. 0.

C. -1.

D. $1 + i$.

(THPT CHUYÊN BIÊN HÒA - HÀ NAM)

Lời giải

$$\text{Ta có } A = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = -2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)$$

$$= -2z_1z_2z_3 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) = -2z_1z_2z_3 \left(\frac{|z_1|}{z_1} + \frac{|z_2|}{z_2} + \frac{|z_3|}{z_3} \right) = -z_1z_2z_3 (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3)$$

$$\text{Mặt khác } z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = 0 \text{ suy ra } A = 0. \text{ Chọn B.}$$

Câu 16. Với hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.

A. $P = 5 + 3\sqrt{5}$.

B. $P = 2\sqrt{26}$.

C. $P = 4\sqrt{6}$.

D. $P = 34 + 3\sqrt{2}$.

(THPT CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN - LẦN 4)

Lời giải

✪ **Bổ đề.** Cho hai số phức z_1 và z_2 , ta luôn có $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ (*).

Chứng minh. Sử dụng công thức $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$ và $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Khi đó

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\
&= z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot \bar{z}_2 + z_1 \cdot \bar{z}_1 - z_1 \cdot \bar{z}_2 - \bar{z}_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot \bar{z}_2 \\
&= 2(z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \rightarrow \text{đpcm.}
\end{aligned}$$

✪ **Áp dụng** (*), ta được $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 4 \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = 4 - (\sqrt{3})^2 = 1 \Rightarrow |z_1 - z_2| = 1$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được $P = |z_1| + |z_2| \leq \sqrt{2(|z_1|^2 + |z_2|^2)} = 2\sqrt{26}$. **Chọn B.**

Câu 17. Cho $P(z)$ là một đa thức với hệ số thực. Nếu số phức z thỏa mãn $P(z) = 0$ thì
A. $P(|z|) = 0$. **B.** $P\left(\frac{1}{z}\right) = 0$. **C.** $P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = 0$. **D.** $P(\bar{z}) = 0$.
 (THPT CHUYÊN TỈNH HÀ NAM)

Lời giải

Chọn hàm số $P(z) = z^2 - 2z + 5$. Phương trình $P(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + 2i \\ z = 1 - 2i \end{cases}$

Xét với số phức $z = 1 + 2i$, ta có

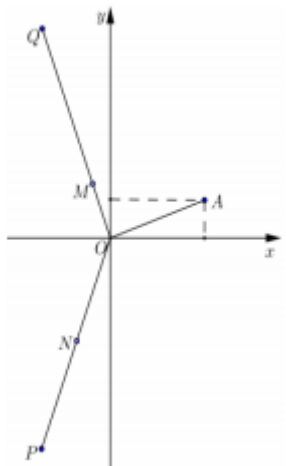
- $|z| = |1 + 2i| = \sqrt{5}$ suy ra $P(|z|) = |z|^2 - 2|z| + 5 = (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 5 = 10 - 2\sqrt{5} \neq 0$.
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + 2i} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ suy ra $P\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} + 5 = \frac{112}{25} + \frac{16}{25}i \neq 0$.
- $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{1 - 2i} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ suy ra $P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{\bar{z}^2} - \frac{2}{\bar{z}} + 5 = \frac{112}{25} - \frac{16}{25}i \neq 0$.
- $\bar{z} = 1 - 2i$ suy ra $P(\bar{z}) = \bar{z}^2 - 2\bar{z} + 5 = (1 - 2i)^2 - 2(1 - 2i) + 5 = 0$. **Chọn D.**

Câu 18. Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 1$. Đặt $A = \frac{2z - i}{2 + iz}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $|A| \leq 1$. **B.** $|A| \geq 1$. **C.** $|A| < 1$. **D.** $|A| > 1$.
 (THPT CHUYÊN HÀ NAM)

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $A = \frac{2z - i}{2 + iz} \Leftrightarrow A(2 + iz) = 2z - i \Leftrightarrow 2A + Azi = 2z - i$
 $\Leftrightarrow 2A + i = z(Ai - 2) \Leftrightarrow z = \frac{2A + i}{Ai - 2}$. Mà $|z| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{2A + i}{Ai - 2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |2A + i| \leq |Ai - 2|$ (*).
 Đặt $A = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), khi đó (*) $\Leftrightarrow |2x + (2y + 1)i| \leq |-y - 2 + xi|$
 $\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + (2y + 1)^2} \leq \sqrt{(y + 2)^2 + x^2} \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 4y + 1 \leq x^2 + y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$.
 Vậy môđun của $A = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$. **Chọn A.**

Câu 19. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z . Biết rằng trong hình vẽ bên, điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{1}{iz}$ là một trong bốn điểm M, N, P, Q . Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là
A. điểm Q . **B.** điểm M .
C. điểm N . **D.** điểm P .
 (THPT CHUYÊN ĐH VINH LẦN 1)



Đặt $z = x + yi$ ($x, y > 0$), khi đó $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ và $x > y$ (hình vẽ)

Ta có $w = \frac{1}{iz} = -\frac{i}{z} = -\frac{i}{x + yi} = -\frac{i(x - yi)}{(x + yi)(x - yi)} = -\frac{y + xi}{x^2 + y^2} = -2y - 2xi$

Vì $x, y > 0$ nên điểm biểu diễn số phức w là $(-2y; -2x)$ đều có hoành độ, tung độ âm.

Đồng thời $x > y \Leftrightarrow -2y > -2x \Rightarrow x_w < y_w < 0$ và $|w| = 2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} = 2|z|$

Dựa vào hình vẽ, điểm P chính là điểm cần tìm vì điểm N tuy thỏa mãn $x_w < y_w < 0$ nhưng độ dài ON xấp xỉ bằng độ dài OA . **Chọn D.**

Câu 20. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 6 + 8i| = 5$ và có môđun nhỏ nhất.

Tính tổng $x + y$.

- A. $x + y = -3$. B. $x + y = -1$. C. $x + y = 1$. D. $x + y = 2$.

(SỞ GD&ĐT QUẢNG NAM)

Lời giải

Dựa vào ví dụ, ta phát triển dạng toán Min – Max số phức như sau

Tập hợp các điểm $M(z)$ thỏa mãn điều kiện $|z - (a + bi)| = R$ ($R > 0$) là đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính R .

Chứng minh. Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Theo giả thiết $|z - (a + bi)| = R \Leftrightarrow |(x - a) + (y - b)i| = R$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Vậy tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính R .

Ví dụ 21. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = \sqrt{5}$. Tìm $\max|z|$.

- A. $\max|z| = 3\sqrt{5}$. B. $\max|z| = 5$. C. $\max|z| = \sqrt{5}$. D. $\max|z| = \sqrt{13}$.

Hướng dẫn giải.

Tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn (C) có tâm $I(2; 4)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Vậy $\max|z| = OM = OI + R = \sqrt{2^2 + 4^2} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$. **Chọn A.**

*** Hỏi thêm:**

a) Tìm $\min|z|$.

$$\min|z| = ON = OI - R = \sqrt{2^2 + 4^2} - \sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

b) Tìm số phức z có môđun lớn nhất, nhỏ nhất.

Phương trình đường thẳng OI là $y = 2x$.

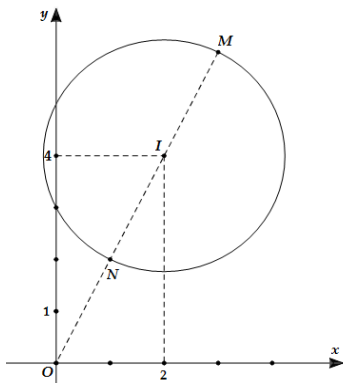
Tọa độ hai điểm M, N là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 2x \\ (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 5x^2 - 20x + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases}$$

Số phức z có môđun lớn nhất là $z = 3 + 6i$ tương ứng với điểm $M(3; 6)$.

Số phức z có môđun nhỏ nhất là $z = 1 + 2i$ tương ứng với điểm $N(1; 2)$.

Ví dụ 22. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 5i| \leq 3$. Nếu số phức z có môđun nhỏ nhất thì phần ảo bằng bao nhiêu?



A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

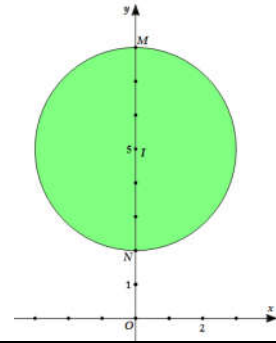
Hướng dẫn giải.

Tập hợp các điểm $M(z)$ là hình tròn (C) tâm $I(0;5)$

và bán kính $R=3$.

Số phức z có môđun nhỏ nhất là $z=2i$ ứng với điểm $N(0;2)$.

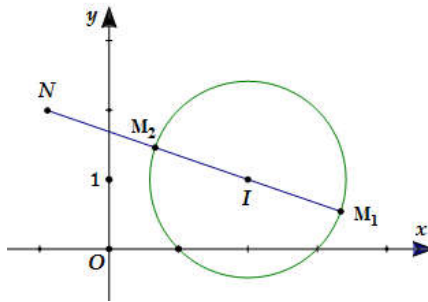
Chọn C.



Tổng quát. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-z_1|=r_1$ ($r_1>0$). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_2|$.

Gọi $I(z_1)$; $N(z_2)$ và $M(z)$. Tính $IN=|z_1-z_2|=r_2$.

Khi đó, $\max P=NM_1=r_1+r_2$ và $\min P=NM_2=|r_1-r_2|$.



Áp dụng.

Câu 1. (THPT CHUYÊN KHTN – LẦN 1) Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|(1+i)z+1-7i|=\sqrt{2}$. Tìm $\max|z|$.

A. $\max|z|=4$.

B. $\max|z|=3$.

C. $\max|z|=7$.

D. $\max|z|=6$.

Hướng dẫn giải.

Ta có $|(1+i)z+1-7i|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |1+i|\left|z+\frac{1-7i}{1+i}\right|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z-(3+4i)|=1$.

Vì $|(3+4i)-0|=5$ nên $\max|z|=r_1+r_2=1+5=6$. **Chọn D.**

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết rằng z thỏa mãn điều kiện $\left|\frac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=1$.

A. $\max|z|=1$.

B. $\max|z|=2$.

C. $\max|z|=\sqrt{2}$.

D. $\max|z|=3$.

Hướng dẫn giải.

Ta có $\left|\frac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=1 \Leftrightarrow |-iz+1|=1 \Leftrightarrow |-i|\left|z+\frac{1}{-i}\right|=1 \Leftrightarrow |z-(-i)|=1$.

Vì $|(-i)-0|=1$ nên $\max|z|=r_1+r_2=1+1=2$. **Chọn B.**

Câu 3. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$. Biết rằng số phức $z=x+yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) có môđun nhỏ nhất. Tính $P=x^2+y^2$.

A. $P=10$.

B. $P=8$.

C. $P=16$.

D. $P=26$.

Hướng dẫn giải.

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có $|z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 4)i| = |x + (y - 2)i|$
 $\Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2 - 4y + 4$
 $\Leftrightarrow 4x + 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - x$.

Do đó $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (4 - x)^2} = \sqrt{2x^2 - 8x + 16} = \sqrt{2(x - 2)^2 + 8} \geq 2\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2$. Vậy $P = 2^2 + 2^2 = 8$. **Chọn B.**

Câu 4. (ĐỀ THPT LẦN 5 – 2017) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 4| + |z + 4| = 10$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là

A. 10 và 4

B. 5 và 4

C. 4 và 3.

D. 5 và 3.

Hướng dẫn giải.

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết, ta có $|z - 4| + |z + 4| = 10$.

$$\Leftrightarrow |(x - 4) + yi| + |(x + 4) + yi| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 4)^2 + y^2} = 10 \quad (*)$$

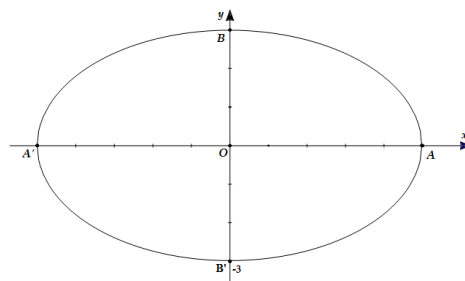
Gọi $M(x; y)$, $F_1(-4; 0)$ và $F_2(4; 0)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10$ nên tập hợp các điểm $M(z)$ là đường elip (E) .

Ta có $c = 4$; $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$ và $b^2 = a^2 - c^2 = 9$.

Do đó, phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Vậy $\max|z| = OA = OA' = 5$ và $\min|z| = OB = OB' = 3$. **Chọn D.**



Câu 5. Biết số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn đồng thời điều kiện $|z - (3 + 4i)| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z|$.

A. $|z| = \sqrt{33}$.

B. $|z| = 50$.

C. $|z| = \sqrt{10}$.

D. $|z| = 5\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải.

Tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn (C) có tâm $I(3; 4)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= |(x + 2) + yi|^2 - |x + (y - 1)i|^2 = (x + 2)^2 + y^2 - [x^2 + (y - 1)^2] \\ &= 4x + 2y + 3 \Leftrightarrow 4x + 2y + 3 - P = 0 \quad (\Delta). \end{aligned}$$

Ta tìm P sao cho đường thẳng Δ và đường tròn (C) có điểm chung $\Leftrightarrow d(I; \Delta) \leq R$.

$$\Leftrightarrow \frac{|12 + 8 + 3 - P|}{\sqrt{20}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow |23 - P| \leq 10 \Leftrightarrow -10 \leq 23 - P \leq 10 \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33.$$

$$\text{Do đó } \max P = 33. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 30 = 0 \\ (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -5 \end{cases}.$$

Vậy $|z| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 23. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$.

A. $P = 1 - i$.

B. $P = -1 - i$.

C. $P = -1$.

D. $P = 1 + i$.

(SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH)

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_1}{z_2} - 1 \right| = 1$.

$$\text{Đặt } w = \frac{z_1}{z_2} = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}), \text{ khi đó } \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } P = w^2 + \frac{1}{w^2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)^2 = -1. \text{ Chọn C.}$$

Câu 24. Tính tích môđun của tất cả các số phức z thỏa mãn $|2z - 1| = |\bar{z} + 1 + i|$, đồng thời điểm biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ thuộc đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

A. $\sqrt{5}$.

B. 3.

C. $3\sqrt{5}$.

D. 1.

(SỞ GD&ĐT THANH HÓA)

Lời giải

Đặt $z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$, khi đó $|2z - 1| = |\bar{z} + 1 + i| \Leftrightarrow |2x - 1 + 2yi| = |x + 1 - (y - 1)i|$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 + 4y^2 = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 6x + 2y - 1 = 0 \quad (1).$$

Mà điểm biểu diễn $M_{(z)} \in (C): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \quad (2)$.

Lấy $(1) - 3 \cdot (2)$, ta được $3x^2 + 3y^2 - 6x + 2y - 1 - 3x^2 - 3y^2 + 6x + 6y + 9 = 0 \Leftrightarrow y = -1$

Thế $y = -1$ vào phương trình (2) , ta có

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -i \\ z_2 = 2 - i \end{cases} \Rightarrow |z_1| \cdot |z_2| = |-i| \cdot |2 - i| = \sqrt{5}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 25. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|, w = iz + 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|w|$ là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. 2.

D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(THPT CHUYÊN ĐH VINH - LẦN 2)

Lời giải

Đặt $z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$, khi đó $z + 2 - 2i = a + 2 + (b - 2)i$ và $z - 4i = a + (b - 4)i$.

Nên ta có $(a + 2)^2 + (b - 2)^2 = a^2 + (b - 4)^2 \Leftrightarrow a + b = 2 \Leftrightarrow b = 2 - a$

Khi đó $w = iz + 1 = (a + bi)i + 1 = 1 - b + ai \Rightarrow |w| = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2} = \sqrt{a^2 + (a - 1)^2}$.

Dễ thấy $a^2 + (a - 1)^2 = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |w| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \min_{|w|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn A.**

Câu 26. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $P = z_1^{2017} + z_2^{2017}$.

A. $P = 1$.

B. $P = -1$.

C. $P = 0$.

D. $P = 2$.

Lời giải

Ta có $z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z^3 = 1 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow P = (z_1)^{2017} + (z_2)^{2017} = 2$. **Chọn D.**

Câu 27. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + 3i)z - (1 + 2i)\bar{z} = 7 - i$. Tìm môđun của z .

- A. $|z| = \sqrt{5}$. B. $|z| = 1$. C. $|z| = \sqrt{3}$. D. $|z| = 2$.

Lời giải

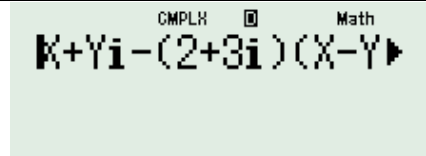
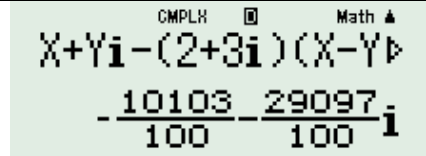
Cách 1. Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), khi đó giả thiết trở thành

$$\begin{aligned} Gt &\Leftrightarrow (2 + 3i)(a + bi) - (1 + 2i)(a - bi) = 7 - i \\ &\Leftrightarrow a - 5b + (a + 3b)i = 7 - i \Leftrightarrow \begin{cases} a - 5b = 7 \\ a + 3b = -1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow z = 2 - i \Rightarrow |z| = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Cách 2. Xử lý bằng casio giống bài toán sau: Cho số phức $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$. Tích phần thực và phần ảo của số phức z bằng

- A. 2. B. -1. C. 1. D. -2.

Đặt $z = X + Yi \rightarrow \bar{z} = X - Yi$. Khi đó $w = X + Yi - (2 + 3i)(X - Yi) - 1 + 9i = 0$ (*).

Thao tác trên máy tính	Màn hình hiển thị
Ấn MODE $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ Đưa về tính số phức. Nhập vế trái của phương trình (*). $X + Yi - (2 + 3i)(X - Yi) - 1 + 9i$	
Sau đó, gán giá trị $X = 100, Y = 0,01$. Ấn CALC $\rightarrow$ 1 0 0 $\rightarrow$ CALC $\rightarrow$ 0 $\rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ 0 . 0 1 $\rightarrow$ = .	
Khi đó $w = -\frac{10103}{100} - \frac{29097}{100}i = -101,03 - 290,97i$. Mặt khác, ta có $\begin{cases} 101,03 = 100 + 1 + 0,03 = X + 3Y + 1 \\ 290,97 = 300 - 9 - 0,03 = 3X - 3Y - 9 \end{cases}$ $\Rightarrow w = -(X + 3Y + 1) - (3X - 3Y - 9)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X + 3Y = -1 \\ X - Y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2 \\ Y = -1 \end{cases}$	

Câu 28. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời điều kiện $|\bar{z} \cdot z + z| = 2$ và $|z| = 2$?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Lời giải

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi \Rightarrow z \cdot \bar{z} = (a - bi)(a + bi) = a^2 + b^2$.

$$\text{Khi đó, giả thiết} \Leftrightarrow \begin{cases} |a^2 + b^2 + a + bi| = 2 \\ |a + bi| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ |a + 4 + bi| = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ (a + 4)^2 + b^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ (a+4)^2 - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow z = -2. \text{ Chọn D.}$$

Câu 29. Cho số phức w và hai số thực a, b . Biết $z_1 = w + 2i$ và $z_2 = 2w - 3$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + az + b = 0$. Tính $T = |z_1| + |z_2|$.

A. $T = 2\sqrt{13}$.

B. $T = \frac{2\sqrt{97}}{3}$.

C. $T = \frac{2\sqrt{85}}{3}$.

D. $T = 4\sqrt{13}$.

(THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - QUẢNG TRỊ)

Lời giải

$$\text{Đặt } w = m + ni \ (m, n \in \mathbb{R}) \Rightarrow \begin{cases} z_1 = w + 2i = m + (n+2)i \\ z_2 = 2w - 3 = 2m - 3 + 2ni \end{cases}$$

$$\text{Ta có } z_1 + z_2 = 3m - 3 + (3n+2)i = -a \text{ là số thực} \Rightarrow \begin{cases} 3n+2=0 \\ 3m-3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -\frac{2}{3} \\ m \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Lại có } z_1 \cdot z_2 = \left(m + \frac{4}{3}i\right) \left(2m - 3 + \frac{4}{3}i\right) = b \text{ là số thực} \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot (2m-3) - \frac{4}{3}m = 0 \Rightarrow m = 3.$$

$$\text{Do đó } z_1 = 3 + \frac{4}{3}i; z_2 = 3 - \frac{4}{3}i \Rightarrow T = |z_1| + |z_2| = \frac{2\sqrt{97}}{3}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 30. Cho số phức z thỏa mãn $(z+1)(\bar{z}-2i)$ là một số thuần ảo. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có diện tích bằng

A. 5π .

B. $\frac{5\pi}{4}$.

C. $\frac{5\pi}{2}$.

D. 25π .

(THPT CHUYÊN NGUYỄN BÌNH KHIÊM - QUẢNG NAM)

Lời giải

$$\text{Đặt } z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow (z+1)(\bar{z}-2i) = x^2 + y^2 + x + 2y - (2x + y + 2)i.$$

Theo giả thiết $(z+1)(\bar{z}-2i)$ là số thuần ảo, suy ra

$$\begin{cases} 2x + y + 2 \neq 0 \\ x^2 + y^2 + x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 + 2y + 1 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4}.$$

$$\Rightarrow \text{tập hợp điểm biểu diễn số phức } z \text{ là một đường tròn có diện tích bằng } \frac{5\pi}{4}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 31. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $w = \frac{z - \bar{z} + 1}{z^2}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $(1-i)(z+2i) = 2-i+3z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{ON}) = 2\varphi$, trong đó $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia $\overrightarrow{OM}$. Điểm N nằm trong góc phần tư nào?

A. Góc phần tư thứ (I).

B. Góc phần tư thứ (IV).

C. Góc phần tư thứ (III).

D. Góc phần tư thứ (II).

(THPT CHUYÊN NGUYỄN QUANG ĐIỀU - ĐỒNG THÁP)

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết, ta có } (1-i)(z+2i) = 2-i+3z \Leftrightarrow z + 2i - iz + 2 = 2 - i + 3z$$

$$\Leftrightarrow (i+2)z = 3i \Leftrightarrow z = \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i \Rightarrow w = \frac{z - \bar{z} + 1}{z^2} \xrightarrow{\text{casio}} w = \frac{33}{45} - \frac{56}{45}i.$$

Sử dụng lý thuyết nếu $z = x + yi \rightarrow P(x; y) \rightarrow \tan \varphi = \frac{y}{x}$ với φ là góc tạo bởi chiều dương trục hoành với vector $\overrightarrow{OM}$.

$$\text{Khi đó } w = \frac{33}{45} - \frac{56}{45}i \Rightarrow \tan \varphi = -\frac{56}{33} \Rightarrow \sin 2\varphi = -\frac{3696}{4225}; \cos 2\varphi = -\frac{2047}{4225}.$$

Vậy điểm N thuộc góc phần tư thứ (IV). **Chọn B.**

Câu 32. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$ là

A. $\sqrt{13} + 2$.

B. 4.

C. 6.

D. $\sqrt{13} + 1$.

(THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU - NGHỆ AN)

Lời giải

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có $|z - 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |(a - 2) + (b - 3)i| = 1$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a - 2)^2 + (b - 3)^2} = 1 \Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b - 3)^2 = 1 \quad (*)$$

Đặt $\begin{cases} a - 2 = \sin t \\ b - 3 = \cos t \end{cases}$ (vì $(*) \Leftrightarrow \sin^2 t + \cos^2 t = 1$). Khi đó $|\bar{z} + 1 + i| = |(a + 1) + (1 - b)i|$.

$$= \sqrt{(a + 1)^2 + (1 - b)^2} \rightarrow \text{xét biểu thức } P = (a + 1)^2 + (1 - b)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (a + 1)^2 + (1 - b)^2 &= (\sin t + 3)^2 + (\cos t + 2)^2 = \sin^2 t + 6\sin t + 9 + \cos^2 t + 4\cos t + 4 \\ &= (\sin^2 t + \cos^2 t) + 13 + 6\sin t + 4\cos t \\ &= 14 + 6\sin t + 4\cos t = P \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được $(6\sin t + 4\cos t)^2 \leq (6^2 + 4^2)(\sin^2 t + \cos^2 t)$

$$\Leftrightarrow (6\sin t + 4\cos t)^2 \leq 52 \Leftrightarrow 6\sin t + 4\cos t \leq \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \Rightarrow P \leq 14 + 2\sqrt{13}.$$

Vậy $|\bar{z} + 1 + i| = \sqrt{(a + 1)^2 + (1 - b)^2} \leq \sqrt{14 + 2\sqrt{13}} = \sqrt{(\sqrt{13} + 1)^2} = \sqrt{13} + 1$. **Chọn A.**

Câu 33. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - i| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

(THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU - NGHỆ AN)

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), khi đó $|z - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |x + (y - 1)i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 2 \quad (*)$

Ta có $z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ là số thuần ảo nên $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \neq 0 \\ x = -y \neq 0 \end{cases}$

TH1. Với $x = y$, thế vào $(*)$, ta được $x^2 + (x - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

TH2. Với $x = -y$, thế vào $(*)$, ta được $x^2 + (x + 1)^2 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Vậy có 4 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C.**

Câu 34. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1, z_2 \neq 0; z_1 + z_2 \neq 0$ và $\frac{1}{z_1 + z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2}$. Tính

giá trị của biểu thức $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $2\sqrt{3}$.

D. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

(THPT CHUYÊN QUANG TRUNG)

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $\frac{1}{z_1 + z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2} \Leftrightarrow \frac{1}{z_1 + z_2} = \frac{2z_1 + z_2}{z_1 z_2} \Leftrightarrow z_1 z_2 = (2z_1 + z_2)(z_1 + z_2)$

$\Leftrightarrow z_1 z_2 = 2z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_1 z_2 + z_2^2 \Leftrightarrow 2z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2 = 0.$

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + 2\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \Rightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn A.**

Câu 35. Cho thỏa mãn $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 3i$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3-4i)z - 1 + 2i$ là đường tròn I , bán kính R . Khi đó

A. $I(-1; -2), R = \sqrt{5}$.

B. $I(1; 2), R = \sqrt{5}$.

C. $I(-1; 2), R = 5$.

D. $I(1; -2), R = 5$.

(THPT CHUYÊN QUANG TRUNG)

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $(2+i)|z| - 1 + 3i = \frac{\sqrt{10}}{z} \Leftrightarrow (2|z| - 1) + (|z| + 3)i = \frac{\sqrt{10}}{z}$ (*)

Lấy môđun hai vế (*), ta được $\sqrt{(2|z| - 1)^2 + (|z| + 3)^2} = \frac{\sqrt{10}}{|z|} \Rightarrow |z| = 1$.

Lại có $w = (3-4i)z - 1 + 2i \Leftrightarrow w + 1 - 2i = (3-4i)z \Leftrightarrow |w + 1 - 2i| = |(3-4i)z|$

$\Leftrightarrow |w + 1 - 2i| = |3-4i| \cdot |z| = 5|z| = 5 \Rightarrow$ tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là đường tròn tâm $I(-1; 2)$ và bán kính $R = 5$. **Chọn C.**

Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn $(\bar{z})[(3+4i)|z| - 4 + 3i] - 5\sqrt{2} = 0$. Giá trị của $|\bar{z}|$ là

A. 2.

B. $\sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 1.

(THPT HÀ HUY TẬP)

Lời giải

Cách 1. Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$, dựa vào giả thiết tìm nghiệm x, y

Cách 2. Ta có, giả thiết $\Leftrightarrow (3+4i)|z| - 4 + 3i = \frac{5\sqrt{2}}{\bar{z}} \Leftrightarrow (3|z| - 4) + (4|z| + 3)i = \frac{5\sqrt{2}}{\bar{z}}$

Lấy môđun hai vế, ta được $\sqrt{(3|z| - 4)^2 + (4|z| + 3)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{|\bar{z}|}$ mà $|z| = |\bar{z}|$, khi đó

$(3|z| - 4)^2 + (4|z| + 3)^2 = \frac{50}{|z|^2} \rightarrow$ đến đây có thể giải trực tiếp bằng cách đặt $t = |z|$

Hoặc sử dụng máy tính casio bằng việc thử các đáp án, để thấy được $|z| = 1$.

Cách 3. Ta có biến đổi $(3+4i)|z|-4+3i = \frac{5\sqrt{2}}{\bar{z}} = \frac{5\sqrt{2}}{|z|} \cdot z \Leftrightarrow z = \frac{(3+4i)|z|^2 + (3i-4)|z|}{5\sqrt{2}}$

Thử lần lượt với các đáp án, ta thấy

- $|z|=2 \rightarrow z = \frac{(3+4i) \cdot 4 + (3i-4) \cdot 2}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5} + \frac{11\sqrt{2}}{5}i \Rightarrow |z| = \sqrt{10}$ (loại).
- $|z|=\sqrt{2} \rightarrow z = \frac{(3+4i) \cdot 2 + (3i-4) \cdot \sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{-4+3\sqrt{2}}{5} + \frac{3+4\sqrt{2}}{5}i \Rightarrow |z| = \sqrt{3}$ (loại).
- $|z|=2\sqrt{2} \rightarrow z = \frac{(3+4i) \cdot 8 + (3i-4) \cdot 2\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \Rightarrow |z| = 6$ (loại).
- $|z|=1 \Rightarrow |z|=2 \rightarrow z = \frac{3+4i+3i-4}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{7\sqrt{2}}{10}i \Rightarrow |z|=1$ (chọn). **Chọn D.**

Câu 37. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích bằng

- A. $S=9\pi$. B. $S=12\pi$. **C. $S=16\pi$.** D. $S=25\pi$.

(THPT TRẦN HƯNG ĐẠO - NINH BÌNH)

Lời giải

Cách 1. Đặt $w=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có $x+yi=2z+1-i \Leftrightarrow 2z=x-1+(y+1)i$ (1).

Từ giả thiết, ta thấy rằng $|z-3+4i| \leq 2 \Leftrightarrow |2z-6+8i| \leq 4 \Leftrightarrow |2z-6+8i| \leq 4$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $|x-1+(y+1)i-6+8i| \leq 4 \Leftrightarrow |x-7+(y+9)i| \leq 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-7)^2 + (y+9)^2} \leq 4 \Leftrightarrow (x-7)^2 + (y+9)^2 \leq 16$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn bán kính $R=4 \Rightarrow S=\pi R^2=16\pi$.

Cách 2. Ta có $w=2z+1-i \Leftrightarrow \frac{w-1+i}{2}=z \Leftrightarrow \frac{w-1+i}{2}-3+4i=z-3+4i$

$$\Leftrightarrow \frac{w-7+9i}{2}=z-3+4i \Leftrightarrow \left| \frac{w-7+9i}{2} \right| = |z-3+4i| \Leftrightarrow \frac{|w-7+9i|}{2} \leq 2 \Leftrightarrow |w-7+9i| \leq 4.$$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn bán kính $R=4 \Rightarrow S=16\pi$. **Chọn C.**

Câu 38. Biết số phức $z=x+yi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$ đồng thời có môđun nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $M=x^2+y^2$.

- A. $M=8$.** B. $M=10$. C. $M=16$. D. $M=26$.

(THPT CHUYÊN VÕ NGUYỄN GIÁP - QUẢNG BÌNH)

Lời giải

Đặt $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có $z-2-4i=x-2+(y-4)i$ và $z-2i=x+(y-2)i$.

Mặt khác $|z-2-4i|=|z-2i|$ nên suy ra $\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$.

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-8y+20=x^2+y^2-4y+4 \Leftrightarrow x+y=4 \Leftrightarrow y=4-x.$$

Khi đó $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(4-x)^2}=\sqrt{2x^2-8x+16}=\sqrt{2(x-2)^2+8} \geq 2\sqrt{2}$.

Vậy môđun nhỏ nhất của z là $2\sqrt{2}$. Xảy ra $\Leftrightarrow x=y=2 \Rightarrow M=8$. **Chọn A.**

Câu 39. Gọi H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao

cho $|2z - \bar{z}| \leq 3$, và số phức z có phần ảo không âm. Tính diện tích hình H .

A. 3π .

B. $\frac{3\pi}{4}$.

C. $\frac{3\pi}{2}$.

D. 6π .

(THPT CHUYÊN VÕ NGUYỄN GIÁP - QUẢNG BÌNH)

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có $2z - \bar{z} = 2(x + yi) - (x - yi) = 2x + 2yi - x + yi = x + 3yi$

Khi đó $|2z - \bar{z}| \leq 3 \Leftrightarrow |x + 3yi| \leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9y^2} \leq 3 \Leftrightarrow x^2 + 9y^2 \leq 9$.

Mặt khác z có phần ảo không âm nên $y \geq 0$. Vậy hình H tạo bởi $\begin{cases} x^2 + 9y^2 \leq 9 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

Xét đường Elip có phương trình $(E): x^2 + 9y^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ có độ dài hai bán trục lần lượt là $a = 3, b = 1$ nên diện tích (E) là $S_{(E)} = \pi ab = 3\pi$.

Hình H giới hạn bởi hình (E) phía trên trục Ox ($y \geq 0$) nên $S = \frac{S_{(E)}}{2} = \frac{3\pi}{2}$. **Chọn C.**

Câu 40. Trong các số phức z thỏa mãn $|z - (2 + 4i)| = 2$, gọi z_1 và z_2 là số phức có môđun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của hai số phức z_1 và z_2 bằng

A. $8i$.

B. 4 .

C. -8 .

D. 8 .

(SỞ GD&ĐT HÀ TĨNH)

Lời giải

Tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn (C) có tâm $I(2; 4)$ và bán kính $R = 2$.

Vậy $\max|z| = OM = OI + R = \sqrt{2^2 + 4^2} + 2 = 2 + 2\sqrt{5}$.

$\min|z| = ON = OI - R = \sqrt{2^2 + 4^2} - 2 = 2\sqrt{5} - 2$.

Tìm số phức z có môđun lớn nhất, nhỏ nhất.

Phương trình đường thẳng OI là $y = 2x$.

Tọa độ hai điểm M, N là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 2x \\ (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 5x^2 - 20x + 16 = 0 \end{cases}$$

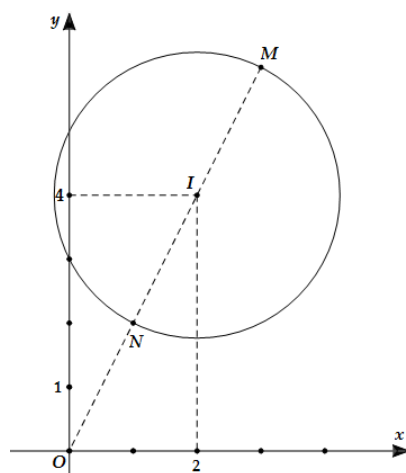
$$\Rightarrow (x; y) = \left(2 - \frac{2}{\sqrt{5}}; 4 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right) \text{ hoặc } (x; y) = \left(2 + \frac{2}{\sqrt{5}}; 4 + \frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

Số phức z có môđun lớn nhất là $z = 2 + \frac{2}{\sqrt{5}} + \left(4 + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)i$

tương ứng $M\left(2 + \frac{2}{\sqrt{5}}; 4 + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

Số phức z có môđun nhỏ nhất là $z = 2 - \frac{2}{\sqrt{5}} + \left(4 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)i$ tương ứng $N\left(2 - \frac{2}{\sqrt{5}}; 4 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

Vậy tổng phần ảo của hai số phức là $4 + \frac{4}{\sqrt{5}} + 4 - \frac{4}{\sqrt{5}} = 8$. **Chọn D.**



Câu 41. Cho số phức $z; w$ khác 0 sao cho $|z - w| = 2|z| = |w|$. Phần thực của số phức $u = \frac{z}{w}$.

A. $a = -\frac{1}{8}$.

B. $a = \frac{1}{4}$.

C. $a = 1$.

D. $a = \frac{1}{8}$.

(THPT CHUYÊN ĐH VINH – LẦN 3)

Lời giải

Sử dụng công thức $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \left| \frac{z_1}{z_2} \right|$ với $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Giả sử $u = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Từ giả thiết, suy ra
$$\begin{cases} |u| = \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} = \frac{1}{2}. \\ \left| \frac{z-w}{w} \right| = \left| \frac{z-w}{w} \right| = \left| \frac{z}{w} - 1 \right| = |u-1| = 1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{1}{4} \\ (a-1)^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (a-1)^2 - a^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - 2a = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{8} \dots \text{Chọn D.}$$

Câu 42. Cho số phức z thỏa mãn $(3-4i)z - \frac{4}{|z|} = 8$. Trên mặt phẳng tọa độ, khoảng cách từ gốc tọa độ đến điểm biểu diễn số phức z thuộc tập nào?

A. $\left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

B. $\left(\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

C. $\left(0; \frac{1}{4}\right)$.

D. $\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$.

(SỞ GD&ĐT BẮC NINH)

Lời giải

Ta có $(3-4i)z - \frac{4}{|z|} = 8 \Leftrightarrow (3-4i)z = 8 + \frac{4}{|z|} \quad (*)$.

Lấy môđun hai vế của $(*)$ và sử dụng công thức $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, ta được

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow |(3-4i)z| = \left| 8 + \frac{4}{|z|} \right| \Leftrightarrow |3-4i| \cdot |z| = 4 \left| 2 + \frac{1}{|z|} \right| \Leftrightarrow 5|z| = 4 \left| 2 + \frac{1}{|z|} \right| \\ &\Leftrightarrow 5|z|^2 = 4(2|z| + 1) \Leftrightarrow 5|z|^2 - 8|z| - 4 = 0 \Leftrightarrow |z| = 2. \end{aligned}$$

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow OM = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = 2 \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$. **Chọn D.**

Câu 43. Cho số phức z có môđun $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z| + 3|1-z|$.

A. $3\sqrt{10}$.

B. $2\sqrt{10}$.

C. 6.

D. $4\sqrt{2}$.

(SỞ GD&ĐT BẮC NINH)

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} P &= |z+1| + 3|1-z| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 3\sqrt{(1-x)^2 + y^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} + 3\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} \\ &= \sqrt{2x+2} + 3\sqrt{2-2x}. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\left(\sqrt{2x+2} + 3\sqrt{2-2x}\right)^2 \leq (1^2 + 3^2)(2x+2+2-2x) = 40$$

Suy ra $P = \sqrt{2x+2} + 3\sqrt{2-2x} \leq \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \Rightarrow P_{\max} = 2\sqrt{10}$. **Chọn B.**

Câu 44. Nếu hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 z_2 \neq 1$ và $|z_1| = |z_2| = 1$ thì số phức $w = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ có phần ảo bằng

A. 0. **B. 1.** **C. -1.** **D. 2.**

Lời giải

Ta có $z_1 \cdot \bar{z_1} = |z_1|^2 = 1 \Rightarrow \bar{z_1} = \frac{1}{z_1}$, tương tự ta cũng có $\bar{z_2} = \frac{1}{z_2}$.

Khi đó $\bar{w} = \frac{\bar{z_1} + \bar{z_2}}{1 + \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = w \Rightarrow w$ là một số thực. **Chọn A.**

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z| + |1-z+z^2|$. Tổng $M+m$ gần với giá trị nào sau đây nhất?

A. 3. **B. 4.** **C. 6.** **D. 5.**

Lời giải

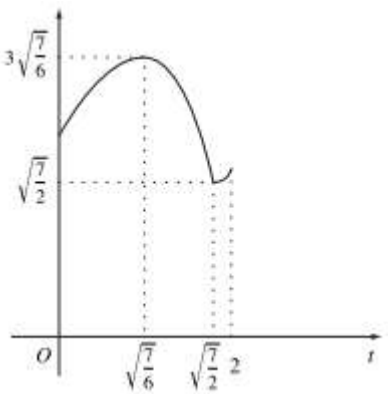
Đặt $t = |1+z|$ với $t \in [0; 2]$ nên $t^2 = |1+z|^2 = (1+z)(1+\bar{z}) = 2 + 2\operatorname{Re}(z) \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = \frac{t^2 - 2}{2}$.

Ta có $|1-z+z^2| = \sqrt{7-2t^2}$, khi đó $P = f(t) = t + \sqrt{7-2t^2}$ với $f : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$.

Vậy $f\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right) = \sqrt{\frac{7}{2}} \leq P \leq f\left(\sqrt{\frac{7}{6}}\right) = 3\sqrt{\frac{7}{6}}$.

$\Rightarrow M+m = 3\sqrt{\frac{7}{6}} + \sqrt{\frac{7}{2}} \approx 5,11$. **Chọn D.**

Đồ thị hàm số $f(t) = t + \sqrt{7-2t^2}$ như hình vẽ bên $\longrightarrow$



Lời kết. Bản tài liệu làm trong thời gian ngắn, khó tránh khỏi những sai sót cũng như ý kiến chủ quan của cá nhân tác giả, kính mong quý khán giả tham khảo và đóng góp ý kiến với tác giả để hoàn thiện hơn các sản phẩm về sau. Và gửi lời chúc đến các em học sinh 99er lời chúc

“Đỗ Đại Học nhé ;) “

Giữa thành công và thất bại có con sông gian khổ... trên con sông đó có cây cầu tên là sự cố gắng.

