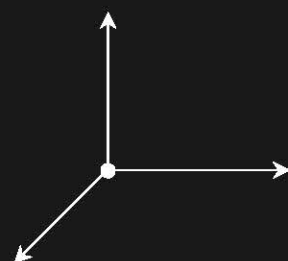


CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN
HUỲNH KIM LINH

MỞ ĐẦU OXYZ

Lý thuyết cơ bản và áp dụng

HƯỚNG TỚI KỲ THI THPT QUỐC GIA 2020



TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

TỦ SÁCH LUYỆN THI THPT QUỐC GIA

MỞ ĐẦU

OXYZ

Lý thuyết cơ bản và áp dụng

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

Lời giới thiệu

Chủ đề hình học giải tích không gian Oxyz tuy không phải là khó nhưng cũng không hẳn là dễ với những bạn học sinh mới bắt đầu chủ đề này. Ebook nhỏ này nhằm mang tới cho bạn đọc cái nhìn khái quát và cơ bản nhất về vấn đề chủ đề này thông qua các lý thuyết cơ bản và ví dụ minh họa kèm lời giải chi tiết sẽ phần nào giúp các bạn dễ tiếp cận hơn. Nội dung Ebook không quá đề nặng những bài toán khó và lắt léo tuy nhiên vẫn sẽ có những bài toán đủ để khiến bạn đau đầu và tốn khá nhiều công sức để giải quyết nó. Bên cạnh đó thì phần trình bày và hình vẽ cũng được đầu tư nhiều công sức với mong muốn bạn đọc có thể hiểu, tưởng tượng và suy luận ra những hướng đi mà lời giải đã giải quyết các bài toán trong đó. Kỳ thi THPT Quốc Gia ngày một tới gần, đây có lẽ là lúc thích hợp nhất để các bạn cùng nhìn lại và ôn tập những kiến thức đã qua và đồng thời cung cấp thêm cho mình một số kinh nghiệm để giải quyết các bài toán hay xuất hiện trong các đề thi, tập thể tác giả mong rằng cuốn sách này sẽ giúp ích cho các bạn một phần nào đó trong quá trình ôn luyện. Nội dung ebook được tham khảo từ rất nhiều nguồn, các bạn xem ở cuối của tài liệu này. Dù đã cố gắng để biên soạn tuy nhiên không thể tránh khỏi những thiếu sót, mọi ý kiến phản hồi vui lòng gửi về địa chỉ

Tạp chí và tư liệu toán học

Link liên kết. <https://www.facebook.com/OlympiadMathematical/>

Mục lục

Chương 1. Mở đầu hình học tọa độ không gian	1
Chương 2. Lý thuyết về phương trình đường thẳng	32
Chương 3. Các bài toán về phương trình mặt phẳng	107
Chương 4. Các bài toán về phương trình mặt cầu	171
Chương 5. Các bài toán cực trị trong hình học không gian Oxyz	261
Chương 6. Phương pháp tọa độ hóa hình cổ điển	352

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

1

Chương

Mở đầu hình học tọa độ không gian

Tóm tắt nội dung

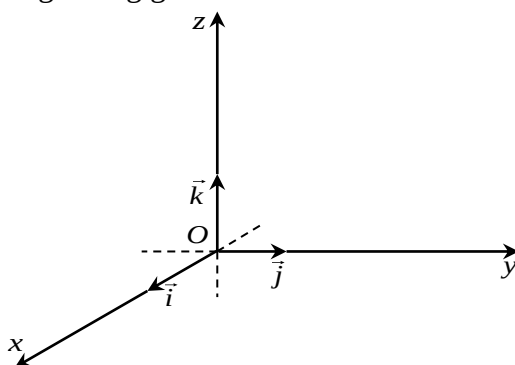
Trong chương này chúng ta sẽ đi tìm hiểu các khái niệm và công thức cơ bản, qua đó tìm hiểu các dạng toán liên quan tới những công thức này nhằm giúp các bạn học sinh nắm vững lý thuyết cơ bản để đi sâu hơn vào các dạng bài tập khó hơn.



A. KIẾN THỨC CẦN NẮM.

I. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN.

Trong không gian, xét ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc O . Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vector đơn vị, tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz . Hệ ba trục như vậy gọi là **hệ trục tọa độ vuông góc** trong không gian.



Chú ý. $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$.

II. TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ.

1. Định nghĩa.

Ta có vectơ $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

2. Tính chất.

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $k \in \mathbb{R}$

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$

- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
- $\vec{0} = (0; 0; 0), \vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1)$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (\text{với } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}).$

III. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM.

Cho 2 điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$ khi đó thì

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$
- Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$
- Tọa độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$

IV. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$, được xác định bởi

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

Chú ý. Tích có hướng của hai vectơ là một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ là một số.

2. Tính chất

- $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}; [\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$

- $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
- $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}; [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}; [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$
- $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$
- $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ (chứng minh 3 điểm thẳng hàng).

3. Ứng dụng của tích có hướng

- Điều kiện đồng phẳng của 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$
- Diện tích hình bình hành $ABCD$ $S_{ABCD} = ||[\vec{AB}, \vec{AD}]||$
- Diện tích tam giác ABC $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ||[\vec{AB}, \vec{AC}]||$
- Thể tích khối hộp $ABCD A'B'C'D'$ $V_{ABCD.A'B'C'D'} = ||[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'}||$
- Thể tích tứ diện $ABCD$ $V_{ABCD} = \frac{1}{6} ||[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}||$.

Chú ý.

- **Tích vô hướng** của hai vectơ thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.
- **Tích có hướng** của hai vectơ thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vectơ đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vectơ cùng phương.
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng 1. Tìm tọa độ của vectơ, của điểm

Định nghĩa $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \Leftrightarrow M(x; y; z)$

Tính chất Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3); \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$
- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
- $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA.

Câu 1

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các vector thỏa mãn $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = (3; 0; 1)$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{d} = (5; 2; -3)$.

- Tìm tọa độ của các vector $\vec{a} + \vec{b}$, $3\vec{a} - 2\vec{c}$.
- Tìm tọa độ các vector $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; $3\vec{a} - 2\vec{c} + 3\vec{d}$
- Phân tích vector $\vec{d}$ theo 3 vector $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$

Lời giải

a) Ta có

- $\vec{a} = (-1; 1; -3)$, $\vec{b} = (3; 0; 1) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (2; 1; -2)$.
- $3\vec{a} = (-3; 3; -9)$, $2\vec{c} = (4; 6; 0) \Rightarrow 3\vec{a} - 2\vec{c} = (-7; -3; -9)$.

b) Ta có

- $\vec{a} = (-1; 1; -3)$, $\vec{b} = (3; 0; 1)$, $\vec{c} = (2; 3; 0) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (0; -2; -2)$.
- $3\vec{a} = (-3; 3; -9)$, $2\vec{c} = (4; 6; 0)$, $3\vec{d} = (15; 6; -9) \Rightarrow 3\vec{a} - 2\vec{c} + 3\vec{d} = (8; 3; -18)$.

$$c) \text{ Giả sử } \vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} \Rightarrow \begin{cases} 5 = -m + 3n + 2p \\ 2 = m + 3p \\ -3 = -3m + n \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{19}{11}, n = \frac{24}{11}, p = \frac{1}{11}.$$

$$\text{Vậy } \vec{d} = \frac{19}{11}\vec{a} + \frac{24}{11}\vec{b} + \frac{1}{11}\vec{c}$$

Câu 2

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; -3; 1)$; $B(2; 5; 1)$ và vector $\vec{OC} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

- Tìm tọa độ của điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- Tìm tọa độ điểm E sao cho tứ giác $OABE$ là hình thang có hai đáy OA ; BE và $OA = 2BE$.
- Tìm tọa độ điểm M sao cho $3\vec{AB} + 2\vec{AM} = 3\vec{CM}$.

Lời giải

a) Gọi $D(x; y; z)$. Ta có $\vec{BC} = (-5; -3; 4)$, $\vec{AC} = (-4; 5; 4)$.

Mà $\frac{-5}{-4} \neq \frac{-3}{5} \Rightarrow \vec{BC}, \vec{AC}$ không cùng phương.

$$\vec{AD} = (x-1; y+3; z-1)$$

$$ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -5 \\ y+3 = -3 \\ z-1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -6 \\ z = 5 \end{cases}. \text{ Vậy } (-4; -6; 5).$$

b) Gọi $E(x; y; z)$. Ta có $\vec{OA} = (1; -3; 1)$, $\vec{OB} = (2; 5; 1)$

Mà $\frac{1}{2} \neq \frac{-3}{5} \Rightarrow \vec{OA}, \vec{OB}$ không cùng phương.

Ta có $\vec{EB} = (2-x; 5-y; 1-z)$. Từ đề cho ta suy ra

$$\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{EB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 4 - 2x \\ -3 = 10 - 2y \\ 1 = 2 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}, y = \frac{13}{2}, z = \frac{1}{2}$$

Vậy $E\left(\frac{3}{2}; \frac{13}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

c) Gọi $M(x; y; z)$. Ta có

- $\overrightarrow{AB} = (1; 8; 0) \Rightarrow 3\overrightarrow{AB} = (3; 24; 0)$
- $\overrightarrow{AM} = (x-1; y+3; z-1) \Rightarrow 2\overrightarrow{AM} = (2x-2; 2y+6; 2z-2)$
- $\overrightarrow{CM} = (x+3; y-2; z-5) \Rightarrow 3\overrightarrow{CM} = (3x+9; 3y-6; 3z-15)$

$$3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2x - 2 = 3x + 9 \\ 24 + 2y + 6 = 3y - 6 \\ 0 + 2z - 2 = 3z - 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 36 \\ z = 13 \end{cases}$$

Vậy $M(-8; 36; 13)$.

Câu 3

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Xác định các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Lời giải

Gọi $C(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$; $\overrightarrow{DC} = (x-1; y+1; z-1)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y+1=1 \\ z-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow C(2; 0; 2)$.

Gọi $D'(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{D'C'} = (4-x; 5-y; -5-z)$; $\overrightarrow{DC} = (1; 1; 1)$.

Tứ giác $DCC'D'$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x=1 \\ 5-y=1 \\ -5-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=-6 \end{cases} \Rightarrow D'(3; 4; -6)$.

Gọi $A'(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{A'D'} = (3-x; 4-y; -6-z)$; $\overrightarrow{AD} = (0; -1; 0)$.

Tứ giác $ADD'A'$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x=0 \\ 4-y=-1 \\ -6-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \\ z=-6 \end{cases} \Rightarrow A'(3; 5; -6)$.

Gọi $B'(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{A'B'} = (x-3; y-5; z+6)$; $\overrightarrow{D'C'} = (1; 1; 1)$.

Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=1 \\ y-5=1 \\ z+6=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=6 \\ z=-5 \end{cases} \Rightarrow B'(4; 6; -5)$.

Dạng 2. Tích phân vô hướng của 2 vectơ và ứng dụng

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$; $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA.

Câu 1

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; 2; 1)$, $\vec{b} = (3; -1; 2)$, $\vec{c} = (4; -1; -3)$, $\vec{d} = (3; -3; -5)$, $\vec{u} = (1; m; 2)$, ($m \in \mathbb{R}$).

- Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot (\vec{a} + 2\vec{c})$, $|\vec{a} + 2\vec{b}|$.
- So sánh $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ và $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$.
- Tính các góc $(\vec{a}, \vec{b})$, $(\vec{a} + \vec{b}, 3\vec{a} - 2\vec{c})$.
- Tìm m để $\vec{u} \perp (\vec{b} + \vec{d})$.
- Tìm m để $(\vec{u}, \vec{a}) = 60^\circ$.

Lời giải

- Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot (\vec{a} + 2\vec{c})$, $|\vec{a} + 2\vec{b}|$.

$$\vec{a} = (1; 2; 1), \vec{b} = (3; -1; 2) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 3.$$

$$\vec{c} = (4; -1; -3) \Rightarrow 2\vec{c} = (8; -2; -6) \Rightarrow \vec{a} + 2\vec{c} = (9; 0; -5)$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} + 2\vec{c}) = 3 \cdot 9 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-5) = 17.$$

$$2\vec{b} = (6; -2; 4) \Rightarrow \vec{a} + 2\vec{b} = (7; 0; 5) \Rightarrow |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{7^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{74}.$$

- So sánh $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ và $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) = 7 \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (7; 14; 7)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 3 \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = (12; -3; -9)$$

$$\text{Vậy } \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

- Tính các góc $(\vec{a}, \vec{b})$, $(\vec{a} + \vec{b}, 3\vec{a} - 2\vec{c})$.

$$\vec{a} = (1; 2; 1), \vec{b} = (3; -1; 2) \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{3}{2\sqrt{21}} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) \approx 70^\circ 54'$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (4; 1; 3), 3\vec{a} - 2\vec{c} = (-5; 8; 9) \Rightarrow \cos(\vec{a} + \vec{b}, 3\vec{a} - 2\vec{c}) = \frac{4 \cdot (-5) + 1 \cdot 8 + 3 \cdot 9}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + 8^2 + 9^2}}$$

$$= \frac{15}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{170}} \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}, 3\vec{a} - 2\vec{c}) \approx 76^\circ 57'$$

d) Tìm m để $\vec{u} \perp (\vec{b} + \vec{d})$.

$$\vec{b} + \vec{d} = (6; -4; -3), \vec{u} = (1; m; 2).$$

$$\vec{u} \perp (\vec{b} + \vec{d}) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot (\vec{b} + \vec{d}) = 0 \Leftrightarrow 6 - 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

e) Tìm m để $(\vec{u}, \vec{a}) = 60^\circ$.

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{a}) = 60^\circ &\Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{a}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2m+3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{m^2+5}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{6m^2+30} = 4m+6 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4m+6 \geq 0 \\ 6m^2+30 = (4m+6)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{3}{2} \\ 10m^2+48m+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{-12+\sqrt{129}}{5}. \end{aligned}$$

Câu 2

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ sao cho $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$ và $|\vec{a} - 2\vec{b}|$.

Lời giải

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 4 + 9 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 7$$

$$\text{Vậy } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$$

$$\text{Ta có } |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 2\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 - 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 4 + 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 52$$

$$\text{Vậy } |\vec{a} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{13}.$$

Câu 3

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(2; -1; 1)$, $B(3; 5; 2)$, $C(8; 4; 3)$, $D(-2; 2m+1; -3)$.

a) Tính AB, BC, AC .

b) Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.

c) Tìm tọa độ điểm M nằm trên trục hoành sao cho $MA = MB$.

d) Tìm m sao cho tam giác ABD vuông tại A .

e) Tính số đo góc A của tam giác ABC .

Lời giải

a) Tính AB, BC, AC .

$$\overrightarrow{AB} = (1; 6; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 6^2 + 1^2} = \sqrt{38}$$

$$\overrightarrow{BC} = (5; -1; 1) \Rightarrow BC = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 1^2} = 3\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AC} = (6; 5; 2) \Rightarrow AC = \sqrt{6^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{65}$$

b) Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 5 + 6 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại } B.$$

c) Tìm tọa độ điểm M nằm trên trục hoành sao cho $MA = MB$.

$$\text{Ta có } M \in Ox \Rightarrow M(x; 0; 0)$$

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(2-x)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{(3-x)^2 + 5^2 + 2^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 6 = x^2 - 6x + 38 \Leftrightarrow x = 16. \text{ Vậy } M(16; 0; 0).$$

d) Tìm m sao cho tam giác ABD vuông tại A .

$$\overrightarrow{AB} = (1; 6; 1), \overrightarrow{AD} = (-4; 2m+2; -4)$$

$$\Delta ABD \text{ vuông tại } A \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow -4 + 12m + 12 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}.$$

e) Tính số đo góc A của tam giác ABC .

$$\overrightarrow{AB} = (1; 6; 1), \overrightarrow{AC} = (6; 5; 2), \cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{1 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 1 \cdot 2}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{65}} \Rightarrow A \approx 40^\circ 8'.$$

Chú ý Vì ΔABD vuông tại B nên có thể dùng hệ thức lượng trong tam giác vuông

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{38}} \Rightarrow A \approx 40^\circ 8'$$

Dạng 3. Vận dụng công thức trung điểm và trọng tâm

$$M \text{ là trung điểm } AB \Leftrightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

$$G \text{ là trọng tâm } \Delta ABC \Leftrightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA

Câu 1

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 3; 2)$, $B(3; -5; 6)$, $C(2; 1; 3)$

- Tìm tọa độ của điểm M là trung điểm của cạnh AB .
- Tìm tọa độ hình chiếu trọng tâm G của tam giác ABC lên trục Ox .
- Tìm tọa độ điểm N đối xứng với điểm A qua điểm C .
- Tìm tọa độ điểm F trên mặt phẳng Oxz sao cho $|\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}|$ nhỏ nhất.
- Tìm tọa độ điểm B' đối xứng với điểm B qua trục tung.

Lời giải

a) Tìm tọa độ của điểm M là trung điểm của cạnh AB .

$$\text{Ta có điểm } M \text{ là trung điểm của cạnh } AB \Rightarrow M\left(\frac{1+3}{2}; \frac{3-5}{2}; \frac{2+6}{2}\right) \text{ hay } M(2; -1; 4).$$

b) Tìm tọa độ hình chiếu trọng tâm G của tam giác ABC lên trục Ox .

$$G \text{ là trọng của tam giác } ABC \Rightarrow G\left(\frac{1+3+2}{3}; \frac{3-5+1}{3}; \frac{2+6+3}{3}\right) \text{ hay } G\left(2; -\frac{1}{3}; \frac{11}{3}\right).$$

Hình chiếu của của G lên trục Ox là $H(2; 0; 0)$.

c) Tìm tọa độ điểm N đối xứng với điểm A qua điểm C .

Gọi $N(x; y; z)$, ta có N đối xứng với điểm A qua điểm $C \Leftrightarrow C$ là trung điểm của AN

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{1+x}{2}, 1 = \frac{3+y}{2}, 3 = \frac{2+z}{2} \Leftrightarrow x = 3, y = -1, z = 4.$$

Vậy $N(3; -1; 4)$.

d) Tìm tọa độ điểm F trên mặt phẳng (Oxz) sao cho $|\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}|$ nhỏ nhất.

$$|\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}| = |3\overrightarrow{FG}| = 3FG.$$

Do đó $|\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow FG$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow F$ là hình chiếu của G lên $mp(Oxz)$.

$$\text{Vậy } F\left(2; 0; \frac{11}{3}\right).$$

e) Tìm tọa độ điểm B' đối xứng với điểm B qua trục tung.

Hình chiếu của B lên trục Oy là $H(0; -5; 0)$.

B' đối xứng với điểm B qua trục tung $\Leftrightarrow H$ là trung điểm của đoạn $BB' \Rightarrow B'(-3; -5; -6)$.

Dạng 4. Chứng minh 2 vectơ cùng phương, không cùng phương

Chú ý $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k\vec{b} \ (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \ (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA

Câu 1

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (3; 2; 5)$, $\vec{b} = (3m + 2; 3; 6 - n)$. Tìm m, n để $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.

Lời giải

Ta có $\vec{a} = (3; 2; 5)$, $\vec{b} = (3m + 2; 3; 6 - n)$

Ta thấy rằng $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương khi $\frac{3m+2}{3} = \frac{3}{2} = \frac{6-n}{5} \Leftrightarrow m = \frac{5}{6}, n = -\frac{3}{2}$.

Câu 2

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 2; 3)$, $B(2; 1; 1)$, $C(0; 2; 4)$.

a) Chứng minh A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tọa độ điểm $M \in mp(Oyz)$ sao cho 3 điểm A, B, M thẳng hàng.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 1)$.

Ta có $\frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{1} \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Vậy A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tọa độ điểm $M \in mp(Oyz)$ sao cho 3 điểm A, B, M thẳng hàng.

Ta có $M \in mp(Oyz) \Rightarrow M(x; 0; z)$, $\overrightarrow{AM} = (x-1; -2; z-3)$, $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -2)$.

Ta có A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{-2}{-1} = \frac{z-3}{-2} \Leftrightarrow x = 3, z = -1$.

Vậy $M(3; 0; -1)$.

Dạng 5. Tích có hướng của hai vectơ và ứng dụng

Ta cần chú ý các tính chất sau

- $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}; [\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}. \quad [\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$
- Diện tích hình bình hành $ABCD$ $S_{ABCD} = \left| [\vec{AB}, \vec{AD}] \right|$.
- Diện tích tam giác ABC $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \right|$.
- Thể tích khối hộp $ABCD.A'D'C'D'$ $V_{ABCD.A'D'C'D'} = \left| [\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'} \right|$.
- Thể tích khối tứ diện $ABCD$ $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \right|$.

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA

Câu 1

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$, $C(-1;1;0)$, $D(2;-1;-2)$.

- Chứng minh rằng A, B, C, D là 4 đỉnh của một tứ diện.
- Tính thể tích tứ diện $ABCD$. Suy ra độ dài đường cao của tứ diện qua đỉnh A .

Lời giải

- Chứng minh rằng A, B, C, D là 4 đỉnh của một tứ diện.

$$\vec{AB} = (-2;1;1), \vec{AC} = (-2;1;-1), \vec{AD} = (1;-1;-3).$$

$$\Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] = (-2;-4;0) \Rightarrow \vec{AD} \cdot [\vec{AB}, \vec{AC}] = 2 \neq 0 \Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \text{ không đồng phẳng}$$

Vậy A, B, C, D là 4 đỉnh của một tứ diện.

- Tính thể tích tứ diện $ABCD$. Suy ra độ dài đường cao của tứ diện qua đỉnh A .

$$\vec{AB} = (-2;1;1), \vec{AC} = (-2;1;-1), \vec{AD} = (1;-1;-3).$$

$$\Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] = (-2;-4;0) \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \vec{AD} \cdot [\vec{AB}, \vec{AC}] \right| = \frac{1}{3} \text{ (đ.v.t.t)}$$

Ta có $\vec{BC} = (0;0;-2)$, $\vec{BD} = (3;-2;-4)$

$$\Rightarrow [\vec{BC}, \vec{BD}] = (-4;-6;0) \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} \left| [\vec{BC}, \vec{BD}] \right| = \sqrt{13}.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} d(A; (BCD)) \cdot S_{ABCD} \Leftrightarrow d(A; (BCD)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABCD}} = \frac{\sqrt{13}}{13}.$$

Câu 2

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(-3;5;15)$, $B(0;0;7)$, $C(2;-1;4)$, $D(4;-3;0)$. Chứng minh AB và CD cắt nhau.

Lời giải

Ta có $\vec{AB} = (3;-5;-8)$, $\vec{AC} = (5;-6;-11)$, $\vec{AD} = (7;-8;-15)$, $\vec{CD} = (2;-2;-4)$

$$\Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] = (7;-7;7) \Rightarrow \vec{AD} \cdot [\vec{AB}, \vec{AC}] = 0 \Leftrightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \text{ đồng phẳng}$$

$\Leftrightarrow A, B, C, D$ cùng thuộc một mặt phẳng (1)

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (4; -4; 4) \neq \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ không cùng phương. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AB và CD cắt nhau.

Câu 3

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hình hộp $ABCD.EFGH$ với $A(1;1;1)$, $B(2;1;2)$, $E(-1;2;-2)$, $D(3;1;2)$. Khoảng cách từ A đến $mp(DCGH)$ bằng?

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; 0; 1) \\ \overrightarrow{AD} = (2; 0; 1) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = (0; 1; 0), \quad \overrightarrow{AE} = (-2; 1; -3)$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AE} = 1 \Rightarrow V_{ABCD.EFGH} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AE}| = 1$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; 0; 1) \\ \overrightarrow{AE} = (-2; 1; -3) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}] = (-1; 1; 1) \Rightarrow S_{ABFE} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}]| = \sqrt{3} = S_{DCGH}$$

$$V_{ABCD.EFGH} = d(A, (DCGH)) S_{DCGH} \Rightarrow d(A, (DCGH)) = \frac{V_{ABCD.EFGH}}{S_{DCGH}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP

Câu 1

Cho hai vector $\vec{a} = (2; 3; -1)$; $\vec{b} = (0; -2; 1)$.

Tính $2\vec{a} + 2\vec{b}$; $\vec{b} + 5\vec{a}$; $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $[\vec{a}; \vec{b}]$; $[\vec{a} + 2\vec{b}; 5\vec{a} - 3\vec{b}]$.

Lời giải

Ta có

- $2\vec{a} + 2\vec{b} = 2(2; 3; -1) + 2(0; -2; 1) = (4; 2; 0)$.
- $\vec{b} + 5\vec{a} = (0; -2; 1) + 5(2; 3; -1) = (10; 13; -4)$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 0 + 3(-2) - 1 \cdot 1 = -7$
- $[\vec{a}; \vec{b}] = (1; -2; -4)$
- $[\vec{a} + 2\vec{b}; 5\vec{a} - 3\vec{b}]$

Ta có $\vec{a} + 2\vec{b} = (2; 3; -1) + 2(0; -2; 1) = (2; -1; 1)$

$5\vec{a} - 3\vec{b} = 5(2; 3; -1) - 3(0; -2; 1) = (10; 21; -8)$

Suy ra $[\vec{a} + 2\vec{b}; 5\vec{a} - 3\vec{b}] = (-13; 26; 52)$

Câu 2

Cho vector $\vec{a} = (2\sqrt{2}; -1; 4)$. Tìm vector $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ biết $\vec{a} \cdot \vec{b} = 20$.

Lời giải

Giả sử $\vec{b} = (x; y; z)$.

Vì vector $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ nên tồn tại số k sao cho $x = 2\sqrt{2}k$; $y = -k$; $z = 4k$.

Lại có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 20$. Suy ra $8k + k + 16k = 20$. Suy ra $k = \frac{4}{5}$.

Vậy $\vec{b} = \left(\frac{8\sqrt{2}}{5}; -\frac{4}{5}; \frac{16}{5} \right)$.

Câu 3

Cho vector $\vec{a} = (1; 1; 1)$; $\vec{b} = (1; -1; 3)$. tìm vector $\vec{c}$ có độ dài bằng 3, vuông góc với hai vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ và tạo với tia Oz một góc tù.

Lời giải

Gọi tọa độ của vector $\vec{c} = (x; y; z)$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} |\vec{c}| = 3 \\ \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \\ \vec{j} \cdot \vec{c} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3 & (1) \\ x + y + z = 0 & (2) \\ x - y + 3z = 0 & (3) \\ z < 0 & (4) \end{cases}$$

Từ (2), (3) suy ra $x = -2z$, $y = z$, thay vào (1) ta được $z^2 = \frac{3}{2}$.

Kết hợp điều kiện (4) ta có
$$\begin{cases} x = \sqrt{6} \\ y = -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ z = -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases} \cdot \text{Vậy } \vec{c} = \left(\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2} \right).$$

Cách 2 Do $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$ nên tồn tại số p sao cho $\vec{c} = p \cdot [\vec{a}; \vec{b}] = (4p; -2p; -2p)$.

Vì $|\vec{c}| = 3 \Leftrightarrow 24p^2 = 9 \Leftrightarrow p = \pm \frac{\sqrt{6}}{4}$

Từ đó $\vec{c} = \left(-\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$ hoặc $\vec{c} = \left(\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2} \right)$

Mặt khác $\vec{c}$ tạo với Oz một góc tù nên $\vec{c} \cdot \vec{k} < 0$. Vậy $\vec{c} = \left(\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2} \right)$.

Câu 4

Xét sự đồng phẳng của ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sau đây

a) $\vec{a} = (2; 6; -1)$, $\vec{b} = (4; -3; -2)$, $\vec{c} = (-4; -2; 2)$.

b) $\vec{a} = (2; -4; 3)$, $\vec{b} = (1; 2; -2)$, $\vec{c} = (3; -2; 1)$.

Lời giải

Để xét sự đồng phẳng của ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ta xét tích hỗn hợp $T = [\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{c}$.

Nếu $T = 0$ thì ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Nếu $T \neq 0$ thì ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng.

a) Ta có $[\vec{a}; \vec{b}] = (-15; 0; -30) \Rightarrow [\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{c} = (-15) \cdot (-4) + 0 \cdot (-2) + (-30) \cdot 2 = 0$.

Vậy ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

b) Ta có $[\vec{a}; \vec{b}] = (2; 7; 8) \Rightarrow [\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{c} = 2 \cdot 3 + 7 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 = 0$.

Vậy ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 5

Cho ba điểm $A(2; 5; 3)$; $B(3; 7; 4)$; $C(x; y; 6)$. Tìm $x; y$ để A, B, C thẳng hàng?

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 1)$; $\overrightarrow{AC} = (x-2; y-5; 3)$

Ta có $\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{3}{1} \Rightarrow \begin{cases} x-2=3 \\ \frac{y-5}{2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$.

Câu 6

Cho bốn đỉnh $A(1; -1; 1)$, $B(1; 3; 1)$, $C(4; 3; 1)$, $D(4; -1; 1)$.

a) Chứng minh A, B, C, D đồng phẳng và tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

b) Tính độ dài các đường chéo và góc giữa hai đường chéo.

Lời giải

$$a) \overrightarrow{AB} = (0; 4; 0); \overrightarrow{AC} = (3; 4; 0); \overrightarrow{AD} = (3; 0; 0)$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; 0; -12); [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0.3 + 0.0 + 0.(-12) = 0.$$

Vậy A, B, C, D đồng phẳng.

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; 0; -12) \neq \vec{0} \text{ nên } A, B, C \text{ không thẳng hàng.}$$

$$\overrightarrow{DC} = (0; 4; 0) \text{ nên } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \text{ hay tứ giác } ABCD \text{ là hình bình hành.}$$

Mặt khác $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0.3 + 4.0 + 0.0 = 0$ nên tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

$$b) \text{ Ta có } AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5; BD = AC = 5$$

$$\cos(AC, BD) = \frac{|3.3 + 4.(-4)|}{5.5} = \frac{7}{25} \Rightarrow (AC, BD) = 73^\circ 44'.$$

Câu 7

Cho 4 điểm $A(2; -1; 6), B(-3; -1; -4), C(5; -1; 0)$ và $D(1; 2; 1)$.

a) Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông và tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

b) Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

Lời giải

a) Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông và tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

- Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-5; 0; -10), \overrightarrow{AC} = (3; 0; -6), \overrightarrow{BC} = (8; 0; 4)$$

$$\text{Xét } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24 + 0 - 24 = 0 \text{ nên } AC \perp BC \text{ nên } \triangle ABC \text{ vuông tại } C.$$

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại C .

- Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $\triangle ABC$.

$$\text{Theo công thức } S_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABC} \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{S_{\triangle ABC}}{P_{\triangle ABC}}.$$

$$\text{Ta có } AB = 5\sqrt{5}, AC = 3\sqrt{5}, BC = 4\sqrt{5},$$

$$\text{Khi đó vì } \triangle ABC \text{ là tam giác vuông tại } C \text{ nên } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} = 30$$

$$\text{Chu vi tam giác } \triangle ABC \quad P_{\triangle ABC} = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{2} = 6\sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy } r = \frac{S_{\triangle ABC}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{30}{6\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

b) Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

$$\text{Theo công thức } V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}|$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-5; 0; -10), \overrightarrow{AC} = (3; 0; -6), \overrightarrow{AD} = (-1; 3; -5)$$

$$\text{Với } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; -60; 0), |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = |0 - 60.3 + 0| = 180.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \cdot 180 = 30.$$

Câu 8

Cho ba điểm $A(1;0;0)$; $B(0;0;1)$; $C(2;1;1)$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
- Tính chu vi và diện tích tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm D biết $ABCD$ là hình bình hành.
- Tính độ dài đường cao của tam giác ABC .
- Tính các góc của tam giác ABC .
- Xác định tọa độ trục tâm của ABC .
- Xác định tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}(-1;0;1)$; $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$ suy ra $\overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AC}$.

Do đó $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương suy ra A, B, C không thẳng hàng.

b) Ta có $\overrightarrow{AB}(-1;0;1)$; $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$; $\overrightarrow{BC}(2;1;0) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$; $BC = \sqrt{5}$;
 $AC = \sqrt{3}$; $[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (-1; 2; -1)$.

Chu vi tam giác ABC là $p = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ và $S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2} \sqrt{1+4+1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

c) Gọi $D(a;b;c)$ sao cho A, B, C, D là bốn đỉnh hình bình hành.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 2 - a \\ 0 = 1 - b \\ 1 = 1 - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow D(3;1;0).$$

d) Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} b.h_b = \frac{1}{2} c.h_c \Rightarrow h_a = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$; $h_b = \sqrt{2}$; $h_c = \sqrt{3}$.

e) Áp dụng công thức hàm số cosin cho tam giác ABC ta có

$$+ \cos A = \frac{2+3-5}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = 0 \Rightarrow A = 90^\circ$$

$$+ \cos B = \frac{2+5-3}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow B = 51^\circ$$

$$+ \cos C = \frac{3+5-2}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Rightarrow C = 39^\circ$$

Cách khác có thể dùng công thức $\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}$.

f) Gọi $H(a;b;c)$ là tọa độ trục tâm tam giác ABC

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b - 2 = 0 \\ a + b + c - 1 = 0 \\ -a + 2b - c + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow H(1;0;0).$$

Cách khác Tam giác ABC vuông tại A nên trục tâm tam giác ABC là $A(1;0;0)$.

g) Gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} IA = IB \\ IB = IC \\ [\overline{AB}; \overline{AC}] \cdot \overline{BI} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(1-a)^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + (1-c)^2} \\ \sqrt{a^2 + b^2 + (1-c)^2} = \sqrt{(2-a)^2 + (1-b)^2 + (1-c)^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 2c = 0 \\ 4a + 2b = 5 \\ -a + 2b + c - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow I\left(1; \frac{1}{2}; 1\right) \end{aligned}$$

Cách khác Tam giác ABC vuông tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm $I\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$ của BC .

Câu 9

Trong không gian $Oxyz$ cho 4 điểm $A(2; -1; 6), B(-3; -1; -4), C(5; -1; 0)$ và $D(1; 2; 1)$.

- Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông và tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.
- Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

Lời giải

a) Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.

+) Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông

Ta có $\overline{AB} = (-5; 0; -10), \overline{AC} = (3; 0; -6), \overline{BC} = (8; 0; 4)$

Xét $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 24 + 0 - 24 = 0$ nên $AC \perp BC$ nên $\triangle ABC$ vuông tại C .

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại C .

b) Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

Theo công thức $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AD}|$

Ta có $\overline{AB} = (-5; 0; -10), \overline{AC} = (3; 0; -6), \overline{AD} = (-1; 3; -5)$

Với $[\overline{AB}, \overline{AC}] = (0; -60; 0), |[\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AD}| = |0 - 60 \cdot 3 + 0| = 180$.

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AD}| = \frac{1}{6} \cdot 180 = 30$.

Câu 10

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(2; 3; -1), B(-1; 0; 2), C(1; -2; 0)$

a) Tính diện tích tam giác ABC

b) Tìm tọa độ điểm D trên Oz sao cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 4

c) Tìm tọa độ điểm E trên (Oyz) sao cho $AE \parallel BC$

d) Tìm tọa độ điểm H trên Ox sao cho $DH \perp AC$

e) Cho BF là phân giác trong của tam giác ABC . Xác định tọa độ điểm F

Lời giải

a) Ta có $\overline{AB} = (-3; -3; 3), \overline{AC} = (-1; -5; 1) \Rightarrow [\overline{AB}, \overline{AC}] = (12; 0; 12)$

Khi đó diện tích tam giác ABC $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]| = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 12^2} = 6\sqrt{2}$ (đvdt)

b) Gọi $D(0;0;z)$. Ta có

$$\overrightarrow{AD}(3;3;z-3) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 12.3 + 0.3 + 12.(z-3) = 12z \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = 4 \Rightarrow \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{6} |12z| = 4 \Leftrightarrow z = \pm 2$$

Vậy điểm $D(0;0;2)$ hoặc $D(0;0;-2)$

c) Gọi $E(0;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AE} = (-2; y-3; z+1)$, $\overrightarrow{BC} = (2; -2; -2)$

Ta có $AE \parallel BC$ khi $\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{BC}$ cùng phương $\frac{-2}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{-2} \Leftrightarrow y = 5; z = 1$

Vậy $E(0;5;1)$

d) Gọi $H(x;0;0)$. Ta có

$\overrightarrow{DH}(x;0;-2)$ hoặc $\overrightarrow{DH}(x;0;2)$

$$DH \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x-2=0 \\ -x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$$

e) Gọi $F(x;y;z)$. BF là phân giác trong tam giác $ABC \Rightarrow \frac{AF}{CF} = \frac{BA}{BC} = \frac{\sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + (3)^2}}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{2}$

$$\text{Mà } F \text{ nằm giữa } A, C \Rightarrow \overrightarrow{FA} = \frac{-3}{2} \overrightarrow{FC} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2 - \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 1}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{7}{5} \\ y = \frac{3 - \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-2)}{1 + \frac{3}{2}} = 0 \\ z = \frac{-1 - \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 0}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{-2}{5} \end{cases}$$

Vậy $F\left(\frac{7}{5}; 0; \frac{-2}{5}\right)$

Câu 11

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho 4 điểm $A(0;0;3), B(1;1;5), C(-3;0;0), D(0;-3;0)$

Chứng minh 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng và tính diện tích ΔACD

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}(1;1;2); \overrightarrow{AC}(-3;0;-3); \overrightarrow{AD}(0;-3;-3)$

$$[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = (9; 9; -9)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}] = 1.9 + 1.9 + 2.(-9) = 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng $\Rightarrow 4$ điểm A, B, C, D đồng phẳng

$$\text{Diện tích } \Delta ACD \quad S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}] \right| = \frac{1}{2} \left| \sqrt{9^2 + 9^2 + (-9)^2} \right| = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Câu 12

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho bốn điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$, $C(-1;1;0)$, $D(2;-1;-2)$.

- Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.
- Tính độ dài đường cao DK của tam giác BCD .
- Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$, từ đó suy ra độ dài đường cao AH của tứ diện.
- Xác định tọa độ trọng tâm, trực tâm tam giác ABC .
- Tìm trên mặt phẳng (Oxy) điểm M sao cho $MA = MB = MC$.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;1;1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2;1;-1)$, $\overrightarrow{AD} = (1;-1;-3)$.

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-2; -4; 0), \quad \overrightarrow{AD} \cdot [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 2 \neq 0.$$

Do đó, bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

b) Ta có $\overrightarrow{BC} = (0;0;-2)$, $\overrightarrow{BD} = (3;-2;-4)$, $[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (-4; -6; 0)$, $BC = 2$.

$$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{13}.$$

Mặt khác, ta có $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} DK \cdot BC \Rightarrow DK = \frac{2S_{\Delta BCD}}{BC} = \sqrt{13}$.

Vậy $DK = \sqrt{13}$.

c) Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{3}$

Lại có $V_{ABCD} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{\Delta BCD} \Rightarrow AH = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

Vậy $AH = \frac{1}{\sqrt{13}}$

d) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = -\frac{1}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{2}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow G\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right).$$

Giả sử trực tâm K của tam giác ABC là $K(a;b;c)$. Ta có

$$\overrightarrow{AK} = (a-1;b;c-1), \overrightarrow{BK} = (a+1;b-1;c-2), \overrightarrow{CK} = (a+1;b-1;c)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{AK} \cdot [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ 2a - b + c = -1 \\ a + 2b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{5} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow K\left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 1\right)$$

e) Giả sử $M(x; y; 0) \in (Oxy)$, ta có

$$AM^2 = (x-1)^2 + y^2 + 1, BM^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 + 4, CM^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2.$$

$$MA = MB = MC \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 = MC^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -4 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}.$$

Hệ này vô nghiệm dẫn đến bài toán không có điểm M thỏa mãn.

Câu 13

Cho hình chóp $SABC$ có $SC = AC = AB = a\sqrt{2}$, $SC \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A . Trên SA, BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = CN = t$ trong đó $0 < t < 2a$.

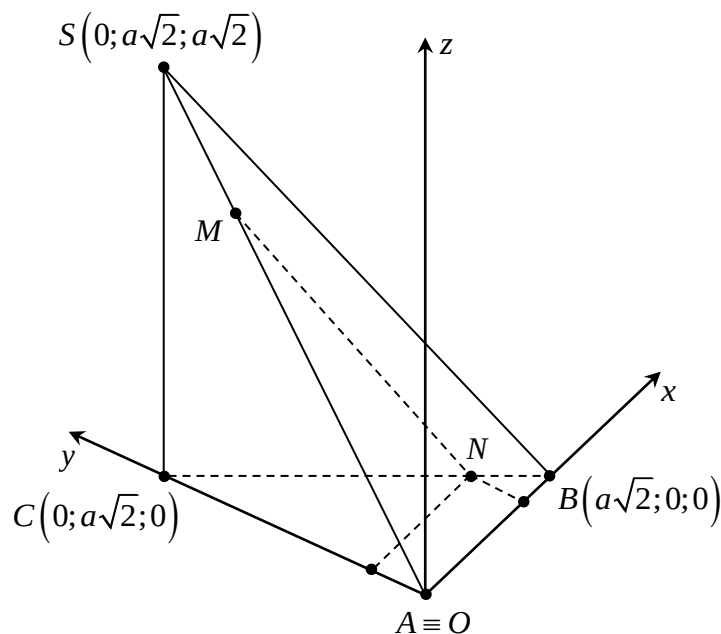
a) Tính độ dài đoạn MN .

b) Tìm t để MN ngắn nhất.

c) Tìm t để MN là đoạn vuông góc chung của SA và BC .

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, ta có



$$A \equiv O(0; 0; 0); B(a\sqrt{2}; 0; 0); C(0; a\sqrt{2}; 0); S(0; a\sqrt{2}; a\sqrt{2}).$$

Ta tính được tọa độ các điểm $M\left(0; \frac{t}{\sqrt{2}}; \frac{t}{\sqrt{2}}\right); N\left(\frac{t}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\left(a - \frac{t}{2}\right); -\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ ($0 < t < 2a$).

$$\overrightarrow{MN}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\left(a - \frac{t}{2}\right); -\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\frac{t^2}{2} + 2\left(a - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{2}} = \sqrt{3t^2 - 4at + 2a^2}.$$

Tìm t để MN ngắn nhất.

$$MN \text{ ngắn nhất} \Leftrightarrow \sqrt{3t^2 - 4at + 2a^2} \text{ nhỏ nhất.}$$

$$\text{Ta có } \sqrt{3t^2 - 4at + 2a^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}t - \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2a^2}{3}} \geq \sqrt{\frac{2a^2}{3}}, \quad \forall t \in (0; 2a)$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \left(\sqrt{3}t - \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2a}{3}.$$

Vậy MN ngắn nhất là $MN = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow t = \frac{2a}{3}$.

Tìm t để MN là đoạn vuông góc chung của SA và BC .

Cách 1.

MN là đoạn vuông góc chung của SA và BC khi và chỉ khi MN ngắn nhất

$$\Leftrightarrow MN = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow t = \frac{2a}{3}.$$

Cách 2. MN là đoạn vuông góc chung của SA và BC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{SA} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a(a-t) + at = 0 \\ -at + 2a(a-t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{2a}{3}.$$

Vậy MN là đoạn vuông góc chung của SA và BC khi và chỉ khi $t = \frac{2a}{3}$.

Câu 14

Cho bốn điểm $S(3;1;2)$, $A(5;3;1)$, $B(2;3;4)$, $C(1;2;0)$.

a) Chứng minh rằng $SA \perp (SBC)$, $SB \perp (SAC)$, $SC \perp (SAB)$.

b) Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của BC , CA , AB . Chứng minh rằng $SMNP$ là tứ diện đều.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{SA} = (2;2;-1)$, $\overrightarrow{SB} = (-1;2;2)$, $\overrightarrow{SC} = (-2;1;-2)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = -2 + 4 - 2 = 0, \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = -4 + 2 + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases}.$$

Vậy $SA \perp (SBC)$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $SB \perp (SAC)$, $SC \perp (SAB)$.

b) Ta có $M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 2\right)$, $N\left(3; \frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{7}{2}; 3; \frac{5}{2}\right)$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = \left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow MN = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \overrightarrow{MP} = \left(2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow MP = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overrightarrow{NP} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right) \Rightarrow NP = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \overrightarrow{SM} = \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right) \Rightarrow SM = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overrightarrow{SN} = \left(0; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow SN = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \overrightarrow{SP} = \left(\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow SP = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Do $MN = MP = NP = SM = SN = SP$ nên $SMNP$ là tứ diện đều.

(Hiển nhiên S không thể đồng phẳng với (MNP)).

Câu 15

Cho hai điểm $A(2;3;1)$, $B(3;-4;1)$. Tìm điểm M thuộc trục Oy sao cho biểu thức $T = 2MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất?

Lời giải

Điểm M thuộc trục Oy nên tọa độ điểm $M(0; y; 0) \Rightarrow \overrightarrow{MA}(2; 3-y; 1); \overrightarrow{MB}(3; -4-y; 1)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } T = 2MA^2 + MB^2 &= 2\left[2^2 + (3-y)^2 + 1^2\right] + \left[3^2 + (-4-y)^2 + 1^2\right] = 3y^2 - 4y + 54 \\ &= 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{185}{3} \geq \frac{185}{3} \end{aligned}$$

Để T đạt giá trị nhỏ nhất thì $y = \frac{2}{3} \Rightarrow M\left(0; \frac{2}{3}; 0\right)$

Câu 16

Cho hai điểm $A(-1; 6; 6)$, $B(3; -6; -2)$ Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $T = MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất ?

Lời giải

Cách 1.

Vì $z_A \cdot z_B < 0$ nên A, B khác phía đối với mặt phẳng (Oxy) .

Gọi N là giao điểm của AB và (Oxy). Lấy $M \in (P)$ ta có $MA + MB \geq AB = NA + NB$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $N \equiv M$.

Suy ra $T = MA + MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $N \equiv M$ hay 3 điểm A, B, M thẳng hàng.

Cần tìm điểm M thỏa mãn

$$\overrightarrow{MA} = -\frac{d(A; (Oxy))}{d(B; (Oxy))} \cdot \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -3 \cdot \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-x = -3(3-x) \\ 6-y = -3(-6-y) \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=0 \end{cases}$$

Vậy $M(2; -3; 0)$.

Cách 2.

Phương trình mặt phẳng (Oxy) là $z = 0$.

Xét vị trí tương đối của A, B đối với mặt phẳng (Oxy) ta có

$T_A \cdot T_B = 6(-2) = -12 < 0$. Vậy A, B khác phía đối với mặt phẳng (Oxy) .

Đường thẳng AB qua $A(-1; 6; 6)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = 4(1; -3; -2)$ làm véc tơ chỉ phương, suy ra AB có

$$\text{phương trình } \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 6 - 3t \\ z = 6 - 2t \end{cases}$$

Gọi N là giao điểm của AB và (Oxy), suy ra tọa độ điểm N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 6 - 3t \\ z = 6 - 2t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ta chứng minh $T = MA + MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $N \equiv M$

Thật vậy, lấy $M \in (P)$ ta có $MA + MB \geq AB = NA + NB$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $N \equiv M$. Vậy $M(2; -3; 0)$.

Câu 17

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2018;0;0), B(0;2018;0), C(0;0;2018)$. Có bao nhiêu điểm trong hình của tứ diện $OABC$ mà tọa độ là các số nguyên.

A. C_{2016}^3

B. C_{2018}^3

C. C_{2017}^3

D. C_{2019}^3

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x + y + z = 2018$

Theo giả thiết bài toán điểm trong của hình tứ diện $OABC$ có tọa độ nguyên là điểm $(x; y; z)$ với

$$\begin{cases} x > 0, y > 0, z > 0 \\ x + y + z < 2018 \\ x, y, z \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Đặt $x = x' + 1, y = y' + 1, z = z' + 1 \Rightarrow x' + y' + z' < 2015 \Rightarrow x' + y' + z' \leq 2014$.

Vậy $x' + y' + z' = 2014 - t, t \geq 0, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow x' + y' + z' + t = 2014$.

Số nghiệm nguyên không âm $(x'; y'; z'; t)$ của phương trình này là $C_{2014+4-1}^{4-1} = C_{2017}^3$ tương ứng với nghiệm nguyên dương $(x; y; z)$ của bất phương trình $x + y + z < 2018$.

Chọn đáp án C.

Câu 18

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có tọa độ các đỉnh

$A(0;0;0), B(0;a;0), C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$ và $A_1(0;0;2a)$. Gọi D là trung điểm cạnh BB_1 và M di động trên cạnh AA_1 . Diện tích nhỏ nhất $S_{\min}$ của tam giác MDC_1

A. $S_{\min} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

B. $S_{\min} = \frac{a^2\sqrt{5}}{4}$

C. $S_{\min} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$

D. $S_{\min} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$

Lời giải

Theo giả thiết, ta có $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1} \Rightarrow C_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 2a\right), D(0;a;a)$ và $M(0;0;t)(0 < t < 2a)$.

Ta có $DC_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; 2a\right), \overrightarrow{DM} = (0; -a; t - a)$

$$\text{Vì vậy } S_{MDC_1} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{DM} \right\| = \frac{a\sqrt{4t^2 - 12at + 15a^2}}{4} = \frac{a\sqrt{(2t - 3a)^2 + 6a^2}}{4} \geq \frac{a^2\sqrt{6}}{4} \geq S_{\min} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$$

Chọn đáp án C

Câu 19

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có tọa độ các đỉnh

$A(1;0;2), B(2;1;0), C(3;-2;2)$ và $A_1(1;2;3)$. Gọi M là một điểm trên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$. Diện tích toàn phần S_p của tứ diện $MABC$ có giá trị nhỏ nhất gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 10

B. 12

C. 11

D. 13

Lời giải

Ta có $(ABC): x + y + z - 3 = 0; d(A_1; (ABC)) = \sqrt{3}; AB = \sqrt{6}; AC = 2\sqrt{2}; BC = \sqrt{14}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (ABC) . Theo pytago và công thức diện tích ta có $S_{tp} = S_{ABC} + S_{MAB} + S_{MCB} + S_{MCA}$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{a^2 + 3} + \sqrt{14} \cdot \sqrt{b^2 + 3} + \sqrt{8} \cdot \sqrt{c^2 + 3}}{2} \\ &= 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6a^2 + 18} + \sqrt{14b^2 + 42} + \sqrt{8c^2 + 24}}{2} \\ &\geq 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{(\sqrt{6}a + \sqrt{14}b + \sqrt{8}c)^2 + (\sqrt{18} + \sqrt{42} + \sqrt{24})^2}}{2} \end{aligned}$$

Trong đó a, b, c lần lượt là khoảng cách từ H đến các cạnh AB, BC, CA và

$$\sqrt{6}a + \sqrt{14}b + \sqrt{8}c = 2S_{ABC} = 4\sqrt{3}$$

Chọn đáp án B.

Câu 20

Cho tứ diện $S.ABC$ có $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$, $SC \perp ABC$, tam giác ABC vuông tại A . Các điểm $M \in SA, N \in BC$ sao cho $AM = CN = t$ ($0 < t < 2a$). Độ dài nhỏ nhất $l_{\min}$ của đoạn thẳng MN .

A. $l_{\min} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

B. $l_{\min} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

C. $l_{\min} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

D. $l_{\min} = \frac{2a}{3}$

Lời giải

Ta chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho O trùng với A , tia Ox chứa AC , tia chứa AB và tia Oz cùng hướng với CS . Khi đó, ta có

$$A(0; 0; 0), B(0; a\sqrt{2}; 0), C(a\sqrt{2}; 0; 0), S(a\sqrt{2}; 0; a\sqrt{2})$$

$$\text{Và } M\left(\frac{t\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{t\sqrt{2}}{2}\right), N\left(a\sqrt{2} - \frac{t\sqrt{2}}{2}; \frac{t\sqrt{2}}{2}; 0\right)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = \left(\sqrt{2}(a-t); \frac{t\sqrt{2}}{2}; -\frac{t\sqrt{2}}{2}\right).$$

Độ dài đoạn thẳng MN là

$$l = \sqrt{2(a-t)^2 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}} = \sqrt{3t^2 - 4at + 2a^2} = \sqrt{3\left(t - \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{2a^2}{3}} \geq \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow l_{\min} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Chọn đáp án C.

Câu 21

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Xét hai điểm M, N là các điểm di động trên các đoạn thẳng AD', DB sao cho $AM = DN = k$ ($0 < k < a\sqrt{2}$). Tìm độ dài nhỏ nhất $l_{\min}$ của đoạn thẳng MN .

A. $l_{\min} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

B. $l_{\min} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. $l_{\min} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

D. $l_{\min} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Lời giải

Ta chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho O trùng với A , tia Ox chứa AC , tia chứa AB và tia Oz chứa tia AA' . Khi đó, ta có

$$A(0;0;0), A'(0;0;a), B(0;a;0), B'(a;0;a)$$

$$D(0;a;0), D'(0;a;a), C(a;a;0), C'(a;a;a)$$

$$\text{Và } M\left(0; \frac{k}{\sqrt{2}}; \frac{k}{\sqrt{2}}\right), N\left(\frac{k}{\sqrt{2}}; a - \frac{k}{\sqrt{2}}; 0\right)$$

$$\text{Khi đó } MN = \sqrt{3k^2 - 2a\sqrt{2}k + a^2} = \sqrt{3\left(k - \frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3}} \geq \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow l_{\min} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Chọn đáp án A.

Câu 22

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;0;2)$, $B(0;3;2)$, $C(1;0;-2)$. Bán kính đường tròn nội tiếp bằng

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{10 + \sqrt{26}}{10}$

C. $\frac{12 - \sqrt{26}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{481}}{10 + \sqrt{26}}$

Lời giải

Ta có $\overline{AB} = (-4, 3, 0)$; $\overline{AC} = (-3, 0, 4) \Rightarrow AB = AC = 5$; có $BC = \sqrt{26}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overline{AB}, \overline{AC}] \right| = \frac{\sqrt{481}}{2}$

Ta lại có công thức $S_{\triangle ABC} = \frac{AB + BC + AC}{2} r \Rightarrow r = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB + BC + AC} = \frac{\sqrt{481}}{5 + \sqrt{26} + 5} = \frac{\sqrt{481}}{10 + \sqrt{26}}$

Vậy ta chọn đáp án D

Câu 23

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(2;1;2)$, $C(-1;3;1)$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng

A. $2\sqrt{2}$

B. $\frac{9}{\sqrt{10}}$

C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

D. $\sqrt{3}$

Lời giải

Ta có $\overline{AB} = (1; -1; 2)$; $\overline{AC} = (-2; 1; 1) \Rightarrow AB = AC = 3$; có $BC = \sqrt{14}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overline{AB}, \overline{AC}] \right| = \frac{\sqrt{35}}{2}$

Ta lại có công thức $S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R_{\triangle ABC}} \Rightarrow R_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{\triangle ABC}} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{14}}{4 \cdot \frac{\sqrt{35}}{2}} = \frac{9}{\sqrt{10}}$.

Vậy ta chọn đáp án B.

Câu 24

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(-1;0;2)$, $C(3;0;0)$. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tọa độ là $(a;b;c)$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R_{\Delta ABC}$. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c + R_{\Delta ABC}$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

- A. $(0;2)$ B. $\left(2;\frac{7}{2}\right)$ C. $\left(5;\frac{13}{2}\right)$ D. $\left(\frac{7}{2};5\right)$

Lời giải

Cặp VTCP của mặt phẳng (ABC) là $\overrightarrow{AB} = (-2; -2; 1)$ và $\overrightarrow{AC} = (2; -2; -1)$. Suy ra VTPT của mặt phẳng (ABC) là $(ABC) \overrightarrow{n_{(ABC)}} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (4; 0; 8) = 4(1; 0; 2)$.

Suy ra phương trình tổng quát của mặt phẳng $(ABC): x + 2z - 3 = 0$.

Gọi tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$$K(a;b;c) \Rightarrow \begin{cases} K \in (ABC) \\ KA = KB \\ KA = KC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c - 3 = 0 \\ \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (b-0)^2 + (c-0)^2} \\ \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (b-0)^2 + (c-0)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = 3 \\ 4a + 4b - 2c = 1 \\ -4a + 4b + 2c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{4} \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow K\left(1; -\frac{1}{4}; 1\right)$$

Suy ra bán kính đường tròn ngoại ΔABC là $R_{\Delta ABC} = KA = \sqrt{(1-1)^2 + \left(-\frac{1}{4}-2\right)^2 + (1-1)^2} = \frac{9}{4}$

Suy ra $T = a + b + c + R_{\Delta ABC} = 1 - \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} = 4$.

Câu 25

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$ Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, tìm mệnh đề đúng?

- A. $a + b + c = 6$ B. $a + b + c = 5$ C. $a + b + c = 8$ D. $a + b + c = 7$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 3$; $\overrightarrow{BC} = (4; 1; 1) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}$.

Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên

$$\frac{1}{2} AB(AD + BC) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (AD + 3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{1}{3} BC.$$

Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$.

Giả sử $D(a;b;c)$ khi đó ta có
$$\begin{cases} a-1=\frac{4}{3} \\ b-2=\frac{1}{3} \\ c-1=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{7}{3} \\ b=\frac{7}{3} \\ c=\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a+b+c=6.$$

Chọn ý A.

Câu 26

Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha): x-z-3=0$ và điểm $M(1;1;1)$. Gọi A là điểm thuộc tia Oz. Gọi B là hình chiếu của A lên (α) . Biết rằng tam giác MAB cân tại M. Diện tích của tam giác MAB bằng

A. $6\sqrt{3}$

B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{3\sqrt{123}}{2}$

D. $3\sqrt{3}$

Lời giải

Gọi $A(0;0;a)$. Đường thẳng AB qua A và vuông góc với (α) có phương trình
$$\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=a-t \end{cases}.$$

B là hình chiếu của A lên (α) nên tọa độ B thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=a-t \\ x-z-3=0 \end{cases} \text{ suy ra } B\left(\frac{a+3}{2}; 0; \frac{a-3}{2}\right).$$

Tam giác MAB cân tại M nên

$$MA=MB \Leftrightarrow 1+1+(1-a)^2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + 1 + \left(\frac{a-5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=-3 \end{cases}.$$

- Nếu $a=-3$ thì tọa độ $A(0;0;-3)$ và $B(0;0;-3)$ trùng nhau, loại.
- Nếu $a=3$ thì tọa độ $A(0;0;3)$, $B(3;0;0)$.

Diện tích tam giác MAB bằng $S = \frac{1}{12} \left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right] = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

Chọn ý B.

Câu 27

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm tạo thành tứ giác lồi $A(2;1;-1)$, $B(1;2;-2)$, $C(3;1;1)$, $D(5;3;7)$. Diện tích của tứ giác lồi này có giá trị bằng?

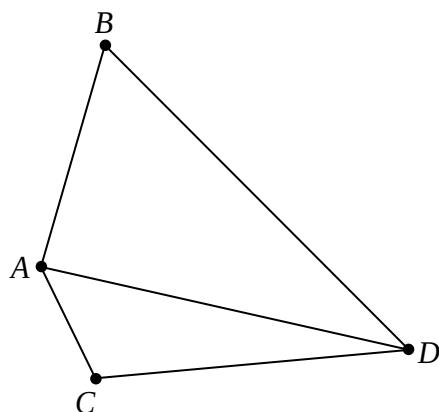
A. $3\sqrt{6}$

B. $\frac{3\sqrt{6}}{2}.$

C. $\frac{7\sqrt{6}}{2}.$

D. $2\sqrt{6}.$

Lời giải



Có $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 0; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (3; 2; 8)$

Ta có $\cos BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = -\frac{\sqrt{15}}{5} \Rightarrow BAC \approx 140,76^\circ$,

- $\cos BAD = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{AB \cdot AD} = -\frac{9}{\sqrt{231}} \Rightarrow BAD \approx 126,3^\circ$,

- $\cos CAD = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}}{AC \cdot AD} = \frac{19}{\sqrt{385}} \Rightarrow CAD \approx 14,46^\circ$.

Suy ra $BAD + DAC = BAC$, do đó 4 điểm tạo thành tứ giác ABDC.

Do $\cos BAD = -\frac{9}{\sqrt{231}} \Rightarrow \sin BAD = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{71}}$, $\cos CAD = \frac{19}{\sqrt{385}} \Rightarrow \sin CAD = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{385}}$.

Diện tích cần tìm là $S = S_{ACD} + S_{ABD} = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin CAD + \frac{1}{2} AD \cdot AB \cdot \sin BAD = \frac{7\sqrt{6}}{2}$.

Câu 28

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm tạo thành một tứ giác lồi $A(0; 0; 4)$, $B(2; 1; 0)$, $C(4; -1; 2)$, $D(1; -2; 7)$. Tính diện tích của tứ giác lồi.

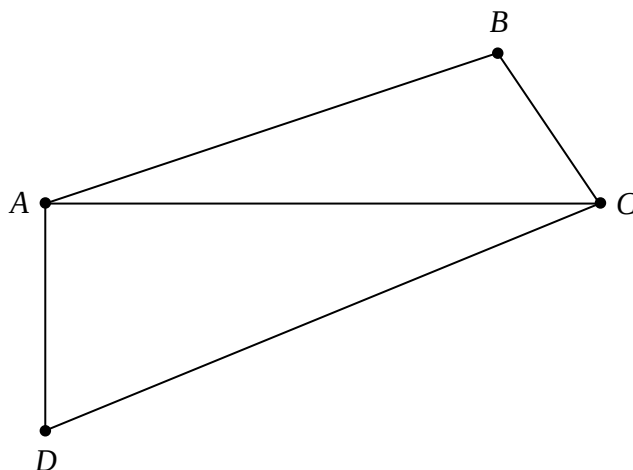
A. $\frac{13\sqrt{6}}{2}$

B. $6\sqrt{6}$.

C. $\frac{11\sqrt{6}}{2}$.

D. $9\sqrt{6}$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 1; -4)$, $\overrightarrow{AC} = (4; -1; -2)$, $\overrightarrow{AD} = (1; -2; 3) \Rightarrow AB = \sqrt{21}$; $AC = \sqrt{21}$; $AD = \sqrt{14}$

$$\text{Với } \begin{cases} \cos BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{15}{21} \Rightarrow BAC \approx 44,4^\circ \\ \cos BAD = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{AB \cdot AD} = \frac{-2\sqrt{6}}{7} \Rightarrow BAD \approx 134,4^\circ \Rightarrow BAD = DAC + BAC \\ \cos DAC = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}}{AD \cdot AC} = 0 \Rightarrow DAC = 90^\circ \end{cases}$$

Suy ra tứ giác lồi là $ABCD \Rightarrow S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \left(\left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| + \left| [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \right| \right) = \frac{13\sqrt{6}}{2}$.

Câu 29

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho năm điểm tạo thành một hình chóp có đáy là tứ giác với $A(0; 0; 3)$, $B(2; -1; 0)$, $C(3; 2; 4)$, $D(1; 3; 5)$, $E(4; 2; 1)$. Đỉnh của hình chóp tương ứng là

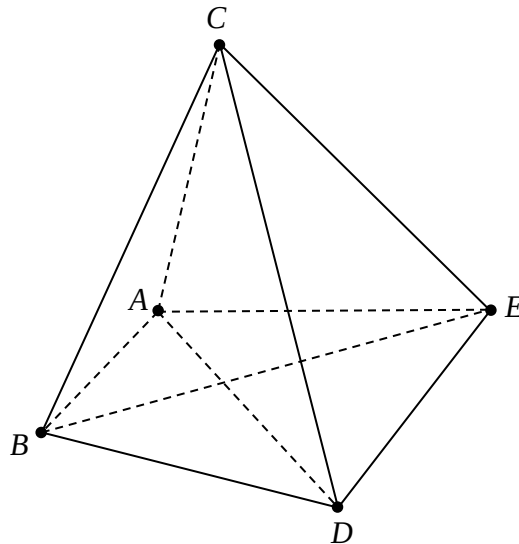
A. Điểm C .

B. Điểm A .

C. Điểm B .

D. Điểm D .

Lời giải



Xét đáp án A chọn điểm C là đỉnh ta có

$$\overrightarrow{AB} = (2; -1; -3), \overrightarrow{AD} = (1; 3; 2), \overrightarrow{AE} = (4; 2; -2), \overrightarrow{AC} = (3; 2; 1).$$

$$\text{Với } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = (7; -7; 7) \Rightarrow \begin{cases} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AE} = 4 \cdot 7 - 2 \cdot 7 - 2 \cdot 7 = 0 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 7 + 1 \cdot 7 = 14 \end{cases}$$

Suy ra $A; B; D; E$ đồng phẳng. Vậy điểm C là đỉnh của hình chóp.

Câu 30

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho năm điểm tạo thành hình chóp tứ giác có tọa độ là $A(3; -1; 1)$, $B(2; 3; 1)$, $C(1; 2; 2)$, $D(4; -2; 0)$, $E(2; 3; -1)$. Thể tích hình chóp tương ứng bằng

A. 2

B. $\frac{4}{3}$

C. 1

D. $\frac{8}{3}$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AC} = (-2; 3; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (1; -1; -1)$, $\overrightarrow{AE} = (-1; 4; -2)$.

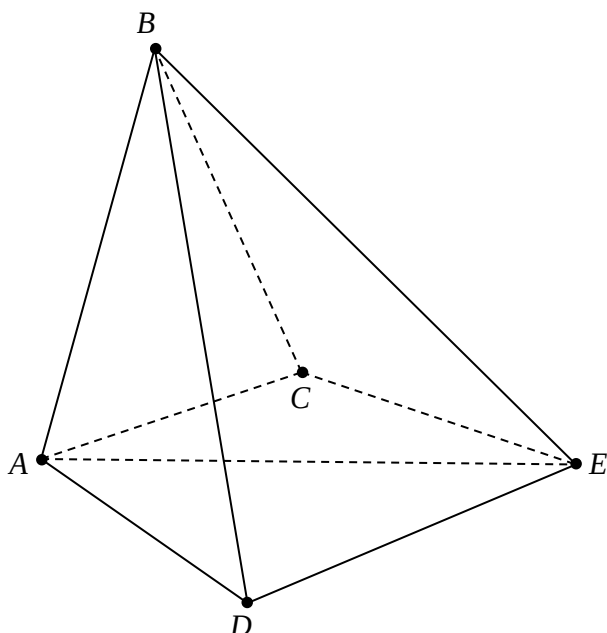
$$\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = (-2; -1; -1), \left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] \cdot \overrightarrow{AE} = 2 - 4 + 2 = 0 \Rightarrow A, C, D, E \text{ đồng phẳng.}$$

Phương trình mặt phẳng (ADC): $2x + y + z - 6 = 0$.

Thay tọa độ điểm B vào phương trình mặt phẳng (ADC) ta được $2.2+3+1-6=0$ vô lý. Vậy B không thuộc mặt phẳng (ADC).

$$\text{Mặt khác} \left\{ \begin{array}{l} \cos CAD = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}}{AD \cdot AC} = \frac{-6}{\sqrt{42}} \Rightarrow CAD \approx 157,8^\circ \\ \cos CAE = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC}}{AE \cdot AC} = \frac{12}{7\sqrt{6}} \Rightarrow CAE \approx 45,6^\circ \\ \cos DAE = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}}{AD \cdot AE} = \frac{-1}{\sqrt{7}} \Rightarrow DAE \approx 112,2^\circ \end{array} \right.$$

$\Rightarrow CAE + DAE = CAD \Rightarrow$ Tứ giác qua bốn điểm A, C, D, E là tứ giác lồi $ACED$.



Do đó hình chóp có đỉnh là B và mặt đáy là tứ giác lồi $ACED$.

$$\text{Ta có } h = d(B, (ACED)) = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\bullet \quad S_{ACED} = S_{ACE} + S_{ADE} = \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE} \right] + \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} \right] = 4\sqrt{6}$$

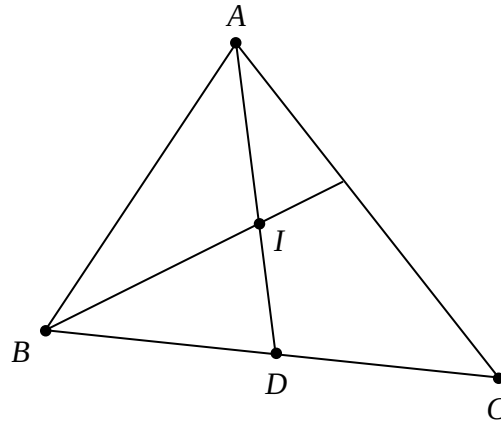
- $V_{B.ACED} = \frac{1}{3} S_{ACED} \cdot d(B, (ACED)) = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{8}{3}.$

Câu 31

Trong không gian $Oxyz$ cho hai ba điểm $A(3;1;0); B(0;-3;0); C(-1;1;3)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ nằm trong khoảng nào dưới đây

A. $(0;1)$ **B.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$.

C. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. **D.** $(2; 4)$.



Kỹ năng phân giác cho ta cách xác định tọa độ điểm D . Giao là chân đường phân giác của góc BAC . Được xác định là .

Tương tự, tâm đường tròn nội tiếp I lại là chân đường phân giác của góc ABD

Ta có $BA = 5; BD = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

$$\Rightarrow \frac{\vec{IA}}{BA} + \frac{\vec{ID}}{BD} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\vec{IA}}{5} + \frac{\vec{ID}}{\frac{\sqrt{26}}{2}} = \vec{0} \Rightarrow I \left(\frac{-5+3\sqrt{26}}{10+\sqrt{26}}; \frac{-10+\sqrt{26}}{10+\sqrt{26}}; \frac{15}{10+\sqrt{26}} \right) = (a; b; c).$$

$$\text{Vậy } T = a + b + c = \frac{4\sqrt{26}}{10+\sqrt{26}} \approx 1,35 \in \left(1; \frac{3}{2}\right).$$

Câu 32

Trong không gian Oxyz, tập hợp các điểm thỏa mãn $|x| + |y| + |z| \leq 2$ và $|x-2| + |y| + |z| \leq 2$ là một khối đa diện có thể tích bằng

A. 3

B. $\frac{4}{3}$.

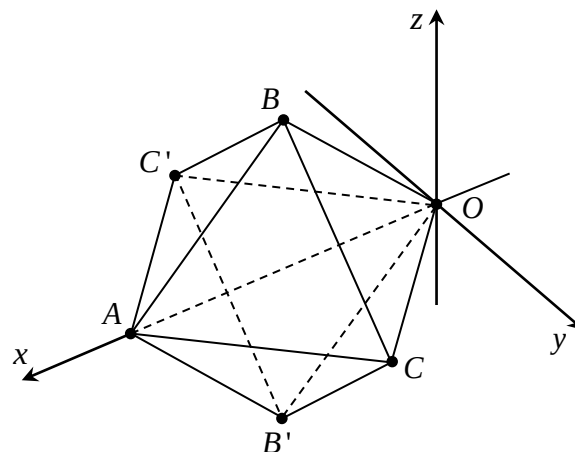
C. 2.

D. $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Phương pháp

Từ các giả thiết đã cho, xác định các điểm đầu mút. Tính thể tích.



Có $0 \leq |x| + |y| + |z| \leq 2$ và $0 \leq |x-2| + |y| + |z| \leq 2$ nên tìm các điểm đầu mút.

$$|x| + |y| + |z| = 0 \Rightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow O(0; 0; 0)$$

$$|x-2|+|y|+|z|=0 \Rightarrow x=2; y=z=0 \Rightarrow A(2;0;0)$$

Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} |x| + |y| + |z| = 2 \\ |x-2| + |y| + |z| = 2 \end{cases} \Rightarrow |x| = |x-2| \Leftrightarrow x = 2-x \Leftrightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow |y| + |z| = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 0; z = \pm 1 \\ y = \pm 1; z = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1; 0; 1), B'(1; 0; -1), C(1; 1; 0), C'(1; -1; 0)$$

Dựng hình suy ra tập hợp các điểm thỏa mãn là bất diện $B.OCAC'.B'$

Ta có $OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, do đó hình bát diện đều $B.OCAC'.B'$ có cạnh bằng $\sqrt{2}$

Vậy thể tích của bát diện đều là $V = \frac{(\sqrt{2})^3 \sqrt{2}}{3} = \frac{4}{3}$

Câu 33

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ tập hợp các điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $|x| + |y| + |z| = 3$ là một hình đa diện (H) . Tính thể tích của khối đa diện tạo bởi (H)

- A.** 3
- B.** $\frac{4}{3}$.
- C.** 2.
- D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $|x| + |y| + |z| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y + z = -3 \\ x + y - z = 3 \\ x + y - z = -3 \\ x - y + z = 3 \\ x - y + z = -3 \\ -x + y + z = 3 \\ -x + y + z = -3 \end{cases} \Rightarrow 8 \text{ mặt phẳng chứa các mặt của một hình bát}$

diện đều có độ dài cạnh $a = 3\sqrt{2}$.

Vậy thể tích của hình cần tính là $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3} = \frac{(3\sqrt{2})^3 \sqrt{2}}{3} = 36$



Chương

2

Lý thuyết về phương trình đường thẳng

Tóm tắt nội dung

Tiếp sau chương đầu tiên, trong các chương sau này chúng ta sẽ đi tìm hiểu về lý thuyết về các đối tượng đó là đường thẳng, mặt phẳng, mặt cầu và mối liên hệ giữa chúng. Ta sẽ bắt đầu với lý thuyết về phương trình đường thẳng.



A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

I. Góc giữa hai đường thẳng.

Cho đường thẳng d có vtcp $\vec{u} = (a; b; c)$ và đường thẳng d' có vtcp $\vec{u}' = (a'; b'; c')$.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng đó ta có:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| |\vec{u}'|} = \frac{|a.a' + b.b' + c.c'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} \quad (0 \leq \varphi \leq 90^\circ)$$

II. Góc giữa đường thẳng với mặt phẳng.

Cho đường thẳng d có vtcp $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (α) có vtpt $\vec{n} = (A; B; C)$.

Gọi φ là góc hợp bởi đường thẳng d và mặt phẳng (α) ta có:

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

III. Khoảng cách từ điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ đến đường thẳng Δ có vtcp $\vec{u}$.

- **Cách 1.**

+ Viết phương trình mặt phẳng (α) qua M_1 và vuông góc với Δ .

+ Tìm tọa độ giao điểm H của Δ và mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow d(M_1; \Delta) = M_1H$.

- **Cách 2.** Sử dụng công thức: $d(M_1, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$ (với $M_0 \in \Delta$)

IV. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$, có vtcp $\vec{u}$ và đường thẳng Δ' đi qua $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$, có vtcp $\vec{u}'$.

- **Cách 1.**

+ Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa Δ và song song với Δ' .

+ Tính khoảng cách từ M'_0 đến mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, (\alpha))$.

- **Cách 2.** Sử dụng công thức: $d(\Delta, \Delta') = \frac{|\overrightarrow{[u, u']} \cdot \overrightarrow{M_0M'_0}|}{|\overrightarrow{[u, u']}|}$.

V. Phương trình đường phân giác trong.

Đây là một dạng toán mới xuất hiện trong kì thi THPT Quốc Gia 2018 và đã làm bao nhiêu trái tim tan vỡ, hôm nay chúng ta ngồi đây và nhắc lại nó một lần nữa.

Xét tam giác ABC , khi đó đường phân giác trong góc A có vectơ chỉ phương là

$$\vec{u} = \frac{1}{AB} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{AC} \overrightarrow{AC}$$

Và ngược lại đường phân giác ngoài của góc A có vectơ chỉ phương là

$$\vec{u} = \frac{1}{AB} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{AC} \overrightarrow{AC}$$

Đối với hình thoi $ABCD$ cạnh a ta có $\overrightarrow{AC} = a \left(\frac{1}{AB} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{AD} \overrightarrow{AD} \right)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm phân biệt A, B .

Cách giải: Xác định vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{AB}$.

Dạng 2. Đường thẳng Δ đi qua điểm M và song song với d .

Cách giải:

Trong trường hợp đặc biệt:

- Nếu Δ song song hoặc trùng với trục Ox thì Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_\Delta} = \vec{i} = (1; 0; 0)$
- Nếu Δ song song hoặc trùng với trục Oy thì Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_\Delta} = \vec{j} = (0; 1; 0)$
- Nếu Δ song song hoặc trùng với trục Oz thì Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_\Delta} = \vec{k} = (0; 0; 1)$

Các trường hợp khác thì Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_\Delta} = \overrightarrow{a_d}$, với $\overrightarrow{a_d}$ là vectơ chỉ phương của d

Dạng 3. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (α) .

Cách giải: Xác định vector chỉ phương của Δ là $\vec{a}_\Delta = \vec{n}_\alpha$, với $\vec{n}_\alpha$ là vector pháp tuyến của (α) .

Dạng 4. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 (hai đường thẳng không cùng phương).

Cách giải: Xác định vector chỉ phương của Δ là $\vec{a}_\Delta = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$, với $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ lần lượt là vector chỉ phương của d_1, d_2 .

Dạng 5. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M vuông góc với đường thẳng d và song song với mặt phẳng (α) .

Cách giải: Xác định vector chỉ phương của Δ là $\vec{a}_\Delta = [\vec{a}_d, \vec{n}_\alpha]$, với $\vec{a}_d$ là vector chỉ phương của d , $\vec{n}_\alpha$ là vector pháp tuyến của (α) .

Dạng 6. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$; $((\alpha), (\beta))$ là hai mặt phẳng cắt nhau

Cách giải: Xác định vector chỉ phương của Δ là $\vec{a}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta]$, với $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ lần lượt là vector pháp tuyến của $(\alpha), (\beta)$.

Dạng 7. Viết phương trình đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) .

Cách giải:

- Lấy một điểm bất kì trên Δ , bằng cách cho một ẩn bằng một số tùy ý.
- Xác định vector chỉ phương của Δ là $\vec{a}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta]$, với $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ lần lượt là vector pháp tuyến của $(\alpha), (\beta)$.

Dạng 8. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 ($A \notin d_1, A \notin d_2$).

Cách giải: Xác định vector chỉ phương của Δ là $\vec{a}_\Delta = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$, với $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ lần lượt là vector pháp tuyến của $mp(A, d_1), mp(A, d_2)$.

Dạng 9. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 .

Cách giải: Xác định vector chỉ phương của Δ là $\vec{a}_\Delta = \vec{AB}$, với $A = d_1 \cap (\alpha), B = d_2 \cap (\alpha)$

Dạng 10. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A , vuông góc và cắt d .

Cách giải:

- Xác định $B = \Delta \cap d$.
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, B .

Dạng 11. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 , với $A \notin d_2$.

Cách giải:

- Xác định $B = \Delta \cap d_2$.
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, B .

Dạng 12. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A , cắt đường thẳng d và song song với mặt phẳng (α) .

Cách giải:

- Xác định $B = \Delta \cap d$.
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, B .

Dạng 13. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) cắt và vuông góc đường thẳng d .

Cách giải:

- Xác định $A = d \cap (\alpha)$.
- Đường thẳng Δ đi qua A và có vector chỉ phương của Δ là $\vec{a}_\Delta = [\vec{a}_d, \vec{n}_\alpha]$, với $\vec{a}_d$ là vector chỉ phương của d , $\vec{n}_\alpha$ là vector pháp tuyến của (α) .

Dạng 14. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng (α) , nằm trong (α) và vuông góc đường thẳng d (ở đây d không vuông góc với (α)).

Cách giải:

- Xác định $A = d \cap (\alpha)$.
- Đường thẳng Δ đi qua A và có vector chỉ phương của Δ là $\vec{a}_\Delta = [\vec{a}_d, \vec{n}_\alpha]$, với $\vec{a}_d$ là vector chỉ phương của d , $\vec{n}_\alpha$ là vector pháp tuyến của (α) .

Dạng 15. Viết phương trình đường thẳng Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 .

Cách giải:

- Xác định $A = \Delta \cap d_1, B = \Delta \cap d_2$ sao cho $\begin{cases} AB \perp d_1 \\ AB \perp d_2 \end{cases}$
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B .

Dạng 16. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với đường thẳng d và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 .

Cách giải:

- Xác định $A = \Delta \cap d_1, B = \Delta \cap d_2$ sao cho $\vec{AB}, \vec{a}_d$ cùng phương, với $\vec{a}_d$ là vector chỉ phương của d .
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và có vector chỉ phương $\vec{a}_\Delta = \vec{a}_d$.

Dạng 17. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 .

Cách giải:

- Xác định $A = \Delta \cap d_1, B = \Delta \cap d_2$ sao cho $\vec{AB}, \vec{n}_\alpha$ cùng phương, với $\vec{n}_\alpha$ là vector pháp tuyến của (α) .
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và có vector chỉ phương $\vec{a}_\Delta = \vec{n}_\alpha$.

Dạng 18. Viết phương trình Δ là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (α) .

Cách giải: Xác định $H \in \Delta$ sao cho $\vec{AH} \perp \vec{a}_d$, với $\vec{a}_d$ là vector chỉ phương của d .

- Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa d và vuông góc với mặt phẳng (α) .
- Viết phương trình đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β)

Dạng 19. Viết phương trình Δ là hình chiếu song song của d lên mặt phẳng (α) theo phương d' .

Cách giải :

- Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa d và có thêm một véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{d'}}$.
- Viết phương trình đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) .

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA

Câu 1

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(0;0;-3), B(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 8y + 7z - 1 = 0$.

- Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (P) .
- Tìm tọa độ giao điểm I của đường thẳng AB với mặt phẳng (P) .
- Tìm tọa độ điểm C nằm trên mặt phẳng (P) sao cho ΔABC là tam giác đều.
- Tìm điểm M có hoành độ bằng 1 sao cho $AM + BM$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm điểm N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $AN^2 + BN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

a) $(P): 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \Rightarrow (P)$ có 1 VTPT là $\vec{n} = (3; -8; 7)$

Do $d \perp (P) \Rightarrow d$ nhận $\vec{n} = (3; -8; 7)$ làm VTCP.

Đường thẳng d đi qua $A(0;0;-3)$, có 1 VTCP là $(3; -8; 7)$, có phương trình:
$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -8t \\ z = -3 + 7t \end{cases}$$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}(2;0;2) \Rightarrow$ Đường thẳng AB có 1 VTCP là $(1;0;1)$

Đường thẳng AB đi qua $A(0;0;-3)$, có 1 VTCP là $(1;0;1)$, có phương trình:
$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -3 + t \end{cases} \quad I \in AB \Rightarrow$$

Giả sử tọa độ điểm $I(t;0;-3+t)$

$$I \in (P) \Rightarrow 3t - 8 \cdot 0 + 7(-3+t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 10t - 22 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{11}{5} \Rightarrow I\left(\frac{11}{5}; 0; -\frac{4}{5}\right).$$

c) ΔABC là tam giác đều $\Rightarrow CA = CB \Rightarrow C$ nằm trên mặt phẳng (Q) , là mặt phẳng trung trực của AB

Mà $C \in (P) \Rightarrow C \in \Delta = (P) \cap (Q)$

Gọi J là trung điểm của $AB \Rightarrow J(1;0;-2)$

Mặt phẳng (Q) đi qua $J(1;0;-2)$ và có 1 VTPT là $\vec{n}_1 = (1;0;1)$ có phương trình là:

$$1(x-1) + 0 + 1(z+2) = 0 \Leftrightarrow x + z + 1 = 0$$

$$\Delta: \begin{cases} 3x-8y+7z-1=0 \\ x+z+1=0 \end{cases} \text{ có 1 VTCP } \vec{u} = \frac{-1}{4} \cdot [\vec{n}; \vec{n}_1] = (2; -1; -2)$$

$$\text{Cho } x=0 \Rightarrow \begin{cases} -8y+7z-1=0 \\ z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow N(0; -1; -1) \in \Delta$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x=2t \\ y=-1-t \\ z=-1-2t \end{cases}$$

$$\text{Do } C \in \Delta \Rightarrow \text{Giả sử } C(2t; -1-t; -1-2t)$$

$$\text{Khi đó, } \Delta ABC \text{ là tam giác đều khi } AC = AB \Leftrightarrow AC^2 = AB^2$$

$$\Leftrightarrow (2t)^2 + (1+t)^2 + (2-2t)^2 = 2^2 + 0^2 + 2^2 \Leftrightarrow 9t^2 - 6t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-\frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Với } t=1 \Rightarrow C(2; -2; -3).$$

$$\text{Với } t=-\frac{1}{3} \Rightarrow C\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

$$\text{d) } M \text{ có hoành độ bằng 1} \Rightarrow M \in (\alpha): x=1$$

Ta thấy $A(0; 0; -3)$ và $B(2; 0; -1)$ nằm ở hai phía so với mặt phẳng (α) . Khi đó, gọi giao điểm của đoạn thẳng AB với (α) là M_0

Ta có $AM + BM \geq AB$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi M trùng M_0

$$\Rightarrow (AM + BM)_{\min} = AB \text{ khi và chỉ khi } M \text{ trùng } M_0$$

$$\text{Ta có } M_0 \in AB: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-3+t \end{cases} \Rightarrow \text{Giả sử } M_0(t; 0; -3+t)$$

$$M_0 \in (\alpha): x=1 \Rightarrow t=1 \Rightarrow M_0(1; 0; -2)$$

$$\text{Vậy, } M(1; 0; -2).$$

$$\text{e) Ta có: } (3 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + 7 \cdot (-3) - 1)(3 \cdot 2 - 8 \cdot 0 + 7 \cdot (-1) - 1) = (-22) \cdot (-2) > 0$$

$$\Rightarrow A(0; 0; -3) \text{ và } B(2; 0; -1) \text{ nằm cùng phía so với mặt phẳng } (P): 3x - 8y + 7z - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } AN^2 + BN^2 &= \overline{AN}^2 + \overline{BN}^2 = (\overline{AJ} + \overline{JN})^2 + (\overline{BJ} + \overline{JN})^2 \\ &= \overline{AJ}^2 + 2\overline{AJ} \cdot \overline{JN} + \overline{JN}^2 + \overline{BJ}^2 + 2\overline{BJ} \cdot \overline{JN} + \overline{JN}^2 = AJ^2 + BJ^2 + 2(\overline{AJ} + \overline{BJ}) \cdot \overline{JN} + 2JN^2 \\ &= AJ^2 + BJ^2 + 2\vec{0} \cdot \overline{JN} + 2JN^2 = AJ^2 + BJ^2 + 2JN^2 \end{aligned}$$

$$\text{Mà } AJ = BJ = \frac{AB}{2}: \text{ không đổi}$$

$$\Rightarrow AN^2 + BN^2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi } JN \text{ nhỏ nhất}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của J lên (P) . Đường thẳng IH có 1 VTCP là $(3; -8; 7)$, đi qua

$$J(1; 0; -2), \text{ có phương trình: } \begin{cases} x=1+3t \\ y=-8t \\ z=-2+7t \end{cases}$$

Giả sử $H(1+3t; -8t; -2+7t)$, ta có: $H \in (P) \Rightarrow 3(1+3t) - 8(-8t) + 7(-2+7t) - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 122t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{6}{61} \Rightarrow H\left(\frac{79}{61}; -\frac{48}{61}; -\frac{80}{61}\right)$$

$JN_{\min} = JH$ khi và chỉ khi N trùng $H\left(\frac{79}{61}; -\frac{48}{61}; -\frac{80}{61}\right)$

Vậy $N\left(\frac{79}{61}; -\frac{48}{61}; -\frac{80}{61}\right)$.

Câu 2

Cho hai điểm $A(1; 4; 2), B(-1; 2; 4)$, đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$.

a) Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) .

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Lời giải

a) Do G là trọng tâm của tam giác $OAB \Rightarrow G(0; 2; 2)$.

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (1; 4; 2), \overrightarrow{OB} = (-1; 2; 4) \Rightarrow [\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}] = (12; -6; 6)$.

Do đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng $(OAB) \Rightarrow$ đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \frac{1}{6}[\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}] = (2; -1; 1)$.

Ta có $d: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases}$

b) $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2} \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$

Do M thuộc đường thẳng Δ suy ra ta giả sử $M(1-t; -2+t; 2t)$.

Ta có: $\overrightarrow{MA} = (t; 6-t; 2-2t), \overrightarrow{MB} = (-2+t; 4-t; 4-2t)$.

$$MA^2 + MB^2 = 12t^2 - 48t + 76 = 12(t-2)^2 + 28 \geq 28.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\Leftrightarrow t = 2$.

Suy ra $M(-1; 0; 4)$.

Câu 3

Cho đường thẳng Δ_1 là giao của hai mặt phẳng $x-2y+z-4=0$ và $x+2y-2z+9=0$. Đường thẳng $\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2 .

b) Cho điểm $M(2; 1; 4)$. Tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳng Δ_2 sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải

a) Do Δ_1 là giao của hai mặt phẳng $x-2y+z-4=0$ và $x+2y-2z+9=0$

$$\text{Suy ra } \Delta_1 : \begin{cases} x = -\frac{5}{2} + 2t \\ y = -\frac{13}{4} + 3t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 4t \end{cases}$$

Ta có Δ_1 qua $M\left(-\frac{5}{2}; -\frac{13}{4}; 0\right)$ và có VTCP $\vec{u}_1 = (2; 3; 4)$.

Ta có Δ_2 qua $N(1; 2; 1)$ và có VTCP $\vec{u}_2 = (1; 1; 2)$

Do mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2

Suy ra VTPT của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_p = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (2; 0; -1)$.

Mặt phẳng (P) qua $M\left(-\frac{5}{2}; -\frac{13}{4}; 0\right)$ có VTPT $\vec{n}_p = (2; 0; -1) \Rightarrow (P): 2x - z + 5 = 0$.

b) Để MH có độ dài nhỏ nhất thì $MH \perp \Delta_2$.

Giả sử $H(1+t; 2+t; 1+2t) \Rightarrow \vec{MH} = (-1+t; 1+t; -3+2t)$.

Ta có $\vec{MH} \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (1+t) + 1 \cdot (-1+t) + 2 \cdot (-3+2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(2; 3; 3)$

Câu 4

Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 9 = 0$

a) Tìm tọa độ điểm I thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 2

b) Tìm tọa độ giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) , biết Δ đi qua A và vuông góc với d .

Lời giải

a) Ta có $I \in d \Rightarrow I = (1-t; -3+2t; 3+t)$

$$d(I, (P)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|2(1-t) + (-3+2t) - 2(3+t) + 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|2-2t|}{3} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -2 \end{cases}$$

Với $t = 4 \Rightarrow I(-3; 5; 7)$

Với $t = -2 \Rightarrow I(3; -7; 1)$.

b) Do $A \in d \Rightarrow A = (1-t; -3+2t; 3+t)$

$$A \in (P) \Leftrightarrow 2(1-t) + (-3+2t) - 2(3+t) + 9 = 0 \Leftrightarrow 2-2t = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A = (0; -1; 4)$$

Có $\vec{n} = (2; 1; -2)$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

$\vec{u} = (-1; 2; 1)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng d .

Gọi $\vec{v}$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ .

Vì $\vec{v} \perp \vec{n}$ và $\vec{v} \perp \vec{u}$ nên chọn $\vec{v} = [\vec{n}; \vec{u}] = (5; 0; 5)$ cùng phương với véc tơ $(1; 0; 1)$

Phương trình tham số đường thẳng Δ là
$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 4 + t \end{cases}$$

Câu 5

Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$ và điểm $A(1; -1; 2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M, N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN .

Lời giải

Do $M \in d \Rightarrow M = (-1 + 2t; t; 2 + t)$

Vì A là trung điểm của đoạn thẳng MN nên tọa độ điểm N là
$$\begin{cases} x_N = 2x_A - x_M = 3 - 2t \\ y_N = 2y_A - y_M = -2 - t \\ z_N = 2z_A - z_M = 2 - t \end{cases}$$

Vì $N \in (P) \Rightarrow 3 - 2t + (-2 - t) - 2(2 - t) + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow M = (3; 2; 4), \overrightarrow{AM} = (2; 3; 2)$

Đường thẳng Δ đi qua A và nhận $\overrightarrow{AM}$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}.$$

Câu 6

Cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{3}$, mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 1 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) . Viết phương trình mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P) .

Lời giải

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2t \\ z = -3 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

Gọi $M = d \cap (P)$. Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ z = -3 + 3t \\ y = -2t \\ 2x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ x = \frac{7}{2} \\ y = -3 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; -3; \frac{3}{2}\right).$$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P) .

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 3)$, (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; -2)$. Gọi

$\vec{n}_{(Q)}$ là vectơ pháp tuyến của (Q) . Khi đó $\begin{cases} \vec{n}_{(Q)} \perp \vec{u} \\ \vec{n}_{(Q)} \perp \vec{n} \end{cases}$, chọn $\vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}, \vec{n}] = (1; 8; 5)$.

Ta có $A(2; 0; -3) \in d \Rightarrow A \in (Q)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(2; 0; -3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)} = (1; 8; 5)$ là

$$1.(x-2)+8(y-0)+5(z+3)=0 \Rightarrow x+8y+5z+13=0.$$

Câu 7

Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ và điểm $A(1;0;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với d . Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên d .

Lời giải

Đường thẳng d có vector chỉ phương $\vec{u} = (2; 2; -1)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d . $(P) \perp d$, chọn $\vec{n} = \vec{u} = (2; 2; -1)$ là vector pháp tuyến của (P) .

Phương trình mặt phẳng (P) : $2(x-1)+2(y-0)-1.(z+1)=0 \Rightarrow 2x+2y-z-3=0$.

Phương trình tham số của đường thẳng d :
$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \ (t \in \mathbb{R}). \\ z=-t \end{cases}$$

Gọi H hình chiếu vuông góc của A trên $d \Rightarrow H \in d \Rightarrow H(1+2t; -1+2t; -t)$

$\overrightarrow{AH} = (2t; -1+2t; 1-t)$. Ta có $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 4t + 2(2t-1) - (1-t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Vậy $H\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Câu 8

Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(2;-1;0)$. Xác định tọa độ M thuộc d sao cho tam giác ABM vuông tại M .

Lời giải

Điểm M thuộc đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1} \Rightarrow M(1+2t; -1-t; t)$.

Vector $\overrightarrow{AM}(2t; -t; t-2)$, $\overrightarrow{BM}(2t-1; -t; t)$.

Tam giác ABM vuông tại $M \Leftrightarrow AM \perp BM \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

$$\Leftrightarrow 2t.(2t-1) + (-t)^2 + (t-2)t = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=\frac{2}{3} \end{cases}.$$

+ Với $t=0 \Rightarrow M(1;-1;0)$.

+ Với $t=\frac{2}{3} \Rightarrow M\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Vậy có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9

Cho mặt phẳng $(P): x-y+2z-3=0$ và hai điểm $A(1;-2;1)$, $B(2;1;3)$. Viết phương trình đường thẳng AB và tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (P) .

Lời giải

Ta có $A(1;-2;1)$, $B(2;1;3) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(1;3;2)$.

Đường thẳng AB có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (1; 3; 2)$ và đi qua điểm $A(1; -2; 1)$ có phương trình

$$\text{tham số là: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm I của đường thẳng AB với mặt phẳng (P) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \Rightarrow 1 + t - (-2 + 3t) + 2(1 + 2t) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t = -2 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -5 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow I(0; -5; -1).$$

Vậy tọa độ giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (P) là $I(0; -5; -1)$.

Câu 10

Cho điểm $A(1; 2; 3)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$, $d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$.

- Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng d_1 .
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2

Lời giải

a) Mặt phẳng (α) đi qua $A(1; 2; 3)$ và vuông góc với d_1 có phương trình là:

$$2(x-1) - (y-2) + (z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + z - 3 = 0$$

Tọa độ giao điểm H của d_1 và (α) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1} \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow H(0; -1; 2)$$

Vì A' đối xứng với A qua d_1 nên H là trung điểm của $AA' \Rightarrow A'(-1; -4; 1)$

b) Vì Δ đi qua A vuông góc với d_1 và cắt d_2 , nên Δ đi qua giao điểm B của d_2 và (α)

Tọa độ giao điểm B của d_2 và (α) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1} \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow B(2; -1; -2)$$

Véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1; -3; -5)$.

Vậy phương trình của Δ là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$

Câu 11

Cho điểm $A(1;2;-1)$, mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 5 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-2}$

- Viết phương trình đường thẳng d_1 đi qua A , cắt và vuông góc với d .
- Viết phương trình đường thẳng d_2 đi qua A , cắt d và song song với (P) .
- Viết phương trình đường thẳng d_3 đi qua A , cắt d và mặt phẳng (P) lần lượt tại M, N sao cho A là trung điểm đoạn thẳng MN .
- Viết phương trình đường thẳng d_4 đi qua A , cắt d và mặt phẳng (P) lần lượt tại M, N sao cho $3AM = AN$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) đi qua $K(5;0;0)$ và có một vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}_p = (1; -1; 2)$.

Đường thẳng d đi qua $E(1;1;0)$ và có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (-2; -1; -2)$.

Đường thẳng d có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = -2t \end{cases} \quad (t \text{ là tham số})$$

- Viết phương trình đường thẳng d_1 đi qua A , cắt và vuông góc với d .

Cách 1.

Gọi $H(1-2t; 1-t; -2t)$ là giao điểm của đường thẳng d với đường thẳng d_1 . Vì đường thẳng d_1 đi qua A , cắt và vuông góc với d nên ta có

$$\overrightarrow{AH} = (-2t; -1-t; 1-2t) \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -2(-2t) - 1(-1-t) - 2(1-2t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{9}.$$

Do đó $\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{2}{9}; -\frac{10}{9}; \frac{7}{9}\right)$, nên $\vec{u}_1 = (-2; -10; 7)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng d_1 .

Vậy d_1 có phương trình chính tắc là $d_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-10} = \frac{z+1}{7}$.

Cách 2.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa A và d , khi đó mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến là

$$\vec{n}_Q = [\vec{u}; \overrightarrow{AE}] = (-3; 2; 2).$$

Đường thẳng d_1 nằm trong mặt phẳng (Q) cắt và vuông góc với d nên nó có một vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = [\vec{u}; \vec{n}_Q] = (2; 10; -7)$.

Vậy d_1 có phương trình chính tắc là $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{10} = \frac{z+1}{-7}$.

Nhận xét: Trong thực hành giải toán trắc nghiệm chúng ta chỉ cần dùng máy tính cầm tay bấm trực tiếp $\vec{u}_1 = [\vec{u}; [\vec{u}; \overrightarrow{AE}]]$ cho ra ngay một vec tơ chỉ phương của d_1 .

- Viết phương trình đường thẳng d_2 đi qua A , cắt d và song song với (P) .

Cách 1.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa A và d , khi đó mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến là

$$\vec{n}_Q = [\vec{u}; \overrightarrow{AE}] = (-3; 2; 2).$$

Vì d_2 đi qua A , cắt đường thẳng d nên $d_2 \subset (Q)$.

Vì $d_2 \subset (Q)$ và $d_2 // (P)$ nên d_2 có một vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (-6; -8; -1)$.

Do đó d_2 có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+1}{1}$.

Cách 2.

Gọi $H(1-2t; 1-t; -2t)$ là giao điểm của đường thẳng d với đường thẳng d_2 . Vì đường thẳng d_1 song song với mặt phẳng (P) nên ta có

$$\overrightarrow{AH} = (-2t; -1-t; 1-2t) \perp \vec{n}_P \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow 1(-2t) - 1(-1-t) + 2(1-2t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{5}.$$

Do đó $\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{6}{5}; -\frac{8}{5}; -\frac{1}{5}\right)$, nên d_2 có một vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (6; 8; 1)$.

Do đó d_2 có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+1}{1}$.

c) Viết phương trình đường thẳng d_3 đi qua A , cắt d và mặt phẳng (P) lần lượt tại M, N sao cho A là trung điểm đoạn thẳng MN .

Cách 1.

Vì $M = d_3 \cap d$ nên tọa độ điểm M có dạng $M(1-2t; 1-t; -2t)$.

Vì A là trung điểm của đoạn MN nên

$$\begin{cases} x_N = 2x_A - x_M \\ y_N = 2y_A - y_M \\ z_N = 2z_A - z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 1+2t \\ y_N = 3+t \\ z_N = -2+2t \end{cases} \Leftrightarrow N(1+2t; 3+t; -2+2t).$$

Vì $N = d_2 \cap (P)$ nên tọa độ điểm N thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P) , do đó

$$1+2t - (3+t) + 2(-2+2t) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{11}{5}.$$

Khi đó $\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{22}{5}; -\frac{16}{5}; -\frac{17}{5}\right)$, nên d_3 có một vector chỉ phương là $\vec{u}_3 = (22; 16; 17)$.

Vậy d_3 có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{22} = \frac{y-2}{16} = \frac{z+1}{17}$.

Cách 2.

Vì $M = d_3 \cap d$ nên tọa độ điểm M có dạng $M(1-2t; 1-t; -2t)$.

Gọi (P') là mặt phẳng đối xứng với (P) qua A .

Lấy $B(x; y; z)$ là điểm tùy ý trên (P) , gọi $B'(x'; y'; z')$ là điểm đối xứng với B qua A .

$$\text{Ta có } \begin{cases} x = 2x_A - x' = 2 - x' \\ y = 2y_A - y' = 4 - y' \\ z = 2z_A - z' = -2 - z' \end{cases} \Leftrightarrow B(2-x'; 4-y'; -2-z').$$

Vì $B \in (P)$ nên ta có $(2-x') - (4-y') + 2(-2-z') - 5 = 0 \Leftrightarrow x' - y' + 2z' + 11 = 0$ (*).

Vì B là điểm tùy ý trên (P) và B' đối xứng với B qua A có tọa độ B' thỏa mãn phương trình (*) nên mặt phẳng (P') có phương trình là $x - y + 2z + 11 = 0$.

Vì $N \in (P)$, M đối xứng với N qua A nên $M = d \cap (P')$. Do đó ta có

$$(1-2t) - (1-t) + 2(-2t) + 11 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{11}{5} \Rightarrow M\left(-\frac{17}{5}; -\frac{6}{5}; -\frac{22}{5}\right).$$

Khi đó $\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{22}{5}; -\frac{16}{5}; -\frac{17}{5}\right)$, nên d_3 có một vector chỉ phương là $\vec{u}_3 = (22; 16; 17)$.

Vậy d_3 có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{22} = \frac{y-2}{16} = \frac{z+1}{17}$.

d) Viết phương trình đường thẳng d_4 đi qua A , cắt d và mặt phẳng (P) lần lượt tại M , N sao cho $3AM = AN$.

Vì $M = d_4 \cap d$ nên tọa độ điểm M có dạng $M(1-2t; 1-t; -2t) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-2t; -1-t; 1-2t)$.

Xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_N - 1 = 3(-2t) \\ y_N - 2 = 3(-1-t) \\ z_N + 1 = 3(1-2t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 1-6t \\ y_N = -1-3t \\ z_N = 2-6t \end{cases} \Leftrightarrow N(1-6t; -1-3t; 2-6t).$$

Vì $N \in (P)$ nên ta có

$$(1-6t) - (-1-3t) + 2(2-6t) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{15} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(-\frac{2}{15}; -\frac{16}{15}; \frac{13}{15}\right)$$

Do đó d_4 có một vector chỉ phương là $\vec{u}_4 = (2; 16; -13)$.

Vậy d_3 có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{16} = \frac{z+1}{-13}$.

Trường hợp 2: $-3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_N - 1 = -3(-2t) \\ y_N - 2 = -3(-1-t) \\ z_N + 1 = -3(1-2t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 1+6t \\ y_N = 5+3t \\ z_N = -4+6t \end{cases} \Leftrightarrow N(1+6t; 5+3t; -4+6t).$$

Vì $N \in (P)$ nên ta có

$$(1+6t) - (5+3t) + 2(-4+6t) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{17}{15} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(-\frac{34}{15}; -\frac{32}{15}; -\frac{19}{15}\right)$$

Do đó d_4 có một vector chỉ phương là $\vec{u}_4 = (34; 32; 19)$.

Vậy d_3 có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{34} = \frac{y-2}{32} = \frac{z+1}{19}$.

Kết luận: Có hai trường hợp của đường thẳng d_4 là

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{16} = \frac{z+1}{-13} \text{ hoặc } \frac{x-1}{34} = \frac{y-2}{32} = \frac{z+1}{19}.$$

Câu 12

Cho điểm $A(0; 1; 2)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$, $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A , đồng thời song song với d_1 và d_2 .

b) Tìm tọa độ các điểm M thuộc d_1 , N thuộc d_2 sao cho ba điểm A, M, N thẳng hàng

Lời giải

a) Ta có $\vec{u}_1 = (2; 1; -1)$, $\vec{u}_2 = (1; -2; 1)$ là VTCP của d_1 và d_2 .

Có $[\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (-1; -3; -5)$

Mặt phẳng (P) song song với d_1 và $d_2 \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = (1; 3; 5)$.

Phương trình (P) là: $1(x-0) + 3(y-1) + 5(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + 3y + 5z - 13 = 0$.

Vậy phương trình (P) : $x + 3y + 5z - 13 = 0$.

b) $M \in d_1 \Rightarrow M(2m; 1+m; -1-m); N \in d_2 \Rightarrow N(1+n; -1-2n; 2+n)$.

Đề ba điểm A, M, N thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AN} \quad (k \neq 0; \overrightarrow{AN} \neq \vec{0})$

$$\Leftrightarrow (2m; m; -3-m) = k(1+n; -2-2n; n)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = k(1+n) \\ m = k(-2-2n) \\ -3-m = kn \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ n = -1 \\ m = 0 \end{cases} \quad (TM)$$

Vậy $M(0; 1; -1), N(0; 1; 1)$.

Câu 13

Cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc với đường thẳng d và cắt trục Oz .

Lời giải

Đường thẳng Δ cắt trục Oz tại $B(0; 0; b) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (1; 2; 3-b)$ là VTCP của đường thẳng Δ .

Vì $\Delta \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2 + 2 - 2(3-b) = 0 \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (1; 2; 2)$.

Vậy phương trình Δ là $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$.

Câu 14

Cho các điểm $A(2; 1; 0)$, $B(1; 2; 2)$, $C(1; 1; 0)$ và $(P): x + y + z - 20 = 0$. Xác định tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P)

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 2)$. Phương trình đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+t \\ z = 2t \end{cases}$

Điểm D thuộc đường thẳng AB nên $D(2-t, 1+t, 2t) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = (1-t, t, 2t)$.

Đường thẳng CD song song với mặt phẳng $(P) \Rightarrow \overrightarrow{CD} \perp \vec{n}_{(P)}$

$$\Rightarrow 1-t + t + 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1}{2} \Rightarrow D\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1\right).$$

Vậy $D\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$.

Câu 15

Cho điểm $A(1; -2; 1)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$, $d_2: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$.

- a) Viết phương trình đường thẳng d_3 đi qua A cắt hai đường thẳng d_1, d_2 .
b) Viết phương trình đường thẳng d_4 đi qua A cắt d_1 và vuông góc với d_2 .

Lời giải

a) Gọi giao điểm của đường thẳng d_3 với hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt là M, N .

Ta có: $M(1-t, -1+2t, -3t)$, $N(-u, 1+2u, -1+u)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-t, 2t+1, -3t-1), \overrightarrow{AN} = (-u-1, 2u+3, u-2)$$

$$\text{Có } A, M, N \text{ thẳng hàng nên } \Rightarrow \begin{cases} -t = k(-u-1) \\ 2t+1 = k(2u+3) \\ -3t-1 = k(u-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t+ku+k=0 \\ 2t-2ku-3k=-1 \\ -3t-ku+2k=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ k = 1 \\ ku = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(-\frac{1}{2}, 2, -\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}(-1; 4; -5)$$

Phương trình đường thẳng d_3 đi qua A có VTCP $\vec{u}_3 = (-1; 4; -5)$ là: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-5}$.

b) Gọi giao điểm của đường thẳng d_4 với đường thẳng d_1 là M .

Ta có: $M(1-t, -1+2t, -3t)$, $\overrightarrow{AM} = (-t, 2t+1, -3t-1)$

d_2 có VTCP là $\vec{u}_2 = (-1; 2; 1)$.

$$d_1 \perp d_2 \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_2 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1; 0; 1).$$

Phương trình đường thẳng d_4 đi qua A có VTCP $\vec{u}_4 = (1; 0; 1)$ là: $\begin{cases} x = 1+v \\ y = -2 \\ z = 1+v \end{cases}$.

Câu 16

Cho điểm $A(-4; -2; 4)$ và đường thẳng $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{4}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , cắt và vuông góc với d

Lời giải

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}(2; -1; 4)$

$$\text{Gọi } M = \Delta \cap d. \text{ Ta có } M \in d: \begin{cases} x = -3+2t \\ y = 1-t \\ z = -1+4t \end{cases} \Rightarrow M(-3+2t; 1-t; -1+4t).$$

Có $\overrightarrow{AM}(1+2t; 3-t; -5+4t)$.

Ta có $\Delta \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(1+2t) - (3-t) + 4(-5+4t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$\overrightarrow{AM} = (3; 2; -1)$ nên phương trình đường thẳng Δ đi qua A và nhận $\overrightarrow{AM}$ làm VTCP là:

$$\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

Câu 17

Cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y - z - 7 = 0$ và $A(3; 5; 0)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) . Tìm tọa độ điểm đối xứng của A qua (P) .

Lời giải

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}(2; 3; -1)$.

Do d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) nên d nhận $\vec{n}(2; 3; -1)$ là VTCP.

Phương trình đường thẳng d là
$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = -t \end{cases}$$

Tọa độ hình chiếu H của A lên (P) là nghiệm $(x; y; z)$ của hệ

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = -t \\ 2x + 3y - z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow H(1; 2; 1).$$

Gọi $A'(x'; y'; z')$ là điểm đối xứng của A qua (P) , suy ra H là trung điểm của AA'

Vậy $A'(-1; -1; 2)$.

Câu 18

Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$ và hai điểm $A(1; -1; 1)$, $B(-1; 2; 3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A , vuông góc với hai đường thẳng AB và Δ .

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 2)$.

Vector chỉ phương của đường thẳng $\Delta: \vec{u} = (-2; 1; 3)$.

Do đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng AB và Δ nên d có vector chỉ phương là

$$\vec{v} = [\overrightarrow{AB}; \vec{u}] = (7; 2; 4).$$

Mặt khác d đi qua A . Vậy phương trình d là: $\frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{4}$.

Câu 19

Cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$ và hai điểm $A(-1; -1; -2)$, $B(0; 1; 1)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên (P) . Viết phương trình mặt phẳng đi qua A, B và vuông góc với (P) .

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) .

Ta có $\vec{n} = (1; 1; 1)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) . $AH \perp (P)$ nên đường thẳng d qua A, H

có phương trình là:
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$$
. Do $H \in d \Leftrightarrow H(t-1; t-1; t-2)$.

Mà $H \in (P) \Leftrightarrow t-1+t-1+t-2-1=0 \Leftrightarrow 3t-5=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{3}$. Suy ra $H\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A, B và vuông góc với (P) .

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 3)$ và $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

Do đó vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là: $\vec{u}' = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}] = (-1; 2; -1)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) là $(x+1)-2(y+1)+(z+2)=0 \Leftrightarrow x-2y+z+1=0$.

Câu 20

Cho điểm $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$

a) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d .

b) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất

Lời giải

a) PTTS của $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d .

$$H \in d \Leftrightarrow H(1+2t; t; 2+2t), \overrightarrow{AH}(2t-1; t-5; 2t-1).$$

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u} = (2; 1; 2)$.

$$AH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1) + 1(t-5) + 2(2t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(3; 1; 4).$$

b) Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (α) .

Ta có $d(A, (\alpha)) = AK \leq AH = 3\sqrt{2} \Rightarrow \max d(A, (\alpha)) = 3\sqrt{2}$, đạt được khi $K \equiv H$.

Khi đó mặt phẳng (α) đi qua H và nhận $\overrightarrow{AH} = (1; -4; 1)$ làm VTPT.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): 1(x-3)-4(y-1)+1(z-4)=0 \Leftrightarrow x-4y+z-3=0$.

Câu 21

Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Gọi I là giao điểm của Δ và (P) . Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MI vuông góc với Δ và $MI = 4\sqrt{14}$.

Lời giải

Ta có $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = -t \end{cases}$

Vì I là giao điểm của Δ và (P) , $I \in \Delta \Rightarrow I(2+t; -1-2t; -t)$.

Mà $I \in (P) \Rightarrow$ Tọa độ điểm I thỏa mãn phương trình: $2+t-1-2t-t-3=0 \Leftrightarrow -2t=2 \Leftrightarrow t=-1$.

Suy ra $I(1;1;1)$.

Gọi $M(a;b;c) \Rightarrow \overrightarrow{MI} = (1-a; 1-b; 1-c)$.

Vì M thuộc $(P) \Rightarrow a+b+c-3=0(1)$

Vì MI vuông góc với $\Delta \Rightarrow \overrightarrow{MI} \perp \vec{u}_{\Delta} \Rightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \vec{u}_{\Delta} = 0$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot (1-a) - 2(1-b) - 1(1-c) = 0 \Leftrightarrow a - 2b - c + 2 = 0(2)$$

$$\text{Vì } MI = 4\sqrt{14} \Leftrightarrow MI^2 = 224 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 224 \quad (3)$$

Từ (1); (2) và (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+b+c-3=0 \\ a-2b-c+2=0 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 224 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2a-1 \\ c=-3a+4 \\ (a-1)^2 + (2a-2)^2 + (-3a+3)^2 = 224 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=2a-1 \\ c=-3a+4 \\ 14a^2 - 28a - 210 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2a-1 \\ c=-3a+4 \\ \begin{cases} a=5 \\ a=-3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Với } a=5 \Rightarrow \begin{cases} b=9 \\ c=-11 \end{cases} \Rightarrow M(5;9;-11).$$

$$\text{Với } a=-3 \Rightarrow \begin{cases} b=-7 \\ c=13 \end{cases} \Rightarrow M(-3;-7;13).$$

Vậy $M(5;9;-11)$ hoặc $M(-3;-7;13)$.

Câu 22

Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{-2}$ và hai điểm $A(-2;1;1)$, $B(-3;-1;2)$. Tìm điểm M thuộc Δ sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có $M \in \Delta \Rightarrow M(-2+t; 1+3t; -5-2t)$, $\overrightarrow{AM} = (t; 3t; -6-2t)$, $\overrightarrow{AB} = (-1; -2; 1)$.

$$S_{\Delta MAB} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}] \right| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow (t+12)^2 + (t+6)^2 + t^2 = 180$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 12t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=-12 \end{cases}$$

Vậy $M(-2;1;-5)$ hoặc $M(-14;-35;19)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 23

Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(2;-1;0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho tam giác AMB vuông tại M .

Lời giải

Phương trình tham số của đường thẳng Δ :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases}$$
. Gọi $M(1 + 2t; -1 - t; t) \in \Delta$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{MA}(-2t; t; 2 - t)$; $\overrightarrow{MB}(1 - 2t; t; -t)$

Tam giác MAB vuông tại M nên ta có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow -2t(1 - 2t) + t^2 + t(t - 2) = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Với $t = 0 \Rightarrow M(1; -1; 0)$.

Với $t = \frac{2}{3} \Rightarrow M\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Vậy $M(1; -1; 0)$ hoặc $M\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Câu 24

Cho điểm $A(1; -1; 0)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 1 = 0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) . Tìm tọa độ điểm $M \in (P)$ sao cho AM vuông góc với OA và độ dài đoạn AM bằng ba lần khoảng cách từ A đến (P) .

Lời giải

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với (P) là (Δ) :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

Ta có $d(A, (P)) = \frac{|2 + 2 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 1$. Do độ dài đoạn AM bằng ba lần khoảng cách từ A đến (P)

. Suy ra $AM = 3(1)$.

Gọi $M(a; b; c) \in (P) \Rightarrow 2a - 2b + c - 1 = 0$ (2).

Lại có $\overrightarrow{OA}(1; -1; 0)$; $\overrightarrow{AM}(a - 1; b + 1; c)$ mà AM vuông góc với OA nên

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow a - 1 - b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = a - 2$$
 (3)

Từ (2); (3) ta có hệ
$$\begin{cases} b = a - 2 \\ 2a - 2b + c - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a - 2(a - 2) + c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = -3$$

Khi đó $M(a; a - 2; -3)$

$$AM = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(a - 1)^2 + (a - 1)^2 + 9^2} = 3 \Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy $M(1; -1; -3)$.

Câu 25

Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM

Lời giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;1;0)$ và có vecto chỉ phương $\vec{v}=(2;1;2)$.

Do M thuộc trục hoành, nên M có tọa độ $(x,0,0)$, suy ra: $\overrightarrow{AM}=(x;-1;0)$.

$$\Rightarrow [\vec{v}, \overrightarrow{AM}] = (2; 2x; -x-2) \Rightarrow d(M, \Delta) = \frac{[\vec{v}, \overrightarrow{AM}]}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{5x^2 + 4x + 8}}{3}$$

Ta có $d(M, \Delta) = OM \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5x^2 + 4x + 8}}{3} = |x| \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$.

Suy ra: $M(-1;0;0)$ hoặc $M(2;0;0)$

Câu 26

Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$ và điểm $A(1;7;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với Δ . Xác định tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho $AM = 2\sqrt{30}$.

Lời giải

Đường thẳng Δ có vecto chỉ phương là $\vec{v}=(-3;-2;1)$.

Vì (P) qua $A(1;7;3)$ và nhận $\vec{v}$ làm vecto pháp tuyến, nên (P) có phương trình:

$$-3(x-1)-2(y-7)+(z-3)=0 \Leftrightarrow 3x+2y-z-14=0$$

M thuộc Δ nên $M(6-3t;-1-2t;-2+t)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(5-3t;-8-2t;-5+t)$.

$$\begin{aligned} AM = 2\sqrt{30} &\Leftrightarrow (5-3t)^2 + (-8-2t)^2 + (-5+t)^2 = 120 \\ &\Leftrightarrow 7t^2 - 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -\frac{3}{7}. \end{aligned}$$

Suy ra $M(3;-3;-1)$ hoặc $M\left(\frac{51}{7}; -\frac{1}{7}; -\frac{17}{7}\right)$

Câu 27

Cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A(-3;0;1)$ và $B(1;-1;3)$. Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P) , hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm; Δ nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P) .

Phương trình $(Q): x-2y+2z+1=0$.

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của B trên $\Delta, (Q)$. Ta có $BK \geq BH$ nên AH là đường thẳng cần tìm.

$$\text{Tọa độ } H = (x; y; z) \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2} \\ x-2y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow H = \left(-\frac{1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9}\right).$$

$$\overrightarrow{AH} = \left(\frac{26}{9}; \frac{11}{9}; -\frac{2}{9} \right). \text{ Vậy phương trình } \Delta: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}.$$

Câu 28

Cho hai điểm $A(2;0;0)$, $B(0;0;8)$ và điểm C sao cho $\overrightarrow{AC} = (0;6;0)$. Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA

Lời giải

Từ $\overrightarrow{AC} = (0;6;0)$ và $A(2;0;0)$ suy ra $C(2;6;0)$, do đó $I(1;3;4)$.

Phương trình mặt phẳng (α) qua I và vuông góc với OA là: $x-1=0$.

$\Rightarrow$ Tọa độ giao điểm của (α) với OA là $K(1;0;0)$.

$\Rightarrow$ Khoảng cách từ I đến OA là $IK = \sqrt{(1-1)^2 + (0-3)^2 + (0-4)^2} = 5$.

Câu 29

Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$; $d_2: x = -1+2t; y = 1+t; z = 3$

a) Chứng minh rằng $d_1; d_2$ chéo nhau.

b) Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(P): 7x + y - 4z = 0$ và cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 .

Lời giải

a) Ta có $d_1: \begin{cases} M_1(0;1;-2) \in d_1 \\ \vec{u}_1(2;-1;1) \end{cases}; d_2: \begin{cases} M_2(-1;1;3) \in d_2 \\ \vec{u}_2(2;1;0) \end{cases}$.

Ta có $[\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (-1; 2; 4); \overrightarrow{M_1M_2}(-1;0;5) \Rightarrow [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 21 \neq 0$

Vậy $d_1; d_2$ chéo nhau.

b) Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(P): 7x + y - 4z = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{n}_p(7;1;-4)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d_1 và d : $\begin{cases} \vec{n}_Q \perp \vec{u} \\ \vec{n}_Q \perp \vec{u}_1 \end{cases} \Rightarrow [\vec{u}; \vec{u}_1] = (-3; -15; -9) \Rightarrow \vec{n}_Q = (1; 5; 3)$.

$(Q): \begin{cases} \vec{n}_Q(1;5;3) \\ M_1(0;1;-2) \forall (Q) \end{cases} \Rightarrow (Q): x + 5y + 3z + 1 = 0$.

Đường thẳng d_2 cắt (Q) tại $A: -1 + 2t + 5(1+t) + 3 \cdot 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow A(-5; -1; 3)$.

Để d cắt $d_1; d_2$ thì d phải đi qua $A(-5; -1; 3)$.

$$d: \begin{cases} A(-5; -1; 3) \in d \\ \vec{u} = (7; 1; -4) \end{cases} \Rightarrow d: \frac{x+5}{7} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-4}.$$

Câu 30

Cho đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$; d_2 là giao tuyến của $(Q): x + y - z - 2 = 0$ và mặt phẳng

$(R): x + 3y - 12 = 0$

a) Chứng minh rằng d_1 và d_2 song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa cả 2 đường thẳng d_1 và d_2 .

b) Mặt phẳng Oxz cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại $A; B$. Tính diện tích tam giác OAB

Lời giải

a) d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng $(Q): x + y - z - 2 = 0; (R): x + 3y - 12 = 0$, d_2 đi qua $M_2; N_2$,

với tọa độ $M_2; N_2$ là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \end{cases}.$$

Lấy $x = 0$, hệ phương trình có nghiệm $(0; 4; 2) \Rightarrow M_2(0; 4; 2)$.

Lấy $x = 3$, hệ phương trình có nghiệm $(3; 3; 4) \Rightarrow N_2(3; 3; 4)$.

$$d_2 \begin{cases} M_2(0; 4; 2) \\ \vec{u}_2 = \overrightarrow{M_2N_2}(3; -1; 2) \end{cases}; d_1 \begin{cases} M_1(1; -2; -1) \\ \vec{u}_1 = \overrightarrow{MN}(3; -1; 2) \end{cases}.$$

Ta có $\vec{u}_1 = \vec{u}_2; M_2 \notin d_1 \Rightarrow d_1 \parallel d_2$.

(P) chứa d_1 và d_2 :
$$\begin{cases} \vec{n}_p \perp \vec{u}_1(3; -1; 2) \\ \vec{n}_p \perp \overrightarrow{M_1M_2}(-1; 6; 3) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_p = [\vec{u}_1; \overrightarrow{M_1M_2}] = (15; 11; -17).$$

Có $(P): \begin{cases} \vec{n}_p(15; 11; -17) \\ M_2(0; 4; 2) \end{cases} \Rightarrow (P): 15x + 11y - 17z - 10 = 0.$

b) Vì $A, B \in (Oxz)$ nên $y_A = y_B = 0$

Vì $A \in d_1$ nên $A(-5; 0; -5)$, $B \in d_2 \Rightarrow B(12; 0; 10)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} = (-5; 0; -5), \overrightarrow{OB} = (12; 0; 10) \Rightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (0; -10; 0)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]| = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ (đvdt)}.$$

Câu 31

Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + z = 0$. Gọi C là giao điểm của Δ với (P) , M là điểm thuộc Δ . Tính khoảng cách từ M đến (P) biết $MC = \sqrt{6}$.

Lời giải

Đường thẳng có vector chỉ phương $\vec{v} = (2; 1; -1)$ và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 1)$

Gọi H là hình chiếu của M trên (P) , ta có $\cos HMC = |\cos(\vec{v}, \vec{n})|$.

$$d(M, (P)) = MH = MC \cdot \cos HMC = MC \cdot |\cos(\vec{v}, \vec{n})| = \sqrt{6} \cdot \frac{|2 - 2 - 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Câu 32

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}$; $\Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

Lời giải

Đường thẳng Δ_2 qua điểm $A(1; 3; -1)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; -2)$.

$$M \in \Delta_1 \Rightarrow M(t-1; t; 6t-9).$$

$$\overrightarrow{MA} = (2-t; 3-t; 8-6t), [\overrightarrow{MA}, \vec{u}] = (8t-14; 20-14t; t-4) \Rightarrow \left| [\overrightarrow{MA}, \vec{u}] \right| = 3\sqrt{29t^2 - 88t + 68}.$$

$$\text{Khoảng cách từ } M \text{ đến } \Delta_2: d(M, \Delta_2) = \frac{\left| [\overrightarrow{MA}, \vec{u}] \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \frac{3\sqrt{29t^2 - 88t + 68}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{29t^2 - 88t + 68}.$$

$$\text{Khoảng cách từ } M \text{ đến } (P): d(M; (P)) = \frac{|-1+t-2t+12t-18-1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|11t-20|}{3}.$$

$$\sqrt{29t^2 - 88t + 68} = \frac{|11t-20|}{3} \Leftrightarrow 35t^2 - 88t + 53 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{53}{35} \end{cases}$$

$$\text{Với } t=1 \Rightarrow M(0; 1; -3)$$

$$\text{Với } t=\frac{53}{35} \Rightarrow M\left(\frac{18}{35}; \frac{53}{35}; \frac{3}{35}\right).$$



BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;7;0)$ và $B(3;0;3)$. Phương trình đường phân giác trong của AOB là?

A. $(d): \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$ B. $(d): \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ C. $(d): \frac{x}{6} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5}$ D. $(d): \frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{4}$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 9 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$ và điểm $A(1;2;-1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A cắt d và song song với mặt phẳng (P) .

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$ D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$. Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) , đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d là

A. $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$ B. $\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ C. $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ D. $\frac{x+1}{5} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{3}$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ và

$d': \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d' đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

A. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-2}$ B. $\frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+2}{2}$ C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{2}$ D. $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}$ và mặt phẳng $(P): x + 3y + z = 0$. Đường thẳng (Δ) đi qua $M(1;1;2)$, song song với mặt phẳng (P) đồng thời cắt đường thẳng (d) có phương trình là

A. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-9}{2}$ B. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-6}{2}$
C. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$ D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$; $d_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$; $d_3: \frac{x+3}{-3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+5}{8}$. Đường thẳng song song với d_3 , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{8}$ B. $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z}{8}$ C. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z}{8}$ D. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{8}$

Câu 7. Trong không gian Oxyz, đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=-5+t \end{cases}$ và

$d': \begin{cases} x=0 \\ y=4-2t' \\ z=5+3t' \end{cases}$ có phương trình là

A. $\frac{x-4}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$ B. $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{-2}$ C. $\frac{x+4}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{2}$ D. $\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2}$

Câu 8. Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1; 2; -1)$, đường thẳng d có phương trình

$\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng (α) có phương trình $x+y-z+3=0$. Đường thẳng Δ đi qua điểm

A , cắt d và song song với mặt phẳng (α) có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$

Câu 9. Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1; -1; 1)$ và hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$,

$\Delta': \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$. Phương trình đường thẳng đi qua điểm A và cắt cả hai đường thẳng Δ, Δ' là

A. $\frac{x-1}{-6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{7}$ B. $\frac{x+1}{-6} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{7}$
C. $\frac{x-1}{-6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{7}$ D. $\frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{7}$

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC biết điểm $A(1; 2; 3)$, đường

trung tuyến BM và đường cao CH có phương trình tương ứng là $\begin{cases} x=5t \\ y=0 \\ z=1+4t \end{cases}$ và $\frac{x-4}{16} = \frac{y+2}{-13} = \frac{z-3}{5}$

. Viết phương trình đường phân giác góc A .

A. $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{10}$ B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{5}$
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-1}$ D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-11} = \frac{z-3}{-5}$

Câu 11. Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC với $A(3;0;0), B(0;6;0), C(0;0;6)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua trực tâm của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{1}$ B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$
C. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-6}{1}$ D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{1}$

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; 2; 3)$, vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-5}$

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$

Câu 13. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$; $d_2: \begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Đường

thẳng Δ đi qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$

B. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-1}$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}$

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$ và $d': \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}$.

A. $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$

B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$

C. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}$

D. $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) , đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d .

A. $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$

B. $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-3}$

C. $\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$

D. $\frac{x+1}{5} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{3}$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$; $d_2: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+3z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với (P) , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$

B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$

C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$

D. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 1)$, $B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}$

B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z-4}{2}$

C. $\frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{y-\frac{5}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{11}{6}}{2}$

D. $\frac{x+\frac{2}{9}}{1} = \frac{y-\frac{2}{9}}{-2} = \frac{z+\frac{5}{9}}{2}$

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(2;-3;2)$. Tập hợp tất cả các điểm M cách đều ba điểm A , B , C là một đường thẳng d . Phương trình tham số của đường thẳng d là:

A. $\begin{cases} x = -8 - 3t \\ y = t \\ z = 15 + 7t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -8 + 3t \\ y = t \\ z = 15 - 7t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -8 + 3t \\ y = -t \\ z = -15 - 7t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -8 + 3t \\ y = t \\ z = 15 + 7t \end{cases}$

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;2)$. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Biết rằng khi a và b thay đổi thỏa mãn điều kiện: $2a+b=4$ thì tâm I thuộc một đường thẳng cố định Δ . Phương trình đường thẳng Δ tương ứng là

A. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng có phương trình lần lượt $d_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$, $d_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{-1}$ và $d_3: \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{6}$. Đường thẳng song song d_3 , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{6}$

B. $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-6}$

C. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{6}$

D. $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{6}$

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y-z-2=0$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (α) , đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d ?

A. $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{3}$

B. $\Delta_4: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$

C. $\Delta_3: \frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-5}{1}$

D. $\Delta_1: \frac{x+2}{-3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+4}{-1}$

Câu 22. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;0;-1)$, $B(2;3;-1)$, $C(-2;1;1)$. Phương trình đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là

A.

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{5}$$

B. $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{5}$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2}$

D. $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-5}{5}$

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}.$$

là

A. $d: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-4t \\ z=-2t \end{cases}$

B. $d: \begin{cases} x=2-t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$

C. $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1-4t \\ z=2t \end{cases}$

D. $d: \begin{cases} x=2+2t \\ y=1+t \\ z=-t \end{cases}$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 4z + 1 = 0$, đường thẳng d đi qua điểm A , song song với mặt phẳng (P) , đồng thời cắt trục Oz . Viết phương trình tham số của đường thẳng d .

A. $\begin{cases} x=1+5t \\ y=2-6t \\ z=3+t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=2+t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+2t \\ z=3+t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+6t \\ z=3+t \end{cases}$

Câu 25. Trong không gian Oxy , cho điểm $M(-1; 1; 2)$ và hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$,

$d': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua điểm M , cắt d và vuông góc với d' ?

A. $\begin{cases} x=-1-7t \\ y=1+7t \\ z=2+7t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=1-t \\ z=2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=1-t \\ z=2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=1+t \\ z=2 \end{cases}$

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, Cho mặt phẳng $(R): x + y - 2z + 2 = 0$ và đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Đường thẳng Δ_2 nằm trong mặt phẳng (R) đồng thời cắt và vuông góc với đường

thẳng Δ_1 có phương trình là

A. $\begin{cases} x=t \\ y=-3t \\ z=1-t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=1+t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng

$(P): 2x - y - 2z + 1 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) , cắt và vuông góc với d có phương trình là

A. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{1}$

B. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$

C. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{1}$

D. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{1}$

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ biết $A(1;0;1)$, $B(1;0;-3)$ và điểm D có hoành độ âm. Mặt phẳng $(ABCD)$ đi qua gốc tọa độ O . Khi đó đường thẳng d là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có phương trình

A. $d: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$ B. $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$ C. $d: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ D. $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có $H(2;2;1)$, $K\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, O lần lượt là hình chiếu vuông góc của A , B , C trên các cạnh BC , AC , AB . Đường thẳng d qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $d: \frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$ B. $d: \frac{x-\frac{8}{3}}{1} = \frac{y-\frac{2}{3}}{-2} = \frac{z+\frac{2}{3}}{2}$
C. $d: \frac{x+\frac{4}{9}}{1} = \frac{y-\frac{17}{9}}{-2} = \frac{z-\frac{19}{9}}{2}$ D. $d: \frac{x}{1} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-6}{2}$

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(3;-2;4)$, $B(5;3;-2)$, $C(0;4;2)$, đường thẳng d cách đều ba điểm A , B , C có phương trình là

A. $\begin{cases} x = \frac{8}{3} + 26t \\ y = \frac{5}{3} + 22t \\ z = \frac{4}{3} + 27t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 4 + 26t \\ y = 2 + 22t \\ z = \frac{9}{4} + 27t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = \frac{11}{6} \\ y = \frac{1}{6} + 22t \\ z = 27t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 4 + 26t \\ y = 2 + 38t \\ z = \frac{9}{4} + 27t \end{cases}$

Câu 31. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$, mặt phẳng $(\alpha): x+y-z+3=0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt d và song song với mặt phẳng (α) .

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$ B. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình là $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$ và $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$. Đường thẳng d cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 và song song với đường thẳng $\Delta: \frac{x-4}{1} = \frac{y-7}{4} = \frac{z-3}{-2}$ có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+4}{-2}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-4}{-2}$ C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+4}{-2}$ D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{-2}$

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d: \frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{1}$ và $d': \frac{x}{-6} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng vuông góc chung của d và d' ?

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;4)$, $B(5;3;-2)$, $C(0;4;2)$, đường thẳng d cách đều ba điểm A , B , C có phương trình là

A. $\begin{cases} x = \frac{8}{3} + 26t \\ y = \frac{5}{3} + 22t \\ z = \frac{4}{3} + 27t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 4 + 26t \\ y = 2 + 22t \\ z = \frac{9}{4} + 27t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = \frac{11}{6} + 14t \\ y = \frac{1}{6} + 22t \\ z = 27t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 4 + 26t \\ y = 2 + 38t \\ z = \frac{9}{4} + 27t \end{cases}$

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;0;1)$, $C(-2;2;3)$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (ABC) qua trực tâm H của ΔABC và cùng tạo với các đường thẳng AB , AC một góc $\alpha < 45^\circ$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a;b;c)$ với a là một số nguyên tố. giá trị của biểu thức $ab+bc+ca$ bằng.

A. -67 B. 23 C. -33 D. -37

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;0;1)$, $C(-2;2;3)$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (ABC) qua trực tâm H của ΔABC và cùng tạo với các đường thẳng AB , AC một góc $\alpha > 45^\circ$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a;b;c)$ với a là một số nguyên tố. giá trị của biểu thức $ab+bc+ca$ bằng

A. -67 B. 23 C. -33 D. -37

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và $d_2: \frac{x+5}{6} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{2}$ cắt nhau tại điểm $I(1;1;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ là phân giác của góc nhọn tạo bởi d_1 và d_2 .

A. $\Delta: \frac{x-1}{32} = \frac{y-1}{23} = \frac{z-2}{13}$ B. $\Delta: \frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{3}$
C. $\Delta: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{1}$ D. $\Delta: \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và $d_2: \frac{x+5}{6} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{2}$ cắt nhau tại điểm $I(1;1;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ là phân giác của góc tù tạo bởi d_1 và d_2 .

A. $\Delta: \frac{x-1}{32} = \frac{y-1}{23} = \frac{z-2}{13}$ B. $\Delta: \frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{3}$

$$\text{C. } \Delta: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{1}$$

$$\text{D. } \Delta: \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$$

Câu 39. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x + my - mz + 1 = 0; (Q): mx + y + z + m = 0$. Đường thẳng Δ' qua gốc tọa độ O và song song với đường thẳng Δ . Ba điểm A, B, C lần lượt di động trên Oz, Δ, Δ' . Giá trị nhỏ nhất của $AB + BC + CA$ bằng

$$\text{A. } 1$$

$$\text{B. } 2\sqrt{2}$$

$$\text{C. } 2$$

$$\text{D. } \sqrt{2}$$

Câu 40. Trong không gian Oxyz, với m là số thực thay đổi thì mặt phẳng $(P): (m^2 + 1)x - (2m^2 - 2m + 1)y + (4m + 2)z - m^2 + 2m = 0$ luôn chứa một đường thẳng Δ cố định.

Viết phương trình đường thẳng Δ .

$$\text{A. } \Delta: \begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = -1 - 4t \end{cases}$$

$$\text{C. } \Delta: \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -1 - 4t \\ z = t \end{cases}$$

Câu 41. Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1; 0; 6)$. Biết có hai điểm M, N phân biệt thuộc trục Ox sao cho các đường thẳng AM, AN cùng tạo với đường thẳng chứa trục Ox một góc 45° . Tổng các hoành độ của hai điểm M, N bằng

$$\text{A. } 4$$

$$\text{B. } 2$$

$$\text{C. } 1$$

$$\text{D. } 5$$

Câu 42. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(a; 0; -2), B(2; b; 0)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa A và trục $Oy; (\beta)$ là mặt phẳng chứa B và trục Oz . Biết rằng $(\alpha), (\beta)$ cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2; 1; 2)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB

$$\text{A. } \sqrt{21}$$

$$\text{B. } \sqrt{5}$$

$$\text{C. } 2\sqrt{6}$$

$$\text{D. } 2\sqrt{2}$$

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$. Hai điểm M và N lần lượt di động trên các các mặt phẳng $(\alpha): x = 2; (\beta): z = 2$ sao cho trung điểm K của MN luôn thuộc đường thẳng Δ . Giá trị nhỏ nhất của độ dài MN bằng

$$\text{A. } \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{B. } \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{C. } \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{D. } \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên các các mặt phẳng $(\alpha): x = 1; (\beta): z = 0$ sao cho trung điểm K của MN luôn thuộc đường thẳng Δ . Giá trị nhỏ nhất của độ dài MN bằng

$$\text{A. } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{B. } \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

$$\text{C. } \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{D. } \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{2}$; $d_2: \frac{x-5}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z+5}{-5}$. Biết rằng có hai điểm A, B thuộc d_1 và hai điểm C, D thuộc d_2 sao cho AC, BD cùng song song với (P) đồng thời cách (P) một khoảng bằng 2. Tính $AC + BD$.

- A. $6 + 5\sqrt{2}$ B. $5\sqrt{2}$ C. $5 + 5\sqrt{2}$ D. $6\sqrt{2}$

Câu 46. Trong mặt phẳng (P) vuông góc với d đồng thời cùng cách điểm I một khoảng bằng $\sqrt{42}$. Gọi A, B lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên hai đường thẳng đó. Tính $OA^2 + OB^2$.

- A. 104 B. 102 C. 106 D. 100

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $M(-1; 2; 3)$, $N(-1; 0; 2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z + 2 = 0$. Điểm $C(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho tồn tại các điểm B thuộc tia AM , điểm D thuộc tia AN sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Giá trị biểu thức $a + b + c$ bằng?

- A. -14 B. -10 C. -12 D. -13

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(0; 1; 2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$. Mặt phẳng (P) thay đổi song song với Δ , cách Δ một khoảng bằng $2\sqrt{2}$. Khoảng cách từ điểm M đến (P) có giá trị lớn nhất bằng?

- A. $\sqrt{\frac{11}{6}} + 8\sqrt{2}$ B. $\sqrt{\frac{11}{6}} + 2\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2} + 8\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2} + 2\sqrt{2}$

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thoi $ABCD$ biết $A(1; 1; 1)$ và điểm C thuộc mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$. Các điểm $M(-1; 0; 3)$, $N(5; 1; -2)$ lần lượt thuộc tia AB , AD . Độ dài cạnh hình thoi $ABCD$ bằng?

- A. 15 B. 60 C. 30 D. 45

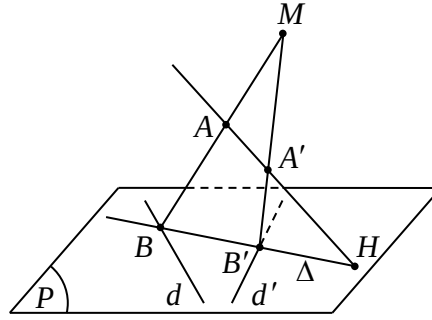
Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm

$A(1; 1; 1)$ và có vec tơ chỉ phương $\vec{u} = (-2; 1; 2)$. Đường phân giác của góc tù tạo bởi d và Δ có phương trình là

- A. $d: \begin{cases} x = 1 + 27t \\ y = 1 + 1t \\ z = 1 + t \end{cases}$ B. $d: \begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = -11 - 10t \end{cases}$ C. $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 17t \\ z = 1 + 10t \end{cases}$ D. $d: \begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = 11 - 10t \end{cases}$

Câu 51. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{1}$,

$d': \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$ và hai điểm $A(a; 0; 0)$, $A'(0; 0; b)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và d' ; H là giao điểm của đường thẳng AA' và mặt phẳng (P) . Một đường thẳng Δ thay đổi trên (P) nhưng luôn đi qua H đồng thời Δ cắt d và d' lần lượt tại B , B' . Hai đường thẳng AB , $A'B'$ cắt nhau tại điểm M . Biết điểm M luôn thuộc một đường thẳng cố định có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (15; -10; -1)$. Tính $T = a + b$?



A. $T = 8$

B. $T = 9$

C. $T = -9$

D. $T = 6$

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1), B(2;-2;2)$, và điểm M di động trên đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + MB$

A. $\sqrt{\frac{46 + \sqrt{1855}}{3}}$

B. $\sqrt{\frac{46 + \sqrt{1855}}{2}}$

C. $\sqrt{\frac{46 + \sqrt{1855}}{6}}$

D. $\sqrt{\frac{46 + \sqrt{1855}}{12}}$

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;3), B(3;4;4), C(2;6;6)$ và $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a + b + c$.

A. $\frac{63}{5}$

B. $\frac{31}{3}$

C. $\frac{46}{5}$

D. 10

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;-6)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}, d_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua điểm M và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 tại hai điểm A, B . Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $\sqrt{38}$

B. $2\sqrt{10}$

C. 8

D. 12

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = -3-t \end{cases}$ và

$d_2: \begin{cases} x = 4+3t \\ y = 3+2t \\ z = 1-t \end{cases}$. Trên đường thẳng d_1 lấy hai điểm A, B thỏa mã $AB = 3$. Trên đường thẳng d_2 lấy

hai điểm C, D thỏa mãn $CD = 4$. Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$.

A. $V = 7$

B. $V = 2\sqrt{21}$

C. $V = \frac{4\sqrt{21}}{3}$

D. $V = \frac{5\sqrt{21}}{6}$

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$ và $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Đường thẳng qua điểm $M(1;1;1)$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B . Tính tỉ số

$\frac{MA}{MB}$.

A. $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$

B. $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$

C. $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$

D. $\frac{MA}{MB} = 2$

Câu 57. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng là $\Delta_1: \frac{x-1}{m} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-1}$ và đường thẳng $\Delta_2: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-m}$ cắt nhau tại điểm C. Gọi A và B lần lượt là hai điểm nằm trên Δ_1 và Δ_2 , sao cho $AB = 6$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất bằng:

- A. $4\sqrt{2}$ B. 3 C. $2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{7}$

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(3;1;-1)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = a - at + 1 \\ y = 2 - t \\ z = -b + bt \end{cases}$

, với a và b là những tham số thực. Khi khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ đạt giá trị lớn nhất thì biểu thức $T = a^2 + b^2 + 4b + 2a + 2019$ đạt giá trị nhỏ nhất tương ứng bằng:

- A. 2014 B. 2015 C. 2016 D. 2020

Câu 59. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z - 2 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{2}$ và điểm $A\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) , song song với d đồng thời cách d một khoảng bằng 3. Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm B. Độ dài đoạn thẳng AB bằng.

- A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{2}$ C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 4 đường thẳng có phương trình lần lượt

$$d_1: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 \\ z = -1 + 2t \end{cases}, d_3: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 3 - t \end{cases}, d_4: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}.$$

Đường thẳng Δ cắt cả 4 đường thẳng trên có vector chỉ phương tương ứng là

- A. $(2; -13; 11)$ B. $(4; -26; 23)$ C. $(12; -21; 11)$ D. $(-2; 1; 3)$

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 4 đường thẳng có phương trình lần lượt

$$d_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, d_3: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 - t \end{cases}, d_4: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 \\ z = 1 - 2t \end{cases}.$$

Đường thẳng Δ cắt cả 4 đường thẳng trên có phương trình chính tắc tương ứng là:

- A. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{13} = \frac{z-3}{18}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{5}$.
C. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. D. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{12} = \frac{z}{-1}$.

Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 4 đường thẳng có phương trình lần lượt

$$d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = -2 + 2t \end{cases}, d_3: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 7 + 4t \\ z = -3 - t \end{cases}, d_4: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 4 + t \\ z = 1 + t \end{cases}.$$

Đường thẳng Δ cắt cả 4 đường thẳng trên và cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm có cao độ bằng

- A. 3 B. 1.

C. -4.

D. 2.

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2}$ và đường thẳng $\Delta_2: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{1}$. Gọi A là giao điểm của Δ_1 và Δ_2 , điểm $B \in \Delta_1$ và $C \in \Delta_2$, điểm $D \in (Oxy)$ có tọa độ nguyên, sao cho tứ giác ABCD là hình thoi. Khoảng cách từ D đến gốc tọa độ O bằng:

A. 20

B. $9\sqrt{2}$

C. $6\sqrt{5}$

D. $8\sqrt{3}$

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-2}$ và đường thẳng $\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{2}$. Gọi A là giao điểm của Δ_1 và Δ_2 , điểm $B \in \Delta_1$, $C \in \Delta_2$ và $D \in (\alpha): 2x - y + 4 = 0$, sao cho tứ giác ABCD là hình thoi với $\angle BAC > 90^\circ$. Đường thẳng BC cắt mặt phẳng $(\beta): x + y - 8 = 0$ tại điểm E cách gốc tọa độ O một khoảng OE bằng:

A. $6\sqrt{2}$

B. $4\sqrt{10}$

C. $3\sqrt{13}$

D. $2\sqrt{19}$



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 7; 0)$ và $B(3; 0; 3)$. Phương trình đường phân giác trong của AOB là?

- A. $(d): \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$ B. $(d): \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ C. $(d): \frac{x}{6} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5}$ D. $(d): \frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{4}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{OA} = (1; 7; 0) \Rightarrow OA = 5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{OB} = (3; 0; 3) \Rightarrow OB = 3\sqrt{2} \\ \overrightarrow{AB} = (2; -7; 3) \Rightarrow AB = \sqrt{62} \end{cases}.$$

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB .

$$\text{Lại có } AB \cdot \overrightarrow{OI} + OB \cdot \overrightarrow{AI} + OA \cdot \overrightarrow{BI} = 0 \Rightarrow \sqrt{62}(a; b; c) + 3\sqrt{2}(a-1; b-7; c) + 5\sqrt{2}(a-3; b; c-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\sqrt{62} + 3\sqrt{2}(a-1) + 5\sqrt{2}(a-3) = 0 \\ b\sqrt{62} + 3\sqrt{2}(b-7) + 5\sqrt{2}b = 0 \\ c\sqrt{62} + 3\sqrt{2}c + 5\sqrt{2}(c-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{62} + 8\sqrt{2}} \\ b = \frac{21\sqrt{2}}{\sqrt{62} + 8\sqrt{2}} \\ c = \frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{62} + 8\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{62} + 8\sqrt{2}}; \frac{21\sqrt{2}}{\sqrt{62} + 8\sqrt{2}}; \frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{62} + 8\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \left(\frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{62} + 8\sqrt{2}}; \frac{21\sqrt{2}}{\sqrt{62} + 8\sqrt{2}}; \frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{62} + 8\sqrt{2}}\right).$$

Đường thẳng OI nhận $\overrightarrow{OI}$ là một VTCP nên nhận $\vec{u} = (6; 7; 5)$ là một VTCP.

$$\text{Kết hợp với } OI \text{ qua } O(0; 0; 0) \Rightarrow OI: \frac{x}{6} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5}.$$

Chọn ý C.

Nhận xét. Trước tiên có thể nói luôn với các bạn kia là lời giải theo phương pháp truyền thống, còn đối với thi trắc nghiệm ta có thể tương luôn công thức vào thì bài toán sẽ được giải quyết nhanh hơn rất nhiều!

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 9 = 0$, đường thẳng

$d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A cắt d và song song với mặt phẳng (P) .

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$

D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$

Lời giải

Ta có một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

$$\text{Gọi } B = \Delta \cap d \text{ thì } B(3+t; 3+3t; 2t) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2+t; 3t+1; 2t+1).$$

Do đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) nên ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2 + t + 3t + 1 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Với $t = -1$ thì $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -1) \Rightarrow$ Một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (-1; 2; 1)$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Chọn ý A.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$

và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$. Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) ,

đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d là

A.

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$$

B. $\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$

C.

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

D.

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{3}$$

Lời giải

Gọi $A = d \cap \Delta \Rightarrow A = d \cap (P)$

$$\text{Tọa độ } A \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3} \\ x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1; 1).$$

Do $\Delta \subset (P)$ và $\Delta \perp d$ nên nhận $\vec{u} = [\vec{n}_P; \vec{u}_d] = (5; -1; -3)$ là một véc tơ chỉ phương.

Đường thẳng Δ đi qua $A(1; 1; 1)$ nên Δ có dạng $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.

Chọn ý A.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ và

$d': \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa

d và d' đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

A.

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-2}$$

B. $\frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+2}{2}$

C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{2}$

D. $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}$

Lời giải

Đường thẳng d đi qua $A(2; 1; 4)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (-1; 2; -2)$.

d' đi qua $B(4; -1; 0)$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (1; -2; 2)$.

Ta có $\vec{u}_1 = -\vec{u}_2$ và $\frac{2-4}{1} \neq \frac{1+1}{-2} \neq \frac{4}{2}$ nên $d \nparallel d'$.

Đường thẳng Δ thuộc mặt phẳng chứa d và d' đồng thời cách đều hai đường thẳng đó khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta // d // d' \\ d(\Delta, d) = d(\Delta, d') \end{cases}$ hay Δ qua trung điểm $I(3; 0; 2)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -2; 2)$.

Khi đó phương trình của Δ : $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{2}$.

Chọn ý C.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}$ và mặt phẳng $(P): x + 3y + z = 0$. Đường thẳng (Δ) đi qua $M(1; 1; 2)$, song song với mặt phẳng (P) đồng thời cắt đường thẳng (d) có phương trình là

A. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-9}{2}$

B. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-6}{2}$

C. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$

Lời giải

Phương trình tham số của $(d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 3; 1)$.

Gọi $\Delta \cap d = A(1+t; 1-t; 3t)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = (t; -t; 3t-2)$ là véc tơ chỉ phương của $\Delta \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow t - 3t + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = (2; -2; 4) = 2(1; -1; 2)$. Vậy phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$.

Chọn ý D.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$; $d_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$;

$d_3: \frac{x+3}{-3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+5}{8}$. Đường thẳng song song với d_3 , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{8}$

B. $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z}{8}$

C. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z}{8}$

D. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{8}$

Lời giải

Gọi d là đường thẳng song song với d_3 , cắt d_1 và d_2 lần lượt tại các điểm A, B .

Gọi $A(1+2a; 3a; -1-a)$ và $B(-2+b; 1-2b; 2b) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (b-2a-3; -2b-3a+1; 2b+a+1)$.

Đường thẳng d_3 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-3; -4; 8)$.

Đường thẳng d song song với d_3 nên $\overrightarrow{AB} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} b-2a-3 = -3k \\ -2b-3a+1 = -4k \\ 2b+a+1 = 8k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{3}{2} \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Như vậy $A(1;0;-1)$ và $B = \left(-\frac{1}{2}; -2; 3\right)$.

Phương trình đường thẳng d là: $\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{8}$.

Chọn ý A.

Câu 7. Trong không gian Oxyz, đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=-5+t \end{cases}$ và

$d': \begin{cases} x=0 \\ y=4-2t' \\ z=5+3t' \end{cases}$ có phương trình là

A. $\frac{x-4}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$ B. $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{-2}$ C. $\frac{x+4}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{2}$ D. $\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2}$

Lời giải

Giả sử AB là đường vuông góc chung của d và d' với $A \in d$, $B \in d'$.

Ta có $\vec{u}_d = (1;0;1)$, $\vec{u}_{d'} = (0;-2;3)$, $\begin{cases} A(a+1;0;a-5) \\ B(0;4-2b;3b+5) \end{cases} \Rightarrow \vec{BA} = (a+1; 2b-4; a-3b-10)$.

Khi đó $\begin{cases} d \perp AB \\ d' \perp AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_d \cdot \vec{BA} = 0 \\ \vec{u}_{d'} \cdot \vec{BA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1) + (a-3b-10) = 0 \\ -2(2b-4) + 3(a-3b-10) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A(4;0;-2) \\ B(0;6;2) \end{cases} \Rightarrow \vec{BA} = (4;-6;-4) \Rightarrow \vec{u} = (-2;3;2)$ là một VTCP của AB .

Kết hợp với AB qua $A(4;0;-2) \Rightarrow AB: \frac{x-4}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2}$.

Chọn ý D.

Câu 8. Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1; 2; -1)$, đường thẳng d có phương trình

$\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng (α) có phương trình $x+y-z+3=0$. Đường thẳng Δ đi qua điểm

A , cắt d và song song với mặt phẳng (α) có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$ C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$

Lời giải

Gọi $B(3+t; 3+3t; 2t)$ là giao điểm của d và Δ . Đường thẳng Δ nhận $\vec{AB} = (2+t; 1+3t; 2t+1)$ làm vec tơ chỉ phương.

Vì $\Delta // (\alpha)$ nên $\vec{AB} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$. Suy ra $(2+t) + (1+3t) - (2t+1) = 0 \Leftrightarrow 2+2t=0 \Leftrightarrow t=-1$.

Suy ra điểm $B(2; 0; -2)$.

Vec tơ chỉ phương của đường thẳng Δ : $\vec{AB} = (1; -2; -1)$

Phương trình đường thẳng Δ : $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.

Chọn ý **A**.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 1)$ và hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$,

$\Delta': \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$. Phương trình đường thẳng đi qua điểm A và cắt cả hai đường thẳng Δ, Δ' là

A. $\frac{x-1}{-6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{7}$

B. $\frac{x+1}{-6} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{7}$

C. $\frac{x-1}{-6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{7}$

D. $\frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{7}$

Lời giải

Gọi d là đường thẳng cần tìm.

Gọi $B(1+2t; t; 3-t) = d \cap \Delta$, $C(t'; -1-2t'; 2+t') = d \cap \Delta'$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2t; t+1; 2-t), \overrightarrow{AC} = (t'-1; -2t'; 1+t').$$

Có A, B, C thẳng hàng nên $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} 2t = k(t'-1) \\ t+1 = -2kt' \\ 2-t = k(1+t') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - kt' + k = 0 \\ t + 2kt' = -1 \\ t + kt' + k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{3}{2} \\ k = \frac{13}{4} \\ t' = \frac{1}{13} \end{cases}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(-3; -\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right).$$

Đường thẳng cần tìm qua A và nhận $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} = (-6; -1; 7)$ là véc tơ chỉ phương nên có phương trình

$$\frac{x-1}{-6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{7}.$$

Chọn ý **C**.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết điểm $A(1; 2; 3)$,

đường trung tuyến BM và đường cao CH có phương trình tương ứng là $\begin{cases} x = 5t \\ y = 0 \\ z = 1 + 4t \end{cases}$ và

$\frac{x-4}{16} = \frac{y+2}{-13} = \frac{z-3}{5}$. Viết phương trình đường phân giác góc A .

A. $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{10}$

B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{5}$

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-1}$

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-11} = \frac{z-3}{-5}$

Lời giải

Giả sử $B(5b; 0; 1+4b) \in BM$, $C(4+16c; -2-13c; 3+5c) \in CH$.

Tọa độ trung điểm M của AC là $M\left(\frac{5+16c}{2}; -\frac{13c}{2}; \frac{6+5c}{2}\right)$.

$$M \in BM \Rightarrow \begin{cases} \frac{5+16c}{2} = 5t \\ \frac{-13c}{2} = 0 \\ \frac{6+5c}{2} = 1+4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C(4; -2; 3).$$

Gọi vectơ $\overrightarrow{AB} = (5b-1; -2; 4b-2)$

Vectơ chỉ phương của CH là: $\vec{w} = (16; -13; 5)$.

Do $AB \perp CH$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow 16(5b-1) - 13(-2) + 5(4b-2) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow B(0; 0; 1)$.

$$\overrightarrow{AB} = (-1; -2; -2), \overrightarrow{AC} = (3; -4; 0)$$

$$\text{Đặt } \vec{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right), \vec{u}_2 = \left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}; 0\right), \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \left(\frac{4}{15}; -\frac{22}{15}; -\frac{2}{3}\right).$$

Chọn $\vec{v} = (2; -11; -5)$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác góc A .

Vậy phương trình đường phân giác góc A là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-11} = \frac{z-3}{-5}$.

Chọn ý **D**.

Câu 11. Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC với $A(3; 0; 0), B(0; 6; 0), C(0; 0; 6)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua trực tâm của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{1}$ **B.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ **C.** $\frac{x-3}{2} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-6}{1}$ **D.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{1}$

Lời giải

$$\text{Ta có } H(a; b; c) \text{ là trực tâm tam giác } ABC \text{ nên ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AH} = (a-3; b; c); \overrightarrow{BH} = (a; b-6; c); \overrightarrow{BC} = (0; -6; 6); \overrightarrow{AC} = (-3; 0; 6); \overrightarrow{AB} = (-3; 6; 0).$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (36; 18; 18).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6b+6c = 0 \\ -3a+6c = 0 \\ 36(a-3)+18b+18c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6b+6c = 0 \\ -3a+6c = 0 \\ 2a+b+c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \rightarrow H(2; 1; 1).$$

Đường thẳng đi qua trực tâm $H(2; 1; 1)$ của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có

vectơ chỉ phương $\vec{u} = \frac{1}{18}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2; 1; 1)$ có phương trình là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Chọn ý **B**.

Câu 12. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}$

. Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; 2; 3)$, vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-5}$

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$

Lời giải

$$M \in d_2: \begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases} \Rightarrow M(1-t; 1+2t; -1+t).$$

Vector chỉ phương của d_1 là $\vec{u}(2; -1; 1)$; $\overrightarrow{AM}(-t; 2t-1; -4+t)$

Theo yêu cầu bài toán: $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow -2t - (2t-1) - 4 + t = 0 \Leftrightarrow t = -1$ nên $\overrightarrow{AM}(1; -3; -5)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ nhận $\overrightarrow{AM}(1; -3; -5)$ làm vector chỉ phương nên

$$\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}.$$

Chọn ý **D**.

Câu 13. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$; $d_2: \begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Đường

thẳng Δ đi qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$

B. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-1}$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}$

D.

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$

Lời giải

Gọi $B(1-t; 1+2t; -1+t)$ là giao của Δ và d_2 .

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-t; 2t-1; t-4)$

Đường thẳng Δ vuông góc với d_1 suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{d}_1 = 0 \Leftrightarrow -2t + 1 - 2t - 4 + t = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (1; -3; -5)$

Vậy đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.

Chọn ý **D**.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$ và $d': \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}$.

A. $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$

B.

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$$

C.

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}$$

D. $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$

Lời giải

Ta có $M \in d$ suy ra $M(2+2m; 3+3m; -4-5m)$. Tương tự $N \in d'$ suy ra $N(-1+3n; 4-2n; 4-n)$. Từ đó ta có $\overrightarrow{MN} = (-3+3n-2m; 1-2n-3m; 8-n+5m)$.

Mà do MN là đường vuông góc chung của d và d' nên $\begin{cases} MN \perp d \\ MN \perp d' \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-3+3n-2m)+3.(1-2n-3m)-5(8-n+5m)=0 \\ 3(-3+3n-2m)-2.(1-2n-3m)-1(8-n+5m)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -38m+5n=43 \\ -5m+14n=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=1 \end{cases}.$$

Suy ra $M(0;0;1)$, $N(2;2;3)$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (2;2;2)$ nên đường vuông góc chung MN là $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Chọn ý **A**.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) , đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d .

A.

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$$

B.

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-3}$$

C.

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

D.

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{3}$$

Lời giải

Vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)} = (1;2;1)$.

Vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d = (2;1;3)$.

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = t \\ z = -2+3t \end{cases}$.

Xét phương trình: $-1+2t+2t-2+3t-4=0 \Leftrightarrow 7t-7=0 \Leftrightarrow t=1$.

Suy ra giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là $A(1;1;1)$. Ta có: $A \in \Delta$.

Vector chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_{(P)}, \vec{u}_d] = (5;-1;-3)$.

Phương trình chính tắc của đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.

Chọn ý **A**.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$; $d_2: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+3z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với (P) , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$ C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$ D. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$

Lời giải

Gọi M và N lần lượt là giao điểm của đường thẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ cần tìm với d_1 và d_2 , khi đó $M(3-t; 3-2t; -2+t)$, $N(5-3s; -1+2s; 2+s) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (2-3s+t; -4+2s+2t; 4+s-t)$.

Đường thẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ vuông góc với (P) suy ra $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{n}_p = (1; 2; 3)$. Do

đó $\frac{2-3s+t}{1} = \frac{-4+2s+2t}{2} = \frac{4+s-t}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ s=1 \end{cases} \Rightarrow M(1; -1; 0)$. Vậy đường thẳng cần tìm qua

$M(1; -1; 0)$ và có vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; 3)$ là $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$.

Chọn ý A.

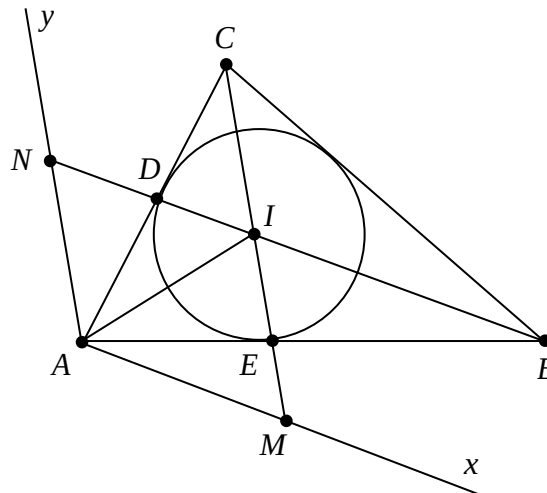
Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 1)$, $B(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3})$. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là

- A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}$ B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z-4}{2}$
C. $\frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{y-\frac{5}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{11}{6}}{2}$ D. $\frac{x+\frac{2}{9}}{1} = \frac{y-\frac{2}{9}}{-2} = \frac{z+\frac{5}{9}}{2}$

Lời giải

Xét bài toán: Cho $\triangle ABC$, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Gọi a, b, c là độ dài các cạnh. Khi đó ta có $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$.

Chứng minh. Gọi D và E lần lượt là chân các đường phân giác của $\triangle ABC$ kẻ từ B và C . Dựng tia Ax song song BD cắt CE tại M . Dựng tia Ay song song CE cắt BD tại N .



Ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$. Mặt khác $\triangle EAM \sim \triangle EBI$, suy ra $\frac{EA}{EB} = \frac{AM}{BI}$.

Hơn nữa, $\frac{EA}{EB} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$

Do đó $\frac{AM}{BI} = \frac{b}{a} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{b}{a} \overrightarrow{IB}$. Tương tự: $\overrightarrow{AN} = \frac{c}{a} \overrightarrow{IC}$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a} \overrightarrow{IB} + \frac{c}{a} \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB .

Áp dụng bài toán trên cho $\triangle OAB$, ta được $AB \cdot \overrightarrow{IO} + OB \cdot \overrightarrow{IA} + OA \cdot \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ (*).

Ta có $OA = 3$, $OB = 4$, $AB = 5$; $\overrightarrow{IO} = (-a; -b; -c)$,

$$\overrightarrow{IA} = (2-a; 2-b; 1-c), \quad \overrightarrow{IB} = \left(-\frac{8}{3}-a; \frac{4}{3}-b; \frac{8}{3}-c \right).$$

$$\text{Từ (*) ta có } \begin{cases} -5a + 4(2-a) + 3\left(-\frac{8}{3}-a\right) = 0 \\ -5b + 4(2-b) + 3\left(\frac{4}{3}-b\right) = 0 \\ -5c + 4(1-c) + 3\left(\frac{8}{3}-c\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Do đó $I(0; 1; 1)$.

Mặt khác, ta có: $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (4; -8; 8)$.

Suy ra vec tơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\vec{u} = (1; -2; 2)$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình là $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

Nhận xét: Điểm $K(-1; 3; -1) \in d$ nên phương trình đường thẳng d viết lại $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}$.

Chọn ý **A**.

Câu 18. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(2; -3; 2)$. Tập hợp tất cả các điểm M cách đều ba điểm A , B , C là một đường thẳng d . Phương trình tham số của đường thẳng d là:

$$\text{A. } \begin{cases} x = -8 - 3t \\ y = t \\ z = 15 + 7t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = -8 + 3t \\ y = t \\ z = 15 - 7t \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = -8 + 3t \\ y = -t \\ z = -15 - 7t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = -8 + 3t \\ y = t \\ z = 15 + 7t \end{cases}$$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 1; -1)$; $\overrightarrow{BC} = (3; -5; 2)$.

Ta thấy $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương nên ba điểm A , B , C không thẳng hàng.

M cách đều hai điểm A , B nên điểm M nằm trên mặt trung trực của AB .

M cách đều hai điểm B , C nên điểm M nằm trên mặt trung trực của BC .

Do đó tập hợp tất cả các điểm M cách đều ba điểm A , B , C là giao tuyến của hai mặt trung trực của AB và BC .

Gọi (P) , (Q) lần lượt là các mặt phẳng trung trực của AB và BC .

$K\left(0; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là trung điểm AB ; $N\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$ là trung điểm BC .

Mặt phẳng (P) đi qua K và nhận $\overrightarrow{AB} = (-2; 1; -1)$ làm vectơ pháp tuyến nên phương trình mặt phẳng

$$(P): -2x + \left(y - \frac{3}{2}\right) - \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0 \text{ hay } (P): 2x - y + z + 1 = 0.$$

Mặt phẳng (Q) đi qua N và nhận $\overrightarrow{BC} = (3; -5; 2)$ làm vectơ pháp tuyến nên phương trình mặt phẳng

$$(Q): 3\left(x - \frac{1}{2}\right) - 5\left(y + \frac{1}{2}\right) + 2(z - 1) = 0 \text{ hay } (Q): 3x - 5y + 2z - 6 = 0.$$

Ta có $d: \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ 3x - 5y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$

Nên d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] = (-3; 1; 7)$.

Cho $y = 0$ ta sẽ tìm được $x = -8$, $z = 15$ nên $(-8; 0; 15) \in d$. Vậy $\begin{cases} x = -8 - 3t \\ y = t \\ z = 15 + 7t \end{cases}$.

Chọn ý **A**.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; 2)$. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Biết rằng khi a và b thay đổi thỏa mãn điều kiện: $2a + b = 4$ thì tâm I thuộc một đường thẳng cố định Δ . Phương trình đường thẳng Δ tương ứng là

A. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$

Lời giải

tứ diện $OABC$ là tứ diện vuông và đã biết tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện vuông tại đỉnh O là:

$$I = \frac{A+B+C}{2} = \left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 1\right) = \left(\frac{a}{2}; \frac{4-2a}{2}; 1\right) = \left(\frac{a}{2}; 2-a; 1\right)$$

Đặt $a = 2t \Rightarrow I(t; 2-2t; 1)$

Suy ra tâm I thuộc một đường thẳng cố định có phương trình $\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases}$

Chọn đáp án **A**

Câu 20. Trong không gian Oxyz, cho ba đường thẳng có phương trình lần lượt $d_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$, $d_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{-1}$ và $d_3: \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{6}$. Đường thẳng song song d_3 , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

- A.** $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{6}$ **B.** $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-6}$ **C.** $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{6}$ **D.** $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{6}$

Lời giải

Ta có $d_1: \begin{cases} x = 3 + 2u \\ y = -1 + u \\ z = 2 - 2u \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = -1 + 3v \\ y = -2v \\ z = -4 - v \end{cases}$.

Gọi d_4 là đường thẳng cần tìm.

Gọi $A = d_4 \cap d_1 \Rightarrow A(3 + 2u; -1 + u; 2 - 2u)$, $B = d_4 \cap d_2 \Rightarrow B(-1 + 3v; -2v; -4 - v)$.

$$\overrightarrow{AB} = (-4 + 3v - 2u; 1 - 2v - u; -6 - v + 2u).$$

d_4 song song d_3 nên $\overrightarrow{AB} = k\vec{u}_3$ với $\vec{u}_3 = (4; -1; 6)$.

$$\overrightarrow{AB} = k\vec{u}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 + 3v - 2u = 4k \\ 1 - 2v - u = -k \\ -6 - v + 2u = 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ u = 0 \\ k = -1 \end{cases}.$$

Đường thẳng d_4 đi qua $A(3; -1; 2)$ và có vtcp là $\vec{u}_3 = (4; -1; 6)$ nên $d_4: \frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-6}$.

Chọn ý **B**.

Câu 21. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y - z - 2 = 0$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (α) , đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d ?

A. $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{3}$

B. $\Delta_4: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$

C. $\Delta_3: \frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-5}{1}$

D. $\Delta_1: \frac{x+2}{-3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+4}{-1}$

Lời giải

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Ta có $I \in d \Rightarrow I(1 + t; 2 + 2t; 3 + t)$. Mặt khác

$$I \in (\alpha) \Rightarrow 1 + t + 2 + 2t - (3 + t) - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(2; 4; 4).$$

Vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (1; 2; 1)$. Vectơ chỉ pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (1; 1; -1)$

Ta có $[\vec{u}, \vec{n}] = (-3; 2; -1)$. Đường thẳng cần tìm qua điểm $I(2; 4; 4)$, nhận một VTCP là

$$[\vec{u}, \vec{n}] = (-3; 2; -1) \text{ nên có phương trình tham số } \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

Kiểm tra $A(5; 2; 5) \in \Delta_3$, thấy $A(5; 2; 5)$ thỏa mãn phương trình (*). Vậy chọn C.

Chọn ý C.

Câu 22. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1; 0; -1)$, $B(2; 3; -1)$, $C(-2; 1; 1)$. Phương trình đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là

A.

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{5}$$

B. $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{5}$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2}$

D.

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-5}{5}$$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 3; 0)$; $\overrightarrow{BC} = (-4; -2; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-3; 1; 2)$

$$\Rightarrow AB^2 = 10, BC^2 = 24, AC^2 = 14 \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } A.$$

Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của $BC \Rightarrow I(0; 2; 0)$.

Đường thẳng d cần tìm đi qua $I(0; 2; 0)$ và nhận vector $\vec{u} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (3; -1; 5)$ làm véc tơ chỉ

phương. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{5}$.

Chọn ý A.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua M , cắt và vuông góc với

Δ là

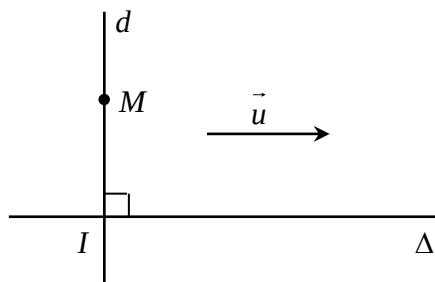
A. $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -2t \end{cases}$

B. $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$

C. $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 4t \\ z = 2t \end{cases}$

D. $d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$

Lời giải



Gọi $I = d \cap \Delta$. Do $I \in \Delta$ nên $I(2t+1; t-1; -t)$. Suy ra $\overrightarrow{MI} = (2t-1; t-2; -t)$.

Ta có Δ có vector chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; -1)$.

Ta có $d \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (2t-1).2 + (t-2).1 + (-t).(-1) = 0 \Leftrightarrow 6t-4=0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$.

Suy ra $\overrightarrow{MI} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, từ đó suy ra d có một vector chỉ phương là $\vec{u}_d = (1; -4; -2)$ và đi qua

$$M(2; 1; 0) \text{ nên có phương trình } d: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-4t \\ z = -2t \end{cases}$$

Chọn ý A.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 4z + 1 = 0$, đường thẳng d đi qua điểm A, song song với mặt phẳng (P) , đồng thời cắt trục Oz. Viết phương trình tham số của đường thẳng d .

A. $\begin{cases} x = 1+5t \\ y = 2-6t \\ z = 3+t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2+t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+2t \\ z = 3+t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+6t \\ z = 3+t \end{cases}$

Lời giải

Gọi $B(0;0;b)$ là giao điểm của đường thẳng d và trục Oz.

Ta có $\vec{u}_d = \overrightarrow{AB} = (-1; -2; b-3)$. Vì đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) nên:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_p = 0 \Leftrightarrow -2 - 2 - 4(b-3) = 0 \Leftrightarrow b = 2.$$

$$\text{Suy ra } \vec{u}_d = \overrightarrow{AB} = (-1; -2; -1) = -1(1; 2; 1).$$

Chọn ý B.

Câu 25. Trong không gian Oxy, cho điểm $M(-1;1;2)$ và hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $d': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua điểm M, cắt d và vuông góc với d' ?

A. $\begin{cases} x = -1-7t \\ y = 1+7t \\ z = 2+7t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 1-t \\ z = 2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1-t \\ z = 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 1+t \\ z = 2 \end{cases}$

Lời giải

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ , A là giao của Δ và d .

Khi đó: $A(2+3t; -3+2t; 1+t)$, $\overrightarrow{MA} = (3+3t; -4+2t; -1+t)$.

Do Δ vuông góc với d' nên: $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u}_{d'} = 0 \Leftrightarrow 7t-7=0 \Leftrightarrow t=1$.

Khi đó $\overrightarrow{MA} = (6; -2; 0)$, hay vector chỉ phương của Δ là $(3; -1; 0)$.

$$\text{Vậy phương trình } \Delta: \begin{cases} x = -1+3t \\ y = 1-t \\ z = 2 \end{cases}.$$

Chọn ý B.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, Cho mặt phẳng $(R): x + y - 2z + 2 = 0$ và đường thẳng $\Delta_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Đường thẳng Δ_2 nằm trong mặt phẳng (R) đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng Δ_1 có phương trình là

A. $\begin{cases} x = t \\ y = -3t \\ z = 1-t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 1+t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases}$

Lời giải

Phương trình tham số của đường thẳng Δ_1 là $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}$.

Gọi $I(x; y; z)$ là giao điểm của Δ_1 và (R) .

Khi đó tọa độ của I là thỏa mãn $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1-t \\ x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I = (0; 0; 1).$

Mặt phẳng (R) có VTPT $\vec{n} = (1; 1; -2)$; Đường thẳng Δ_1 có VTCP $\vec{u} = (2; 1; -1)$.

Khi đó $[\vec{n}, \vec{u}] = (1; -3; -1)$.

Đường thẳng Δ_2 nằm trong mặt phẳng (R) đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng Δ_1 .

Do đó Δ_2 đi qua $I = (0; 0; 1)$ và nhận $[\vec{n}, \vec{u}]$ làm một VTCP.

Vậy phương trình của Δ_2 là $\begin{cases} x = t \\ y = -3t \\ z = 1-t \end{cases}$.

Chọn ý A.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 1 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) , cắt và vuông góc với d có phương trình là

A. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{1}$ B. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$
C. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{1}$ D. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{1}$

Lời giải

Phương trình tham số của $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 2+t \end{cases}$. Gọi $M = d \cap (P)$.

Khi đó $M \in d$ nên $M(1+t; -t; 2+t)$; $M \in (P)$ nên $2(1+t) - (-t) - 2(2+t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại $M(2; -1; 3)$.

Gọi $\vec{u}_d = (1; -1; 1)$ và $\vec{n} = (2; -1; -2)$ lần lượt là vector chỉ phương của d và vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Khi đó một vector chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\vec{u} = [\vec{u}_d, \vec{n}] = (3; 4; 1)$.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{1}$.

Chọn ý C.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình vuông ABCD biết $A(1; 0; 1)$, $B(1; 0; -3)$ và điểm D có hoành độ âm. Mặt phẳng (ABCD) đi qua gốc tọa độ O. Khi đó đường thẳng d là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD có phương trình

A. $d: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$ B. $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$ C. $d: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ D. $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$

Lời giải

Ta có $\vec{AB} = (0; 0; -4) = -4(0; 0; 1)$. Hay AB có véc-tơ chỉ phương $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Mặt phẳng (ABCD) có một véc-tơ pháp tuyến: $[\vec{OA}; \vec{OB}] = (0; 4; 0) = 4(0; 1; 0)$, hay $\vec{j} = (0; 1; 0)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABCD).

Vì $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \subset (ABCD) \end{cases}$ nên $\begin{cases} \vec{AD} \perp \vec{k} \\ \vec{AD} \perp \vec{j} \end{cases}$.

Đường thẳng AD có véc-tơ chỉ phương là $[\vec{j}; \vec{k}] = (1; 0; 0)$.

Phương trình đường thẳng AD là $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$.

Do đó $D(1+t; 0; 1)$.

Mặt khác $AD = AB \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 0^2 + (1-1)^2} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -4 \end{cases}$.

Vì điểm D có hoành độ âm nên $D(-3; 0; 1)$.

Vì tâm I của hình vuông ABCD là trung điểm BD, nên $I = (-1; 0; -1)$.

Đường thẳng d là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{j} = (0; 1; 0)$

, nên phương trình đường thẳng d là $d: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$.

Chọn ý A.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có $H(2;2;1)$, $K\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, O lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên các cạnh BC, AC, AB . Đường thẳng d qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

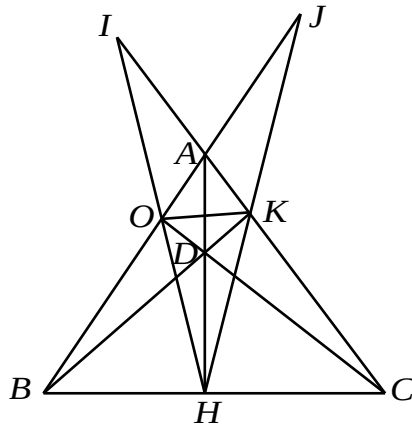
A. $d: \frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$

B. $d: \frac{x-\frac{8}{3}}{1} = \frac{y-\frac{2}{3}}{-2} = \frac{z+\frac{2}{3}}{2}$

C. $d: \frac{x+\frac{4}{9}}{1} = \frac{y-\frac{17}{9}}{-2} = \frac{z-\frac{19}{9}}{2}$

D. $d: \frac{x}{1} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-6}{2}$

Lời giải



Ta có tứ giác $BOKC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (vì có hai góc vuông K, O cùng nhìn BC dưới một góc vuông) suy ra $OKB = OCB$ (1)

Ta có tứ giác $KDHC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (vì có hai góc vuông K, H cùng nhìn DC dưới một góc vuông) suy ra $DKH = OCB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DKH = OKB$. Do đó BK là đường phân giác trong của góc OKH và AC là đường phân giác ngoài của góc OKH .

Tương tự ta chứng minh được OC là đường phân giác trong của góc KOH và AB là đường phân giác ngoài của góc KOH .

Ta có $OK = 4$; $OH = 3$; $KH = 5$.

Gọi I, J lần lượt là chân đường phân giác ngoài của góc OKH và KOH .

Ta có $I = AC \cap HO$ ta có $\frac{IO}{IH} = \frac{KO}{KH} = \frac{4}{5} \Rightarrow \overrightarrow{IO} = \frac{4}{5} \overrightarrow{IH} \Rightarrow I(-8; -8; -4)$.

Ta có $J = AB \cap KH$ ta có $\frac{JK}{JH} = \frac{OK}{OH} = \frac{4}{3} \Rightarrow \overrightarrow{JK} = \frac{4}{3} \overrightarrow{JH} \Rightarrow J(16; 4; -4)$.

Đường thẳng IK qua I nhận $\overrightarrow{IK} = \left(\frac{16}{3}; \frac{28}{3}; \frac{20}{3}\right) = \frac{4}{3}(4; 7; 5)$ làm vec tơ chỉ phương có phương trình

$$(IK): \begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = -8 + 7t \\ z = -4 + 5t \end{cases}$$

Đường thẳng OJ qua O nhận $\overrightarrow{OJ} = (16; 4; -4) = 4(4; 1; -1)$ làm vec tơ chỉ phương có phương trình

$$(OJ): \begin{cases} x = 4t' \\ y = t' \\ z = -t' \end{cases}.$$

Khi đó $A = IK \cap OJ$, giải hệ ta tìm được $A(-4; -1; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (4; 7; 5)$ và $\overrightarrow{IJ} = (24; 12; 0)$, ta tính $[\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IJ}] = (-60; 120; -120) = -60(1; -2; 2)$.

Khi đó đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có vec tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 2)$

nên có phương trình $\frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

Nhận xét.

- Mấu chốt của bài toán trên là chứng minh trục tâm D của tam giác ABC là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OHK . Khi đó, ta tìm tọa độ điểm D dựa vào tính chất quen thuộc sau: “Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp, ta có $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, với $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ ”. Sau khi tìm được D , ta tìm được A với chú ý rằng $A \in DH$ và $OA \perp DA$.
- Ta cũng có thể tìm ngay tọa độ điểm A bằng cách chứng minh A là tâm đường tròn bàng tiếp góc H của tam giác OHK . Khi đó, ta tìm tọa độ điểm D dựa vào tính chất quen thuộc sau: “Cho tam giác ABC với J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A , ta có $-a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = \vec{0}$, với $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ ”.

Chọn ý A.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(3; -2; 4)$, $B(5; 3; -2)$, $C(0; 4; 2)$, đường thẳng d cách đều ba điểm A , B , C có phương trình là

A. $\begin{cases} x = \frac{8}{3} + 26t \\ y = \frac{5}{3} + 22t \\ z = \frac{4}{3} + 27t \end{cases}$	B. $\begin{cases} x = 4 + 26t \\ y = 2 + 22t \\ z = \frac{9}{4} + 27t \end{cases}$	C. $\begin{cases} x = \frac{11}{6} \\ y = \frac{1}{6} + 22t \\ z = 27t \end{cases}$	D. $\begin{cases} x = 4 + 26t \\ y = 2 + 38t \\ z = \frac{9}{4} + 27t \end{cases}$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB suy ra $I\left(4; \frac{1}{2}; 1\right)$ và (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB .

Mặt phẳng (P) đi qua I và nhận $\overrightarrow{AB} = (2; 5; -6)$ làm vec tơ pháp tuyến có phương trình là:

$$2(x-4) + 5\left(y - \frac{1}{2}\right) - 6(z-1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 10y - 12z - 9 = 0.$$

Gọi J là trung điểm của AC suy ra $J\left(\frac{3}{2}; 1; 3\right)$ và (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn AC

Mặt phẳng (Q) đi qua J và nhận $\overrightarrow{AC} = (-3; 6; -2)$ làm vec tơ pháp tuyến có phương trình là:

$$-3\left(x - \frac{3}{2}\right) + 6(y-1) - 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12y + 4z - 9 = 0. \text{ Khi đó } d = (P) \cap (Q)$$

Ta có d có vector chỉ phương $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (26; 22; 27)$ và đi qua M là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} 4x + 10y - 12z - 9 = 0 \\ 6x - 12y + 4z - 9 = 0 \end{cases}$$
, ta chọn $x = 4$ suy ra $y = 2$ và $z = \frac{9}{4}$. Vậy $M\left(4; 2; \frac{9}{4}\right)$.

Phương trình tham số của d là:
$$\begin{cases} x = 4 + 26t \\ y = 2 + 22t \\ z = \frac{9}{4} + 27t \end{cases}$$

Chọn ý B.

Câu 31. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$, mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt d và song song với mặt phẳng (α) .

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$

B. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$

D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$

Lời giải

Gọi $M = \Delta \cap d \Rightarrow M \in d \Rightarrow M(3+t; 3+3t; 2t) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2+t; 1+3t; 1+2t)$.

Mặt phẳng (α) có VTPT là $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

$AM \parallel (\alpha) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2+t+1+3t-1-2t=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1; -2; -1)$.

Vậy $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.

Chọn ý C.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình là $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$ và $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$. Đường thẳng d cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 và song song với đường thẳng $\Delta: \frac{x-4}{1} = \frac{y-7}{4} = \frac{z-3}{-2}$ có phương trình là

A.

$\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+4}{-2}$

B.

$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-4}{-2}$

C.

$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+4}{-2}$

D.

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{-2}$

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng d_1 và d

Khi đó (P) đi qua $M(0; -1; 0)$ và có cặp véctơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; 2; 1)$, $\vec{u} = (1; 4; -2)$.

Gọi $\vec{n}$ là VTPT của (P) . Khi đó $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}] = (-8; 3; 2)$

Phương trình $(P): -8x + 3y + 2z + 3 = 0$

Gọi H là giao điểm của đường thẳng d_2 và (P)
$$\begin{cases} -8x+3y+2z+3=0 \\ x=t \\ y=1-2t \\ z=1+3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow H(1;-1;4).$$

Đường thẳng d đi qua H và có VTCP $\vec{u}=(1;4;-2)$ có phương trình: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-4}{-2}$.

Chọn ý **B**.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d: \frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{1}$ và

$d': \frac{x}{-6}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng vuông góc chung của d và d' ?

A. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{2}$ **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$ **C.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$ **D.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2}$

Lời giải

Gọi $\begin{cases} A(3-4a;-2+a;-1+a) \in d \\ B(-6b;1+b;2+2b) \in d' \end{cases}$ sao cho $\begin{cases} AB \perp d \\ AB \perp d' \end{cases}$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4a-6b-3;b-a+3;2b-a+3)$; $\vec{u}_d=(-4;1;1)$; $\vec{u}_{d'}=(-6;1;2)$;

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{d'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4(4a-6b-3)+b-a+3+2b-a+3=0 \\ -6(4a-6b-3)+b-a+3+2(2b-a+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(-1;-1;0), B(0;1;2), \overrightarrow{AB}=(1;2;2).$$

Vậy phương trình đường thẳng vuông góc chung của d và d' là $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{2}$.

Chọn ý **A**.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;4)$, $B(5;3;-2)$, $C(0;4;2)$, đường thẳng d cách đều ba điểm A , B , C có phương trình là

A. $\begin{cases} x=\frac{8}{3}+26t \\ y=\frac{5}{3}+22t \\ z=\frac{4}{3}+27t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=4+26t \\ y=2+22t \\ z=\frac{9}{4}+27t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=\frac{11}{6}+14t \\ y=\frac{1}{6}+22t \\ z=27t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=4+26t \\ y=2+38t \\ z=\frac{9}{4}+27t \end{cases}$

Lời giải

Tọa độ trung điểm của AB là $M\left(4;\frac{1}{2};1\right)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;5;-6)$ nên phương trình mặt phẳng trung

trục của AB là $2(x-4)+5\left(y-\frac{1}{2}\right)-6(z-1)=0$ hay $2x+5y-6z-\frac{9}{2}=0$.

Tọa độ trung điểm của AC là $N\left(\frac{3}{2}; 1; 3\right)$. Ta có $\overrightarrow{AC} = (-3; 6; -2)$ nên phương trình mặt phẳng trung trực của AC là $-3\left(x - \frac{3}{2}\right) + 6(y - 1) - 2(z - 3) = 0$ hay $-3x + 6y - 2z + \frac{9}{2} = 0$.

Các điểm thuộc đường thẳng d có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 5y - 6z - \frac{9}{2} = 0 \\ -3x + 6y - 2z + \frac{9}{2} = 0 \end{cases}.$$

Ta thấy $D\left(4; 2; \frac{9}{4}\right)$ thỏa mãn hệ phương trình đó nên $D \in d$. Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương

là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (26; 22; 27)$. Do đó, phương trình đường thẳng d là
$$\begin{cases} x = 4 + 26t \\ y = 2 + 22t \\ z = \frac{9}{4} + 27t \end{cases}.$$

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; 0; 1)$, $C(-2; 2; 3)$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (ABC) qua trục tâm H của ΔABC và cùng tạo với các đường thẳng AB , AC một góc $\alpha < 45^\circ$ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$ với a là một số nguyên tố. giá trị của biểu thức $ab + bc + ca$ bằng.

A. -67

B. 23

C. -33

D. -37

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-3; 0; 4) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 + 8 = 5 > 0 \Rightarrow \angle BAC < 90^\circ$.

Đường thẳng cần tìm song song với phân giác trong của góc A có vector chỉ phương xác định bởi

$$\vec{u} = \frac{1}{AB} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{AC} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(1; -2; 2) + \frac{1}{5}(-3; 0; 4) = \left(-\frac{4}{15}; -\frac{2}{3}; \frac{22}{15}\right) = \frac{2}{15}(-2; -5; 11).$$

Suy ra
$$\begin{cases} a = -2 \\ b = -5 \\ c = 11 \end{cases}.$$

Vậy $ab + bc + ca = -67$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; 0; 1)$, $C(-2; 2; 3)$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (ABC) qua trục tâm H của ΔABC và cùng tạo với các đường thẳng AB , AC một góc $\alpha > 45^\circ$ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$ với a là một số nguyên tố. giá trị của biểu thức $ab + bc + ca$ bằng

A. -67

B. 23

C. -33

D. -37

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-3; 0; 4) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 + 8 = 5 > 0 \Rightarrow \angle BAC < 90^\circ$.

Đường thẳng cần tìm song song với phân giác ngoài của góc A có vector chỉ phương xác định bởi

$$\vec{u} = \frac{1}{AB} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{AC} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(1; -2; 2) - \frac{1}{5}(-3; 0; 4) = \left(\frac{14}{15}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{15}\right) = \frac{2}{15}(7; -5; -1).$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 7 \\ b = -5. \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } ab + bc + ca = -37.$$

Câu 37. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và $d_2: \frac{x+5}{6} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{2}$ cắt nhau tại điểm $I(1;1;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ là phân giác của góc nhọn tạo bởi d_1 và d_2 .

$$\text{A. } \Delta: \frac{x-1}{32} = \frac{y-1}{23} = \frac{z-2}{13}$$

$$\text{B. } \Delta: \frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{3}$$

$$\text{C. } \Delta: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{1}$$

$$\text{D. } \Delta: \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$$

Lời giải

Ta có $\vec{u}_1 = (2; 2; 1)$, $\vec{u}_2 = (6; 3; 2)$ do đó $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 > 0$.

Suy ra phân giác của góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng có vector chỉ phương là

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{u}_1|} \vec{u}_1 + \frac{1}{|\vec{u}_2|} \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} (2; 2; 1) + \frac{1}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} (6; 3; 2) = \left(\frac{32}{21}; \frac{23}{21}; \frac{13}{21} \right) = \frac{1}{21} (32; 23; 13)$$

Vậy đường thẳng cần tìm là $\Delta: \frac{x-1}{32} = \frac{y-1}{23} = \frac{z-2}{13}$.

Câu 38. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và $d_2: \frac{x+5}{6} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{2}$ cắt nhau tại điểm $I(1;1;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ là phân giác của góc tù tạo bởi d_1 và d_2 .

$$\text{A. } \Delta: \frac{x-1}{32} = \frac{y-1}{23} = \frac{z-2}{13}$$

$$\text{B. } \Delta: \frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{3}$$

$$\text{C. } \Delta: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{1}$$

$$\text{D. } \Delta: \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$$

Lời giải

Ta có $\vec{u}_1 = (2; 2; 1)$, $\vec{u}_2 = (6; 3; 2)$ do đó $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 > 0$.

Suy ra phân giác của góc tù tạo bởi hai đường thẳng có vector chỉ phương là

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{u}_1|} \vec{u}_1 - \frac{1}{|\vec{u}_2|} \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} (2; 2; 1) - \frac{1}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} (6; 3; 2) = \left(-\frac{4}{21}; \frac{5}{21}; \frac{1}{21} \right) = \frac{1}{21} (-4; 5; 1)$$

Vậy đường thẳng cần tìm là $\Delta: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{1}$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x + my - mz + 1 = 0; (Q): mx + y + z + m = 0$. Đường thẳng Δ' qua gốc tọa độ O và song song với đường thẳng Δ . Ba điểm A, B, C lần lượt di động trên Oz, Δ, Δ' . Giá trị nhỏ nhất của $AB + BC + CA$ bằng

- A. 1
B. $2\sqrt{2}$
C. 2
D. $\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (2m; -m^2 - 1; 1 - m^2)$ và Δ đi qua $M(-1; 0; 0)$.

Mặt khác: $AB + AC + BC \geq BC + BC = 2BC \geq 2d(\Delta; \Delta')$.

Vì Δ' đi qua O và song song với Δ

$$\Rightarrow d(\Delta; \Delta') = d(O; \Delta) = \frac{|\overline{OM}; \vec{u}_\Delta|}{|\vec{u}_\Delta|} = \frac{2\sqrt{(1-m^2)^2 + (m^2+1)^2}}{\sqrt{4m^2 + (m^2+1)^2 + (1-m^2)^2}} = \frac{2\sqrt{m^4+1}}{m^2+1} \geq \sqrt{2}$$

Dấu bằng đạt tại $m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$, lúc này A trùng C trùng O và B là hình chiếu vuông góc của O lên Δ .

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, với m là số thực thay đổi thì mặt phẳng $(P): (m^2 + 1)x - (2m^2 - 2m + 1)y + (4m + 2)z - m^2 + 2m = 0$ luôn chứa một đường thẳng Δ cố định. Viết phương trình đường thẳng Δ .

- A. $\Delta: \begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases}$
B. $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = -1 - 4t \end{cases}$
C. $\Delta: \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases}$
D. $\Delta: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -1 - 4t \\ z = t \end{cases}$

Lời giải

Ta tìm đường thẳng cố định bằng cách:

$$\begin{aligned} & (m^2 + 1)x - (2m^2 - 2m + 1)y + (4m + 2)z - m^2 + 2m = 0, \forall m \\ & \Leftrightarrow m^2(x - 2y - 1) + 2m(y + 2z + 1) + (x - y + 2z) = 0, \forall m \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + 2z + 1 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 6)$. Biết có hai điểm M, N phân biệt thuộc trục Ox sao cho các đường thẳng AM, AN cùng tạo với đường thẳng chứa trục Ox một góc 45° . Tổng các hoành độ của hai điểm M, N bằng

- A. 4
B. 2
C. 1
D. 5

Lời giải

Gọi điểm $M(m; 0; 0) \in Ox \Rightarrow \overline{AM}(m - 1; 0; -6)$ và trục Ox có vectơ chỉ phương $\vec{i}(1; 0; 0)$.

$$\text{Vậy theo giả thiết có } \cos 45^\circ = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{j}|}{|\overrightarrow{AM}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{|m-1|}{\sqrt{(m-1)^2 + 36}} \Leftrightarrow \frac{|m-1|}{\sqrt{(m-1)^2 + 36}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ m = 7 \end{cases}$$

Vậy tổng hoành độ của hai điểm này bằng $-5 + 7 = 2$

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(a; 0; -2), B(2; b; 0)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa A và trục Oy ; (β) là mặt phẳng chứa B và trục Oz . Biết rằng $(\alpha), (\beta)$ cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2; 1; 2)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB

A. $\sqrt{21}$

B. $\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{6}$

D. $2\sqrt{2}$

Lời giải

Trục Oy, Oz lần lượt có các vectơ chỉ phương $\vec{j}(0; 1; 0), \vec{k}(0; 0; 1)$

$$\text{Có } \begin{cases} Oy \subset (\alpha) \\ \Delta \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_\Delta, \vec{j}] = (-2; 0; 2) \text{ và } (\alpha) \text{ qua gốc tọa độ } O(0; 0; 0) \in Oy \text{ nên } (\alpha): x - z = 0.$$

$$\text{Có } \begin{cases} Oz \subset (\beta) \\ \Delta \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\beta = [\vec{u}_\Delta, \vec{k}] = (1; -2; 0) \text{ và } (\beta) \text{ qua gốc tọa độ } O(0; 0; 0) \in Oz \text{ nên } (\beta): x - 2y = 0$$

$$\text{Vì } A \in (\alpha) \Rightarrow a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2; B \in (\beta) \Rightarrow 2 - 2b = 0 \Leftrightarrow b = 1$$

$$\text{Vậy } A(-2; 0; -2), B(2; 1; 0) \Rightarrow AB = \sqrt{21}$$

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$. Hai điểm M và N lần lượt di động trên các các mặt phẳng $(\alpha): x = 2; (\beta): z = 2$ sao cho trung điểm K của MN luôn thuộc đường thẳng Δ . Giá trị nhỏ nhất của độ dài MN bằng

A. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{9\sqrt{5}}{5}$

Lời giải

$$\text{Gọi } M(2; a; b) \in (\alpha), N(c; d; 2) \in (\beta). \text{ Khi đó } K\left(\frac{c+2}{2}; \frac{a+d}{2}; \frac{b+2}{2}\right).$$

$$\text{Vì } K \text{ thuộc } \Delta \text{ nên } \frac{c+2}{4} = \frac{a+d-2}{-2} = \frac{b}{-2} = t \Leftrightarrow \begin{cases} a+d = 2-2t \\ b = -2t \\ c = 4t-2 \end{cases}. \text{ Khi đó}$$

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{(c-2)^2 + (a-d)^2 + (b-2)^2} = \sqrt{(4t-4)^2 + (a-d)^2 + (2t+2)^2} \\ &= \sqrt{20t^2 - 24t + 20 + (a-d)^2} \geq \frac{8\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng đạt tại } \begin{cases} a+d = 2-2t \\ b = -2t \\ c = 4t-2 \\ a-d = 0 \\ t = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d = \frac{2}{5} \\ b = -\frac{6}{5} \\ c = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(2; \frac{2}{5}; -\frac{6}{5}\right), N\left(\frac{2}{5}; \frac{2}{5}; 2\right)$$

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên các mặt phẳng $(\alpha): x=1; (\beta): z=0$ sao cho trung điểm K của MN luôn thuộc đường thẳng Δ . Giá trị nhỏ nhất của độ dài MN bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

Lời giải

Gọi $M(1; a; b) \in (\alpha), N(c; d; 0) \in (\beta)$. Khi đó $K\left(\frac{c+1}{2}; \frac{a+d}{2}; \frac{b}{2}\right)$.

$$\text{Vì } K \text{ thuộc } \Delta \text{ nên } \begin{cases} \frac{c+1}{2} = 2t \\ \frac{a+d}{2} = 1-t \\ \frac{b}{2} = 1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+d = 2-2t \\ b = 2-2t \\ c = 4t-1 \end{cases} \text{ . Khi đó}$$

$$MN = \sqrt{(c-1)^2 + (a-d)^2 + b^2} = \sqrt{(4t-2)^2 + (2-2t)^2 + (a-d)^2} \\ \geq \sqrt{(4t-2)^2 + (2-2t)^2} = \sqrt{20t^2 - 24t + 8} \geq \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ .}$$

$$\text{Dấu bằng đạt tại } \begin{cases} a+d = 2-2t \\ b = 2-2t \\ c = 4t-1 \\ a-d = 0 \\ t = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d = \frac{2}{5} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = \frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(1; \frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right), N\left(\frac{7}{5}; \frac{2}{5}; 0\right)$$

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-1=0$ hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{2}; d_2: \frac{x-5}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z+5}{-5}$. Biết rằng có hai điểm A, B thuộc d_1 và hai điểm C, D thuộc d_2 sao cho AC, BD cùng song song với (P) đồng thời cách (P) một khoảng bằng 2. Tính $AC + BD$.

- A. $6+5\sqrt{2}$ B. $5\sqrt{2}$ C. $5+5\sqrt{2}$ D. $6\sqrt{2}$

Lời giải

Lấy $A(1+2a; 3-3a; 2a) \in d_1; C(5+6c; 4c; -5-5c) \in d_2$.

Có $\overrightarrow{AC} = (6c-2a+4; 4c+3a-3; -5c-2a-5)$ và theo giả thiết

$$\vec{n}_p \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 1(6c-2a+4) - 2(4c+3a-3) + 2(-5c-2a-5) = 0 \Leftrightarrow c = -a \text{ .}$$

Mặt khác $AC \parallel (P)$ nên

$$d(AC, (P)) = d(A, (P)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|(1+2a) - 2(3-3a) + 2(2a) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Khi đó $A(1; 3; 0), C(5; 0; -5), B(3; 0; 2), D(-1; -4; 0)$. Vậy $AC + BD = 5\sqrt{2} + 6$.

Câu 46. Trong mặt phẳng (P) vuông góc với d đồng thời cùng cách điểm I một khoảng bằng $\sqrt{42}$. Gọi A, B lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên hai đường thẳng đó. Tính $OA^2 + OB^2$.

A. 104

B. 102

C. 106

D. 100

Lời giải

Giả sử Δ là đường thẳng cần tìm. Có $\begin{cases} \Delta \subset (P) \\ \Delta \perp d \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_\Delta = [\vec{n}_p; \vec{u}_d] = (-2; 3; -1).$

Ta cần tìm một điểm thuộc Δ , mà sử dụng được giả thiết khoảng cách từ I lên Δ . Vậy ta gọi điểm $A(a; b; c) \in \Delta$ là hình chiếu vuông góc của I lên Δ . Vì

$$A \in (P) \Rightarrow a + b + c + 2 = 0 \Leftrightarrow c = -2 - a - b \Rightarrow A(a; b; -2 - a - b) \Rightarrow \vec{IA} = (a - 1; b + 3; -2 - a - b)$$

Theo điều kiện vuông góc ta có

$$\vec{IA} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow -2(a - 1) + 3(b + 3) - (-2 - a - b) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{a - 13}{4} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } IA = d(I, \Delta) = \sqrt{42} \Rightarrow (a - 1)^2 + (b + 3)^2 + (a + b + 2)^2 = 42 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$(a; b) = (-3; -4); (5; -2) \Rightarrow A(-3; -4; 5); B(5; -2; -5) \Rightarrow OA^2 + OB^2 = 104.$$

Câu 47. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $M(-1; 2; 3)$, $N(-1; 0; 2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z + 2 = 0$. Điểm $C(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho tồn tại các điểm B thuộc tia AM , điểm D thuộc tia AN sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Giá trị biểu thức $a + b + c$ bằng?

A. -14

B. -10

C. -12

D. -13

Lời giải

Vì $ABCD$ là hình thoi nên AC chính là phân giác trong góc BAD và cũng chính là phân giác trong góc MAN . Vì vậy đường thẳng AC có véc-tơ chỉ phương là

$$\vec{u}_{AC} = \frac{1}{AM} \vec{AM} + \frac{1}{AN} \vec{AN} = \left(-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{3}(5; 2; 1)$$

Vậy $AC: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ Ta có $C = AC \cap (P)$ nên tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 2 = 0 \\ x = 1 + 5t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \Rightarrow C(-9; -2; 1).$$

Vậy $a + b + c = -10$.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(0;1;2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$. Mặt phẳng (P) thay đổi song song với Δ , cách Δ một khoảng bằng $2\sqrt{2}$. Khoảng cách từ điểm M đến (P) có giá trị lớn nhất bằng?

- A. $\sqrt{\frac{11}{6}} + 8\sqrt{2}$ B. $\sqrt{\frac{11}{6}} + 2\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2} + 8\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2} + 2\sqrt{2}$

Lời giải

Cách 1

Đường thẳng Δ qua điểm $A(3;2;2)$, véc tơ chỉ phương $\vec{u}(2;1;1)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên Δ ; K là hình chiếu vuông góc của H lên (P)

$$\text{Theo giả thiết ta có } MH = d(M, \Delta) = \frac{\left| [\vec{u}, \overrightarrow{MA}] \right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{1+9+1}}{\sqrt{4+1+1}} = \sqrt{\frac{11}{6}}$$

Và $\Delta // (P) \Rightarrow HK = d(\Delta, (P)) = 2\sqrt{2}$. Do đó theo bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$d(M, (P)) \leq MK \leq MH + HK = \sqrt{\frac{11}{6}} + 2\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M, H, K thẳng hàng thỏa mãn $\overrightarrow{MH} = \frac{MH}{HK} \cdot \overrightarrow{HK} = \frac{\sqrt{\frac{11}{6}}}{2\sqrt{2}} \cdot \overrightarrow{HK}$ và (P) qua K vuông góc với đường thẳng MH .

Cách 2

Mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$. Vì $\Delta // (P) \Rightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{u}_\Delta = 0$.

Do đó $2a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -2a - b \Rightarrow (P): ax + by - (2a + b)z + d = 0$. Có điểm

$$A(3;2;2) \in \Delta \Rightarrow \Delta // (P) \Rightarrow d(A, (P)) = d(\Delta, (P)) = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{|3a + 2b - 2(2a + b) + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + (2a + b)^2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|d - a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + (2a + b)^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Khi đó } d(M, (P)) = \frac{|b - 2(2a + b) + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + (2a + b)^2}} = \frac{|d - 4a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + (2a + b)^2}}.$$

Đặt $x = \frac{d}{a}, y = \frac{b}{a}$ ta có điều kiện

$$d(M, (P)) = \frac{|x - 4 - y|}{\sqrt{1 + y^2 + (2 + y)^2}} = 2\sqrt{2} \cdot \left| \frac{x - 4 - y}{x - 1} \right|, \frac{|x - 1|}{\sqrt{1 + y^2 + (2 + y)^2}} = 2\sqrt{2}$$

Đến đây ta sẽ dùng điều kiện có nghiệm để tìm giá trị lớn nhất của $d(M, (P))$

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thoi $ABCD$ biết $A(1;1;1)$ và điểm C thuộc mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$. Các điểm $M(-1;0;3)$, $N(5;1;-2)$ lần lượt thuộc tia AB , AD . Độ dài cạnh hình thoi $ABCD$ bằng?

- A. 15 B. 60 C. 30 D. 45

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AM} = (-2; -1; 2)$, $\overrightarrow{AN} = (4; 0; -3) \Rightarrow \cos MAN = -\frac{14}{15}$.

Gọi F là giao điểm AC và MN .

Ta có AF là tia phân giác góc

$$MAN \Rightarrow \overrightarrow{FM} = -\frac{AM}{AN} \cdot \overrightarrow{FN} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(-1-x) = -3(5-x) \\ -5y = -3(1-y) \\ 5(3-z) = -3(-2-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{8} \\ y = \frac{3}{8} \\ z = \frac{9}{8} \end{cases} \Rightarrow F\left(\frac{10}{8}; \frac{3}{8}; \frac{9}{8}\right)$$

Ta có $\overrightarrow{AF} = \left(\frac{2}{8}; -\frac{5}{8}; \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}(2; -5; 1)$, nên đường thẳng AF có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-1}{1}$

Ta có $C = AF \cap (\alpha)$ nên tọa độ C là nghiệm hệ $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-1}{1} \\ x+y+z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-9 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow C(5; -9; 3).$

Đặt $AB = a > 0$. Ta có $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos ABC$

$$\Rightarrow 120 = 2a^2 + 2a^2 \cdot \cos BAD \Rightarrow 120 = 2a^2 + 2a^2 \cdot \frac{-14}{15} \Rightarrow a = 30.$$

Vậy độ dài cạnh hình thoi là 30.

Câu 50. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua

điểm $A(1; 1; 1)$ và có vec tơ chỉ phương $\vec{u} = (-2; 1; 2)$. Đường phân giác của góc tù tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $d: \begin{cases} x = 1 + 27t \\ y = 1 + 1t \\ z = 1 + t \end{cases}$ B. $d: \begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = -11 - 10t \end{cases}$ C. $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 17t \\ z = 1 + 10t \end{cases}$ D. $d: \begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = 11 - 10t \end{cases}$

Lời giải

Ta có $A(1; 1; 1) = d \cap \Delta$. Đường thẳng d có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (3; 4; 0)$.

Đường thẳng Δ có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-2; 1; 2)$.

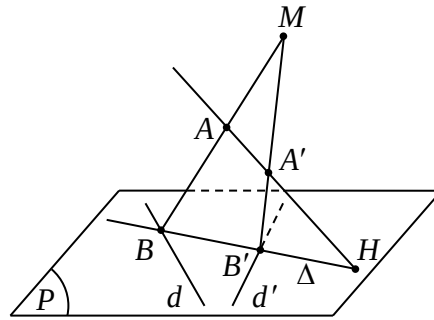
Có $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = -2 < 0 \Rightarrow \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) < 0 \Rightarrow (\vec{u}_1, \vec{u}_2) > 90^\circ$.

Do đó phân giác của góc tù tạo bởi d và Δ sẽ đi qua $A(1; 1; 1)$ và có vec tơ chỉ phương

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{u}_1|} \vec{u}_1 + \frac{1}{|\vec{u}_2|} \vec{u}_2 = \frac{1}{5}(3; 4; 0) + \frac{1}{3}(-2; 1; 2) = \left(\frac{-1}{15}; \frac{17}{15}; \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{15}(-1; 17; 10).$$

Vậy phương trình đường phân giác của góc tù tạo bởi d và Δ là $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 17t \\ z = 1 + 10t \end{cases}$.

Câu 51. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{1}$, $d': \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$ và hai điểm $A(a;0;0)$, $A'(0;0;b)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và d' ; H là giao điểm của đường thẳng AA' và mặt phẳng (P) . Một đường thẳng Δ thay đổi trên (P) nhưng luôn đi qua H đồng thời Δ cắt d và d' lần lượt tại B , B' . Hai đường thẳng AB , $A'B'$ cắt nhau tại điểm M . Biết điểm M luôn thuộc một đường thẳng cố định có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (15; -10; -1)$. Tính $T = a + b$?



A. $T = 8$

B. $T = 9$

C. $T = -9$

D. $T = 6$

Lời giải

Nhận xét rằng $A(a;0;0) \in Ox$ và $A'(0;0;b) \in Oz$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d và AB và (β) là mặt phẳng chứa d' và $A'B'$.

Ta có M thuộc đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) .

Theo giả thiết, Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (15; -10; -1)$. Mặt phẳng (α) đi qua $M_1(2;5;2)$ và có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; 2; 1)$ và $\vec{u} = (15; -10; -1) \Rightarrow (\alpha)$ có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n}_1 = [\vec{u}_1; \vec{u}] = (8; 16; -40) = 8(1; 2; -5).$$

Phương trình của (α) là $x + 2y - 5z - 2 = 0$. Mặt phẳng (β) đi qua $M_2(2;1;2)$ và có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (1; -2; 1)$ và $\vec{u} = (15; -10; -1) \Rightarrow (\beta)$ có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n}_2 = [\vec{u}_2; \vec{u}] = (12; 16; 20) = 4(3; 4; 5).$$

Phương trình của (β) là $3x + 4y + 5z - 20 = 0$. Khi đó $A = (\alpha) \cap Ox$ nên $A(2;0;0)$ và $A' = (\beta) \cap Oz$ nên $A'(0;0;4)$. Vậy $T = a + b = 6$.

Chọn ý D.

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;1;-1)$, $B(2;-2;2)$, và điểm M di động trên đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + MB$

- A. $\sqrt{\frac{46 + \sqrt{1855}}{3}}$ B. $\sqrt{\frac{46 + \sqrt{1855}}{2}}$ C. $\sqrt{\frac{46 + \sqrt{1855}}{6}}$ D. $\sqrt{\frac{46 + \sqrt{1855}}{12}}$

Lời giải

Gọi $M(t; 2t; 1+t) \in \Delta$ và $\begin{cases} MA = \sqrt{(t-1)^2 + (2t-1)^2 + (t+2)^2} = \sqrt{6t^2 - 2t + 6} \\ MB = \sqrt{(t-1)^2 + (2t+2)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{6t^2 + 2t + 9} \end{cases}$

Suy ra $MA + MB = \sqrt{6t^2 - 2t + 6} + \sqrt{6t^2 + 2t + 9}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left(-\sqrt{6t} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{35}{6}}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{6t} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{53}{6}}\right)^2} \\ &\geq \sqrt{\left(-\sqrt{6t} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \sqrt{6t} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{35}{6}} + \sqrt{\frac{53}{6}}\right)^2} \end{aligned}$$

Chọn đáp án A

Câu 53. Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(3;4;4)$, $C(2;6;6)$ và $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a + b + c$.

- A. $\frac{63}{5}$ B. $\frac{31}{3}$ C. $\frac{46}{5}$ D. 10

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1)$, $\overrightarrow{BC} = (-1; 2; 2) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] = (2; -5; 6)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $2x - 5y + 6z - 10 = 0$.

Do $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên

$$\begin{cases} I \in (ABC) \\ IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 5b + 6c - 10 = 0 \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = (a-3)^2 + (b-4)^2 + (c-4)^2 \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = (a-2)^2 + (b-6)^2 + (c-6)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 5b + 6c = 10 \\ 4a + 4b + 2c = 27 \\ 2a + 8b + 6c = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{10} \\ b = 4 \\ c = \frac{49}{10} \end{cases}.$$

Vậy $a + b + c = \frac{46}{5}$.

Chọn ý C.

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; -6)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$, $d_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua điểm M và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 tại hai điểm A, B . Độ dài đoạn thẳng AB bằng

- A. $\sqrt{38}$ B. $2\sqrt{10}$ C. 8 D. 12

Lời giải

Vì A thuộc $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ nên $A(1+2t; 1-t; -1+t)$.

Vì B thuộc $d_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ nên $B(-2+3t'; -1+t'; 2+2t')$.

Suy ra $\overrightarrow{MA} = (2t-1; 2-t; 5+t)$, $\overrightarrow{MB} = (-4+3t'; t'; 8+2t')$.

Ta có, A, B, M thẳng hàng khi và chỉ khi

$$[\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}] = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 2t-1 & 2-t \\ -4+3t' & t' \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 2-t & 5+t \\ t' & 8+2t' \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 5+t & 2t-1 \\ 8+2t' & -4+3t' \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5tt' - 4t - 7t' + 8 = 0 & (1) \\ -3tt' - 8t - t' + 16 = 0 & (2) \\ -tt' + 20t + 17t' - 14 = 0 & (3) \end{cases}$$

Từ (1), (2) ta có $\begin{cases} 5tt' - 4t - 7t' + 8 = 0 \\ t' = -2t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 3t + 2 = 0 \\ t' = -2t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, t' = 2 \\ t = 2, t' = 0 \end{cases}$.

Thay vào (3) ta được $t = 1, t' = 2$

Với $t = 1, t' = 2$ ta được $A(3; 0; 0)$, $B(4; 1; 6)$ suy ra $AB = \sqrt{38}$. thỏa mãn.

Chọn ý A.

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = -3-t \end{cases}$ và

$d_2: \begin{cases} x = 4+3t \\ y = 3+2t \\ z = 1-t \end{cases}$. Trên đường thẳng d_1 lấy hai điểm A, B thỏa mã $AB = 3$. Trên đường thẳng d_2

lấy hai điểm C, D thỏa mãn $CD = 4$. Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$.

- A. $V = 7$ B. $V = 2\sqrt{21}$ C. $V = \frac{4\sqrt{21}}{3}$ D. $V = \frac{5\sqrt{21}}{6}$

Lời giải

Ta có d_1 đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có vtcp $\vec{u}_1 = (1; -2; -1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $N(4; 3; 1)$ và có vtcp $\vec{u}_2 = (3; 2; -1)$.

Khi đó $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (4; -2; 8)$ và $\overrightarrow{MN} = (3; 1; 4)$.

Do đó $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{MN} = 12 - 2 + 32 = 42$ nên hai đường thẳng đã cho luôn chéo nhau và

$$d(d_1; d_2) = \frac{|\overrightarrow{[u_1, u_2]} \cdot \overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{[u_1, u_2]}|} = \frac{42}{\sqrt{16+4+64}} = \sqrt{21}.$$

Mặt khác, $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$ nên $d_1 \perp d_2$.

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot d(AB; CD) \cdot \sin(AB, CD) = 2\sqrt{21}.$$

Chọn ý **B**.

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$ và

$d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Đường thẳng qua điểm $M(1;1;1)$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B . Tính tỉ số

$$\frac{MA}{MB}.$$

A. $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$

B. $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$

C. $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$

D. $\frac{MA}{MB} = 2$

Lời giải

Ta có d_1 đi qua $I(1;1;-1)$ và có vector chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (1;1;1)$; d_2 đi qua $J(-1;1;0)$ và có vector chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (2;-1;2)$.

Vì $\overrightarrow{[u_1, u_2]} = (-3;0;3)$ và $\overrightarrow{[u_1, u_2]} \cdot \overrightarrow{IJ} \neq 0$ nên d_1, d_2 chéo nhau.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua $M(1;1;1)$ và song song với d_1, d_2 khi đó: $(P): x - z = 0$. Khi đó

$$\frac{MA}{MB} = \frac{d(d_1, (P))}{d(d_2, (P))} = \frac{d(I, (P))}{d(J, (P))} = \frac{2}{1} = 2.$$

Chọn ý **D**.

Câu 57. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng là $\Delta_1: \frac{x-1}{m} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-1}$

và đường thẳng $\Delta_2: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-m}$ cắt nhau tại điểm C . Gọi A và B lần lượt là hai điểm nằm trên Δ_1 và Δ_2 , sao cho $AB = 6$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất bằng:

A. $4\sqrt{2}$

B. 3

C. $2\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{7}$

Lời giải

Dễ thấy $\Delta_1 \cap \Delta_2 = C(1;2;-3)$.

$$\sin ACB = \sqrt{1 - \left(\cos(\overrightarrow{u_{\Delta_1}}, \overrightarrow{u_{\Delta_2}}) \right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\overrightarrow{u_{\Delta_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\Delta_2}}}{|\overrightarrow{u_{\Delta_1}}| \cdot |\overrightarrow{u_{\Delta_2}}|} \right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{m-2}{m^2+5} \right)^2}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(m) = \left(\frac{m-2}{m^2+5} \right)^2 \Rightarrow f'(m) = 2 \cdot \left(\frac{m-2}{m^2+5} \right) \cdot \frac{(m+1)(5-m)}{(m^2+5)^2} = 0 \Rightarrow m = 0; m = -1; m = 5$$

Lập bảng biến thiên ta có

$$\max f(m) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin ACB = \sqrt{1 - \left(\frac{m-2}{m^2+5}\right)^2} = \sqrt{1 - f(m)} \geq \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$R_{\triangle ABC} = \frac{AB}{2 \sin ACB} = \frac{6}{2 \sin ACB} = \frac{3}{\sin ACB} \leq \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow R_{\triangle ABC_{\max}} = 2\sqrt{3}.$$

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(3;1;-1)$ và đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = a - at + 1 \\ y = 2 - t \\ z = -b + bt \end{cases}, \text{ với } a \text{ và } b \text{ là những tham số thực. Khi khoảng cách từ } A \text{ đến đường thẳng } \Delta \text{ đạt}$$

giá trị lớn nhất thì biểu thức $T = a^2 + b^2 + 4b + 2a + 2019$ đạt giá trị nhỏ nhất tương ứng bằng:

- A.** 2014 **B.** 2015 **C.** 2016 **D.** 2020

Lời giải

Nhận thấy nhanh: $\Delta: \begin{cases} x = a(1-t) + 1 \\ y = 2 - t \\ z = b(t-1) \end{cases}$, luôn đi qua điểm $B(1;1;0)$ với $t=1$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng Δ . Suy ra:

$$d(A; \Delta) = AH \leq AB = \sqrt{5} \Rightarrow d(A; \Delta)_{\max} = AB = \sqrt{5}.$$

Xảy ra khi B là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng Δ

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_{\Delta}} = 0 \Leftrightarrow (-2; 0; 1) \cdot (-a; -1; b) = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a$$

$$\text{Thay vào: } T = a^2 + b^2 + 4b - 2a + 2019 = a^2 + 4a^2 - 8a - 2a + 2019 = 5a^2 - 10a + 2019$$

$$T = 5(a^2 - 2a + 1) + 2014 = 5(a-1)^2 + 2014 \geq 2014. \text{ Dấu "}" xảy ra khi: } a = -1; b = 2.$$

Vậy ta **chọn đáp án A.**

Câu 59. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z - 2 = 0$, đường thẳng

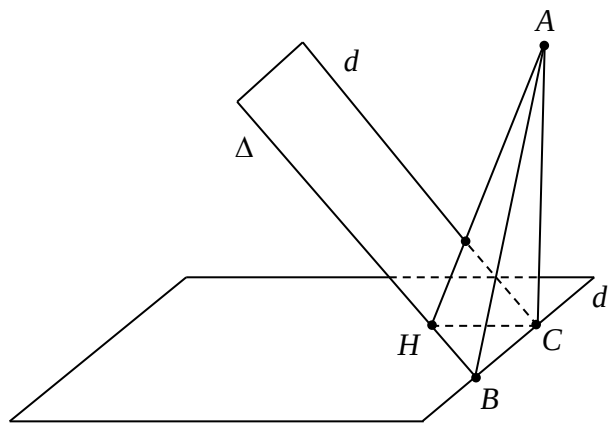
$$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{2} \text{ và điểm } A\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right). \text{ Gọi } \Delta \text{ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng } (\alpha),$$

song song với d đồng thời cách d một khoảng bằng 3. Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm B. Độ dài đoạn thẳng AB bằng.

- A.** $\frac{7}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{21}}{2}$ **C.** $\frac{7}{3}$ **D.** $\frac{3}{2}$

Lời giải

Cách 1



Ta có: $B \in Oxy$ và $B \in (\alpha)$ nên $B(a; 2-2a; 0)$.

$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{2}$ đi qua $M(-1; -2; -3)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; 2)$.

Ta có: $d \subset (\alpha)$ nên d và Δ song song với nhau và cùng nằm trong mặt phẳng (α) .

$$\text{Gọi } C = d \cap (Oxy) \quad C : \begin{cases} \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{2} \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right).$$

Gọi $d' = (\alpha) \cap (Oxy)$, suy ra d' thỏa hệ $\begin{cases} (\alpha): 2x + y - 2z - 2 = 0 \\ (Oxy): z = 0 \end{cases}$.

Do đó d' qua $C\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$ và có VTCP $\vec{u}_{d'} = (1; -2; 0)$.

Gọi $\varphi = (\Delta, d') = (d, d')$. Ta có: $\cos \varphi = \left| \cos(\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}) \right| = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Gọi H là hình chiếu của C lên Δ . Ta có $CH = 3$ và $BC = \frac{CH}{\sin \varphi} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AC} = (0; 0; -1)$ nên $AC \perp (Oxy) \Rightarrow AC \perp BC$.

$$\text{Vậy } AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{1 + \frac{45}{4}} = \frac{7}{2}.$$

Cách 2: Ta có: $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{2}$ đi qua $M(-1; -2; -3)$ và có một VTCP là $\vec{u} = (1; 2; 2)$.

Ta có: $B = \Delta \cap (Oxy)$, $\Delta \subset (\alpha)$ nên $B \in (Oxy) \cap (\alpha) \Rightarrow B(a; 2 - 2a; 0)$.

Ta có: $\Delta // d$ và $d(\Delta, d) = 3$ nên $d(B; d) = 3 \Leftrightarrow \frac{[\vec{u}; \overline{MB}]}{|\vec{u}|} = 3$

Ta có: $\overrightarrow{MB} = (a+1; 4-2a; 3)$; $\left[\vec{u}; \overrightarrow{MB} \right] = (4a-2; 2a-1; 2-4a)$.

$$\text{Do đó } \frac{[\vec{u}; \overline{MB}]}{|\vec{u}|} = 3 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{(2a-1)^2}}{3} = 3 \Leftrightarrow (2a-1)^2 = 9.$$

$$\text{Vậy } AB = \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + (1 - 2a)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 9 + 1} = \frac{7}{2}.$$

Chọn ý A.

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 4 đường thẳng có phương trình lần lượt

$$d_1: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 \\ z = -1 + 2t \end{cases}, d_3: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 3 - t \end{cases}, d_4: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}. \text{ Đường thẳng } \Delta \text{ cắt cả 4 đường}$$

thẳng trên có vector chỉ phương tương ứng là

A. $(2; -13; 11)$

B. $(4; -26; 23)$

C. $(12; -21; 11)$

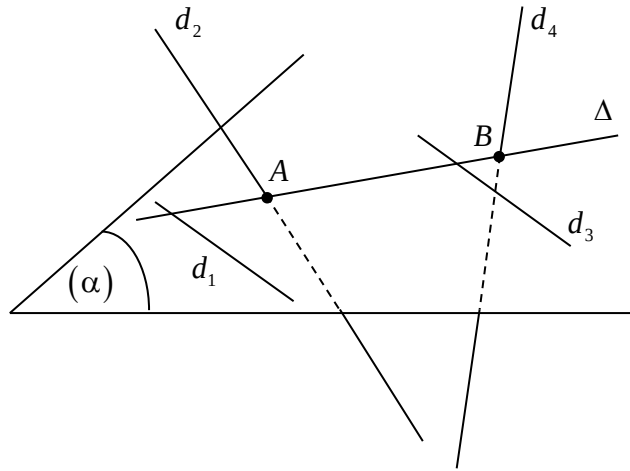
D. $(-2; 1; 3)$

Lời giải

Với dạng bài toán này, ta phải tìm ra trong 4 đường thẳng đã cho có hai đường thẳng đồng phẳng với nhau. Hai đường thẳng này hoặc song song với nhau hoặc cắt nhau. Trường hợp song song sẽ rất dễ tìm, nhưng trường hợp cắt nhau sẽ khó nhìn ra và yêu cầu phải thử từng cặp một (tối đa sẽ phải thử 5 lần).

Ở bài toán này ta dễ dàng nhận thấy hai đường thẳng $d_1 \parallel d_3$. Suy ra tồn tại một mặt phẳng (α) chứa cả hai đường thẳng d_1 và d_3 . Ta lập mặt phẳng (α) như sau:

- Chọn một điểm $M_1(2; 1; -2) \in d_1$ và một điểm $M_3(2; 1; -2) \in d_3$. Cặp VTCP của mặt phẳng (α) là $\vec{u}_1 = (-1; 2; 1)$ và $\overrightarrow{M_1M_3} = (-1; -1; 5)$. Suy ra VTPT của mặt phẳng (α) là $\vec{u}_{(\alpha)} = [\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_3}] = (11; 4; 3)$.
- Suy ra phương trình tổng quát của mặt phẳng $(\alpha): 11x + 4y + 3z - 20 = 0$.



Ta dễ dàng tìm được giao điểm của đường thẳng d_2 với mặt phẳng (α) là:

$$A = d_2 \cap (\alpha) = \left(\frac{1}{3}; 4; \frac{1}{9}\right).$$

Giao điểm của đường thẳng d_4 với mặt phẳng (α) là: $B = d_4 \cap (\alpha) = \left(\frac{7}{9}; \frac{10}{9}; \frac{24}{9}\right)$.

Đường thẳng Δ cắt cả 4 đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 thì bắt buộc phải cắt đường thẳng d_2 tại điểm A và cắt d_4 tại điểm B. Suy ra phải đi qua hai điểm A và B. Suy ra VTCP của đường thẳng Δ là:

$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{4}{9}; \frac{-26}{9}; \frac{23}{9}\right) = \frac{1}{9}(4; -26; 23).$$

Chú ý. VTCP này phải không được song song với hai đường thẳng d_1 và d_3 . Chỉ cần nó song song với một đường thẳng trong 4 đường thẳng đã cho là không thỏa mãn. Ở bài toán này dễ thấy nó không song song với đường thẳng nào.

Vậy ta chọn đáp án B.

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 4 đường thẳng có phương trình lần lượt

$$d_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, d_3: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 - t \end{cases}, d_4: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 \\ z = 1 - 2t \end{cases}. \text{ Đường thẳng } \Delta \text{ cắt cả 4 đường}$$

thẳng trên có phương trình chính tắc tương ứng là:

A. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{13} = \frac{z-3}{18}$

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{5}$.

C. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$.

D. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{12} = \frac{z}{-1}$.

Lời giải

Trong 4 đường thẳng đã cho sẽ có 2 đường thẳng đồng phẳng. Nhận thấy không có hai đường thẳng nào song song với nhau nên ta phải tìm cặp đường thẳng cắt nhau tạo nên một mặt phẳng chứa chúng. Về lý thuyết sẽ phải thử tối đa 6 phép thử để tìm ra hai đường thẳng cắt nhau.

Ta tìm ra được hai đường thẳng cắt nhau là $d_2 \cap d_4 = (4; 2; -1)$. Ta sẽ lập phương trình mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng này.

Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng là: $\vec{u}_2 = (-1; 1; 2)$, $\vec{u}_4 = (3; 0; -2)$.

Suy ra VTPT $\vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{u}_2, \vec{u}_4] = (-2; 4; -3)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng là: $(\alpha): -2x + 4y - 3z - 3 = 0$.

Gọi $A = d_1 \cap (\alpha) = \left(\frac{11}{5}; \frac{7}{5}; -\frac{3}{5}\right)$; $B = d_3 \cap (\alpha) = (2; 4; 3)$.

Đường thẳng Δ cắt cả 4 đường thẳng nên phải đi qua AB .

Khi đó $\vec{AB} = \left(-\frac{1}{5}; \frac{13}{5}; \frac{18}{5}\right) = \frac{1}{5}(-1; 13; 18)$.

Phương trình đường thẳng Δ qua B có VTCP $\vec{a} = (-1; 13; 18)$ là: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{13} = \frac{z-3}{18}$.

Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 4 đường thẳng có phương trình lần lượt

$$d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = -2 + 2t \end{cases}, d_3: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 7 + 4t \\ z = -3 - t \end{cases}, d_4: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 4 + t \\ z = 1 + t \end{cases}. \text{ Đường thẳng } \Delta \text{ cắt cả 4 đường}$$

thẳng trên và cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm có cao độ bằng

A. 3

B. 1.

C. -4.

D. 2.

Lời giải

Nhận thấy hai đường thẳng $d_1 // d_2$. Suy ra tồn tại một mặt phẳng (α) chứa cả hai đường thẳng d_1 và d_2 . Ta lập phương trình mặt phẳng (α) như sau:

Chọn một điểm $M_1(1; 2; 0) \in d_1$ và một điểm $M_2(2; 0; -2) \in d_2$. Cặp vec tơ chỉ phương của mặt phẳng (α) là $\vec{u}_1 = (-1; 1; 2)$ và $\vec{M_1M_2} = (1; -2; -2)$. Suy ra vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{u}_\alpha = [\vec{u}_1; \vec{M_1M_2}] = (2; 0; 1)$

Suy ra phương trình của mặt phẳng (α) : $2x + z - 2 = 0$

Ta dễ dàng tìm được giao điểm của đường thẳng d_3 với mặt phẳng (α) là $A = d_3 \cap (\alpha) = (2; 3; -2)$

Giao điểm của đường thẳng d_4 với mặt phẳng (α) là $B = d_4 \cap (\alpha) = (1; 3; 0)$

Đường thẳng Δ cắt cả 4 đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 thì bắt buộc phải cắt đường thẳng d_3 tại điểm A và cắt d_4 tại điểm B . Suy ra đường thẳng Δ phải đi qua A và B

Vec tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{AB} = (-1; 0; 2)$. Suy ra phương trình tham số Δ :
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 \\ z = 2t \end{cases}$$

Suy ra $\Delta \cap (Oyz) = (0; 3; 2)$.

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2}$ và đường thẳng $\Delta_2: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{1}$. Gọi A là giao điểm của Δ_1 và Δ_2 , điểm $B \in \Delta_1$ và $C \in \Delta_2$, điểm $D \in (Oxy)$ có tọa độ nguyên, sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Khoảng cách từ D đến gốc tọa độ O bằng:

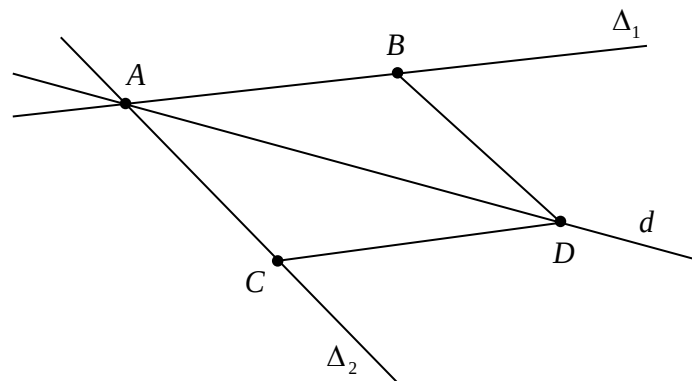
A. 20

B. $9\sqrt{2}$

C. $6\sqrt{5}$

D. $8\sqrt{3}$

Lời giải



Dễ dàng tìm được giao điểm $A = \Delta_1 \cap \Delta_2 = (1; 0; 1)$

tứ giác $ABCD$ là hình thoi, nên suy ra D nằm trên đường phân giác góc BAC

các VTCP của hai đường thẳng là: $\vec{u}_{\Delta_1} = (2; -1; 2)$ và $\vec{u}_{\Delta_2} = (-2; 2; 1)$

sẽ có hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2

Trường hợp 1. Ứng với đường phân giác có VTCP là

$$\vec{u}_d = \frac{\vec{u}_{\Delta_1}}{|\vec{u}_{\Delta_1}|} + \frac{\vec{u}_{\Delta_2}}{|\vec{u}_{\Delta_2}|} = \frac{(2; -1; 2)}{3} + \frac{(-2; 2; 1)}{3} = \left(0; \frac{1}{3}; 1\right) = \frac{1}{3}(0; 1; 3)$$

Suy ra, phương trình tham số của đường phân giác d :
$$\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=1+3t \end{cases}$$

Suy ra $D = d \cap (Oxy) = \left(1; -\frac{1}{3}; 0\right) \Rightarrow$ Không thỏa mãn vì tọa độ của D không nguyên

Trường hợp 2. Ứng với đường phân giác có VTCP là

$$\vec{u}_d = \frac{\vec{u}_{\Delta_1}}{|\vec{u}_{\Delta_1}|} - \frac{\vec{u}_{\Delta_2}}{|\vec{u}_{\Delta_2}|} = \frac{(2; -1; 2)}{3} - \frac{(-2; 2; 1)}{3} = \left(\frac{4}{3}; -1; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(4; -3; 1)$$

Suy ra, phương trình tham số của đường phân giác d' :
$$\begin{cases} x=1+4t \\ y=-3t \\ z=1+t \end{cases}$$

Suy ra: $D' = d' \cap (Oxy) = (-3; 3; 0) \Rightarrow OD' = 9\sqrt{2}$. Vậy ta chọn đáp án B

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-2}$ và đường thẳng $\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{2}$. Gọi A là giao điểm của Δ_1 và Δ_2 , điểm $B \in \Delta_1$, $C \in \Delta_2$ và $D \in (\alpha): 2x - y + 4 = 0$, sao cho tứ giác ABCD là hình thoi với $BAC > 90^\circ$. Đường thẳng BC cắt mặt phẳng $(\beta): x + y - 8 = 0$ tại điểm E cách gốc tọa độ O một khoảng OE bằng:

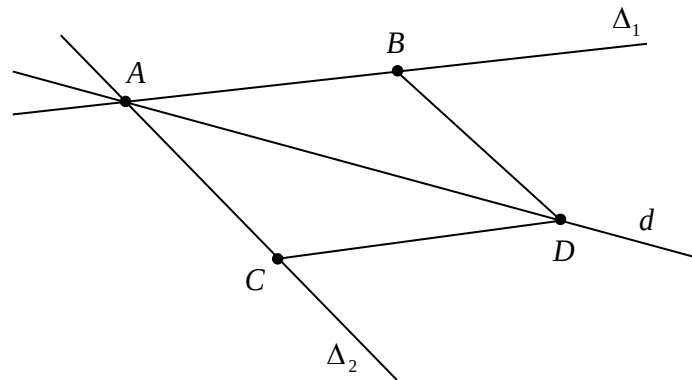
A. $6\sqrt{2}$

B. $4\sqrt{10}$

C. $3\sqrt{13}$

D. $2\sqrt{19}$

Lời giải



Để dàng tìm được giao điểm $A = \Delta_1 \cap \Delta_2 = (2; 1; 0)$

tứ giác ABCD là hình thoi với $BAC > 90^\circ$, nên suy ra D nằm trên đường phân giác góc tù BAC
các VTCP của hai đường thẳng là: $\vec{u}_{\Delta_1} = (2; 1; -2)$ và $\vec{u}_{\Delta_2} = (1; -2; 2)$

ta kiểm tra góc tạo bởi hai VTCP: $\vec{u}_{\Delta_1} \cdot \vec{u}_{\Delta_2} = -4 < 0 \Rightarrow$ góc tạo bởi hai vectơ này là góc tù.

Ghi nhớ: Nếu tích vô hướng dương thì góc tạo bởi hai vectơ là góc nhọn và khi đó ta phải sử dụng

VTCP của đường phân giác góc tù là: $\vec{u}_d = \frac{\vec{u}_{\Delta_1}}{|\vec{u}_{\Delta_1}|} - \frac{\vec{u}_{\Delta_2}}{|\vec{u}_{\Delta_2}|}$

Đường phân giác góc tù BAC có VTCP

$$\vec{u_d} = \frac{\vec{u_{\Delta 1}}}{|\vec{u_{\Delta 1}}|} + \frac{\vec{u_{\Delta 2}}}{|\vec{u_{\Delta 2}}|} = \frac{(2; 1; -2)}{3} + \frac{(1; -2; 2)}{3} = \left(1; -\frac{1}{3}; 0\right) = \frac{1}{3}(3; -1; 0)$$

Suy ra, phương trình tham số của đường phân giác d :
$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases}$$

Suy ra $D = d \cap (\alpha) = (-1; 2; 0)$

Ta có 4 điểm $A(2; 1; 0), D(-1; 2; 0), B \in \Delta_1 \Rightarrow B(2t_1; t_1; 2 - 2t_1), C \in \Delta_2 \Rightarrow C(1 + t_2; 3 - 2t_2; -2 + 2t_2)$

Tứ giác $ABCD$ là hình thoi suy ra

$$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow (2t_1 - 2; t_1 - 1; 2 - 2t_1) = (-t_2 - 2; 2t_2 - 1; 2 - 2t_2) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \end{cases}$$

Suy ra: $B(0; 0; 2), C(1; 3; -2)$. Suy ra đường thẳng BC :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$$

Suy ra: $E = BC \cap (\beta) = \left(\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 2 - 4t \end{cases} \right) \cap (x + y - 8 = 0) = (2; 6; -6)$

Suy ra $OE = 2\sqrt{19}$. Ta chọn đáp án D.



Chương

3

Các bài toán về phương trình mặt phẳng

Tóm tắt nội dung

Tiếp tục với các nội dung ta đang tìm hiểu ở phần trước, trong chủ đề lần này ta sẽ tìm hiểu về các bài toán phương trình mặt phẳng.



A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

I. VECTO PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG

Vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ là vector pháp tuyến (VTPT) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với mặt phẳng (α)

Chú ý:

- Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là một VTPT của mặt phẳng (α) Một mặt phẳng được xác định duy nhất nếu biết một điểm nó đi qua và một VTPT của nó.
- Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) thì $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$ là một VTPT của (α)

II. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG

- Trong không gian Oxyz, mọi mặt phẳng đều có dạng phương trình:
$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$
- Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một VTPT là $\vec{n}(A; B; C)$.
- Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vector $\vec{n}(A; B; C)$ khác $\vec{0}$ là VTPT là: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.
- Các trường hợp riêng

Xét phương trình mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

- Nếu $D = 0$ thì mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O .
- Nếu $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Ox .

- Nếu $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oy .
- Nếu $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oz .
- Nếu $A = B = 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxy) .
- Nếu $A = C = 0, B \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxz) .
- Nếu $B = C = 0, A \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oyz) .

Chú ý.

Nếu trong phương trình (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.

Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn $(\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Ở đây (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm $(a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c)$ với $abc \neq 0$.

III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẪNG

Cho 2 mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

- $(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
- $(\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$
- (α) cắt $(\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \vee \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \vee \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
- $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0$

IV. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẪNG

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Chú ý. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ 1 điểm thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

V. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ và } (\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Góc giữa (α) và (β) bằng hoặc bù với góc giữa hai VTPT $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$. Tức là:

$$\cos((\alpha), (\beta)) = \left| \cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) \right| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Đặt biệt ta có $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1. Viết phương trình mặt phẳng khi biết một điểm và vectơ pháp tuyến của nó.

Phương pháp. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;0;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1;-1;2)$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;0;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1;-1;2)$ có phương trình là:

$$1(x-1)-1(y-0)+2(z+2)=0 \Leftrightarrow x-y+2z+3=0.$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $x-y+2z+3=0$.

Dạng 2. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua 1 điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và song song với 1 mặt phẳng cho trước.

Phương pháp.

Cách 1. Thực hiện theo các bước sau:

- VTPT của (β) là $\vec{n}_\beta = (A; B; C)$.
- $(\alpha) // (\beta)$ nên VTPT của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta = (A; B; C)$.
- Phương trình mặt phẳng (α) : $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$.

Cách 2.

- Mặt phẳng $(\alpha) // (\beta)$ nên phương trình (P) có dạng: $Ax + By + Cz + D' = 0$ (*), với $D' \neq D$.
- Vì (P) qua 1 điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nên thay tọa độ $M_0(x_0; y_0; z_0)$ vào (*) tìm được D' .

Ví dụ. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0;1;3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): 2x-3z+1=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): 2x-3z+1=0$ nên mặt phẳng (P) có phương trình dạng $2x-3z+D=0$ ($D \neq 1$).

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0;1;3)$ nên thay tọa độ điểm M vào phương trình mặt phẳng phải thỏa mãn. Ta được: $2 \cdot 0 - 3 \cdot 3 + D = 0 \Leftrightarrow D = 9$ (thỏa mãn $D \neq 1$).

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $2x-3z+9=0$.

Dạng 3. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.

Phương pháp

- Tìm tọa độ các vector: $\vec{AB}, \vec{AC}$.
- Vectơ pháp tuyến của (α) là: $\vec{n}_\alpha = [\vec{AB}, \vec{AC}]$.
- Điểm thuộc mặt phẳng: A (hoặc B hoặc C).
- Viết phương trình mặt phẳng qua 1 điểm và có VTPT $\vec{n}_\alpha$.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;0;-2)$, $B(1;1;1)$, $C(0;-1;2)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0;1;3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;-1;4) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (7;-3;1)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) ta có $\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$ nên $\vec{n}$ cùng phương với $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

Chọn $\vec{n} = (7;-3;1)$ ta được phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$7(x-1) - 3(y-0) + 1(z+2) = 0 \Leftrightarrow 7x - 3y + z - 5 = 0.$$

Dạng 4. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng Δ

Phương pháp

- Tìm VTCP của Δ là $\vec{u}_\Delta$.
- 2. Vì $(\alpha) \perp \Delta$ nên (α) có VTPT $\vec{n}_\alpha = \vec{u}_\Delta$.
- 3. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT $\vec{n}_\alpha$.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm O và vuông góc với

$$\text{đường thẳng } d : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

Lời giải

Đường thẳng d có vector chỉ phương là: $\vec{u}_d = (1;2;1)$

Mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng d nên (α) có một vector pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = \vec{u}_d = (1;2;1)$.

Đồng thời (α) đi qua điểm O nên có phương trình là: $x + 2y + z = 0$.

Dạng 5. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ , vuông góc với mặt phẳng (β) .

Phương pháp

- Tìm VTPT của (β) là $\vec{n}_\beta$.
- Tìm VTCP của Δ là $\vec{u}_\Delta$.
- VTPT của mặt phẳng (α) là: $\vec{n}_\alpha = [\vec{n}_\beta; \vec{u}_\Delta]$.
- Lấy một điểm M trên Δ .
- Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng $d : \begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t. \end{cases}$

và vuông góc với $(\beta): x + 2y - z + 1 = 0$.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $A(0;-1;2)$ và có VTCP là: $\vec{u}_d = (-1;2;1)$

Mặt phẳng (β) có VTPT là $\vec{n}_\beta = (1; 2; -1)$.

Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và vuông góc với (β) nên (α) có một vector pháp tuyến

$$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \vec{n}_\beta] = (-4; 0; -4) = -4(1; 0; 1).$$

Phương trình mặt phẳng (α) là: $x + z - 2 = 0$.

Dạng 6. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (β) .

Phương pháp

- Tìm VTPT của (β) là $\vec{n}_\beta$.
- Tìm tọa độ vector $\vec{AB}$.
- VTPT của mặt phẳng (α) là: $\vec{n}_\alpha = [\vec{n}_\beta, \vec{AB}]$.
- Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1; 2; -2)$, $B(2; -1; 4)$ và vuông góc với (β) : $x - 2y - z + 1 = 0$.

Lời giải

Có $\vec{AB} = (1; -3; 6)$. Mặt phẳng (β) có VTPT là $\vec{n}_\beta = (1; -2; -1)$.

Mặt phẳng (α) chứa A, B và vuông góc với (β) nên (α) có một vector pháp tuyến là

$$\vec{n}_\alpha = [\vec{AB}, \vec{n}_\beta] = (15; 7; 1).$$

Phương trình mặt phẳng (α) là: $15x + 7z + 1 - 27 = 0$.

Dạng 7. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và song song với Δ' (Δ, Δ' chéo nhau).

Phương pháp

- Tìm VTCP của Δ và Δ' là $\vec{u}_\Delta$ và $\vec{u}_{\Delta'}$.
- VTPT của mặt phẳng (α) là: $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_\Delta, \vec{u}_{\Delta'}]$.
- Lấy một điểm M trên Δ .
- Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 :
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

và song song với đường thẳng d_2 : $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$.

Lời giải

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1; 1; 1)$ vector chỉ phương $\vec{u}_1(0; -2; 1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(1; 0; 1)$ vector chỉ phương $\vec{u}_2(1; 2; 2)$.

Ta có $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-6; 1; 2)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) , ta có
$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{n} \perp \vec{u}_2 \end{cases}$$
 nên $\vec{n}$ cùng phương với $[\vec{u}_1, \vec{u}_2]$.

Chọn $\vec{n} = (-6; 1; 2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_1(1; 1; 1)$ và nhận vector pháp tuyến $\vec{n} = (-6; 1; 2)$ có phương trình:

$$-6(x-1) + 1(y-1) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow -6x + y + 2z + 3 = 0.$$

Thay tọa độ điểm M_2 vào phương trình mặt phẳng (P) thấy không thỏa mãn.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $-6x + y + 2z + 3 = 0$.

Dạng 8. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và 1 điểm M

Phương pháp

- Tìm VTCP của Δ là $\vec{u}_\Delta$, lấy 1 điểm N trên Δ . Tính tọa độ $\overrightarrow{MN}$.
- VTPT của mặt phẳng (α) là: $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_\Delta; \overrightarrow{MN}]$.
- Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

và điểm $M(-4; 3; 2)$

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $N(1; 1; 1)$ vector chỉ phương $\vec{u}_d(0; -2; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (5; -2; -1)$.

Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và điểm M nên (α) có một vector pháp tuyến là:

$$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \overrightarrow{MN}] = (4; 5; 10).$$

Phương trình mặt phẳng (α) là: $4x + 5y + 10z - 19 = 0$.

Dạng 9. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa 2 đường thẳng cắt nhau Δ và Δ' .

Phương pháp

- Tìm VTCP của Δ và Δ' là $\vec{u}_\Delta$ và $\vec{u}_{\Delta'}$.
- VTPT của mặt phẳng (α) là: $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_\Delta; \vec{u}_{\Delta'}]$.
- Lấy một điểm M trên Δ .
- 4. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Lời giải

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1; 1; 1)$ vector chỉ phương $\vec{u}_1(0; -2; 1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(1; 1; 1)$ vector chỉ phương $\vec{u}_2(3; -2; 1)$.

Ta có $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (0; 3; 6)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (0; 0; 0)$

Do $\overrightarrow{M_1M_2}[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = 0$ nên đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau.

Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau nên (α) có một vector pháp tuyến là:

$$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (0; 3; 6) = 3(0; 1; 2).$$

Phương trình mặt phẳng (α) là: $y + 2z - 3 = 0$.

Dạng 10. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa 2 song song Δ và Δ' .

Phương pháp

- Tìm VTCP của Δ và Δ' là $\vec{u}_\Delta$ và $\vec{u}_{\Delta'}$, lấy $M \in \Delta, N \in \Delta'$.
- VTPT của mặt phẳng (α) là: $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_\Delta; \overrightarrow{MN}]$.
- Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

$$\text{và } d_2 : \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 - 4t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Lời giải

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1; 1; 1)$ vector chỉ phương $\vec{u}_1(0; -2; 1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(4; 3; 1)$ vector chỉ phương $\vec{u}_2(0; -4; 2)$.

Ta có $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (3; 2; 0)$.

Do $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0}$ nên đường thẳng d_1, d_2 song song

Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d_1, d_2 song song nên (α) có một vector pháp tuyến là:

$$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2}] = (-2; 3; 6) = -(2; -3; -6).$$

Phương trình mặt phẳng (α) là: $2x - 3y - 6z + 7 = 0$.

Dạng 11. Viết phương trình mặt phẳng đi qua một điểm M và song song với hai đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau cho trước.

Phương pháp

- Tìm VTCP của Δ và Δ' là $\vec{u}_\Delta$ và $\vec{u}_{\Delta'}$.
- VTPT của mặt phẳng (α) là: $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_\Delta; \vec{u}_{\Delta'}]$.
- Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;0;-2)$ và song

song với hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1 \\ y=1-2t \\ z=1+t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$.

Lời giải

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1;1;1)$ vectơ chỉ phương $\vec{u}_1(0;-2;1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(1;0;1)$ vectơ chỉ phương $\vec{u}_2(1;2;2)$.

Ta có $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-6;1;2)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) , ta có $\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{n} \perp \vec{u}_2 \end{cases}$ nên $\vec{n}$ cùng phương với $[\vec{u}_1, \vec{u}_2]$.

Chọn $\vec{n} = (-6;1;2)$ ta được phương trình mặt phẳng (P) là:

$$-6(x-1)+1(y-0)+2(z+2)=0 \Leftrightarrow -6x+y+2z+10=0.$$

Dạng 12. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua một điểm M và vuông góc với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ cho trước

Phương pháp

- Tìm VTPT của (P) và (Q) là $\vec{n}_P$ và $\vec{n}_Q$.
- VTPT của mặt phẳng (α) là: $\vec{n}_\alpha = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q]$.
- Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1;-2;5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x+2y-3z+1=0$ và $(R): 2x-3y+z+1=0$.

Lời giải

VTPT của (Q) là $\vec{n}_{(Q)}(1;2;-3)$, VTPT của (R) là $\vec{n}_R(2;-3;1)$

Ta có $[\vec{n}_{(Q)}, \vec{n}_R] = (-7;-7;-7)$ nên mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}(1;1;1)$ là một VTPT và (P) đi qua điểm $M(-1;-2;5)$ nên có phương trình là: $x+y+z-2=0$.

Dạng 13. Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) và cách $(\beta): Ax+By+Cz+D=0$ một khoảng k cho trước

Phương pháp

- Trên mặt phẳng (β) chọn 1 điểm M .
- Do $(\alpha) \parallel (\beta)$ nên (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D'=0$ ($D' \neq D$)
- 3. Sử dụng công thức khoảng cách $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta)) = k$ để tìm D' .

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x+2y-2z+1=0$ và cách (Q) một khoảng bằng 3.

Lời giải

Trên mặt phẳng $(Q): x + 2y - 2z + 1 = 0$ chọn điểm $M(-1; 0; 0)$.

Do (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình của mặt phẳng (P) có dạng:

$$x + 2y - 2z + D = 0 \text{ với } D \neq 1.$$

$$\text{Vì } d((P), (Q)) = 3 \Rightarrow d((P), M) = 3 \Leftrightarrow \frac{|-1 + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 3 \Leftrightarrow |-1 + D| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -8 \\ D = 10 \end{cases}$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán: $x + 2y - 2z - 8 = 0$ và $x + 2y - 2z + 10 = 0$.

Dạng 14. Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$ cho trước và cách điểm M một khoảng k cho trước.

Phương pháp

- Do $(\alpha) // (\beta)$ nên (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D' = 0$ ($D' \neq D$).
- Sử dụng công thức khoảng cách $d(M, (\alpha)) = k$ để tìm D' .

Ví dụ. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x + 2y - 2z + 1 = 0$ và (P) cách điểm $M(1; -2; 1)$ một khoảng bằng 3.

Lời giải:

Do (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình của mặt phẳng (P) có dạng:

$$x + 2y - 2z + D = 0 \text{ với } D \neq 1.$$

$$\text{Vì } d((P), M) = 3 \Leftrightarrow \frac{|1 - 4 - 2 + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 3 \Leftrightarrow |-5 + D| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -4 \\ D = 14 \end{cases}$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán $x + 2y - 2z - 4 = 0$ và $x + 2y - 2z + 14 = 0$.

Dạng 15. Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) .

Phương pháp

- Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính của mặt cầu (S) .
- Nếu mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $M \in (S)$ thì mặt phẳng (α) đi qua điểm M và có VTPT là $\overrightarrow{MI}$.
- Khi bài toán không cho tiếp điểm thì ta phải sử dụng các dữ kiện của bài toán tìm được VTPT của mặt phẳng và viết phương trình mặt phẳng có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ (D chưa biết).
- Sử dụng điều kiện tiếp xúc: $d(I, (\alpha)) = R$ để tìm D .

Ví dụ. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x + 2y - 2z + 1 = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0$

Lời giải

Mặt cầu (Q) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2 + 3} = 3$

Do (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình của mặt phẳng (P) có dạng:

$$x + 2y - 2z + D = 0 \text{ với } D \neq 1.$$

Vì (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên

$$d(I, (P)) = R = 3 \Leftrightarrow \frac{|-1+4-2+D|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 3 \Leftrightarrow |1+D| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -10 \\ D = 8 \end{cases}$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán: $x+2y-2z-10=0$ và $x+2y-2z+8=0$.

Dạng 15. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa một đường thẳng Δ và tạo với một mặt phẳng $(\beta): Ax+By+Cz+D=0$ cho trước một góc φ cho trước.

Phương pháp

- Tìm VTPT của (β) là $\vec{n}_\beta$.
- Gọi $\vec{n}_\alpha(A'; B'; C')$
- Dùng phương pháp vô định giải hệ: $\begin{cases} (\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta) = \varphi \\ \vec{n}_\alpha \perp \vec{u}_\Delta \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\alpha$
- Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d lần lượt có phương trình $(P): x+2y-z+5=0$ và $d: \frac{x+1}{2} = y+1 = z-3$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (P) một góc 60° .

Lời giải

Giả sử mặt phẳng (Q) có dạng $Ax+By+Cz+D=0$ ($A^2+B^2+C^2 \neq 0$).

Chọn hai điểm $M(-1; -1; 3), N(1; 0; 4) \in d$.

$$\text{Mặt phẳng } (Q) \text{ chứa } d \text{ nên } M, N \in (Q) \Rightarrow \begin{cases} A(-1)+B(-1)+C.3+D=0 \\ A.1+B.0+C.4+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -2A-B \\ D = 7A+4B \end{cases}$$

Suy ra mặt phẳng có phương trình là $Ax+By+(-2A-B)z+7A+4B=0$ và có VTPT

$$\vec{n}_Q = (A; B; -2A-B).$$

(Q) tạo với mặt phẳng (P) một góc 60°

$$\Rightarrow \frac{|A+2B+2A+B|}{\sqrt{A^2+B^2+(2A+B)^2} \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = (4 \pm 2\sqrt{3})B$$

Cho $B=1$ ta được $A = (4 \pm 2\sqrt{3})$

Vậy có 2 phương trình mặt phẳng

$$(4-2\sqrt{3})x+y+(-9+4\sqrt{3})z+32-14\sqrt{3}=0$$

$$(4+2\sqrt{3})x+y+(-9-4\sqrt{3})z+32+14\sqrt{3}=0$$

MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Câu 1

Cho mặt phẳng $(P): x + y + z = 3$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua $M(1; 0; -1)$, chứa giá của vector $\vec{u}(2; 2; -1)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) ..

Lời giải

Ta có vector pháp tuyến của (P) là $\vec{n}(1; 1; 1)$, $[\vec{n}, \vec{u}] = (-3; 3; 0)$.

Mặt phẳng (Q) chứa giá của vector $\vec{u}(2; 2; -1)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có VTPT $(1; -1; 0)$ và đi qua $M(1; 0; -1)$ nên có phương trình

$$1(x-1) - 1(y-0) + 0(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0.$$

Câu 2

Lập phương trình mặt phẳng (Q) qua $M(4; 9; -12)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại

A, B, C sao cho $OC = OA + OB$ và $\frac{4}{OC} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}$

Lời giải

Gọi $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), (a, b, c > 0)$. Phương trình mặt phẳng (Q) qua A, B, C có dạng

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ (phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn)}$$

Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases} \frac{4}{a} + \frac{9}{b} - \frac{12}{c} = 1 \\ c = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{a} + \frac{9}{b} = \frac{12}{a+b} + 1 \\ \frac{4}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{a} + \frac{9}{b} = \frac{12}{a+b} + 1 \\ (a-b)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13}{a} - \frac{6}{a} = 1 \\ c = 2a \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 7 \\ c = 14 \end{cases}$$

Vậy mặt phẳng (Q) là $\frac{x}{7} + \frac{y}{7} + \frac{z}{14} = 1 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 14 = 0$.

Câu 3

Lập phương trình mặt phẳng (P) qua điểm $M(-4; -9; 12)$, $A(2; 0; 0)$ và cắt tia Oy, Oz lần lượt tại B, C sao cho $OB = 1 + OC$ (B, C không trùng gốc O).

Lời giải

Gọi $B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ ($b > 0; c > 0$ do mặt phẳng (P) cắt tia Oy, Oz lần lượt tại B, C).

Khi đó phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{2} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Có $b = 1 + c$.

Có $M(-4; -9; 12) \in (P) \Leftrightarrow \frac{-4}{2} + \frac{-9}{b} + \frac{12}{c} = 1$,

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} b > 0; c > 0 \\ \frac{-4}{2} + \frac{-9}{b} + \frac{12}{c} = 1 \\ b = 1 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Suy ra phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$.

Câu 4

Cho hai điểm $A(2;0;1)$, $B(0;-2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA = MB = 3$.

Lời giải

Gọi $M(x; y; z)$, điểm M thuộc (P) sao cho $MA = MB = 3$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2x - y - z + 4 = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9 \\ x^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z + 4 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 2 \\ z = 3y \\ 7y^2 - 11y + 4 = 0 \end{cases}.$$

Suy ra $(x; y; z) = (0; 1; 3)$ hoặc $(x; y; z) = \left(\frac{-6}{7}; \frac{4}{7}; \frac{12}{7}\right)$.

Do đó $M(0; 1; 3)$ hoặc $M\left(\frac{-6}{7}; \frac{4}{7}; \frac{12}{7}\right)$.

Câu 5

Cho điểm $A(-1; 3; -2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 5 = 0$. Tính khoảng cách từ A đến (P) .
Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và song song với (P) .

Lời giải

Khoảng cách từ A đến $(P): d(A, (P)) = \frac{|-1 - 6 + 4 + 5|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{2}{3}$.

Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm.

Mặt phẳng (Q) đi qua A và có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -2; -2)$.

Vậy phương trình $(Q): 1(x+1) - 2(y-3) - 2(z+2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2z + 3 = 0$.

Câu 6

Cho $A(0; 0; 3)$, $M(1; 2; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC có trọng tâm thuộc đường thẳng AM .

Lời giải

Ta có $B \in Ox \Rightarrow B(b; 0; 0)$, $C \in Oy \Rightarrow C(0; c; 0)$.

Mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{3} = 1$ và trọng tâm ΔABC là $G\left(\frac{b}{3}; \frac{c}{3}; 1\right)$.

Có $\overrightarrow{AM} = (1; 2; -3)$. Phương trình đường thẳng $AM: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

Vì $G \in AM$ nên $\frac{b}{3} = \frac{c}{6} = \frac{-2}{-3} \Rightarrow b = 2, c = 4$.

Vậy phương trình $(P): \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 4z - 12 = 0$.

Câu 7

Cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$.

- Viết phương trình mặt phẳng đi qua A, B, C
- Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng $2x + 2y + z - 3 = 0$ sao cho $MA = MB = MC$

Lời giải

$$\bullet \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2; -3; -1) \\ \overrightarrow{AC} = (-2; -1; -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (2; 4; -8),$$

Mặt phẳng đi qua A, B, C có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 4; -8)$ hay $\vec{u} = (1; 2; -4)$

Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là $1(x-0) + 2(y-1) - 4(z-2) = 0$ hay $x + 2y - 4z + 6 = 0$

- M thuộc mặt phẳng $2x + 2y + z - 3 = 0 \Rightarrow M(a; b; c)$ thỏa mãn $2a + 2b + c - 3 = 0$ (1)

$$\text{Vì } MA = MB = MC \text{ nên } \begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MA^2 = MC^2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a^2 + (b-1)^2 + (c-2)^2 = (a-2)^2 + (b+2)^2 + (c-1)^2 \\ a^2 + (b-1)^2 + (c-2)^2 = (a+2)^2 + b^2 + (c-1)^2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b + c = 3 \\ 4a - 6b - 2c = 4 \\ 4a + 2b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -7 \end{cases} \Rightarrow M(2; 3; -7)$$

Câu 8

Viết phương trình mặt phẳng (P) qua điểm $M(1; -2; 4)$ sao cho (P) cắt 3 trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho M là trọng tâm của tam giác ABC .

Lời giải

Gọi $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$

Phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$$M \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC \text{ suy ra } \begin{cases} \frac{a+0+0}{3} = 1 \\ \frac{0+b+0}{3} = -2 \\ \frac{0+0+c}{3} = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 3; b = -6; c = 12$$

Phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{3} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{12} = 1$ hay $4x - 2y + z - 12 = 0$

Câu 9

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1; 2; 3)$ sao cho (P) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm A, B, C và tứ diện $OABC$ có thể tích lớn nhất

Lời giải

Giả sử mặt phẳng (P) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm khác gốc tọa độ là

$$A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) \text{ với } a, b, c > 0.$$

Khi đó phương trình của (P) có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì (P) đi qua M nên ta có: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$ (1)

Thể tích khối tứ diện $OABC$ là: $V = \frac{1}{6}abc$

Từ (1), áp dụng BĐT Cô si ta có: $1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Rightarrow abc \geq 27.6$

Suy ra $V \geq 27$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 3, b = 6, c = 9$.

Vậy phương trình (P) : $6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

Câu 10

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;1;1)$ sao cho (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho M là trọng tâm của tam giác ABC .

Lời giải

Giả sử mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm khác gốc tọa độ là

$$A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c) \text{ với } a, b, c \neq 0.$$

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;1;1)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ (1).

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (1-a;1;1), \overrightarrow{BC} = (0;-b;c), \overrightarrow{BM} = (1;1-b;1), \overrightarrow{CA} = (a;0;-c)$.

Điểm M là trọng tâm tam giác $\triangle ABC$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} M \in (P) \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ b = c \\ a = c \end{cases} \Rightarrow a = 3; b = 3; c = 3.$$

Phương trình mặt phẳng (P) cần tìm là $x + y + z - 3 = 0$.

Câu 11

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1;1;1), B(0;2;2)$ sao cho (P) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $OM = 2ON$.

Lời giải

Giả sử $(P): ax + by + cz + d = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

- $mp(P)$ qua $A(1;1;1): a + b + c + d = 0$ (1)
- $mp(P)$ qua $B(0;2;2): 2a + 2c + d = 0$ (2)

Ta có $M = (P) \cap Ox \Rightarrow M\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right); N = (P) \cap Oy \Rightarrow N\left(0; -\frac{d}{b}; 0\right)$.

$$OM = 2ON \Leftrightarrow \left|\frac{d}{a}\right| = 2\left|\frac{d}{b}\right| \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ |b| = 2|a| \end{cases}$$

Với $d = 0 \Rightarrow b + c = 0 \Rightarrow a = 0$ (l)

Với $|b| = 2|a| \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ b = -2a \end{cases}$.

Khi $b = 2a$, chọn $a = 1 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 1 \\ d = -1 \end{cases} \Rightarrow (P): x + 2y + z - 4 = 0$.

Khi $b = -2a$, chọn $a = 1 \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 3 \\ d = -2 \end{cases} \Rightarrow (P): x - 2y + 3z - 2 = 0$.

Câu 12

Cho các điểm $A(1;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, trong đó b, c dương và mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Xác định b và c , biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{1} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì $(ABC) \perp (P) \Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow b = c$ (1).

Ta có: $d(O, (ABC)) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 8$ (2).

Từ (1), (2) và $b, c > 0$ suy ra: $b = c = \frac{1}{2}$.

Câu 13

Cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(1;2;1), B(-2;1;3), C(2;-1;1), D(0;3;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P) .

Lời giải

Giả sử (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b; c)$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$). $\overrightarrow{AB} = (-3; -1; 2)$.

Vì (P) đi qua A, B nên ta có $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow -3a - b + 2c = 0 \Leftrightarrow b = -3a + 2c$.

Phương trình mặt phẳng $(P): a(x-1) + b(y-2) + c(z-1) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - a - 2b - c = 0$.

Mặt khác: $d(C; (P)) = d(D; (P)) \Leftrightarrow \frac{|2a - b + c - a - 2b - c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|3b + c - a - 2b - c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$$\Leftrightarrow |a - 3b| = |b - a| \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b = b - a \\ a - 3b = -b + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b = 0 \end{cases}.$$

Trường hợp 1. $b = 0 \Rightarrow a = \frac{2c}{3}$. Chọn $c = 3 \Rightarrow a = 2$. Vậy $(P): 2x + 3z - 5 = 0$.

Trường hợp 2. $a = 2b$. Chọn $b = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = 7 \end{cases}$. Vậy $(P): 4x + 2y + 7z - 15 = 0$.

Câu 14

Viết phương trình mặt phẳng qua hai điểm $A(0; 2; 0)$, $B(2; 0; 0)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) góc 60° .

Lời giải

Giả sử (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b; c)$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$). $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 0)$.

Mặt phẳng (yOz) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Vì mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B nên $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 2a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = b$ (1).

Mặt khác: $\cos((P); (yOz)) = \cos 60^\circ \Leftrightarrow \frac{|\vec{n} \cdot \vec{i}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{2}$ (2).

Thay (1) vào (2) ta được: $\frac{|a|}{\sqrt{2a^2 + c^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4a^2 = 2a^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 2a^2 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2}a$.

Chọn $a = 1 \Rightarrow \begin{cases} c = \pm\sqrt{2} \\ b = 1 \end{cases}$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): x + y \pm \sqrt{2}z - 2 = 0$.

Câu 15

Cho điểm $A(0; 0; 1), B(3; 0; 0)$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B và tạo với mặt phẳng (Oxy) góc 60° .

Lời giải

Mặt phẳng $(Oxy): z = 0$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (0; 0; 1)$

Mặt phẳng (P) đi qua $A(0; 0; 1)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{v} = (a; b; c)$ nên có dạng

$$a(x - 0) + b(y - 0) + c(z - 1) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - c = 0, (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$$

Mà $B \in (P) \Rightarrow 3a - c = 0 \Leftrightarrow c = 3a$

Suy ra, $\vec{v} = (a; b; 3a)$ là véc tơ pháp tuyến của mp (P)

Theo giả thiết ta có

$$\cos(\vec{n}; \vec{v}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|3a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + (3a)^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 26a^2 = b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = a\sqrt{26} \\ b = -a\sqrt{26} \end{cases}$$

Với $b = a\sqrt{26}$: chọn $b = \sqrt{26} \Rightarrow a = 1, c = 3$. Phương trình $(P_1): x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$

Với $b = -a\sqrt{26}$: chọn $b = -\sqrt{26} \Rightarrow a = 1, c = 3$. Phương trình $(P_2): x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu đề bài

$$(P_1): x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0, (P_2): x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$$

Câu 16

Cho hai mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và $(Q): x - y + z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng 2

Lời giải

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; 1; 1)$.

Mặt phẳng (Q) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = (1; -1; 1)$.

Gọi $\vec{n}_R$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (R) , khi đó:

$$\begin{cases} (R) \perp (P) \\ (R) \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_R \perp \vec{n}_P \\ \vec{n}_R \perp \vec{n}_Q \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_R = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (2; 0; -2) \text{ chọn } (1; 0; -1)$$

Khi đó, phương trình mp (R) có dạng: $x - z + D = 0$

$$\text{Mà } d(O; (R)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|D|}{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow D = \pm 2\sqrt{2}$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng $(R_1): x - z + 2\sqrt{2} = 0, (R_2): x - z - 2\sqrt{2} = 0$ thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 17

Cho ba điểm $A(-1; 1; 0), B(0; 0; -2), C(1; 1; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$ (đk $a^2 + b^2 + c^2 > 0$) là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(-1; 1; 0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b; c)$ là

$$a(x+1) + b(y-1) + cz = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz + a - b = 0 \quad (1).$$

Điểm $B(0; 0; -2)$ thuộc mặt phẳng (P) nên $-2c + a - b = 0 \Leftrightarrow b = a - 2c \quad (2).$

Khoảng cách từ điểm $C(1; 1; 1)$ đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{3}$ nên

$$\frac{|a+b+c+a-b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow |2a+c| = \sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad (3).$$

Thế (2) vào (3) và bình phương hai vế ta được

$$(2a+c)^2 = 3[a^2 + (a-2c)^2 + c^2] \Leftrightarrow 2a^2 - 16ac + 14c^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ a = 7c \end{cases}.$$

- Với $a = c$, chọn $\begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \end{cases}$ thế vào (2) ta được $b = -1$.

Phương trình mặt phẳng (P_1) là $x - y + z + 2 = 0$.

- Với $a = 7c$, chọn $\begin{cases} a = 7 \\ c = 1 \end{cases}$ thế vào (2) ta được $b = 5$.

Phương trình mặt phẳng (P_2) là $7x + 5y + z + 2 = 0$.

Vậy có hai phương trình mặt phẳng (P) cần tìm là

$$(P_1): x - y + z + 2 = 0 \text{ và } (P_2): 7x + 5y + z + 2 = 0$$

Câu 18

Cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{4}$ và điểm $A(0;3;-2)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A song song với đường thẳng d và khoảng cách giữa đường thẳng d với mặt phẳng (P) bằng 3

Lời giải

Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$ (đk $a^2 + b^2 + c^2 > 0$) là vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0;3;-2)$ và có vecto pháp tuyến $\vec{n} = (a; b; c)$ là

$$ax + by + cz - 3b + 2c = 0.$$

Ta có $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{4}$ nên đường thẳng d đi qua $M(0;0;1)$ và có VTCP $\vec{u_d} = (1;1;4)$.

Theo giả thiết ta có:

- Đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) nên $\vec{n} \cdot \vec{u_d} = 0 \Leftrightarrow a + b + 4c = 0 \Leftrightarrow a = -b - 4c$ (1).
- Khoảng cách từ đường thẳng d đến mặt phẳng (P) bằng 3 nên khoảng cách từ điểm $M(0;0;1)$ đến mặt phẳng (P) bằng 3.

$$\begin{aligned} d(d; (P)) = 3 &\Leftrightarrow d(M; (P)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|c - 3b + 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 3 \\ &\Leftrightarrow |c - b| = \sqrt{(-b - 4c)^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow b^2 + 10bc + 16c^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2c \\ b = -8c \end{cases} \end{aligned}$$

- Với $b = -2c$, chọn $\begin{cases} c = -1 \\ b = 2 \end{cases}$, thế vào (1) ta được $a = 2$. Phương trình mặt phẳng (P_1) là $2x + 2y - z - 8 = 0$.
- Với $b = -8c$, chọn $\begin{cases} c = 1 \\ b = -8 \end{cases}$, thế vào (1) ta được $a = 4$. Phương trình mặt phẳng (P_2) là $4x - 8y + z + 26 = 0$.

Vậy có hai mặt phẳng (P) cần tìm là $(P_1): 2x - 2y - z - 8 = 0$ và $(P_2): 4x - 8y + z + 26 = 0$.

Câu 19

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;-1;3)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(0;3;-1)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất).

Lời giải

Trường hợp 1. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) đạt giá trị nhỏ nhất.

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi (P) đi qua M . Khi đó mặt phẳng (P) chính là mặt phẳng (ABM) .

$$\vec{AB} = (1;0;1), \vec{AM} = (0;4;-3), \vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AM}] = (-4;3;4).$$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0; -1; 2)$ và nhận $\vec{n} = (-4; 3; 4)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình: $-4.(x-0) + 3.(y+1) + 4.(z-2) = 0 \Leftrightarrow -4x + 3y + 4z - 5 = 0$.

Trường hợp 2. Khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị lớn nhất.

Gọi $H; K$ lần lượt là hình chiếu của M trên đường thẳng AB và trên mặt phẳng (P) .

Ta có mp (P) chứa $A; B$ nên $MK \leq MH$. Do đó khoảng cách từ M đến mp (P) lớn nhất khi K trùng H , hay (P) là mp đi qua 2 điểm $A; B$ và nhận $\overrightarrow{MH}$ làm vector pháp tuyến.

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng AB .

Khi đó mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(0; 3; -1)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (1; 0; 1)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình: $(x-0) + 0.(y-3) + (z+1) = 0 \Leftrightarrow x + z + 1 = 0$.

Đường thẳng (AB) đi qua điểm $A(0; -1; 2)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (1; 0; 1)$ làm vector chỉ phương nên có

$$\text{phương trình: } \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Tọa độ điểm } H \text{ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 2 + t \\ x + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{-3}{2}; -1; \frac{1}{2}\right)$$

Vậy mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0; -1; 2)$ và nhận $\overrightarrow{MH} = \left(\frac{-3}{2}; -4; \frac{3}{2}\right)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình:

$$\frac{-3}{2}(x-0) - 4(y+1) + \frac{3}{2}(z-2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 8y - 3z + 14 = 0$$

Câu 20

Cho ba điểm $A(1; 2; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa OA sao cho khoảng cách từ B và C đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

Lời giải

Nhận xét: Khoảng cách từ B và C đến mp (P) bằng nhau có thể phát biểu thành mp (P) cách đều 2 điểm B và C . Điều này xảy ra khi mp (P) đi qua trung điểm E của đoạn BC hoặc mp $(P) // BC$.

Trường hợp 1. mp (P) đi qua trung điểm $E\left(0; 2; \frac{3}{2}\right)$ của đoạn BC .

Khi đó mp (P) là mp đi qua ba điểm $O; A; E$.

$$\overrightarrow{OA} = (1; 2; 0); \overrightarrow{OE} = \left(0; 2; \frac{3}{2}\right); \vec{n}_{(P)} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}] = \left(3; \frac{-3}{2}; 2\right).$$

Pt mặt phẳng (P) : $3x - \frac{3}{2}y + 2z = 0 \Leftrightarrow 6x - 3y + 4z = 0$.

Trường hợp 2. $(P) // BC$.

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (0; -4; 3)$

Mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC}] = (6; -3; -4)$ làm VTPT

Phương trình mp (P) : $6x - 3y - 4z = 0$.

Vậy có hai mặt phẳng (P) cần tìm là $(P): 6x - 3y + 4z = 0$ và $(P): 6x - 3y - 4z = 0$.

Câu 21

Cho hai điểm $A(-1; -1; 3)$, $B(1; 0; 4)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 5 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua sao cho góc tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) có số đo nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi $\vec{n} = (A; B; C)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) ; $((P); (Q)) = \alpha$

Vì $A, B \in (Q)$ nên $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 2A + B + C = 0 \Leftrightarrow C = -2A - B$.

$$\text{Ta có } \cos(\alpha) = \frac{|A + 2B - C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{|3A + 3B|}{\sqrt{5A^2 + 2B^2 + 4AB} \cdot \sqrt{6}}.$$

Trường hợp 1. $A = 0$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{|B|}{\sqrt{2B^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

$$\text{Trường hợp 2. } A \neq 0. \text{ Ta có } \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\left|1 + \frac{B}{A}\right|}{\sqrt{2\left(\frac{B}{A}\right)^2 + 4\frac{B}{A} + 5}}.$$

$$\text{Đặt } x = \frac{B}{A} \text{ và } f(x) = \cos^2 \alpha. \text{ Xét } f(x) = \frac{9}{6} \cdot \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 4x + 5}.$$

$$\text{Có } f'(x) = \frac{9(x+1)}{(2x^2 + 4x + 5)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $\min f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ > 30^\circ$.

Do đó chỉ có TH1 thỏa mãn, tức là $A = 0$. Khi đó chọn $B = 1, C = 1 \Rightarrow (Q): y - z + 4 = 0$.

Câu 22

Cho ba điểm $A(10; 2; -1)$, $B(1; 0; 1)$, $C(3; 1; 4)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A , song song với BC và khoảng cách từ B đến (P) đạt giá trị lớn nhất

Lời giải

Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

$$\Rightarrow (P): a(x - 10) + b(y - 2) + c(z + 1) = 0.$$

Vì $BC \parallel (P)$ nên $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 2a + b + 3c = 0 \Leftrightarrow b = -2a - 3c$.

$$d(B, (P)) = \frac{|-9a - 2b + 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-5a + 8c|}{\sqrt{5a^2 + 12ac + 10c^2}}.$$

Trường hợp 1. $a = 0 \Rightarrow d(B, (P)) = \frac{|8c|}{\sqrt{10c^2}} = \frac{8}{\sqrt{10}}.$

Trường hợp 2. $a \neq 0 \Rightarrow d(B, (P)) = \frac{\left| -5 + 8\frac{c}{a} \right|}{\sqrt{5 + 12\frac{c}{a} + 10\left(\frac{c}{a}\right)^2}}.$

Đặt $x = \frac{a}{c}$ và $f(x) = d^2(B, (P)).$ Xét $f(x) = \frac{25 - 80x + 64x^2}{5 + 12x + 10x^2}.$

Có $f'(x) = \frac{1568x^2 + 140x - 700}{(5 + 12x + 10x^2)^2}$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{8} \\ x = -\frac{5}{7} \end{cases}.$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $\max f(x) = 75 \Leftrightarrow d(B, (P)) = \sqrt{75} > \frac{8}{\sqrt{10}}.$

Do đó chỉ có trường hợp 2 thỏa mãn, tức là $\frac{c}{a} = -\frac{5}{7}.$ Khi đó chọn $a = 7, b = 1; C = -5.$

$$\Rightarrow (P): 7x + y - 5z - 77 = 0$$

Câu 23

Cho hai điểm $A(1; 2; -2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 5 = 0.$ Tìm điểm B thuộc Ox sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) bằng $BA.$

Lời giải

Ta có $B \in Ox \Rightarrow B(x; 0; 0).$

Yêu cầu bài toán $\Rightarrow d(B, (P)) = BA \Leftrightarrow \frac{|2x + 5|}{3} = \sqrt{(x-1)^2 + 8} \Leftrightarrow -5x^2 + 38x - 56 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{28}{5} \\ x = 2 \end{cases}.$

Vậy $B\left(\frac{28}{5}; 0; 0\right)$ hoặc $B(2; 0; 0).$



CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(-1;-1;0)$ và $D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB , AC , AD lần lượt lấy các điểm B' , C' , D' sao cho thể tích của khối tứ diện $AB'C'D'$ nhỏ nhất và $\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 4$. Tìm phương trình của mặt phẳng $(B'C'D')$?

A. $16x + 40y - 44z + 39 = 0$

B. $16x - 40y - 44z + 39 = 0$

C. $16x + 40y + 44z + 39 = 0$

D. $16x + 40y - 44z - 39 = 0$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ đường thẳng d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x - y - 6 = 0$

B. $x + 3y + 2z + 10 = 0$

C. $x - 2y - 3z - 1 = 0$

D. $3x + z + 2 = 0$

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Số mặt phẳng (α) đi qua M và cắt các trục Ox , Oy , Oz tại A , B , C sao cho $OA = OB = OC$ (A , B , C không trùng với gốc tọa độ O) là

A. 8

B. 3

C. 4

D. 1

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 17 = 0$. Biết mặt phẳng (Q) cắt mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$ theo một đường tròn có chu vi bằng 6π . Khi đó mặt phẳng (Q) có phương trình là

A. $2x - 2y + z + 7 = 0$

B. $2x - 2y + z + 17 = 0$

C. $x - y + 2z - 7 = 0$

D. $2x - 2y + z - 17 = 0$

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 11$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$, $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. Viết phương trình tất cả các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) đồng thời song song với hai đường thẳng d_1 , d_2 .

A. $3x - y - z + 7 = 0$

B. $3x - y - z - 15 = 0$

C. $3x - y - z - 7 = 0$

D. $3x - y - z + 7 = 0$ hoặc $3x - y - z - 15 = 0$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 6 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) , cắt và vuông góc với (d) ?

A. $\frac{x-8}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+7}{11}$

B. $\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-3}{11}$

C. $\frac{x+8}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-7}{11}$

D. $\frac{x+4}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+3}{11}$

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$, mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α) , (P) song song với giá của vectơ $\vec{u} = (1; 6; 2)$ và tiếp xúc với (S) . Phương trình mặt phẳng (P) là:

- A. $2x - y + 2z + 5 = 0$; $2x - y + 2z - 2 = 0$. B. $x - 2y + 2z + 3 = 0$; $x - 2y + z - 21 = 0$
C. $2x - y + 2z - 2 = 0$; $x - 2y + z - 21 = 0$ D. $2x - y + 2z + 3 = 0$; $2x - y + 2z - 21 = 0$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình mặt phẳng chứa $M(1; 3; -2)$ và cắt các tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C sao cho $\frac{OA}{1} = \frac{OB}{2} = \frac{OC}{4}$.

- A. $x + 2y + 4z + 1 = 0$ B. $4x + 2y + z - 8 = 0$ C. $4x + 2y + z + 1 = 0$ D. $2x - y - z - 1 = 0$

Câu 9. Trong không gian Oxyz, phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ là?

- A. $(P): 2y - 2z + 1 = 0$ B. $(P): 2x - 2z + 1 = 0$
C. $(P): 2x - 2y + 1 = 0$ D. $(P): 2y - 2z - 1 = 0$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $M(3; 2; 1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox , Oy , Oz lần lượt tại các điểm A , B , C không trùng với gốc tọa độ sao cho M là trọng tâm tam giác ABC . Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) .

- A. $3x + 2y + z + 14 = 0$ B. $2x + y + 3z + 9 = 0$ C. $3x + 2y + z - 14 = 0$ D. $2x + y + z - 9 = 0$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$. Phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục hoành và tiếp xúc với mặt cầu (S) là:

- A. $4y + 3z = 0$ B. $4y + 3z + 1 = 0$ C. $4y - 3z + 1 = 0$ D. $4y - 3z = 0$

Câu 12. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và cắt các trục Ox , Oy , Oz lần lượt tại các điểm A , B , C (khác O). Viết phương trình mặt phẳng (P) sao cho M là trọng tâm của tam giác ABC .

- A. $6x + 3y - 2z - 6 = 0$ B. $x + 2y + 3z - 14 = 0$ C. $x + 2y + 3z - 11 = 0$ D. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 3$

Câu 13. Trong không gian Oxyz, cho điểm $H(2; 1; 1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua H và cắt các trục tọa độ tại A , B , C sao cho H là trọng tâm tam giác ABC . Phương trình mặt phẳng (P) là

- A. $2x + y + z - 6 = 0$ B. $x + 2y + z - 6 = 0$ C. $x + 2y + 2z - 6 = 0$ D. $2x + y + z + 6 = 0$

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$, mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α) , (P) song song với giá của vectơ $\vec{v} = (1; 6; 2)$ và (P) tiếp xúc với (S) . Lập phương trình mặt phẳng (P) .

- A. $2x - y + 2z - 2 = 0$ và $x - 2y + z - 21 = 0$
B. $x - 2y + 2z + 3 = 0$ và $x - 2y + z - 21 = 0$
C. $2x - y + 2z + 3 = 0$ và $2x - y + 2z - 21 = 0$.

D. $2x - y + 2z + 5 = 0$ và $2x - y + 2z - 2 = 0$

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(3;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua M và cắt các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ lần lượt tại các điểm A , B , C sao cho M là trọng tâm của tam giác ABC .

A. $3x + y + 2z - 14 = 0$ **B.** $3x + 2y + z - 14 = 0$ **C.** $\frac{x}{9} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$ **D.** $\frac{x}{12} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1$

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$, cắt các tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C sao cho $\frac{OA}{1} = \frac{OB}{2} = \frac{OC}{4}$.

A. $2x - y - z - 1 = 0$ **B.** $x + 2y + 4z + 1 = 0$ **C.** $4x + 2y + z + 1 = 0$ **D.** $4x + 2y + z - 8 = 0$

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;-2;0)$, $B(0;-4;0)$, $C(0;0;-3)$. Phương trình mặt phẳng (P) nào dưới đây đi qua A , gốc tọa độ O và cách đều hai điểm B và C ?

A. $(P): 2x - y + 3z = 0$

B. $(P): 6x - 3y + 5z = 0$

C. $(P): 2x - y - 3z = 0$

D. $(P): -6x + 3y + 4z = 0$

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;0)$, $C(-2;0;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A , trọng tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $4x - 2y - z + 4 = 0$ **B.** $4x - 2y + z + 4 = 0$ **C.** $4x + 2y + z - 4 = 0$ **D.** $4x + 2y - z + 4 = 0$

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(4;3;4)$ song song với đường thẳng Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) là:

A. $x - 2y + 2z - 1 = 0$ **B.** $2x + 2y + z - 18 = 0$ **C.** $2x - y - 2z - 10 = 0$ **D.** $2x + y + 2z - 19 = 0$

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{10} = \frac{y+2}{8} = \frac{z-1}{1}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$. Mặt phẳng chứa d , tiếp xúc với (S) và cắt trục Oz tại điểm có cao độ lớn hơn 3 có phương trình là

A. $2x - 3y + 4z - 10 = 0$

B. $2x - 3y + 4z - 12 = 0$

C. $3x - 4y + 2z - 12 = 0$

D. $3x - 4y + 2z - 10 = 0$

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ và cắt các trục Ox , Oy lần lượt tại A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với d . Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $x + 2y + 5z - 5 = 0$ **B.** $x + 2y + 5z - 4 = 0$ **C.** $x + 2y - z - 4 = 0$ **D.** $2x - y - 3 = 0$

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(3;5;-1), B(0;-1;8), C(-1;-7;3), D(0;1;2)$ và điểm $M(1;1;5)$. Biết mặt phẳng $(P): x+ay+bz+c=0$ qua điểm D, M cắt cạnh AC và (P) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai phần thể tích bằng nhau. Tính $S=a+b+c$

- A. $S = \frac{1}{3}$ B. $S = -\frac{4}{3}$ C. $S = -\frac{1}{3}$ D. $S = \frac{4}{3}$

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ, cho ba điểm $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)$. Mặt cầu (S) thay đổi qua A, B, C cắt ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm $M, N, P (M \neq A, N \neq B, P \neq C)$. Gọi H là trực tâm tam giác MNP . Tọa độ của H thỏa mãn phương trình nào trong các phương trình sau

- A. $x-2y-3z=0$ B. $x+2y-3z=0$ C. $4x+y-2z=0$ D. $-4x+y-2z=0$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0), B(1;b;0), C(1;0;c)$, với a, b, c là các số thực thay đổi sao cho $H(3;2;1)$ là trực tâm tam giác ABC . Mặt phẳng $(P): mx+ny+pz-11=0$ đi qua A, B, C . Tính $S=m+n+p$.

- A. $S=5$ B. $S=6$ C. $S=-5$ D. $S=-6$

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua điểm $M(1;2;1)$ và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ sao cho $\frac{1}{OA^2} + \frac{4}{OB^2} + \frac{9}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $a+b+c$.

- A. 12 B. 14 C. $\frac{76}{3}$ D. $\frac{73}{3}$

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $S(1;4;9)$. Mặt phẳng (P) qua điểm S và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA+OB+OC$ nhỏ nhất. Hỏi điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (P) ?

- A. $M(6;2;-3)$ B. $N(2;3;-6)$ C. $P(2;3;6)$ D. $Q(6;-3;2)$

Câu 27. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A\left(\frac{1}{m};0;0\right), B\left(0;\frac{1}{m+1};0\right), C\left(0;0;\frac{1}{m+2}\right)$ với m là số thực dương thay đổi. Biết mặt phẳng (ABC) luôn chứa một đường thẳng cố định khi m thay đổi. Viết phương trình đường thẳng đó.

- A. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1-2t \\ z=t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=1-t \\ y=-1+2t \\ z=-t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=-t \\ y=1-t \\ z=-1+2t \end{cases}$

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=2-2t \\ y=1 \\ z=-2+t \end{cases}$

và $d_2: \begin{cases} x=5+3s \\ y=1 \\ z=3-s \end{cases}$. Gọi B, C lần lượt là các điểm di động trên d_1, d_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P=AB+AC+BC$

A. $2\sqrt{29}$

B. $2\sqrt{985}$

C. $\sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{29}$

D. $\sqrt{5} + \sqrt{10}$

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0), B(0;3;0), C(0;0;6)$. Các điểm M, N, P lần lượt trên các tia OA, OB, OC sao cho

$$OM = \frac{1}{m}OA, ON = \frac{1}{2m+1}OB, OP = \frac{1}{3m+2}OC$$

Với m là một số thực dương thay đổi. Biết rằng khi m thay đổi, mặt phẳng (MNP) luôn chứa một đường thẳng d cố định. Tính khoảng cách h từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d .

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{3\sqrt{646}}{19}$

C. $\frac{3\sqrt{646}}{34}$

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 3 = 0$ và hai điểm $A(1;2;3), B(3;4;5)$. Gọi M là một điểm di động trên (P) . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{MA + 2\sqrt{3}}{MB}$

A. $3\sqrt{6 + \sqrt{78}}$

B. $3\sqrt{3 + \sqrt{78}}$

C. $3\sqrt{54 + 6\sqrt{78}}$

D. $3\sqrt{3}$

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là $(P): x + y + 3z - 1 = 0$ và $(Q): 3x - y + z - 2 = 0$. Mặt phẳng (R) chứa tất cả các điểm cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình tổng quát là:

A. $4x + 4y - 3 = 0$

B. $x - 2y - 2z = 0$

C. $3x + y - z - 1 = 0$

D. $2x - 2y - 2z - 1 = 0$

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;2), B(-2;1;4)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-2}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ và khoảng cách từ A đến (P) gấp ba lần khoảng cách từ B đến (P) . Số mặt phẳng (P) thỏa mãn là:

A. 2

B. vô số

C. 0

D. 1

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - 6 = 0$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua d và tạo với (P) một góc nhỏ nhất. Khi đó dạng phương trình tổng quát của (α) có dạng: $ax + by + z + d = 0$. Khi đó giá trị của $(a + b + d)$ bằng:

A. 6

B. -7

C. 5

D. -3

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1), B(-1;0;2), C(3;0;0)$. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tọa độ là $(a;b;c)$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R_{\Delta ABC}$. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c + R_{\Delta ABC}$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$

B. $\left(2; \frac{7}{2}\right)$

C. $\left(5; \frac{13}{2}\right)$

D. $\left(\frac{7}{2}; 5\right)$

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): mx + (2m-1)y - m^2z + 3 = 0$. Điểm cố định mà mặt phẳng (P) đi qua với mọi tham số thực m là $A(a;b;c)$. Giá trị của biểu thức $T = (a + b + c)$ bằng:

A. 1

B. -3

C. 2

D. 0

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, mặt phẳng $(P): (m-1)x + (2m-1)y + mz - 2 = 0$ đi qua một đường thẳng d cố định. Biết rằng VTCP của đường thẳng d có dạng $\vec{u}_d = (a; 2; b)$. Giá trị $(a+b)$ bằng:

- A. 0 B. -4 C. -2 D. 6

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm $A(2;1;1)$, $B(2;0;3)$, $C(0;1;3)$, $D(0;2;0)$ và mặt phẳng $(P): ax + by + 2z + d = 0$. Biết rằng (P) đi qua ba điểm B, C, D cùng phía so với (P) . Khi tổng khoảng cách từ B, C, D đến (P) lớn nhất thì giá trị biểu thức $(a+b+2d)$ bằng:

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt cầu $(S): x^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 16$ và $(S'): (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ nằm trên mặt cầu (S) và điểm $N(m;n;p)$ nằm trên mặt cầu (S') sao cho khoảng cách MN là lớn nhất. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c + m + n + p$ tương ứng bằng:

- A. $\frac{38}{5}$ B. $\frac{18}{5}$ C. $\frac{26}{3}$ D. $-\frac{23}{3}$

Câu 40. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{2}$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng chứa đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S) lần lượt tại M và N. Độ dài dây cung MN có giá trị bằng:

- A. 4 B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 2 D. 1

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 6 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 24$. Gọi d là đường thẳng song song với $\vec{u} = (1; 2; 1)$ và cắt (P) và (S) lần lượt tại M và N sao cho MN đạt giá trị lớn nhất. Nếu tọa độ điểm $N(a;b;c)$ thì giá trị biểu thức $(a-2b+c)$ bằng:

- A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = m - mt \\ z = -m + (m-1)t \end{cases}$. Biết rằng tồn tại một mặt cầu cố định (S) đi qua $B(5;4;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng d khi m thay đổi. Bán kính R của mặt cầu (S) bằng:

- A. 4 B. $2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{5}$ D. 2

Câu 43. Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm $A(2;0;1)$, $B(3;1;2)$, $C(1;3;-2)$, $D(-2;0;3)$. Hai điểm P và Q di động nhưng luôn thỏa mãn $PA = QC$, $PB = QD$, $PC = QA$, $PD = QB$. Khi đó mặt phẳng trung trực của PQ đi qua điểm cố định N . Điểm N nằm trên đường thẳng tương ứng là:

- A. $x + 2y - z - 5 = 0$ B. $2x - 3y + z + 3 = 0$ C. $2x + y + z - 4 = 0$ D. $3x - y + 2z - 12 = 0$

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;2;0)$, $B(3;-2;1)$, $C(0;1;1)$, $D(-1;0;2)$. Gọi P và Q là hai điểm di động thỏa mãn hệ thức:

$$PA^2 + PB^2 + 2PC^2 - PD^2 = QA^2 + QB^2 + 2QC^2 - QD^2.$$

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của PQ . Khi đó (α) luôn đi qua điểm cố định có tọa độ $(a;b;c)$.

Giá trị biểu thức $(a;b;c)$ bằng:

- A. 1 B. 0 C. 2 D. 3

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(0;2;3)$. Mặt phẳng (P) có phương trình là: $ax + 2y + cz + d = 0$ đi qua C , sao cho A và B cùng phía so với (P) , đồng thời tổng khoảng cách từ A và B đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Giá trị của biểu thức $T = (a + c + d)$ tương ứng bằng:

- A. 0 B. -8 C. 12 D. -10

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-3)$, $B(1;-1;2)$, $C(1;2;-2)$. Mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ O , sao cho A, B, C cùng phía so với (P) . Tổng khoảng cách từ $A(1;2;-3)$, $B(1;-1;2)$, $C(1;2;-2)$ đạt giá trị lớn nhất bằng:

- A. $3\sqrt{3}$ B. 3 C. $3\sqrt{10}$ D. $3\sqrt{6}$

Câu 47. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;1)$, $B(3;-2;0)$, $C(0;0;-5)$, $D(-3;1;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua D sao cho A, B và C cùng phía so với mặt phẳng (P) . Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = d(A;(P)) + 2d(B;(P)) + d(C;(P))$ tương ứng bằng:

- A. $12\sqrt{5}$ B. $16\sqrt{3}$ C. $12\sqrt{6}$ D. $8\sqrt{5}$

Câu 48. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;1;1)$, $B(1;-3;0)$, $C(-2;2;4)$, $D(-3;1;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ O sao cho A, B, C, D nằm cùng phía so với (P) . Khi đó biểu thức $T = d(A;(P)) + 2d(B;(P)) + d(C;(P)) + 3d(D;(P))$ đạt giá trị lớn nhất thì phương trình mặt phẳng (P) tương ứng là $(P): x + by + cz + d = 0$. Giá trị của biểu thức $T = (b + c + d)$ bằng:

- A. 3 B. -3 C. 2 D. -2

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 7 = 0$ và các điểm $A(3;1;-3)$, $B(2;3;-1)$, $C(4;m;2-m^2)$. Số giá trị nguyên của m để mặt phẳng (P) cắt đúng hai cạnh của ΔABC là

- A. 4 B. -2 C. 5 D. 0

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;-3)$, $B(a;-1;2)$. Gọi M là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng $(P): x + 3y - z - 8 = 0$ sao cho $AB = 3AM$. Tổng các giá trị thực của a thỏa mãn bài toán là?

- A. -13 B. 24 C. 6 D. -29

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-3;-1)$, $B(a;b;c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) sao cho $AM = MN = NP = PB$. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ tương ứng bằng?

- A. -13 B. 24 C. 6 D. -29

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;3), B(a;b;c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng $(Oyz), (Ozx), (Oxy)$ sao cho $AM = 3NP = PB$. Giá trị của biểu thức $T = 3a + 8b - 11c$ bằng

- A. 5 B. -21 C. 7 D. 12

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-1;0), B(a;b;c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2 = 0, (Q): y + z + 2 = 0, (R): x + y - 2z - 1 = 0$ sao cho $AM = 2MN = NP = PB$. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ tương ứng bằng

- A. -5 B. $-\frac{28}{5}$ C. $\frac{17}{5}$ D. $-\frac{31}{5}$

Câu 54. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;a), B(m;n;p)$. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các trục tọa độ Ox, Oy sao cho $AM = MN = NB$. Giá trị của biểu thức $T = m + n + p$ tương ứng bằng

- A. $-\frac{11}{2}$ B. 2 C. -3 D. $-\frac{9}{2}$

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn mặt phẳng $(\alpha): x + y + 5z - 7 = 0, (\beta): x + y - z - 1 = 0; (\gamma): x - y - z - 1 = 0; (\delta): x - y - 3z + 1 = 0$. Thể tích của khối tứ diện giới hạn bởi bốn mặt phẳng này có giá trị tương ứng bằng

- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. 1 D. $\frac{1}{3}$

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x = 3-t \\ y = -2+2t \\ z = -1+t \end{cases}$. Quỹ

tích những điểm cách đều hai đường thẳng là hai mặt phẳng

- A. $(\alpha): x + y - z = 0; (\beta): 3x - 3y - 2z - 6 = 0$ B. $(\alpha): x + y - 2 = 0; (\beta): 3x - 3y - 2z - 6 = 0$.
C. $(\alpha): 3x + y - 1 = 0; (\beta): 3x + 3y - z - 2 = 0$. D. $(\alpha): x + y - 2 = 0; (\beta): 2x - 3y - 2z - 7 = 0$.

Câu 57. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$ và

$d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$. Mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là?

- A. $6x + 2y + 5z - 2 = 0$ B. $6x + 2y + 5z - 11 = 0$.
C. $3x + y + 2z - 3 = 0$. D. $x + 3y - 8 = 0$.

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm có tọa độ là $A(1;-1;0), B(3;0;1), C(4;1;1), D(3;-2;-2), E(-1;-2;-1)$. Số mặt phẳng tạo thành từ 5 điểm này tương ứng là

- A. 4 B. 7
C. 6 D. 5

Câu 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 10 = 0$ và hai điểm $A(1;2;0), B(-1;3;1)$. Gọi (Q) là một mặt phẳng đi qua A, B đồng thời tạo với (P) một góc nhỏ

nhất. Biết rằng phương trình tổng quát của (Q) là : $2x + by + cz + d = 0$, với b, c, d là những số thực. Khi đó giá trị của tổng $(b + c + d)$ bằng:

- A. 10 B. 12 C. 18 D. -8

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt $(P): mx + (2m + 1)y - z - 4m + 2 = 0$ và điểm $A(1; 2; 0)$. Khi khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) lớn nhất thì hình chiếu vuông góc của A lên (P) là $H(a; b; c)$. Giá trị của $(a + b + c)$ bằng:

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): (m^2 + 2)x + my + m^2z - 3m = 0$ và điểm $B(0; 1; 0)$. Khoảng cách lớn nhất từ B đến mặt phẳng (P) nằm trong khoảng nào dưới đây

- A. $(1; 2)$ B. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ C. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$ D. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 0; -1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(Q): x - 3y - 4 = 0$. Gọi M là điểm nằm trên (P) và N là điểm nằm trên (Q) sao cho A là trung điểm MN . Khi M chạy trên mặt phẳng (P) thì quỹ tích điểm N là đường thẳng d có phương trình tương ứng là

- A. $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = t \\ z = 7t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = 7t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3 \end{cases}$

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Biết rằng khi a, c và b thay đổi thỏa mãn điều kiện: $a + 2b - c = 6$ thì tâm I thuộc một mặt phẳng cố định (P) . Phương trình mặt phẳng (P) tương ứng là

- A. $2x - y - z - 6 = 0$ B. $x + 2y - z - 3 = 0$ C. $x - y - 6 = 0$ D. $3x + y + z - 1 = 0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Trong không gian Oxyz, cho tứ diện ABCD có $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(-1;-1;0)$ và $D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' sao cho thể tích của khối tứ diện AB'C'D' nhỏ nhất và $\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 4$. Tìm phương trình của mặt phẳng (B'C'D')?

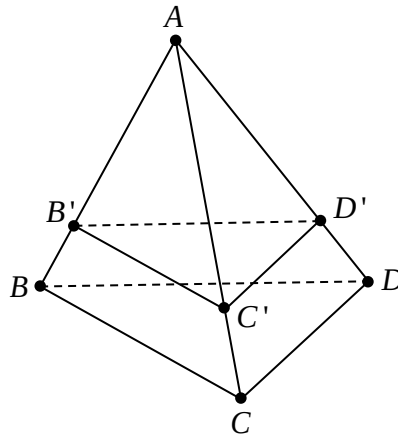
A. $16x + 40y - 44z + 39 = 0$

B. $16x - 40y - 44z + 39 = 0$

C. $16x + 40y + 44z + 39 = 0$

D. $16x + 40y - 44z - 39 = 0$

Lời giải



Ta có $\frac{V_{ABCD}}{V_{AB'C'D'}} = \frac{AB}{AB'} \cdot \frac{AC}{AC'} \cdot \frac{AD}{AD'} \leq \frac{1}{27} \cdot \left(\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} \right)^3 = \frac{64}{27}$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{AD}{AD'} = \frac{4}{3}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB} \Rightarrow B' \left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}; \frac{7}{4} \right).$$

Suy ra (B'C'D') qua $B' \left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}; \frac{7}{4} \right)$ và song song (BCD) nên (B'C'D') có một vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n} = [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = (4; 10; -11)$$

Vậy phương trình (B'C'D') là $16x + 40y - 44z + 39 = 0$.

Chọn ý A.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ đường thẳng d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x - y - 6 = 0$

B. $x + 3y + 2z + 10 = 0$

C. $x - 2y - 3z - 1 = 0$

D. $3x + z + 2 = 0$

Lời giải

Gọi $K(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của A lên d. Tọa độ của K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -x+1=y-1 \\ y-1=-z+1 \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow K(1;1;1).$$

Ta có $d((d),(P))=d(K,(P))=KH \leq KA=\sqrt{14}$. Nên khoảng cách từ d đến (P) đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{14}$ khi mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với $\overline{KA}$. Khi đó có thể chọn VTPT của (P) là $\overline{KA}$. Vậy (P) vuông góc với mặt phẳng A' .

Chọn ý **D**.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Số mặt phẳng (α) đi qua M và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho $OA=OB=OC$ (A, B, C không trùng với gốc tọa độ O) là

A. 8

B. 3

C. 4

D. 1

Lời giải

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c), (\alpha)$ có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, M \in (\alpha) \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{5}{c}=1$.

Do $OA=OB=OC \Rightarrow |a|=|b|=|c|$.

Xét các trường hợp

$$+ a=b=c \Rightarrow \frac{8}{a}=1 \Rightarrow a=8 \Rightarrow (\alpha): x+y+z-8=0.$$

$$+ a=b=-c \Rightarrow \frac{-2}{a}=1 \Rightarrow a=-2 \Rightarrow (\alpha): x+y-z+2=0.$$

$$+ a=-b=-c \Rightarrow \frac{-6}{a}=1 \Rightarrow a=-6 \Rightarrow (\alpha): x-y-z+6=0.$$

$$+ a=-b=c \Rightarrow \frac{4}{a}=1 \Rightarrow a=4 \Rightarrow (\alpha): x-y+z-4=0.$$

Vậy có 4 mặt phẳng (α) thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn ý **C**.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-17=0$. Biết mặt phẳng (Q) cắt mặt cầu $(S): x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$ theo một đường tròn có chu vi bằng 6π . Khi đó mặt phẳng (Q) có phương trình là

A. $2x-2y+z+7=0$

B. $2x-2y+z+17=0$

C. $x-y+2z-7=0$

D. $2x-2y+z-17=0$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính $R=5$.

$$S=2\pi r=6\pi \Rightarrow r=3 \Rightarrow h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{25-9}=4.$$

(Q) song song với (P) nên phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $(Q): 2x-2y+z+d=0$

$$h=d(I,(Q))=\frac{|2.0-2.(-2)+1.1+d|}{3}=4 \Leftrightarrow |d+5|=12 \Leftrightarrow \begin{cases} d=7 \\ d=-17 \end{cases}$$

+ Với $d=-17$ thì $(Q) \equiv (P)$.

+ Với $d=7$ thì $(Q): 2x-2y+z+7=0$.

Chọn ý **A**.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 11$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$, $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. Viết phương trình tất cả các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) đồng thời song song với hai đường thẳng d_1, d_2 .

- A.** $3x - y - z + 7 = 0$
- B.** $3x - y - z - 15 = 0$
- C.** $3x - y - z - 7 = 0$
- D.** $3x - y - z + 7 = 0$ hoặc $3x - y - z - 15 = 0$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; 0)$, bán kính $R = \sqrt{11}$.

- d_1 qua $A(5; -1; 1)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; 1; 2)$.
- d_2 qua $B(-1; 0; 0)$ có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (1; 2; 1)$.

Mặt phẳng (P) cần tìm song song với hai đường thẳng d_1, d_2 nên (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-3; 1; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $-3x + y + z + d = 0$.

$$A \notin (P) \Leftrightarrow d \neq 15; B \notin (P) \Leftrightarrow d \neq -3.$$

Mặt khác mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên ta có:

$$N(0; 0; 1) \Leftrightarrow \frac{|-3-1+0+d|}{\sqrt{9+1+1}} = \sqrt{11} \Leftrightarrow |-4+d| = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 15 \\ d = -7 \end{cases}.$$

- $d = 15$ loại
- $d = -7$, ta có phương trình mặt phẳng (P) là $-3x + y + z - 7 = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z + 7 = 0$.

Chọn ý **A**.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 6 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) , cắt và vuông góc với (d) ?

- A.** $\frac{x-8}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+7}{11}$
- B.** $\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-3}{11}$
- C.** $\frac{x+8}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-7}{11}$
- D.** $\frac{x+4}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+3}{11}$

Lời giải

Phương trình tham số của $d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = -5 - t \end{cases}$

Ta có $M = d \cap (P)$ nên $2(2+3t) - 3(-1+t) - 5 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow M(8; 1; -7)$

VTCP của Δ là $\vec{u} = [\vec{u}_d; \vec{n}_{(P)}] = (-2; -5; -11) = -1 \cdot (2; 5; 11)$

Δ đi qua M có VTCP $\vec{a} = (2; 5; 11)$ nên có phương trình: $\frac{x-8}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-7}{11}$.

Chọn ý **A**.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$, mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α) , (P) song song với giá của vector $\vec{u} = (1; 6; 2)$ và tiếp xúc với (S) . Phương trình mặt phẳng (P) là:

- A.** $2x - y + 2z + 5 = 0$; $2x - y + 2z - 2 = 0$. **B.** $x - 2y + 2z + 3 = 0$; $x - 2y + z - 21 = 0$
C. $2x - y + 2z - 2 = 0$; $x - 2y + z - 21 = 0$ **D.** $2x - y + 2z + 3 = 0$; $2x - y + 2z - 21 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng (α) có một vtpt là $\vec{n}_\alpha = (1; 4; 1)$.

Do (P) song song với giá của vector $\vec{u} = (1; 6; 2)$ và vuông góc với (α)

nên (P) có một vtpt $\vec{n} = [\vec{n}_\alpha, \vec{u}] = (2; -1; 2)$.

Suy ra phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $2x - y + 2z + d = 0$.

Mặt khác mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và bán kính $R = 4$.

Do (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I, (P)) = \frac{|2 + 3 + 4 + d|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ d = -21 \end{cases}$.

Vậy có hai mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$2x - y + 2z + 3 = 0 \text{ và } 2x - y + 2z - 21 = 0.$$

Chọn ý **D**.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng chứa $M(1; 3; -2)$ và cắt các tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C sao cho $\frac{OA}{1} = \frac{OB}{2} = \frac{OC}{4}$.

- A.** $x + 2y + 4z + 1 = 0$ **B.** $4x + 2y + z - 8 = 0$ **C.** $4x + 2y + z + 1 = 0$ **D.** $2x - y - z - 1 = 0$

Lời giải

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm.

Vì (α) cắt các tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C nên ta có $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ ($a, b, c > 0$).

Phương trình (α) theo đoạn chắn là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì $M \in (\alpha)$ nên ta có $\frac{1}{a} + \frac{3}{b} - \frac{2}{c} = 1$ (1).

Ta có $\frac{OA}{1} = \frac{OB}{2} = \frac{OC}{4} \Leftrightarrow \frac{|a|}{1} = \frac{|b|}{2} = \frac{|c|}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{4}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = 8 \end{cases}$.

Vậy $(\alpha): \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1 \Leftrightarrow 4x + 2y + z - 8 = 0$.

Chọn ý **B**.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường

thẳng $d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ là?

- A.** $(P): 2y - 2z + 1 = 0$ **B.** $(P): 2x - 2z + 1 = 0$
C. $(P): 2x - 2y + 1 = 0$ **D.** $(P): 2y - 2z - 1 = 0$

Lời giải

Ta có $d_1 : \begin{cases} \text{qua } A(2;0;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_1} = (-1;1;1) \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} \text{qua } B(0;1;2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_2} = (2;-1;-1) \end{cases}$.

Mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ nên:

- (P) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (0; 1; -1)$ suy ra $(P): y - z + D = 0$
- Và $d(A, (P)) = d(B, (P)) \Leftrightarrow |D| = |D - 1| \Leftrightarrow D = \frac{1}{2}$

$$\text{Vây } (P): 2y - 2z + 1 = 0.$$

Chọn ý **A**.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; 2; 1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox , Oy , Oz lần lượt tại các điểm A , B , C không trùng với gốc tọa độ sao cho M là trọng tâm tam giác ABC . Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) .

- A.** $3x + 2y + z + 14 = 0$ **B.** $2x + y + 3z + 9 = 0$ **C.** $3x + 2y + z - 14 = 0$ **D.** $2x + y + z - 9 = 0$

Lời giải

Gọi $A(a; 0; 0); B(0; b; 0); C(0; 0; c)$

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 (a.b.c \neq 0)$

$$\text{Vĩ } (P) \text{ qua } M \text{ nên } \frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1 \quad (1)$$

Ta có: $\overrightarrow{MA} = (a-3; -2; -1)$; $\overrightarrow{MB} = (-3; b-2; -1)$; $\overrightarrow{BC} = (0; -b; c)$; $\overrightarrow{AC} = (-a; 0; c)$

Vì M là trực tâm của tam giác ABC nên:
$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = c \\ 3a = c \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = \frac{14}{3}; b = \frac{14}{2}; c = 14$. Khi đó phương trình (P): $3x + 2y + z - 14 = 0$

Vậy mặt phẳng song song với (P) là: $3x + 2y + z + 14 = 0$.

Chọn ý **A**.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$. Phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục hoành và tiếp xúc với mặt cầu (S) là:

- A.** $4y + 3z = 0$ **B.** $4y + 3z + 1 = 0$ **C.** $4y - 3z + 1 = 0$ **D.** $4y - 3z = 0$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$ và bán kính $R = 1$.

Gọi vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}(A; B; C)$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Ta có $\vec{n} \perp \vec{i} \Leftrightarrow A = 0$. Mặt khác (Q) chứa trục hoành nên (Q) có phương trình dạng $(Q): By + Cz = 0$. Do đó loại các đáp án B, C.

Lại có (Q) tiếp xúc mặt cầu (S) nên $d(I, (Q)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|2B - C|}{\sqrt{B^2 + C^2}} = 1 \Leftrightarrow (2B - C)^2 = B^2 + C^2$

$$\Leftrightarrow 3B^2 - 4BC = 0 \Leftrightarrow B(3B - 4C) = 0 \Leftrightarrow B = 0 \vee 3B - 4C = 0.$$

Với $3B - 4C = 0$, chọn $B = 4 \Rightarrow C = 3$. Vậy $(Q): 4y + 3z = 0$. Do đó A đúng.

Chọn ý A.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và cắt các trục Ox , Oy , Oz lần lượt tại các điểm A , B , C (khác O). Viết phương trình mặt phẳng (P) sao cho M là trực tâm của tam giác ABC .

- A.** $6x + 3y - 2z - 6 = 0$ **B.** $x + 2y + 3z - 14 = 0$ **C.** $x + 2y + 3z - 11 = 0$ **D.** $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 3$

Lời giải

Gọi $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A , B , C là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì $M(1; 2; 3) \in (P)$ nên ta có: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$.

Điểm M là trực tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} AM \perp BC \\ BM \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (1-a; 2; 3)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -b; c)$, $\overrightarrow{BM} = (1; 2-b; 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-a; 0; c)$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} -2b + 3c = 0 \\ -a + 3c = 0 \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2}c \\ a = 3c \\ \frac{1}{3c} + \frac{2}{\frac{3}{2}c} + \frac{3}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = 7 \\ c = \frac{14}{3} \end{cases}.$$

Phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{14} + \frac{y}{7} + \frac{3z}{14} = 1 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Chọn ý B.

Câu 13. Trong không gian Oxyz, cho điểm $H(2; 1; 1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua H và cắt các trục tọa độ tại A, B, C sao cho H là trọng tâm tam giác ABC . Phương trình mặt phẳng (P) là

- A.** $2x + y + z - 6 = 0$ **B.** $x + 2y + z - 6 = 0$ **C.** $x + 2y + 2z - 6 = 0$ **D.** $2x + y + z + 6 = 0$

Lời giải

Cách 1.

Giả sử $A(a; 0; 0) \in Ox, B(0; b; 0) \in Oy, C(0; 0; c) \in Oz$.

Khi đó mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Ta có $\overrightarrow{AH} = (2-a; 1; 1), \overrightarrow{BH} = (2; 1-b; 1), \overrightarrow{BC} = (0; -b; c), \overrightarrow{AC} = (-a; 0; c)$.

$$\text{Do } H \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên: } \begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ -b + c = 0 \\ -2a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 6 \end{cases}$$

Vậy phương trình của mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 2x + y + z - 6 = 0$.

Cách 2.

Vì tứ diện $OABC$ có các cạnh đôi một vuông tại O và H là trọng tâm tam giác ABC nên $OH \perp (ABC)$ (tham khảo bài tập 4, trang 105 SGK HH11).

Suy ra $\vec{n}_{(ABC)} = \overrightarrow{OH} = (2; 1; 1)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $2x + y + z + D = 0$.

$$H \in (P) \text{ nên: } 2 \cdot 2 + 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -6.$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $2x + y + z - 6 = 0$.

Chọn ý **A**.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$, mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α) , (P) song song với giá của vectơ $\vec{v} = (1; 6; 2)$ và (P) tiếp xúc với (S) . Lập phương trình mặt phẳng (P) .

- A.** $2x - y + 2z - 2 = 0$ và $x - 2y + z - 21 = 0$
B. $x - 2y + 2z + 3 = 0$ và $x - 2y + z - 21 = 0$
C. $2x - y + 2z + 3 = 0$ và $2x - y + 2z - 21 = 0$.
D. $2x - y + 2z + 5 = 0$ và $2x - y + 2z - 2 = 0$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và bán kính $R = 4$. Véc tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_\alpha = (1; 4; 1)$.

Suy ra VTPT của (P) là $\vec{n}_P = [\vec{n}_\alpha, \vec{v}] = (2; -1; 2)$.

Do đó (P) có dạng: $2x - y + 2z + d = 0$.

Mặt khác (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I, (P)) = 4$

$$\text{Hay } \frac{|2+3+4+d|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=4 \Rightarrow \begin{cases} d=-21 \\ d=3 \end{cases}.$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) : $2x-y+2z+3=0$ và $2x-y+2z-21=0$.

Chọn ý **C**.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(3;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua M và cắt các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ lần lượt tại các điểm A , B , C sao cho M là trực tâm của tam giác ABC .

A. $3x+y+2z-14=0$ **B.** $3x+2y+z-14=0$ **C.** $\frac{x}{9}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$ **D.** $\frac{x}{12}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$

Lời giải

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c \neq 0$.

Phương trình mặt phẳng (P) qua A , B , C có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Vì (P) đi qua $M(3;2;1)$ nên ta có: $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1$ (1).

$$\overrightarrow{MA}=(a-3;-2;-1), \overrightarrow{BC}=(0;-b;c), \overrightarrow{MC}=(-3;-2;c-1), \overrightarrow{AB}=(-a;b;0).$$

$$M \text{ là trực tâm của tam giác } ABC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b-c=0 \\ 3a-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2b \\ a=\frac{2b}{3} \end{cases} \quad (2).$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta được: } \frac{9}{2b}+\frac{2}{b}+\frac{1}{2b}=1 \Leftrightarrow \frac{7}{b}=1 \Leftrightarrow b=7 \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{14}{3} \\ c=14 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy phương trình mặt phẳng (P): } \frac{3x}{14}+\frac{y}{7}+\frac{z}{14}=1 \Leftrightarrow 3x+2y+z-14=0$$

Chọn ý **B**.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$, cắt các tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C sao cho $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4}$.

A. $2x-y-z-1=0$ **B.** $x+2y+4z+1=0$ **C.** $4x+2y+z+1=0$ **D.** $4x+2y+z-8=0$

Lời giải

Phương trình mặt phẳng cắt tia Ox tại $A(a;0;0)$, cắt tia Oy tại $B(0;b;0)$, cắt tia Oz tại $C(0;0;c)$ có dạng là $(P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (với $a>0, b>0, c>0$).

$$\text{Theo đề: } \frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{4} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{b}{2} \\ c=2b \end{cases}.$$

$$\text{Vì } M(1;3;-2) \text{ nằm trên mặt phẳng (P) nên ta có: } \frac{1}{\frac{b}{2}}+\frac{3}{b}+\frac{-2}{2b}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{b}=1 \Leftrightarrow b=4.$$

Khi đó $a=2, c=8$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1 \Leftrightarrow 4x + 2y + z - 8 = 0$.

Chọn ý **D**.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(-1; -2; 0)$, $B(0; -4; 0)$, $C(0; 0; -3)$. Phương trình mặt phẳng (P) nào dưới đây đi qua A , gốc tọa độ O và cách đều hai điểm B và C ?

A. $(P): 2x - y + 3z = 0$

B. $(P): 6x - 3y + 5z = 0$

C. $(P): 2x - y - 3z = 0$

D. $(P): -6x + 3y + 4z = 0$

Lời giải

Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AO} = (1; 2; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0; 4; -3)$.

Trường hợp 1. B và C nằm cùng phía với (P) , khi đó $\overrightarrow{BC}$ có giá song song với (P) . Phương trình mặt phẳng (P) qua O có vtpt $\vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AO}] = (-6; 3; 4)$ nên $(P): -6x + 3y + 4z = 0$.

Trường hợp 2. B và C nằm khác phía với (P) , khi đó trung điểm $I\left(0; -2; \frac{-3}{2}\right)$ của BC thuộc (P) . Có $\overrightarrow{IO} = \left(0; 2; \frac{3}{2}\right)$. Phương trình mặt phẳng (P) qua O có vtpt $\vec{n} = [\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{AO}] = \left(3; -\frac{3}{2}; 2\right)$ nên $(P): 6x - 3y + 4z = 0$.

Cách 2: Gọi $\vec{n} = (a; b; c) \neq \vec{0}$ là vtpt của mặt phẳng (P) .

$\overrightarrow{OA} = (-1; -2; 0)$.

Ta có: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = -a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = -2b \Rightarrow \vec{n} = (-2b; b; c)$.

Phương trình mặt phẳng (P) qua O có dạng: $-2bx + by + cz = 0$

Vì $d(B; (P)) = d(C; (P))$ nên $|3c| = |4b| \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{4}{3}b \\ c = -\frac{4}{3}b \end{cases}$.

Suy ra có hai mặt phẳng thỏa mãn ycbt là $(P): -6x + 3y + 4z = 0$ và $(P): -6x + 3y - 4z = 0$

Chọn ý **D**.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(0; 1; 2)$, $B(2; -2; 0)$, $C(-2; 0; 1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A , trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $4x - 2y - z + 4 = 0$ **B.** $4x - 2y + z + 4 = 0$ **C.** $4x + 2y + z - 4 = 0$ **D.** $4x + 2y - z + 4 = 0$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -3; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; -1)$ nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 6; -8)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x + 6y - 8z + 10 = 0$.

Phương trình mặt phẳng qua B và vuông góc với AC là $2x + y + z - 2 = 0$.

Phương trình mặt phẳng qua C và vuông góc với AB là $2x - 3y - 2z + 6 = 0$.

Giao điểm của ba mặt phẳng trên là trực tâm H của tam giác ABC nên $H\left(-\frac{22}{101}; \frac{70}{101}; \frac{176}{101}\right)$.

Mặt phẳng (P) đi qua A, H nên $\vec{n}_p \perp \overrightarrow{AH} = \left(-\frac{22}{101}; -\frac{31}{101}; -\frac{26}{101}\right) = -\frac{1}{101}(22; 31; 26)$.

Mặt phẳng $(P) \perp (ABC)$ nên $\vec{n}_p \perp \vec{n}_{(ABC)} = (1; 6; -8)$.

Vậy $[\vec{n}_{(ABC)}; \vec{u}_{AH}] = (404; -202; -101)$ là một vector pháp tuyến của (P) .

Chọn $\vec{n}_p = (4; -2; -1)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là $4x - 2y - z + 4 = 0$.

Chọn ý **A**.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(4; 3; 4)$ song song với đường thẳng Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) là:

A. $x - 2y + 2z - 1 = 0$ **B.** $2x + 2y + z - 18 = 0$ **C.** $2x - y - 2z - 10 = 0$ **D.** $2x + y + 2z - 19 = 0$

Lời giải

Gọi vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (a; b; c)$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Phương trình mặt phẳng $(P): a(x-4) + b(y-3) + c(z-4) = 0$.

Do $(P) // \Delta$ nên $-3a + 2b + 2c = 0 \Rightarrow 3a = 2(b+c)$

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) nên $\frac{|-3a - b - c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 3 \Leftrightarrow 9(a^2 + b^2 + c^2) = (3a + b + c)^2 (*)$.

Thay $3a = 2(b+c)$ vào $(*)$ ta được:

$$4(b+c)^2 + 9(b^2 + c^2) = 9(b+c)^2 \Leftrightarrow 2b^2 - 5bc + 2c^2 = 0 \Leftrightarrow (2b-c)(b-2c) = 0$$

Trường hợp 1. $2b - c = 0$, chọn $b = 1$; $c = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow (P): 2x + y + 2z - 19 = 0$ (thỏa).

Trường hợp 2. $b - 2c = 0$, chọn $c = 1$; $b = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow (P): 2x + 2y + z - 18 = 0$ (L vì $\Delta \subset (P)$).

Chọn ý **D**

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{10} = \frac{y+2}{8} = \frac{z-1}{1}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$. Mặt phẳng chứa d , tiếp xúc với (S) và cắt trục Oz tại điểm có cao độ lớn hơn 3 có phương trình là

- A.** $2x - 3y + 4z - 10 = 0$
B. $2x - 3y + 4z - 12 = 0$
C. $3x - 4y + 2z - 12 = 0$
D. $3x - 4y + 2z - 10 = 0$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 3; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{29}$.

$$d: \frac{x}{10} = \frac{y+2}{8} = \frac{z-1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-5y-10=0 \\ y-8z+10=0 \end{cases}.$$

Mặt phẳng (P) chứa d có dạng $m(4x-5y-10)+n(y-8z+10)=0$

$$\Leftrightarrow 4mx+(n-5m)y-8nz+10n-10m=0 \text{ với } m^2+n^2>0.$$

(P) tiếp xúc với (S) nên $d(I, (P))=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|-29m+29n|}{\sqrt{16m^2+(n-5m)^2+64n^2}}=\sqrt{29} \Leftrightarrow 12m^2+48mn+36n^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-n \\ m=-3n \end{cases}.$$

Trường hợp 1: $m=-n$, phương trình mặt phẳng $(P): 2x-3y+4z-10=0$.

Khi đó giao điểm của (P) và Ox có tọa độ là $\left(0;0;\frac{5}{2}\right)$ (nhận)

Trường hợp 2: $m=-3n$, phương trình mặt phẳng $(P): x-2y+6z-10=0$.

Khi đó giao điểm của (P) và Ox có tọa độ là $\left(0;0;\frac{5}{3}\right)$ (loại).

Chọn ý A.

Câu 21. Trong không gian Oxyz, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với d . Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $x+2y+5z-5=0$ B. $x+2y+5z-4=0$ C. $x+2y-z-4=0$ D. $2x-y-3=0$

Lời giải

Ta có $\vec{u}_d = (1; 2; -1)$, $\begin{cases} A \in Ox \Rightarrow A(a; 0; 0) \\ B \in Oy \Rightarrow B(0; b; 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{AB} = (-a; b; 0).$

Theo đề bài $AB \perp d \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow -a + 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b \Rightarrow \vec{AB} = (-2b; b; 0)$

$\Rightarrow \vec{u} = (-2; 1; 0)$ là một VTCP của AB .

Ta có $\begin{cases} \vec{u} = (-2; 1; 0) \\ \vec{u}_d = (1; 2; -1) \end{cases} \Rightarrow [\vec{u}; \vec{u}_d] = (-1; -2; -5) \Rightarrow \vec{n} = (1; 2; 5)$ là một VTPT của (P) .

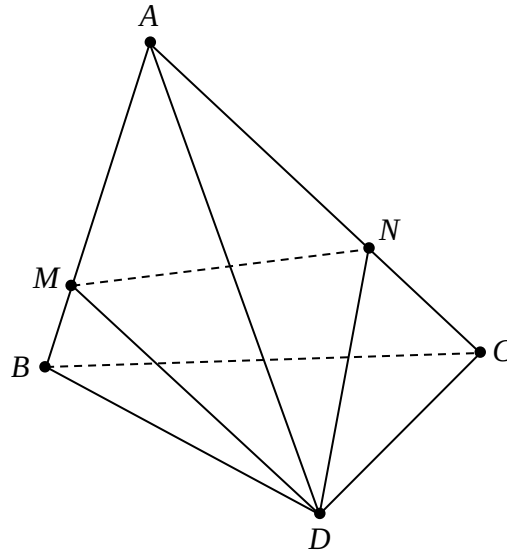
Kết hợp với (P) qua $M(2; 1; 0) \in d \Rightarrow (P): (x-2) + 2(y-1) + 5z = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 5z - 4 = 0$.

Chọn ý B.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tứ diện ABCD với $A(3; 5; -1), B(0; -1; 8), C(-1; -7; 3), D(0; 1; 2)$ và điểm $M(1; 1; 5)$. Biết mặt phẳng $(P): x + ay + bz + c = 0$ qua điểm D, M cắt cạnh AC và (P) chia khối tứ diện ABCD thành hai phần thể tích bằng nhau. Tính $S = a + b + c$

A. $S = \frac{1}{3}$ B. $S = -\frac{4}{3}$ C. $S = -\frac{1}{3}$ D. $S = \frac{4}{3}$

Lời giải



Theo giả thiết M thuộc cạnh AB thỏa mãn $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$

Giả sử (P) cắt cạnh AC tại N , ta có

$$V_{A.MDN} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} V_{ABCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{AN}{AC} V_{ABCD} = \frac{1}{2} V_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow N(0; -4; 2)$$

$$\text{Vì vậy } (P): \begin{cases} D(0; 1; 2) \\ M(1; 1; 5) \\ N(0; -4; 2) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = [\vec{DM}, \vec{DN}] = (12; -3; 1)$$

$$\text{Do đó } (P): 12x - 3y + z - 14 = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{12}z - \frac{7}{6} = 0$$

$$\text{Suy ra } S = a + b + c = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{7}{6} = -\frac{4}{3}$$

Chọn đáp án C

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 3)$. Mặt cầu (S) thay đổi qua A, B, C cắt ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm $M, N, P (M \neq A, N \neq B, P \neq C)$. Gọi H là trực tâm tam giác MNP . Tọa độ của H thỏa mãn phương trình nào trong các phương trình sau

A. $x - 2y - 3z = 0$ **B.** $x + 2y - 3z = 0$ **C.** $4x + y - 2z = 0$ **D.** $-4x + y - 2z = 0$

Lời giải

Phương trình ngoại tiếp tam giác ABC là giao của hai mặt phẳng trung trực các cạnh AB, AC có

$$\text{phương trình là } \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{2} + \frac{3}{4} \\ z = \frac{t}{3} + \frac{4}{3} \end{cases}$$

Do đó tâm mặt cầu (S) là điểm $I\left(t; \frac{t}{2} + \frac{3}{4}; \frac{t}{3} + \frac{4}{3}\right)$ thuộc trục ngoại tiếp tam giác ABC

Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz , ta có

$$D(t;0;0), E\left(0; \frac{t}{2} + \frac{3}{4}; 0\right), F\left(0; 0; \frac{t}{3} + \frac{4}{3}\right).$$

Mặt khác D, E, F lần lượt là trung điểm AM, BN, CP nên dễ có

$$M(2t-1;0;0), N\left(0; \frac{2t-1}{2}; 0\right), P\left(0; 0; \frac{2t-1}{3}\right)$$

Phương trình mặt phẳng (MNP) là $x+2y+3z-2t+1=0$.

Từ đó tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+2y+3z-2t+1=0. \\ \frac{y}{2}-\frac{z}{3}=0, x-\frac{z}{3}=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{t}{7}-\frac{1}{14}; \frac{2t}{7}-\frac{1}{7}; \frac{3t}{7}-\frac{3}{14}\right)$$

Thay tương ứng vào 4 đáp án suy ra chọn C.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0), B(1;b;0), C(1;0;c)$, với a, b, c là các số thực thay đổi sao cho $H(3;2;1)$ là trực tâm tam giác ABC . Mặt phẳng (P): $mx+ny+pz-11=0$ đi qua A, B, C . Tính $S=m+n+p$.

A. $S=5$

B. $S=6$

C. $S=-5$

D. $S=-6$

Lời giải

Tìm điểm $I(x; y; z)$ sao cho tứ diện $IABC$ là tứ diện vuông tại I . Khi đó $IH \perp (P)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \\ \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC} = 0 \\ \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)(x-1)+y(y-b)+z^2=0 \\ (x-a)(x-1)+y^2+z(z-c)=0 \\ (x-1)^2+y(y-b)+z(z-c)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Do đó $I(1;0;0), H(3;2;1) \Rightarrow \overrightarrow{n_p} = \overrightarrow{IH} = (2;2;1) \Rightarrow (P): 2x+2y+z-11=0$

Chọn đáp án A.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua điểm $M(1;2;1)$ và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ sao cho $\frac{1}{OA^2} + \frac{4}{OB^2} + \frac{9}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $a+b+c$.

A. 12

B. 14

C. $\frac{76}{3}$

D. $\frac{73}{3}$

Lời giải

Mặt phẳng có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Vì $M(1;2;1)$ thuộc mặt phẳng nên $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1$

Do đó $\frac{1}{OA^2} + \frac{4}{OB^2} + \frac{9}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2}$

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \left(\frac{1}{a} \cdot 1 + \frac{2}{b} \cdot 1 + \frac{1}{c} \cdot 1\right)^2 \leq \left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2}\right) \left(1^2 + 1^2 + 1^2\right)$$

Do đó $\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2} \geq \frac{1}{1+1+\frac{1}{9}} = \frac{9}{19}$

Dấu bằng đạt tại $\begin{cases} \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{2}{b} \cdot 1 = \frac{3}{c} \cdot \frac{1}{3} \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{19}{9}, b = \frac{38}{9}, c = 19 \Rightarrow a + b + c = \frac{76}{3}$

Chọn đáp án C.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $S(1; 4; 9)$. Mặt phẳng (P) qua điểm S và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA + OB + OC$ nhỏ nhất. Hỏi điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (P) ?

- A. $M(6; 2; -3)$ B. $N(2; 3; -6)$ C. $P(2; 3; 6)$ D. $Q(6; -3; 2)$

Lời giải

Giả sử $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$ vì các điểm này thuộc tia Ox, Oy, Oz

Phương trình mặt phẳng là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Vì $S \in (P)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = 1$

Khi đó $OA + OB + OC = a + b + c$ và sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} \geq \frac{(1+2+3)^2}{a+b+c} \Rightarrow a+b+c \geq 36$$

Dấu bằng đạt tại $\begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{4}{b} = \frac{9}{c} \\ \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 6, b = 12, c = 18$

Khi đó $\frac{x}{6} + \frac{y}{12} + \frac{z}{18} = 1$

Chọn đáp án A.

Câu 27. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A\left(\frac{1}{m}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{1}{m+1}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{1}{m+2}\right)$ với m là số thực dương thay đổi. Biết mặt phẳng (ABC) luôn chứa một đường thẳng cố định khi m thay đổi. Viết phương trình đường thẳng đó.

- A. $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 1-2t \\ z = t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1-t \\ y = -1+2t \\ z = -t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = -1+t \\ z = t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -t \\ y = 1-t \\ z = -1+2t \end{cases}$

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{\frac{1}{m}} + \frac{y}{\frac{1}{m+1}} + \frac{z}{\frac{1}{m+2}} = 1$

$$\Leftrightarrow mx + (m+1)y + (m+2)z = 1 \Leftrightarrow m(x+y+z) + (y+2z-1) = 0$$

Gọi điểm $N(x; y; z)$ cố định thuộc mặt phẳng (ABC) , có

$$m(x+y+z)+(y+2z-1)=0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+t \\ y=1-2t \\ z=t \end{cases}$$

Chọn đáp án A

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và hai đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x=2-2t \\ y=1 \\ z=-2+t \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x=5+3s \\ y=1 \\ z=3-s \end{cases}. \text{ Gọi } B, C \text{ lần lượt là các điểm di động trên } d_1, d_2. \text{ Tìm giá trị nhỏ}$$

nhất của biểu thức $P = AB + AC + BC$

$$\text{A. } 2\sqrt{29} \quad \text{B. } 2\sqrt{985} \quad \text{C. } \sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{29} \quad \text{D. } \sqrt{5} + \sqrt{10}$$

Lời giải

Gọi A_1, A_2 lần lượt là điểm đối xứng của A qua d_1, d_2 , ta có $BA = BA_1, CA = CA_1$ do đó

$$P = A_1B + A_1C + BC \geq A_1A_2 = 2\sqrt{29}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow B = d_1 \cap A_1A_2, C = d_2 \cap A_1A_2$.

Trong đó $A_1(-1;1;-3), A_2(3;1;7), A_1A_2 = 2\sqrt{29}$.

Chọn đáp án A

Kiểm tra dấu bằng, dễ có $d_1 \cap A_1A_2 = B\left(-\frac{1}{6}; 1; -\frac{1}{12}\right), d_2 \cap A_1A_2 = C\left(\frac{31}{17}; 1; \frac{69}{17}\right)$.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0), B(0;3;0), C(0;0;6)$. Các điểm M, N, P lần lượt trên các tia OA, OB, OC sao cho

$$OM = \frac{1}{m}OA, ON = \frac{1}{2m+1}OB, OP = \frac{1}{3m+2}OC$$

Với m là một số thực dương thay đổi. Biết rằng khi m thay đổi, mặt phẳng (MNP) luôn chứa một đường thẳng d cố định. Tính khoảng cách h từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d .

$$\text{A. } \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{B. } \frac{3\sqrt{646}}{19} \quad \text{C. } \frac{3\sqrt{646}}{34} \quad \text{D. } \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } M\left(\frac{2}{m}; 0; 0\right), N\left(0; \frac{3}{2m+1}; 0\right), P\left(0; 0; \frac{6}{3m+2}\right).$$

$$\text{Suy ra } (MNP): \frac{mx}{2} + \frac{(2m+1)y}{3} + \frac{(3m+2)z}{6} = 1$$

$$\Leftrightarrow 6mx + 2(2m+1)y + (3m+2)z - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(3x + 4y + 3z) + (2y + 2z - 6) = 0$$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} 3x + 4y + 3z = 0 \\ 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow d: \begin{cases} x = -4 + \frac{1}{3}t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow h = 3\sqrt{\frac{34}{19}}.$$

Chọn đáp án B.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 3 = 0$ và hai điểm $A(1; 2; 3), B(3; 4; 5)$. Gọi M là một điểm di động trên (P) . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{MA + 2\sqrt{3}}{MB}$

- A. $3\sqrt{6 + \sqrt{78}}$ B. $3\sqrt{3 + \sqrt{78}}$ C. $3\sqrt{54 + 6\sqrt{78}}$ D. $3\sqrt{3}$

Lời giải

Theo giả thiết và hệ thức lượng cho tam giác ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{MA + 2\sqrt{3}}{MB} = \frac{MA + AB}{MB} = \frac{2R \sin B + 2R \sin M}{2R \sin A} \\ &= \frac{\sin B + \sin M}{\sin A} = \frac{2 \sin \frac{B+M}{2} \cos \frac{B-M}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{B-M}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \leq \frac{1}{\sin \left(\frac{AB, (P)}{2} \right)} = \sqrt{54 + 6\sqrt{78}} \end{aligned}$$

Trong đó $\sin \left(AB, (P) \right) = \frac{|1.2 - 2.2 + 2.2|}{3.2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \sin \left(\frac{AB, (P)}{2} \right) = \frac{\sqrt{18 - 2\sqrt{78}}}{6}$

Chọn đáp án C.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là (P) :

$x + y + 3z - 1 = 0$ và $(Q): 3x - y + z - 2 = 0$. Mặt phẳng (R) chứa tất cả các điểm cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình tổng quát là:

- A. $4x + 4y - 3 = 0$ B. $x - 2y - 2z = 0$ C. $3x + y - z - 1 = 0$ D. $2x - 2y - 2z - 1 = 0$

Lời giải

Gọi tọa độ điểm M nằm trên (R) là: $M(x_0; y_0; z_0)$. Khi đó ta có: $d(M; (P)) = d(M; (Q))$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{|x_0 + y_0 + 3z_0 - 1|}{\sqrt{1+1+9}} &= \frac{|3x_0 - y_0 + z_0 - 2|}{\sqrt{9+1+1}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 + 3z_0 - 1 = 3x_0 - y_0 + z_0 - 2 \\ x_0 + y_0 + 3z_0 - 1 = -3x_0 + y_0 - z_0 + 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 2y_0 - 2z_0 - 1 = 0 \\ 4x_0 + 4y_0 - 3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vì loại một mặt phẳng song song với trục Oz , nên ta suy ra mặt phẳng (R) là: $2x - 2y - 2z - 1 = 0$

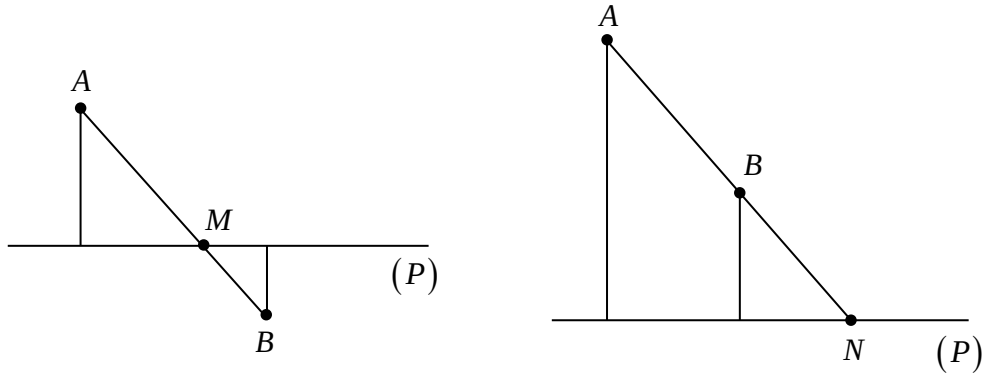
Vậy ta chọn đáp án D.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;3;2), B(-2;1;4)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-2}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ và khoảng cách từ A đến (P) gấp ba lần khoảng cách từ B đến (P) . Số mặt phẳng (P) thỏa mãn là:

- A. 2 B. vô số C. 0 D. 1

Lời giải

Để khoảng cách từ A đến (P) gấp ba lần khoảng cách từ B đến (P) thì ta có hai trường hợp sau



Mặt phẳng (P) chứa Δ và đi qua điểm M thỏa mãn: $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Hoặc mặt phẳng (P) chứa Δ và đi qua điểm N thỏa mãn: $\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NB} = \vec{0}$.

Nhận thấy rất nhanh $\overrightarrow{AB} = (-3; -2; 2) \Rightarrow AB // \Delta$, tức là mặt phẳng chứa Δ và điểm M trùng với mặt phẳng chứa Δ và điểm N . Tức là tồn tại duy nhất mặt phẳng (P) thỏa mãn.

Chọn ý D.

Câu 33. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - 6 = 0$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua d và tạo với (P) một góc nhỏ nhất. Khi đó dạng phương trình tổng quát của (α) có dạng: $ax + by + z + d = 0$. Khi đó giá trị của $(a + b + d)$ bằng:

- A. 6 B. -7 C. 5 D. -3

Lời giải

VTPT của mặt phẳng (α) là: $\overrightarrow{n_{(\alpha)}} = (a; b; 1)$. Từ giả thiết đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α) suy ra: $\overrightarrow{n_{(\alpha)}} = 0 \Leftrightarrow (1; 2; -2) \cdot (a; b; 1) = a + 2b - 2 = 0$ (1)

Góc tạo bởi mặt phẳng (α) và mặt phẳng (P) nhỏ nhất khi cosin góc đó lớn nhất

$$\Leftrightarrow \left| \cos(\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{n_{\alpha}}) \right| = \left| \frac{\overrightarrow{n_p} \cdot \overrightarrow{n_{\alpha}}}{|\overrightarrow{n_p}| \cdot |\overrightarrow{n_{\alpha}}|} \right| = \left| \frac{1 \cdot a + 1 \cdot b - 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \right| = \frac{|a + b - 1|}{\sqrt{3(a^2 + b^2 + 1)}} \text{ đạt giá trị min.}$$

Từ (1) suy ra: $a = 2 - 2b$ thế vào biểu thức cosin ta được:

$$\left| \cos(\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{n_{\alpha}}) \right| = \frac{|2 - 2b + b - 1|}{\sqrt{3((2 - 2b)^2 + b^2 + 1)}} = \frac{|1 - b|}{\sqrt{3(5b^2 - 8b + 5)}} = \sqrt{\frac{b^2 - 2b + 1}{3(5b^2 - 8b + 5)}}$$

Khảo sát hàm số trên ta nhận được giá trị lớn nhất của nó là $\frac{\sqrt{6}}{9}$ khi $b = -1 \Rightarrow a = 2 - 2b = 4$

Suy ra mặt phẳng $(\alpha): 4x - y + z - d = 0$

Lấy $M(2;1;-1)$, suy ra M cũng nằm trên (α) , ta có: $4.2 - 1 + (-1) + d = 0 \Rightarrow d = -6$

Suy ra phương trình mặt phẳng $(\alpha): 4x - y + z - 6 = 0 \Rightarrow (a + b + d) = (4 - 1 - 6) = -3$

Chọn ý **D**.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(-1;0;2)$, $C(3;0;0)$. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tọa độ là $(a;b;c)$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R_{\Delta ABC}$. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c + R_{\Delta ABC}$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$

B. $\left(2; \frac{7}{2}\right)$

C. $\left(5; \frac{13}{2}\right)$

D. $\left(\frac{7}{2}; 5\right)$

Lời giải

Cặp VTCP của mặt phẳng (ABC) là: $\overrightarrow{AB} = (-2; -2; 1)$ và $\overrightarrow{AC} = (2; -2; -1)$. Suy ra VTPT của mặt phẳng (ABC) là: $(ABC) \cdot \overrightarrow{n_{(ABC)}} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (4; 0; 8) = 4(1; 0; 2)$.

Suy ra phương trình tổng quát của mặt phẳng $(ABC): x + 2z - 3 = 0$.

Gọi tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$K(a;b;c) \Rightarrow \begin{cases} K \in (ABC) \\ KA = KB \\ KA = KC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c - 3 = 0 \\ \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (b-0)^2 + (c-0)^2} \\ \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (b-0)^2 + (c-0)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = 3 \\ 4a + 4b - 2c = 1 \\ -4a + 4b + 2c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{4} \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow K\left(1; -\frac{1}{4}; 1\right)$$

Suy ra bán kính đường tròn ngoại ΔABC là: $R_{\Delta ABC} = KA = \sqrt{(1-1)^2 + \left(-\frac{1}{4}-2\right)^2 + (1-1)^2} = \frac{9}{4}$

Suy ra: $T = a + b + c + R_{\Delta ABC} = 1 - \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} = 4$.

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, mặt phẳng $(P): mx + (2m-1)y - m^2z + 3 = 0$. Điểm cố định mà mặt phẳng (P) đi qua với mọi tham số thực m là $A(a;b;c)$. Giá trị của biểu thức $T = (a + b + c)$ bằng:

A. 1

B. -3

C. 2

D. 0

Lời giải

Ta biến đổi: $(P): -m^2z + m(x + 2y) + (3 - y) = 0$ với $\forall m \in \mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ 3 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-6; 3; 0) = (a; b; c) \Rightarrow (a + b + c) = -3.$$

Chọn ý **B**.

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, mặt phẳng $(P): (m-1)x + (2m-1)y + mz - 2 = 0$ đi qua một đường thẳng d cố định. Biết rằng VTCP của đường thẳng d có dạng $\vec{u}_d = (a; 2; b)$. Giá trị $(a+b)$ bằng:

- A. 0 B. -4 C. -2 D. 6

Lời giải

Ta biến đổi: $(P): m(x+2y+z) + (-x-y+2) = 0$ với $\forall m \in R$

Suy ra: $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -x-y-2=0 \end{cases}$. Đây là phương trình tổng quát của đường thẳng cố định d .

Dễ dàng suy ra VTCP của đường thẳng d là: $\vec{u} = (-1; 1; -1) \Rightarrow$ Chọn VTCP $(-2; 2; -2) = (a; 2; b)$.

Suy ra: $a+b = -4$.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm $A(2;1;1)$, $B(2;0;3)$, $C(0;1;3)$, $D(0;2;0)$ và mặt phẳng $(P): ax+by+2z+d=0$. Biết rằng (P) đi qua ba điểm B, C, D cùng phía so với (P) . Khi tổng khoảng cách từ B, C, D đến (P) lớn nhất thì giá trị biểu thức $(a+b+2d)$ bằng:

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

Lời giải

Điểm A nằm trên (P) suy ra: $2a+b+2+d=0$ (1)

Ba điểm B, C, D cùng phía so với (P) nên các biểu thức: $(2a+6+d); (b+6+d); (2b+d)$ cùng dấu với nhau. Khi đó $|2a+6+d| + |b+6+d| + |2b+d| = |2a+3b+3d+12|$

Tổng khoảng cách từ ba điểm B, C, D đến mặt phẳng (P) là:

$$\begin{aligned} T &= d(B; (P)) + d(C; (P)) + d(D; (P)) \\ &= \frac{|2a+6+d|}{\sqrt{a^2+b^2+4}} + \frac{|b+6+d|}{\sqrt{a^2+b^2+4}} + \frac{|2b+d|}{\sqrt{a^2+b^2+4}} = \frac{|2a+3b+3d+12|}{\sqrt{a^2+b^2+4}} \end{aligned}$$

Từ (1) suy ra: $d = -2a - b - 2$. Thay vào biểu thức T ta được: $T = \frac{4a-6}{\sqrt{a^2+b^2+4}}$

Ta có: $T = \frac{|4a-6|}{\sqrt{a^2+b^2+4}} \leq \frac{|4a-6|}{\sqrt{a^2+4}} = 2\sqrt{\frac{(2a-3)^2}{a^2+4}} = 2\sqrt{f(a)}; f(a) = \frac{(2a-3)^2}{a^2+4}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $b=0$

Khảo sát hàm số $f(a) = \frac{(2a-3)^2}{a^2+4}$; thấy rằng $\max f(a) = \frac{25}{4}$ khi $a = -\frac{8}{3}$

Suy ra: $T \leq 2\sqrt{f(a)} \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{25}{4}} = 5$. $T_{\max} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=-\frac{8}{3} \end{cases} \rightarrow d = \frac{10}{3}$

Suy ra: $(a+b+2d) = 4$. Vậy ta chọn đáp án A.

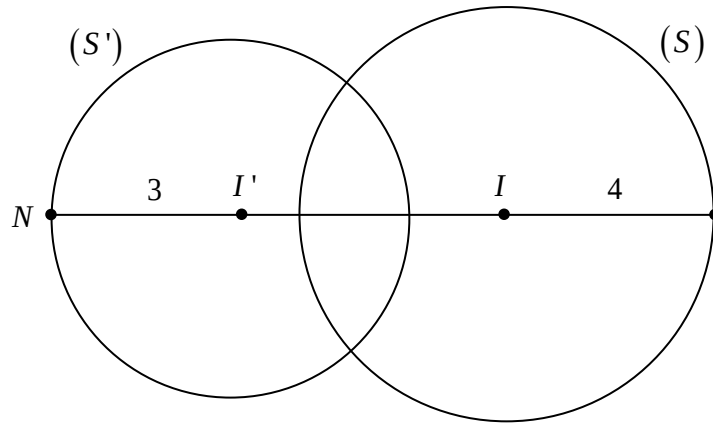
Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S): x^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 16$ và $(S'): (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ nằm trên mặt cầu (S) và điểm $N(m;n;p)$ nằm trên mặt cầu (S') sao cho khoảng cách MN là lớn nhất. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c + m + n + p$ tương ứng bằng:

- A. $\frac{38}{5}$ B. $\frac{18}{5}$ C. $\frac{26}{3}$ D. $-\frac{23}{3}$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;3;-2)$ và bán kính $R = 4$. Mặt cầu (S') có tâm $I'(4;3;1)$ và $R' = 3$

Suy ra khoảng cách hai tâm là $II' = 5$ và nhận thấy: $|R - R'| < II' < R + R' \Rightarrow$ hai mặt cắt nhau



Ta có: $MI = 4; MI' = 9; NI' = 3; NI = 8$

Mà $\overrightarrow{MI'} = \frac{9}{4} \overrightarrow{MI} \Rightarrow M\left(-\frac{16}{5}; 3; -\frac{22}{5}\right) = (a;b;c)$; từ $\overrightarrow{NI'} = \frac{3}{8} \overrightarrow{NI} \Rightarrow N\left(\frac{32}{5}; 3; \frac{14}{5}\right) = (m;n;p)$

Suy ra: $T = a + b + c + m + n + p = \frac{38}{5}$.

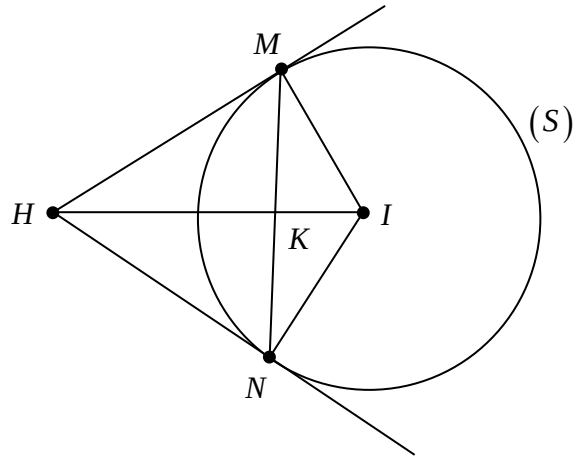
Chọn ý A.

Câu 40. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{2}$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng chứa đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S) lần lượt tại M và N. Độ dài dây cung MN có giá trị bằng:

- A. 4 B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 2 D. 1

Lời giải

Nếu gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm $I(2;0;1)$ lên đường thẳng d , thì ta có hình vẽ minh họa hai mặt phẳng (P) và (Q) đi qua d , tiếp xúc với mặt cầu (S) như sau:



Phương trình tham số đường thẳng d:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 + 2t \end{cases}; \text{ VTCP của d: } \vec{u}_d = (2; -1; 2)$$

Gọi $H(1 + 2t; -2; 2 + 2t)$. Suy ra: $\vec{IH} = (2t - 1; -t; 2t + 1)$

Có $\vec{IH} \perp \vec{u}_{(d)} \Leftrightarrow \vec{IH} \cdot \vec{u}_{(d)} = 0 \Leftrightarrow 2(2t - 1) - 1(-1) + 2(2t + 1) = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow H = (1; 0; 2)$

Độ dài đoạn $IH = \sqrt{(2-1)^2 + 0^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$

Áp dụng định lí *Pythagore* suy ra: $HM = HN = \sqrt{IH^2 - IM^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1} = 1$

Suy ra: $MN = 2MK = 2 \cdot \frac{HM \cdot IM}{IH} = 2 \cdot \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Chọn ý C.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x - 2y + z - 6 = 0$ và mặt cầu (S): $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 24$. Gọi d là đường thẳng song song với $\vec{u} = (1; 2; 1)$ và cắt (P) và (S) lần lượt tại M và N sao cho MN đạt giá trị lớn nhất. Nếu tọa độ điểm $N(a; b; c)$ thì giá trị biểu thức $(a - 2b + c)$ bằng:

A. 9

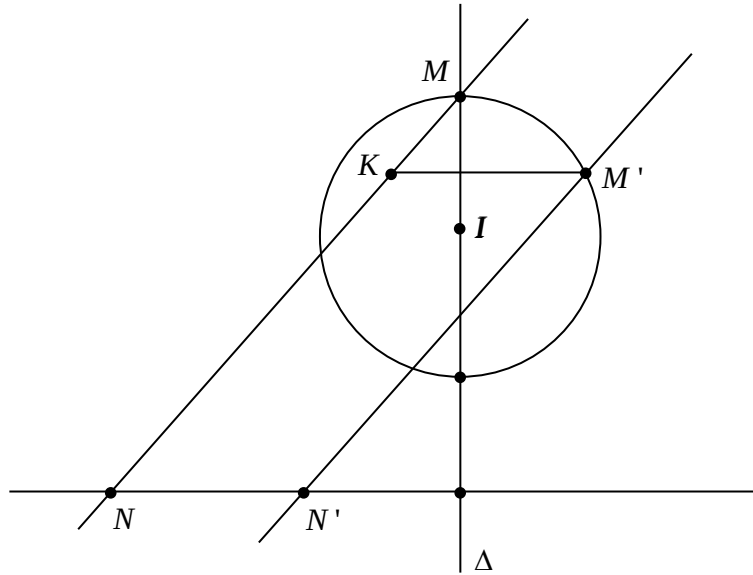
B. 8

C. 7

D. 6

Lời giải

Gọi đường thẳng Δ đi qua tâm $I(0; 1; 0)$ của mặt cầu (S) và vuông góc với mặt phẳng (P). Điểm M chính là giao điểm của Δ và mặt cầu (S). Qua M lập đường thẳng song song với vec tơ $\vec{u} = (1; 2; 1)$. Khi đó đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại điểm N. Ta đi chứng minh MN đạt giá trị lớn nhất. Giả sử có một điểm M' khác M (bao giờ cũng gần mặt phẳng (P) hơn M). Đường thẳng d đi qua M' song song với vec tơ $\vec{u} = (1; 2; 1)$ cắt mặt phẳng (P) tại N' như hình vẽ. Từ M' kẻ đường thẳng song song với mặt phẳng (P) cắt MN tại K. Khi đó KNN'M' là hình bình hành, quan sát trên hình thấy $M'N' = KN < MN$. Vậy qua cách dựng hình như trên thì MN đạt giá trị lớn nhất.



Đường thẳng Δ có VTCP là VTPT của (P) : $\vec{u}_\Delta = \vec{n}_{(P)} = (1; -2; 1)$

Suy ra phương trình tham số của Δ :
$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

Thay đường thẳng Δ vào mặt cầu (S) , ta được: $t^2 + 4t^2 + t^2 = 24 \rightarrow t = \pm 2$

Suy ra tọa độ hai giao điểm: $M_1(2; -3; 2)$ và $M_2(-2; 5; -2)$

Để xác định xem điểm nào xa (P) hơn ta đi tính khoảng cách của chúng tới (P) :

$$d(M_1, (P)) = \frac{|2 - 2 \cdot (-3) + 2 - 6|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{6}}; d(M_2, (P)) = \frac{|-2 - 2 \cdot (5) - 2 - 6|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{20}{\sqrt{6}}.$$

Vậy điểm xa (P) hơn là $M = M_2 = (-2; 5; -2)$

Để tìm điểm N ta lập phương trình đường thẳng d đi qua M nhận VTCP là: $\vec{u} = (1; 2; 1)$

Phương trình tham số của d:
$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

$N = d \cap (P)$. Thay d vào (P) ta được: $(-2 + t) - 2(5 + 2t) + (-2 + t) - 6 = 0 \Rightarrow t = -10$

Thay vào đường thẳng d suy ra: $N(-12; -15; -12)$. Suy ra: $(a - 2b + c) = 6$.

Chọn ý **D**.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d:
$$\begin{cases} x = t \\ y = m - mt \\ z = -m + (m-1)t \end{cases}$$
. Biết rằng

tồn tại một mặt cầu cố định (S) đi qua B(5;4;3) và tiếp xúc với đường thẳng d khi m thay đổi. Bán kính R của mặt cầu (S) bằng:

- A. 4 B. $2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{5}$ D. 2

Lời giải

Điểm cố định mà đường thẳng d đi qua với mọi m là A(1;0;-1) khi tham số $t = 1$

Mặt cầu cố định (S) tiếp xúc với d tại điểm cố định A. Gọi tâm mặt cầu (S) là $I(a;b;c)$ thì ta phải có: $IA \perp d$ với mọi m $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0$ với $\forall m$. Có: $\overrightarrow{IA} = (a-1;b;c+1); \overrightarrow{u_d} = (1;-m;m-1)$

Suy ra: $1(a-1) - m(b) + (m-1)(c+1) = 0$ với $\forall m \Leftrightarrow m(c-b+1) + (a-c-2) = 0$ với $\forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-c-2=0 \\ c-b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c+2 \\ b=c+1 \end{cases} \quad (1)$$

Bán kính mặt cầu: $R = IA = IB = \sqrt{(a-1)^2 + b^2 + (c+1)^2} = \sqrt{(a-5)^2 + (b-4)^2 + (c-3)^2} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $a=3; b=2; c=1 \Rightarrow R = IA = 2\sqrt{3}$.

Chọn ý B.

Câu 43. Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm A(2;0;1), B(3;1;2), C(1;3;-2), D(-2;0;3). Hai điểm P và Q di động nhưng luôn thỏa mãn $PA = QC, PB = QD, PC = QA, PD = QB$. Khi đó mặt phẳng trung trực của PQ đi qua điểm cố định N. Điểm N nằm trên đường thẳng tương ứng là:

- A. $x+2y-z-5=0$ B. $2x-3y+z+3=0$ C. $2x+y+z-4=0$ D. $3x-y+2z-12=0$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra: $PA^2 = QC^2, PB^2 = QD^2, PC^2 = QA^2, PD^2 = QB^2$. Suy ra:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = QC^2 + QD^2 + QA^2 + QB^2 \quad (1)$$

Đây là biểu thức tỉ cự

Gọi N là tâm tỉ cự của biểu thức (1), tức là: $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$. Từ đó suy tọa độ tâm tỉ cự

N được xác định nhanh $N = \frac{A+B+C+D}{4} = (1;1;1)$

Đã biết biểu thức tỉ cự rút gọn được như sau:

$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 &= (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA})^2 + (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NB})^2 + (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NC})^2 + (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{ND})^2 \\ \Leftrightarrow PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 &= 4PN^2 + NA^2 + NB^2 + NC^2 + ND^2 + 2\overrightarrow{PN}(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}) \\ \Leftrightarrow PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 &= 4PN^2 + NA^2 + NB^2 + NC^2 + ND^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Tương tự: $QA^2 + QB^2 + QC^2 + QD^2 = 4QN^2 + NA^2 + NB^2 + NC^2 + ND^2 \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $QN = PN$, suy ra N là điểm cố định nằm trên mặt phẳng trung trực của PQ. Thay tọa độ điểm N vào 4 đáp án ta chọn được đáp án đúng là C.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;2;0)$, $B(3;-2;1)$, $C(0;1;1)$, $D(-1;0;2)$. Gọi P và Q là hai điểm di động thỏa mãn hệ thức:

$$PA^2 + PB^2 + 2PC^2 - PD^2 = QA^2 + QB^2 + 2QC^2 - QD^2.$$

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của PQ . Khi đó (α) luôn đi qua điểm cố định có tọa độ $(a;b;c)$

. Giá trị biểu thức $(a;b;c)$ bằng:

A. 1

B. 0

C. 2

D. 3

Lời giải

Biểu thức đã cho dưới dạng biểu thức tỉ cự. Tọa độ tâm tỉ cự N được xác định:

$$N = \frac{A+B+2C-D}{1+1+2-1} = \left(1; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

Khi đó giả thiết suy ra được: $3PN^2 = 3QN^2 \Leftrightarrow PN = QN \Leftrightarrow N$ nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng PQ . Tức là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng PQ đi qua điểm cố định N .

$$\text{Suy ra } N = \left(1; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) = (a;b;c) \Rightarrow (2a+b+c) = 3.$$

Chọn ý D.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(0;2;3)$. Mặt phẳng (P) có phương trình là: $ax+2y+cz+d=0$ đi qua C , sao cho A và B cùng phía so với (P) , đồng thời tổng khoảng cách từ A và B đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Giá trị của biểu thức $T = (a+c+d)$ tương ứng bằng:

A. 0

B. -8

C. 12

D. -10

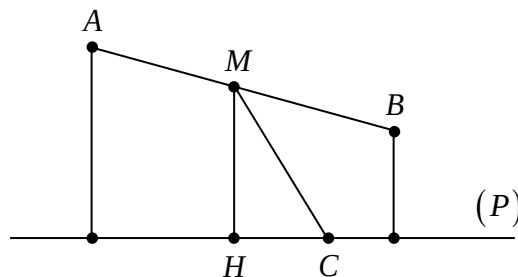
Lời giải

$$\text{Ta có: } d(A;(P)) + d(B;(P)) = 2d(M;(P)) = 2MH$$

Với M là trung điểm của AB , H là hình chiếu $\perp$ của M lên (P) , suy ra $M(2;0;2) \Rightarrow MC = 3$

Ta có: $d(A;(P)) + d(B;(P)) = 2d(M;(P)) = 2MH \leq 2.MC = 6$. Suy ra tổng khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (P) lớn nhất khi $MH \equiv MC \Leftrightarrow H \equiv C \Rightarrow MC \perp (P)$

Suy ra mặt phẳng (P) đi qua C và nhận vec tơ $\overrightarrow{MC} = (-2;2;1)$ làm VTPT



$$\text{Suy ra phương trình mp } (P): -2x+2y+z-7=0 = ax+2y+cz+d \Rightarrow a=-2; c=1; d=-7$$

Suy ra $T = (a+b+d) = -8$. Vậy ta chọn đáp án B.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;-3), B(1;-1;2), C(1;2;-2)$. Mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ O , sao cho A, B, C cùng phía so với (P) . Tổng khoảng cách từ $A(1;2;-3), B(1;-1;2), C(1;2;-2)$ đạt giá trị lớn nhất bằng:

- A. $3\sqrt{3}$ B. 3 C. $3\sqrt{10}$ D. $3\sqrt{6}$

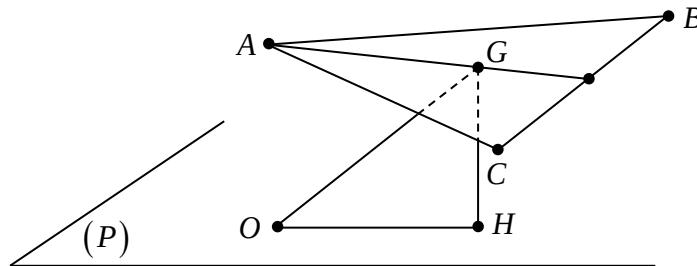
Lời giải

Ta có: $T = d(A; (P)) + d(B; (P)) + d(C; (P)) = 3d(G; (P)) = 3GH$

Với G là trọng tâm của $\triangle ABC$ và H là hình chiếu vuông góc của G lên (P)

Suy ra $GO(1;1;-1) \Rightarrow GO = \sqrt{3}$

Ta có: $T = d(A; (P)) + d(B; (P)) + d(C; (P)) = 3d(G; (P)) = 3GH \leq 3.GO = 3\sqrt{3}$. Suy ra tổng khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (P) lớn nhất khi $GH \equiv GO \Leftrightarrow H \equiv O \Rightarrow GO \perp (P)$



Suy ra giá trị lớn nhất của tổng khoảng cách ba điểm A, B, C tới mặt phẳng (P) là: $T_{\max} = 3\sqrt{3}$

Chọn ý A.

Câu 47. Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm $A(2;0;1), B(3;-2;0), C(0;0;-5), D(-3;1;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua D sao cho A, B và C cùng phía so với mặt phẳng (P) . Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = d(A; (P)) + 2d(B; (P)) + d(C; (P))$ tương ứng bằng:

- A. $12\sqrt{5}$ B. $16\sqrt{3}$ C. $12\sqrt{6}$ D. $8\sqrt{5}$

Lời giải

Gọi điểm N thỏa mãn hệ thức tỉ cự $\vec{NA} + 2\vec{NB} + \vec{NC} = \vec{0} \Rightarrow N = (2; -1; -1)$

Ghi nhớ: Nếu điểm N thỏa mãn hệ thức véc tơ tỉ cự: $\alpha\vec{NA} + \beta\vec{NB} + \gamma\vec{NC} = \vec{0}$ và ba điểm A, B, C nằm cùng phía so với (P) thì khi đó giá trị của biểu thức:

$$T = \alpha d(A; (P)) + \beta d(B; (P)) + \gamma d(C; (P)) = (\alpha + \beta + \gamma) d(N; (P)) = (\alpha + \beta + \gamma) NH$$

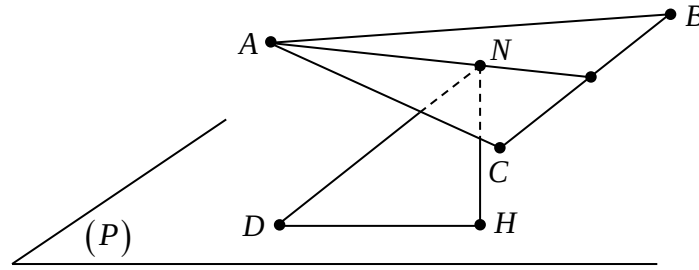
Với H là hình chiếu vuông góc của N lên mặt phẳng (P)

Áp dụng vào bài toán này, ta có:

Ta có: $T = d(A; (P)) + 2d(B; (P)) + d(C; (P)) = 4d(N; (P)) = 4NH$

$$T = d(A; (P)) + 2d(B; (P)) + d(C; (P)) = 4d(N; (P)) = 4NH \leq 4.ND = 12\sqrt{5}.$$

Dấu “=” xảy ra khi: $NH \equiv ND \Leftrightarrow H \equiv D \Rightarrow ND \perp (P)$



Suy ra giá trị lớn nhất của biểu thức T là: $T_{\max} = 12\sqrt{5}$.

Chọn ý A.

Câu 48. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;1;1), B(1;-3;0), C(-2;2;4), D(-3;1;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ O sao cho A, B, C, D nằm cùng phía so với (P) . Khi đó biểu thức $T = d(A; (P)) + 2d(B; (P)) + d(C; (P)) + 3d(D; (P))$ đạt giá trị lớn nhất thì phương trình mặt phẳng (P) tương ứng là $(P): x + by + cz + d = 0$. Giá trị của biểu thức $T = (b + c + d)$ bằng:

A. 3

B. -3

C. 2

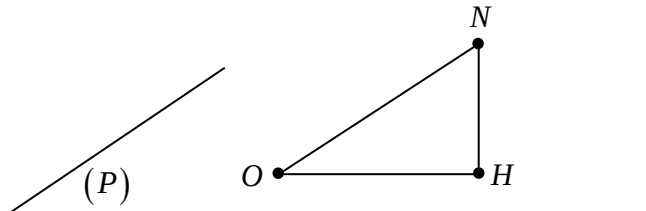
D. -2

Lời giải

Gọi điểm N thỏa mãn hệ thức tỉ cự: $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + 3\overrightarrow{ND} = \vec{0} \Rightarrow N = (-1; 0; 2)$

$$T = d(A; (P)) + 2d(B; (P)) + d(C; (P)) + 3d(D; (P)) = 7d(N; (P)) = 7NH \leq 7NO = 7\sqrt{5}$$

Dấu “=” xảy ra khi $NH \equiv NO \Leftrightarrow H \equiv O \Rightarrow NO \perp (P) \Rightarrow$ VTPT của (P) là $\overrightarrow{ON} = (-1; 0; 2)$



Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là: $-x + 2z = 0 \Leftrightarrow x - 2z = 0 \Rightarrow b = 0; c = -2; d = 0$

$\Rightarrow T = (b + c + d) = -2$. Vậy ta chọn đáp án D.

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 7 = 0$ và các điểm $A(3;1;-3), B(2;3;-1), C(4;m;2-m^2)$. Số giá trị nguyên của m để mặt phẳng (P) cắt đúng hai cạnh của ΔABC là

A. 4

B. -2

C. 5

D. 0

Lời giải

Thay tọa độ hai điểm A và B vào mặt phẳng (P) ta được:

$$P_A = 1.3 + 2.1 + 3 - 7 = 1 > 0; P_B = 1.2 + 2.3 - (-1) - 7 = 2 > 0$$

Suy ra hai điểm A và B cùng phía nhau so với mặt phẳng (P) vì: $P_A > 0, P_B > 0$

Suy ra khi ta thay tọa độ điểm C vào mặt phẳng sẽ cho kết quả:

$$P_C = 1.4 + 2.m - (2 - m^2) - 7 \leq 0$$

Để mặt phẳng (P) cắt đúng hai cạnh của ΔABC

$$P_C \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -3,45 \approx -1 - \sqrt{6} \leq m \leq -1 + \sqrt{6} \approx 1,45.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}$.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(1; 1; -3), B(a; -1; 2)$. Gọi M là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng $(P): x + 3y - z - 8 = 0$ sao cho $AB = 3AM$. Tổng các giá trị thực của a thỏa mãn bài toán là?

A. -13

B. 24

C. 6

D. -29

Lời giải

$$\text{Trường hợp 1: } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{2+a}{3} \\ y_M = \frac{1}{3} \\ z_M = \frac{-4}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{2+a}{3}; \frac{1}{3}; \frac{-4}{3}\right).$$

$$\text{Vì } M \in (P) \text{ nên } \frac{2+a}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 15.$$

$$\text{Trường hợp 2: } \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{4-a}{3} \\ y_M = \frac{5}{3} \\ z_M = \frac{-14}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{4-a}{3}; \frac{5}{3}; \frac{-14}{3}\right).$$

$$\text{Vì } M \in (P) \text{ nên } \frac{4-a}{3} + 3 \cdot \frac{5}{3} - \left(-\frac{14}{3}\right) - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 9.$$

Do đó tổng các giá trị a là 24.

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(1; -3; -1), B(a; b; c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ sao cho $AM = MN = NP = PB$. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ tương ứng bằng?

A. -13

B. 24

C. 6

D. -29

Lời giải

$$\begin{array}{ccccccc} A & & z_M = 0 & & x_N = 0 & & y_P = 0 & & B \\ \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ & & M & & N & & P & & \end{array}$$

$$\text{Ta thấy } \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = \vec{0} \Rightarrow x_N = \frac{x_A + x_B}{2} = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{1+a}{2} \Rightarrow a = -1.$$

$$\text{Ta cũng có } 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3(z_A - z_M) + (z_B - z_M) = 0 \Leftrightarrow z_B = -3z_A + 4z_M = -3z_A = 3 = c$$

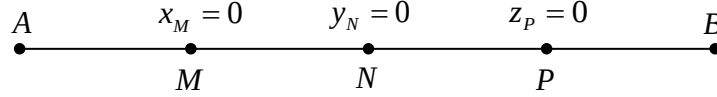
$$\text{Ta cũng có } \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{1}{3}(y_A - y_P) + (y_B - y_P) = 0 \Leftrightarrow y_B = -\frac{1}{3}y_A + \frac{4}{3}y_P = -\frac{1}{3}y_A = 1 = b$$

$$\text{Vậy ta có } T = a + b + c = -1 + 1 + 3 = 3$$

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;3), B(a;b;c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng $(Oyz), (Ozx), (Oxy)$ sao cho $AM = 3NP = PB$. Giá trị của biểu thức $T = 3a + 8b - 11c$ bằng

- A. 5 B. -21 C. 7 D. 12

Lời giải



Ta đặt $AM = 2MN = 3NP = PB = 6d \Rightarrow AM = PB = 6d, MN = 3d, NP = 2d$.

Ta thấy $\begin{cases} MA = 6d \\ MB = MN + NP + PB = 11d \end{cases} \Rightarrow 11\overrightarrow{MA} + 6\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Rightarrow 11(x_A - x_M) + 6(x_B - x_M) = 0$

Lại có $x_M = 0 \Rightarrow 11(x_A - 0) + 6(x_B - 0) = 0 \Rightarrow 11 \cdot 2 + 6a = 0 \Rightarrow a = -\frac{11}{3}$.

Tương tự ta cũng có $\begin{cases} NA = NM + MA = 9d \\ NB = NP + PB = 8d \end{cases} \Rightarrow 8\overrightarrow{NA} + 9\overrightarrow{NB} = \vec{0} \Rightarrow 8(y_A - y_N) + 9(y_B - y_N) = 0$.

Lại có $y_N = 0 \Rightarrow 8(y_A - 0) + 9(y_B - 0) = 0 \Leftrightarrow 8 \cdot 0 + 9b = 0 \Rightarrow b = 0$.

Ta có $\begin{cases} PA = 11d \\ PB = 6d \end{cases} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{PA} + 11\overrightarrow{PB} = \vec{0} \Leftrightarrow 6(z_A - z_P) + 11(z_B - z_P) = 0$

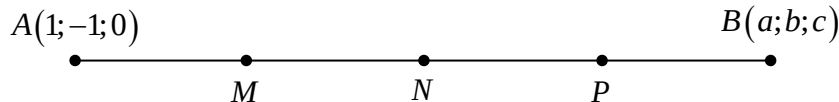
Lại có $z_P = 0 \Rightarrow 6(z_A - 0) + 11(z_B - 0) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 3 + 11c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{18}{11}$.

Vậy ta có $T = 3a + 8b - 11c = 3 \cdot \left(-\frac{11}{3}\right) + 8 \cdot 0 - 11 \cdot \left(-\frac{18}{11}\right) = 7$

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-1;0), B(a;b;c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2 = 0, (Q): y + z + 2 = 0, (R): x + y - 2z - 1 = 0$ sao cho $AM = 2MN = NP = PB$. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ tương ứng bằng

- A. -5 B. $-\frac{28}{5}$ C. $\frac{17}{5}$ D. $-\frac{31}{5}$

Lời giải



Ta có thể đặt $AM = 2MN = NP = PB = 2d \Rightarrow AM = NP = PB = 2d, MN = d$

Nhận thấy $\begin{cases} MA = 2d \\ MB = 5d \end{cases} \Rightarrow 5\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{5x_A + 2x_B}{5+2} = \frac{2a+5}{7} \\ y_M = \frac{5y_A + 2y_B}{5+2} = \frac{2b-5}{7} \\ z_M = \frac{5z_A + 2z_B}{5+2} = \frac{2c}{7} \end{cases}$

Lại có $M \in (P) \Rightarrow x_M - 2y_M - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2a+5}{7} - 2 \cdot \frac{2b-5}{7} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2a - 4b + 1 = 0$

$$\text{Tương tự: } \begin{cases} NA = 3d \\ NB = 4d \end{cases} \Rightarrow 4\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_N = \frac{4x_A + 3x_B}{4+3} = \frac{3a+4}{7} \\ y_N = \frac{4y_A + 3y_B}{4+3} = \frac{3b-4}{7} \\ z_N = \frac{4z_A + 3z_B}{4+3} = \frac{3c}{7} \end{cases}$$

$$\text{Lại có } N \in (Q) \Rightarrow y_N + z_N + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{3b-4}{7} + \frac{3c}{7} + 2 = 0 \Leftrightarrow 3b + 3c + 10 = 0$$

$$\text{Tương tự: } \begin{cases} PA = 4d \\ PB = 3d \end{cases} \Rightarrow 3\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_P = \frac{3x_A + 4x_B}{3+4} = \frac{4a+3}{7} \\ y_P = \frac{3y_A + 4y_B}{3+4} = \frac{4b-3}{7} \\ z_P = \frac{3z_A + 4z_B}{3+4} = \frac{4c}{7} \end{cases}$$

$$\text{Lại có } P \in (R) \Rightarrow x_P + y_P - 2z_P - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{4a+3}{7} + \frac{4b-3}{7} - 2 \cdot \frac{4c}{7} - 1 = 0 \Leftrightarrow 4a + 4b - 8c - 7 = 0$$

$$\text{Giải hệ (1), (2), (3) suy ra: } a = -\frac{34}{15}; b = -\frac{53}{60}; c = -\frac{49}{20}$$

$$\text{Suy ra } T = a + b + c = -\frac{28}{5}.$$

Câu 54. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(1; 2; a), B(m; n; p)$. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các trục tọa độ Ox, Oy sao cho $AM = MN = NB$. Giá trị của biểu thức $T = m + n + p$ tương ứng bằng

A. $-\frac{11}{2}$

B. 2

C. -3

D. $-\frac{9}{2}$

Lời giải

$$\begin{array}{ccccccc} A & & M(x_M; 0; 0) & & N(0; y_N; 0) & & B \end{array}$$

$$\text{Nhận thấy } 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Rightarrow 2(y_A - y_M) + (y_B - y_M) = 0 \Leftrightarrow 2(2-0) + (n-0) = 0 \Rightarrow n = -4$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MN} = \vec{0} \Rightarrow (z_A - z_M) + (z_N - z_M) = 0 \Leftrightarrow (a-0) + (0-0) = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{NB} = \vec{0} \Rightarrow (z_M - z_N) + (z_B - z_N) = 0 \Leftrightarrow (0-0) + (p-0) = 0 \Rightarrow p = 0$$

$$NA + 2\overrightarrow{NB} = \vec{0} \Rightarrow (x_A - x_N) + 2(x_B - x_N) = 0 \Leftrightarrow (1-0) + 2(m-0) = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra: } T = m + n + p = -\frac{1}{2} - 4 + 0 = -\frac{9}{2}.$$

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn mặt phẳng $(\alpha): x + y + 5z - 7 = 0$, $(\beta): x + y - z - 1 = 0$; $(\gamma): x - y - z - 1 = 0$; $(\delta): x - y - 3z + 1 = 0$. Thể tích của khối tứ diện giới hạn bởi bốn mặt phẳng này có giá trị tương ứng bằng

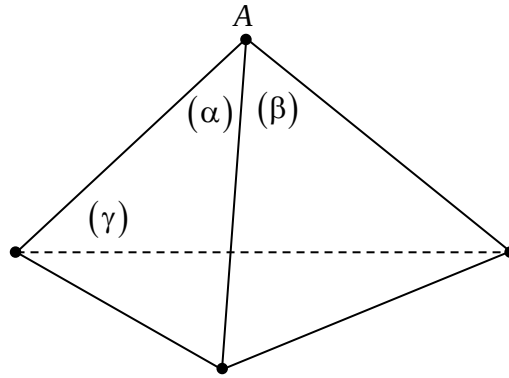
A. $\frac{1}{2}$

B. 2

C. 1

D. $\frac{1}{3}$

Lời giải



Cứ ba mặt phẳng đã cho luôn có một điểm chung duy nhất là một đỉnh của tứ diện (nếu không có điểm chung duy nhất thì nó sẽ có một giao tuyến là đường thẳng chung, hoặc chúng đôi một cắt nhau tạo ra ba giao tuyến là ba đường thẳng song song với nhau).

Cách tìm tọa độ 4 đỉnh của tứ diện tạo bởi 4 mặt phẳng đã cho.

- Tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} (\alpha): x + y + 5z - 7 = 0 \\ (\beta): x + y - z - 1 = 0 \\ (\gamma): x - y - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2; 0; 1)$$
- Tương tự, ta lần lượt cho 3 mặt phẳng giao nhau suy ra $B(3; -1; 1); C(4; 3; 0); D(1; 0; 0)$

Suy ra thể tích tứ diện cần tính: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \overrightarrow{AD}| = 1.$

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x = 3-t \\ y = -2+2t \\ z = -1+t \end{cases}$.

Quỹ tích những điểm cách đều hai đường thẳng là hai mặt phẳng

- A. $(\alpha): x + y - z = 0; (\beta): 3x - 3y - 2z - 6 = 0$ B. $(\alpha): x + y - 2 = 0; (\beta): 3x - 3y - 2z - 6 = 0$
- C. $(\alpha): 3x + y - 1 = 0; (\beta): 3x + 3y - z - 2 = 0$ D. $(\alpha): x + y - 2 = 0; (\beta): 2x - 3y - 2z - 7 = 0$

Lời giải

Giao điểm của hai đường thẳng $d_1 \cap d_2 = A(2; 0; 0)$. Suy ra tồn tại hai mặt phẳng chứa tất cả các điểm cách đều hai đường thẳng này. Các mặt phẳng đều vuông góc với mặt phẳng chứa hai đường thẳng d_1, d_2 và chứa một trong hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d_1, d_2 .

Chọn hai VTCP của hai đường thẳng d_1, d_2 là $\vec{u}_1 = (2; -1; -1), \vec{u}_2 = (-1; 2; 1)$.

Có hai VTCP của hai đường phân giác là
$$\begin{cases} \vec{u} = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} + \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1; 1; 0) \\ \vec{v} = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} - \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|} = \left(\frac{3}{\sqrt{6}}; \frac{-3}{\sqrt{6}}; \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(3; -3; -2) \end{cases}$$

Hai mặt phẳng chứa các điểm cách đều hai đường thẳng là hai mặt phẳng nhận hai VTCP của hai đường phân giác làm các VTPT.

- **Trường hợp 1.** Quỹ tích những điểm cách đều hai đường thẳng là mặt phẳng (α) có VTPT là $(1; 1; 0)$ và đi qua điểm $A(2; 0; 0)$. Phương trình tổng quát của (α) là: $x + y - 2 = 0$.

- **Trường hợp 2.** Quỹ tích những điểm cách đều hai đường thẳng là mặt phẳng (β) có VTPT là $(3; -3; -2)$ và đi qua điểm $A(2; 0; 0)$. Phương trình tổng quát của (β) là:

$$3x - 3y - 2z - 6 = 0$$

Câu 57. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$ và

$d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$. Mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là?

- B.** $6x + 2y + 5z - 11 = 0$.

- D.** $x + 3y - 8 = 0$.

Lời giải

Đường thẳng d_1 qua $M_1(0;1;2)$, nhận $\vec{u}_1 = (2;-1;-2)$ là véc tơ chỉ phương.

Đường thẳng d_2 qua $M_2(1; 2; 0)$, nhận $\vec{u}_2 = (1; 2; -2)$ là véc tơ chỉ phương.

Có $\overrightarrow{M_1M_2} = (1; 1; -2)$, $[\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (6; 2; 5)$. Do $[\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$ nên d_1, d_2 là hai đường thẳng chéo nhau.

Do đó, mặt phẳng cần tìm là mặt phẳng đi qua trung điểm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1\right)$ của M_1M_2 , nhận $\vec{n} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (6; 2; 5)$ là véc tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng cần tìm là $6\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\left(y - \frac{3}{2}\right) + 5(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 6x + 2y + 5z - 11 = 0$.

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 5 điểm có tọa độ là $A(1;-1;0), B(3;0;1), C(4;1;1), D(3;-2;-2), E(-1;-2;-1)$. Số mặt phẳng tạo thành từ 5 điểm này tương ứng là

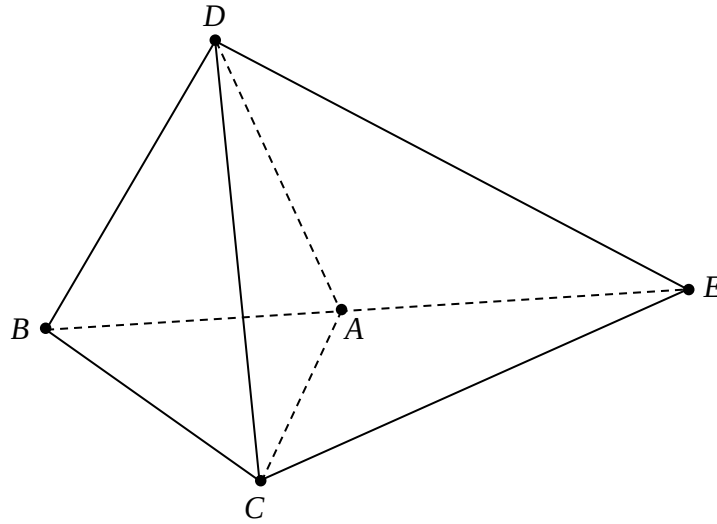
- ### B. 7

- ## D. 5

Lời giải

Phương trình mặt phẳng $(ABC): x - y - z - 2 = 0$.

Ta thấy điểm D không thuộc mặt phẳng (ABC) và điểm E thuộc mặt phẳng (ABC) . Như vậy, 4 điểm A, B, C, E đồng phẳng và điểm D không thuộc mặt phẳng ấy. Ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Ta đi kiểm tra xem trong 4 điểm A, B, C, E có 3 điểm nào thẳng hàng với nhau không. Lần lượt xét các cặp vectơ $\{\overline{AB}, \overline{AE}\}; \{\overline{AC}, \overline{AE}\}; \{\overline{BC}, \overline{BE}\}$ thì nhận thấy ba điểm A, B, E thẳng hàng. Vậy ta có mô hình 5 điểm tạo thành như hình vẽ bên dưới:



Chú ý rằng mặt phẳng $(ABD) \equiv (EBD)$. Suy ra có tất cả 5 mặt phẳng tạo thành.

Câu 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 10 = 0$ và hai điểm $A(1; 2; 0), B(-1; 3; 1)$. Gọi (Q) là một mặt phẳng đi qua A, B đồng thời tạo với (P) một góc nhỏ nhất. Biết rằng phương trình tổng quát của (Q) là: $2x + by + cz + d = 0$, với b, c, d là những số thực. Khi đó giá trị của tổng $(b + c + d)$ bằng:

A. 10

B. 12

C. 18

D. -8

Lời giải

Vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $\vec{n}_{(P)} = (1; 2; -2)$; của mặt phẳng (Q) là: $(2; b; c)$

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) là: $2(x - 1) + b(y - 2) + c(z - 0) = 0 (*)$

Thay điểm B vào (Q) , ta được: $2(-1 - 1) + b(3 - 2) + c(1 - 0) = 0 \Leftrightarrow c = 4 - b(1)$

Góc tạo bởi hai mặt phẳng cũng chính là góc không tù tạo bởi hai véc tơ pháp tuyến tương ứng. Nếu gọi góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là α , thì ta có

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_{(P)}; \vec{n}_{(Q)}) \right| = \left| \frac{1.2 + 2.b - 2.c}{\sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{4+b^2+c^2}} \right| = \frac{|2+2b-2c|}{3\sqrt{4+b^2+c^2}} (2)$$

$$\text{Thay } c \text{ từ (1) vào (2) ta được: } \cos \alpha = \frac{|2+2b-2c|}{3\sqrt{4+b^2+c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{(b-3)^2}{b^2-4b+10}}$$

Khảo sát hàm số trong căn, cho ta GTLN của $\cos \alpha$ là: $(\cos \alpha)_{\max} = \frac{\sqrt{21}}{9} \Leftrightarrow b = -4, c = 8$

Lưu ý rằng khi $\cos \alpha$ đạt giá trị lớn nhất thì góc α tương ứng sẽ nhỏ nhất

Thay b và c vào phương trình tổng quát của (Q) ở $(*)$, ta được:

$$(Q): 2(x - 1) - 4(y - 2) + 8(z - 0) = 2x - 4y + 8z + 6 = 0 \Rightarrow (b + c + d) = 10.$$

Chọn ý A.

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt $(P): mx + (2m + 1)y - z - 4m + 2 = 0$ và điểm $A(1; 2; 0)$. Khi khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) lớn nhất thì hình chiếu vuông góc của A lên (P) là $H(a; b; c)$. Giá trị của $(a + b + c)$ bằng:

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

Lời giải

Phương trình mặt phẳng $(P): mx + (2m+1)y - z - 4m + 2 = 0$

Mặt phẳng (P) luôn đi qua một đường thẳng cố định với mọi m . Đường thẳng d có phương trình

$$\text{Tổng quát là } d: \begin{cases} x+2y-4=0 \\ y-z+2=0 \end{cases} \Rightarrow \text{Phương trình tham số của } (d): \begin{cases} x=2+2t \\ y=1-t \\ z=3-t \end{cases}$$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên (d) , dễ dàng tìm được $K(2;1;3)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P) , khi đó ta có: $d(A; (P)) = AH \leq AK = \sqrt{11}$

Suy ra $AH_{\max} = AK \Leftrightarrow H \text{ trùng } K(2;1;3) \Rightarrow (a+b+c) = 6$.

Chọn ý B.

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $(P): (m^2+2)x + my + m^2z - 3m = 0$ và điểm $B(0;1;0)$. Khoảng cách lớn nhất từ B đến mặt phẳng (P) nằm trong khoảng nào dưới đây

- A. $(1;2)$ B. $(\frac{1}{2};1)$ C. $(2;\frac{5}{2})$ D. $(0;\frac{1}{2})$

Lời giải

$$\text{Ta đi tính khoảng cách } d(B; (P)) = \frac{|-2m|}{\sqrt{(m^2+2)^2 + m^2 + m^4}} = \frac{2}{\sqrt{2m^2 + \frac{1}{m^2} + 5}}$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $(2m^2 + \frac{1}{m^2}) \geq 2\sqrt{2} \Rightarrow d(B; (P)) \leq \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2} + 5}} \approx 0.71$.

Chọn ý B.

Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(Q): x - 3y - 4 = 0$. Gọi M là điểm nằm trên (P) và N là điểm nằm trên (Q) sao cho A là trung điểm MN . Khi M chạy trên mặt phẳng (P) thì quỹ tích điểm N là đường thẳng d có phương trình tương ứng là

- A. $\begin{cases} x=4+3t \\ y=t \\ z=7t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=3t \\ y=2t \\ z=1-t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+t \\ z=7t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=3 \end{cases}$

Lời giải

Sử dụng phép biến hình. Gọi (R) là mặt phẳng đối xứng với (P) qua A . Khi đó ta nhận thấy hai mặt phẳng (P) và (R) song song với nhau, có cùng VTPT: $\vec{n}_{(R)} = \vec{n}_{(P)} = (2;1;-1)$. lấy một điểm B thuộc (P) có tọa độ $B(1;0;0) \rightarrow$ tọa độ điểm B' đối xứng với B qua A là $B'(3;0;-2)$

Mặt phẳng (R) đi qua B' nên có phương trình tổng quát là: $2(x-3) + 1(y-0) - 1(z+2) = 0$

$$\Leftrightarrow (R): 2x + y - z - 8 = 0$$

quỹ tích điểm N sẽ là đường thẳng giao tuyến giữa hai mặt phẳng (R) và (Q) , suy ra phương trình

$$\text{tổng quát của đường thẳng } d: \begin{cases} (Q): x-3y-4=0 \\ (R): 2x+y-z-8=0 \end{cases} \rightarrow (d): \begin{cases} x=4+3t \\ y=t \\ z=7t \end{cases}.$$

Chọn ý A.

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Biết rằng khi a, c và b thay đổi thỏa mãn điều kiện: $a + 2b - c = 6$ thì tâm I thuộc một mặt phẳng cố định (P) . Phương trình mặt phẳng (P) tương ứng là

- A.** $2x - y - z - 6 = 0$ **B.** $x + 2y - z - 3 = 0$ **C.** $x - y - 6 = 0$ **D.** $3x + y + z - 1 = 0$

Lời giải

Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện vuông tại gốc O là: $I = \left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2} \right) = (z; y; z)$

Thay tọa độ tâm I vào biểu thức $(a + 2b - c = 6)$ ta được: $2x + 4y - 2z - 6 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z - 3 = 0$

Suy ra tâm I nằm trên mặt cầu thuộc một mặt phẳng cố định (P) có phương trình $x + 2y - z - 3 = 0$

Chọn ý B.

Chương

4

Các bài toán về phương trình mặt cầu

Tóm tắt nội dung

Ở chương thứ 4 này chúng ta sẽ đi tìm hiểu về đối tượng cuối cùng đó là mặt cầu. Chủ đề này có khá nhiều ứng dụng và dạng bài tập trong đề thi THPT Quốc Gia nên chúng ta cần nắm vững kiến thức cơ bản của phần này.



A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

I. ĐỊNH NGHĨA .

Cho điểm I cố định và một số thực dương R . Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách I một khoảng R được gọi là mặt cầu tâm I , bán kính R .

Kí hiệu: $S(I; R) \Rightarrow S(I; R) = \{M / IM = R\}$

II. CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Dạng 1. Phương trình chính tắc. Mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R > 0$.

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Dạng 2. Phương trình tổng quát

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

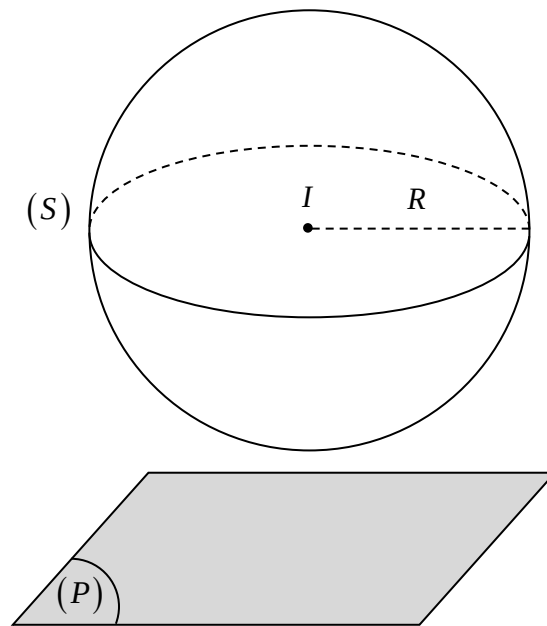
Như vậy ta suy ra điều kiện để phương trình trên là phương trình mặt cầu $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

- (S) có tâm $I(a; b; c)$.
- (S) có bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

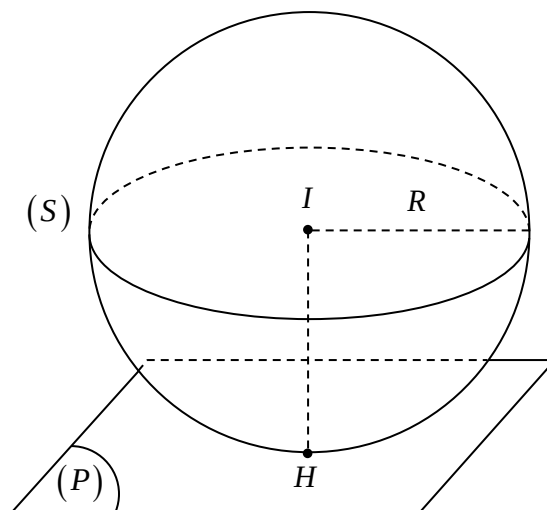
III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(P) \Rightarrow d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) . Khi đó :

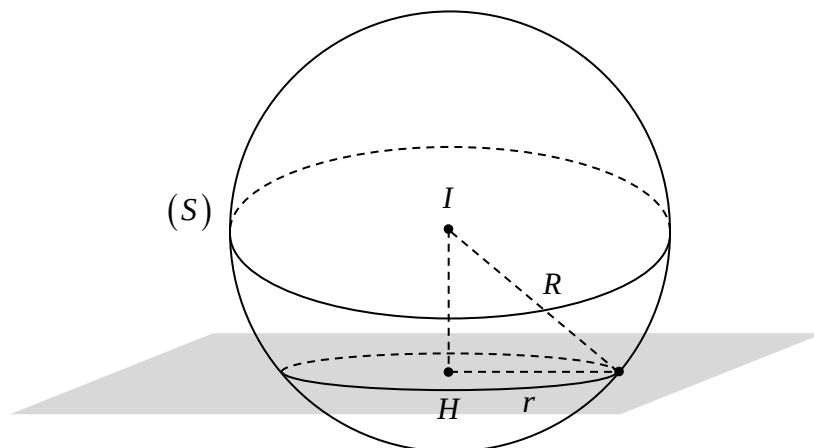
- Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.



- Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó (P) là mặt phẳng *tiếp diện* của mặt cầu và H là *tiếp điểm*.



- Nếu $d < R$: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là *đường tròn* có tâm I' và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$



Lưu ý. Khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I thì mặt phẳng (P) được gọi là *mặt phẳng kính* và thiết diện lúc đó được gọi là *đường tròn lớn*.

IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và đường thẳng Δ . Gọi H là hình chiếu của I lên Δ . Khi đó :

- $IH > R$: Δ không cắt mặt cầu.
- $IH = R$: Δ tiếp xúc với mặt cầu. Δ là *tiếp tuyến* của (S) và H là *tiếp điểm*.
- $IH < R$: Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.

Lưu ý. Trong trường hợp Δ cắt (S) tại 2 điểm A, B thì bán kính R của (S) được tính như sau:

+ Xác định $d(I; \Delta) = IH$.

$$+ \text{ Lúc đó } R = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$$

V. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG

Cho mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ tâm $I(a; b; c)$ bán kính R và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

- Nếu $d(I, (P)) > R$ thì mp (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.
- Nếu $d(I, (P)) = R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) tiếp xúc nhau. Khi đó (P) gọi là tiếp diện của mặt cầu (S) và điểm chung gọi là tiếp điểm
- Nếu $d(I, (P)) < R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) cắt nhau theo giao tuyến là đường

$$\text{tròn có phương trình } \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Trong đó bán kính đường tròn $r = \sqrt{R^2 - d(I, (P))^2}$ và tâm H của đường tròn là hình chiếu của tâm I mặt cầu (S) lên mặt phẳng (P) .

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1. Tìm tâm và bán kính mặt cầu

- Phương trình $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ là phương trình mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$, bán kính R
- Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ thỏa điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, là phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA

Câu 1

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu, nếu là phương trình mặt cầu hãy tìm tâm và bán kính của mặt cầu đó.

- a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 5$
 b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1 = 0$
 c) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 3y + 21 = 0$

Lời giải

a) Phương trình $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 5$ có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ nên là phương trình mặt cầu có tâm $I(2; -3; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$

b) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1 = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d$ với
 $a=1, b=-2, c=3, d=1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d = 13 > 0$

Vậy phương trình cho là phương trình mặt cầu có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = \sqrt{13}$.

c) Phương trình $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 3y + 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + 7 = 0$ có dạng
 $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d$

với $a=1, b=-\frac{1}{2}, c=0, d=7 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d = -\frac{23}{4} < 0$.

Vậy phương trình cho không phải là phương trình mặt cầu.

Câu 2

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, tìm m để mỗi phương trình sau là phương trình mặt cầu.

- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2(m+1)y - 4z + 1 = 0$.
 b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m-3)x - 4mz + 8 = 0$.

Lời giải

a) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2(m+1)y - 4z + 1 = 0$ có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d \text{ với } a=m, b=-(m+1), c=2, d=1.$$

Điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \Leftrightarrow m^2 + (m+1)^2 + 2^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$.

b) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m-3)x - 4mz + 8 = 0$ có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d \text{ với } a=m-3, b=0, c=2m, d=8.$$

Điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \Leftrightarrow (m-3)^2 + (2m)^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 6m + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{5} \\ m > 1 \end{cases}$.

Câu 3

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-3)z + m^2 - 1 = 0$ là phương trình của mặt cầu có bán kính nhỏ nhất.

Lời giải

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-3)z + m^2 - 1 = 0$ có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ với } a=-(m+2), b=0, c=m-3, d=m^2-1.$$

Điều kiện để phương trình đã cho cho là phương trình mặt cầu: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

$$\Rightarrow (m+2)^2 + (m-3)^2 - (m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 14 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

Khi đó bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{m^2 - 2m + 14} = \sqrt{(m-1)^2 + 13} \geq \sqrt{13}$

Do đó $\min R = \sqrt{13}$ khi $m = 1$.

Dạng 2. Viết phương trình mặt cầu

Cách 1.

- Xác định tâm $I(a; b; c)$.
- Xác định bán kính R của (S)
- Mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Cách 2.

Gọi phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Phương trình (S) hoàn toàn xác định nếu biết được a, b, c, d . ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$)

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA

Câu 1

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, viết phương trình mặt cầu trong mỗi trường hợp sau:

- Có đường kính AB với $A(4; -3; 7)$, $B(2; 1; 3)$.
- Có tâm $C(3; -3; 1)$ và đi qua điểm $A(5; -2; 1)$.
- Có tâm thuộc mặt phẳng (Oxy) và đi qua 3 điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; -1; -3)$, $C(-1; 0; 2)$.
- Có tâm $A(2; 4; -5)$ và tiếp xúc với trục Oz .

Lời giải

- a) Có đường kính AB với $A(4; -3; 7)$, $B(2; 1; 3)$.

Tâm I của mặt cầu là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3; -1; 5)$.

Bán kính mặt cầu là $R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(2-4)^2 + (1+3)^2 + (3-7)^2} = 3$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$.

- b) Có tâm $C(3; -3; 1)$ và đi qua điểm $A(5; -2; 1)$.

Tâm của mặt cầu là $C(3; -3; 1)$.

Bán kính mặt cầu là $R = CA = \sqrt{(5-3)^2 + (-2+3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{5}$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5$.

- c) Có tâm thuộc mặt phẳng (Oxy) và đi qua 3 điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; -1; -3)$, $C(-1; 0; 2)$.

Gọi phương trình mặt cầu dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Mặt cầu có tâm $I(a; b; c) \in mp(Oxy) \Rightarrow c = 0$ (1).

Mặt cầu qua 3 điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; -1; -3)$, $C(-1; 0; 2)$, suy ra:
$$\begin{cases} 3-2a-2b-2c+d=0 \\ 14-4a+2b+6c+d=0 \\ 5+2a-4c+d=0 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tìm được: $a = \frac{7}{10}, b = -\frac{12}{5}, c = 0, d = -\frac{32}{5}$.

Vậy phương trình mặt cầu là $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{7}{5}x + \frac{24}{5}z - \frac{32}{5} = 0$.

d) Có tâm $A(2; 4; -5)$ và tiếp xúc với trục Oz .

Tâm mặt cầu là $A(2; 4; -5)$.

Gọi H là hình chiếu của A lên trục $Oz \Rightarrow H(0; 0; -5)$

Bán kính mặt cầu là $R = AH = \sqrt{(0-2)^2 + (0-4)^2 + (-5+5)^2} = \sqrt{20}$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+5)^2 = 20$.

Câu 2

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;1;2)$, $B(1;1;-1)$, $C(-1;0;1)$. Phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm nằm trên $mp(Oxz)$ là

A. $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{2}x - z - \frac{5}{2} = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}z + \frac{5}{2} = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{2}x + z - \frac{5}{2} = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{2}y - z - \frac{5}{2} = 0$.

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Mặt cầu có tâm $I(a; b; c) \in mp(Oxz) \Rightarrow b = 0$ (1).

Mặt cầu qua 3 điểm $A(1;1;2)$, $B(1;1;-1)$, $C(-1;0;1)$, suy ra:
$$\begin{cases} 6-2a-2b-4c+d=0 \\ 3-2a-2b+2c+d=0 \\ 2+2a-2c+d=0 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tìm được: $a = \frac{3}{4}, b = 0, c = \frac{1}{2}, d = -\frac{5}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{2}x - z - \frac{5}{2} = 0$.

Câu 3

Viết phương trình mặt cầu (S) biết :

a) (S) qua bốn điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$, $D(1;0;4)$.

b) (S) qua $A(0;8;0)$, $B(4;6;2)$, $C(0;12;4)$ và có tâm I thuộc mặt phẳng (Oxz)

Lời giải

a) **Cách 1.** Gọi $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu (S) cần tìm.

Theo giả thiết:
$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = -1 \\ x + 7z = -2 \\ y - 4z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Do đó $I(-2; 1; 0)$ và $R = IA = \sqrt{26}$. Vậy $(S): (x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26$.

Cách 2. Gọi phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$.

Do $A(1; 2; -4) \in (S) \Leftrightarrow -2a - 4b + 8c + d = -21$ (1)

Tương tự $B(1; -3; 1) \in (S) \Leftrightarrow -2a + 6b - 2c + d = -11$ (2)

$C(2; 2; 3) \in (S) \Leftrightarrow -4a - 4b - 6c + d = -17$ (3)

$D(1; 0; 4) \in (S) \Leftrightarrow -2a - 8c + d = -17$ (4)

Giải hệ (1), (2), (3), (4) ta có a, b, c, d , suy ra phương trình mặt cầu

$$(S): (x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26.$$

b) Do tâm I của mặt cầu nằm trên mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow I(0; b; c)$.

Ta có $IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ c = 5 \end{cases}.$

Vậy $I(0; 7; 5)$ và $R = \sqrt{26}$. Vậy $(S): x^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 26$.

Câu 4

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$ và (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2z + 3 = 0$ và $(\beta): x + 2y + 2z + 7 = 0$.

Lời giải

Gọi $I(t; -1; -t) \in \Delta$ là tâm mặt cầu (S) cần tìm.

Theo giả thiết $d(I, (\alpha)) = d(I, (\beta)) \Leftrightarrow \frac{|1-t|}{3} = \frac{|5-t|}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-t = 5-t \\ 1-t = t-5 \end{cases} \Rightarrow t = 3.$

Suy ra $I(3; -1; -3)$ và $R = d(I, (\alpha)) = \frac{2}{3}$. Vậy $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$.

Câu 5

Lập phương trình mặt cầu (S) qua 2 điểm $A(2; 6; 0)$, $B(4; 0; 8)$ và có tâm thuộc đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{1}.$$

Lời giải

Ta có $d: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = -5+t \end{cases}$. Gọi $I(1-t; 2t; -5+t) \in d$ là tâm của mặt cầu (S) cần tìm.

Ta có: $\overline{IA} = (1+t; 6-2t; 5-t)$, $\overline{IB} = (3+t; -2t; 13-t)$.

Theo giả thiết, do (S) đi qua $A, B \Leftrightarrow AI = BI$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sqrt{(1+t)^2 + (6-2t)^2 + (5-t)^2} &= \sqrt{(3+t)^2 + 4t^2 + (13-t)^2} \\ \Leftrightarrow 62 - 32t &= 178 - 20t \Leftrightarrow 12t = -116 \Leftrightarrow t = -\frac{29}{3} \\ \Rightarrow I\left(\frac{32}{3}; -\frac{58}{3}; -\frac{44}{3}\right) &\text{ và } R = IA = 2\sqrt{233}. \end{aligned}$$

Vậy (S): $\left(x - \frac{32}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{58}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{44}{3}\right)^2 = 932$.

Câu 6

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; -1)$ và cắt đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$ tại hai điểm A, B với $AB = 16$.

Lời giải

Chọn $M(-1; 1; 0) \in \Delta \Rightarrow \overline{IM} = (-3; -2; 1)$.

Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (1; -4; 1)$.

Ta có $[\overline{IM}, \vec{u}_\Delta] = (2; 4; 14) \Rightarrow d(I, \Delta) = \frac{[\overline{IM}, \vec{u}_\Delta]}{|\vec{u}_\Delta|} = 2\sqrt{3}$.

Gọi R là bán kính mặt cầu (S). Theo giả thiết $R = \sqrt{[d(I, \Delta)]^2 + \frac{AB^2}{4}} = 2\sqrt{19}$.

Vậy (S): $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 76$.

Câu 7

Cho hai mặt phẳng (P): $5x - 4y + z - 6 = 0$, (Q): $2x - y + z + 7 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{7} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-2}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I là giao điểm của (P) và Δ sao cho (Q) cắt (S) theo một hình tròn có diện tích là 20π .

Lời giải

Ta có $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$. Tọa độ I là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 7t & (1) \\ y = 3t & (2) \\ z = 1 - 2t & (3) \\ 5x - 4y + z - 6 = 0 & (4) \end{cases}$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: $5(1+7t) - 4(3t) + (1-2t) - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow I(1; 0; 1)$.

Ta có $d(I, (Q)) = \frac{5\sqrt{6}}{3}$.

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến của (S) và mặt phẳng (Q). Ta có: $20\pi = \pi r^2 \Leftrightarrow r = 2\sqrt{5}$.

R là bán kính mặt cầu (S) cần tìm.

Theo giả thiết $R = \sqrt{[d(I, (Q))]^2 + r^2} = \frac{\sqrt{330}}{3}$. Vậy (S): $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{110}{3}$.

Câu 8

Cho mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 2 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -t \\ y = 2t - 1 \\ z = t + 2 \end{cases}$.

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc d và I cách (P) một khoảng bằng 2 và (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3

Lời giải

Gọi $I(-t; 2t-1; t+2) \in d$: là tâm của mặt cầu (S) và R là bán kính của (S) .

Theo giả thiết $R = \sqrt{[d(I; (P))]^2 + r^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

$$\text{Mặt khác } d(I; (P)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|-2t - 2t + 1 - 2t - 4 - 2|}{\sqrt{4+1+4}} = 2 \Leftrightarrow |6t+5| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{6} \\ t = -\frac{11}{6} \end{cases}$$

Với $t = \frac{1}{6}$, tâm $I_1\left(-\frac{1}{6}; -\frac{2}{3}; \frac{13}{6}\right)$, suy ra $(S_1): \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{13}{6}\right)^2 = 13$.

Với $t = -\frac{11}{6}$, tâm $I_2\left(\frac{11}{6}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right)$, suy ra $(S_2): \left(x - \frac{11}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{6}\right)^2 = 13$.

Câu 9

Cho điểm $I(1; 0; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho ΔIAB vuông tại I

Lời giải

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; 2)$ và $P(1; -1; 1) \in d$.

$$\text{Ta có } \vec{IP} = (0; -1; -2) \Rightarrow [\vec{u}, \vec{IP}] = (0; -4; -2) \Rightarrow d(I; (d)) = \frac{|\vec{u}, \vec{IP}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{20}}{3}.$$

Gọi R là bán kính của (S) . Theo giả thiết, ΔIAB vuông tại I

$$\Rightarrow \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} = \frac{2}{R^2} \Leftrightarrow R = \sqrt{2}IH = \sqrt{2}d(I, (d)) = \frac{\sqrt{40}}{3}$$

$$\text{Vậy } (S): (x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{40}{9}.$$

Câu 10

Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm $A(4; 4; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB) , biết điểm B thuộc (S) và tam giác OAB đều

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 2; 2)$, bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

Nhận xét. Điểm O và A cùng thuộc (S)

Tam giác OAB đều, có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R' = \frac{OA}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Khoảng cách $d(I; (P)) = \sqrt{R^2 - (R')^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Mặt phẳng (P) đi qua O có phương trình dạng $ax + by + cz = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 > 0$) (*)

Do (P) đi qua A , suy ra $4a + 4b = 0 \Leftrightarrow b = -a$.

Lúc đó $d(I; (P)) = \frac{|2(a+b+c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2c|}{\sqrt{2a^2+c^2}} \Rightarrow \frac{|2c|}{\sqrt{2a^2+c^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$
 $\Rightarrow 2a^2 + c^2 = 3c^2 \Rightarrow \begin{cases} c = a \\ c = -1 \end{cases}$. Theo (*), suy ra $(P): x - y + z = 0$ hoặc $x - y - z = 0$.

Chú ý. Kỹ năng xác định tâm và bán kính của đường tròn trong không gian.

Cho mặt cầu (S) tâm I bán kính R . Mặt phẳng (P) cắt (S) theo một đường tròn (C)

Bước 1: Lập phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Bước 2: Tâm I' của đường tròn (C) là giao điểm của d và mặt phẳng (P)

Bước 3: Gọi r là bán kính của (C) : $r = \sqrt{R^2 - [d(I; (P))]^2}$

Câu 11

Chứng minh rằng: Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$ cắt mặt phẳng $(P): x - 2 = 0$ theo giao tuyến là một đường tròn (C) . Xác định tâm và bán kính của (C) .

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; 0)$ và bán kính $R = 2$.

Ta có $d(I, (P)) = 1 < 2 = R \Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là 1 đường tròn.

Đường thẳng d qua $I(1; 0; 0)$ và vuông góc với (P) nên nhận $\vec{n}_p = (1; 0; 0)$ làm 1 vectơ chỉ phương,

có phương trình $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Tọa độ tâm I' đường tròn là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow I'(2; 0; 0)$.

Ta có $d(I, (P)) = 1$. Gọi r là bán kính của (C) , ta có $r = \sqrt{R^2 - [d(I, (P))]^2} = \sqrt{3}$.

Dạng 3. Sự tương giao và tiếp xúc

Các điều kiện tiếp xúc

+ Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của $(S) \Leftrightarrow d(I; \Delta) = R$.

+ Mặt phẳng (α) là tiếp diện của $(S) \Leftrightarrow d(I;(\alpha)) = R$.

Lưu ý các dạng toán liên quan như tìm tiếp điểm, tương giao.

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA

Câu 1

Cho đường thẳng $(\Delta): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$. Số điểm chung của (Δ) và (S) là bao nhiêu?

Lời giải

Đường thẳng (Δ) đi qua $M(0;1;2)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;1;-1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R = 2$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MI} = (1;-1;-4) \text{ và } [\vec{u}, \overrightarrow{MI}] = (-5;7;-3) \Rightarrow d(I, \Delta) = \frac{[\vec{u}, \overrightarrow{MI}]}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{498}}{6}$$

Vì $d(I, \Delta) > R$ nên (Δ) không cắt mặt cầu (S) .

Câu 2

Cho điểm $I(1;-2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oy là?

Lời giải

Gọi M là hình chiếu của $I(1;-2;3)$ lên Oy , ta có: $M(0;-2;0)$.

$$\overrightarrow{IM} = (-1;0;-3) \Rightarrow R = d(I, Oy) = IM = \sqrt{10} \text{ là bán kính mặt cầu cần tìm.}$$

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$.

Câu 3

Cho điểm $I(1;-2;3)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Viết phương trình mặt cầu tâm I , tiếp xúc với d .

Lời giải

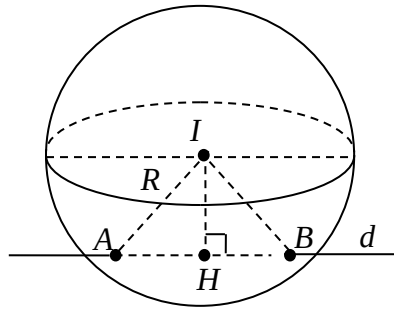
$$\text{Đường thẳng } (d) \text{ đi qua } I(-1;2;-3) \text{ và có VTCP } \vec{u} = (2;1;-1) \Rightarrow d(A, d) = \frac{[\vec{u}, \overrightarrow{AM}]}{|\vec{u}|} = 5\sqrt{2}$$

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$.

Câu 4

Viết phương trình mặt cầu (S) tâm $I(2;3;-1)$ cắt đường thẳng $d: \frac{x-11}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+25}{-2}$ tại 2 điểm A, B sao cho $AB = 16$?

Lời giải



Đường thẳng (d) đi qua $M(11; 0; -25)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; -2)$.

Gọi H là hình chiếu của I trên (d) . Ta có:

$$IH = d(I, AB) = \frac{[\vec{u}, \overrightarrow{MI}]}{|\vec{u}|} = 15 \Rightarrow R = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 17$$

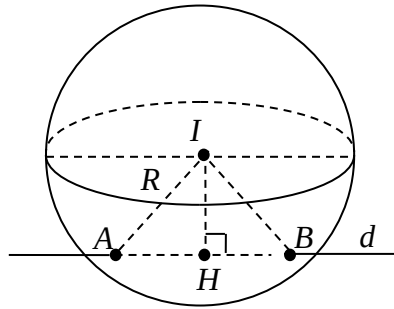
Vậy $(S) : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289$.

Lựa chọn đáp án C.

Câu 5

Cho điểm $I(1; 0; 0)$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB đều.

Lời giải



Đường thẳng (Δ) đi qua $M(1; 1; -2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 1)$

Ta có $\overrightarrow{MI} = (0; -1; 2)$ và $[\vec{u}, \overrightarrow{MI}] = (5; -2; -1)$

Gọi H là hình chiếu của I trên (d) . Ta có $IH = d(I, AB) = \frac{[\vec{u}, \overrightarrow{MI}]}{|\vec{u}|} = \sqrt{5}$.

Xét tam giác IAB , có $IH = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{2IH}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}$.

Câu 6

Cho đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P) : 2x - y + 2z = 0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng Δ , bán kính bằng 1 và tiếp xúc với mặt phẳng (P) .

Lời giải

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu. Do $I \in \Delta \Rightarrow I(1+2t; 3+4t; t)$. Do mặt cầu có bán kính bằng 1 và tiếp xúc với (P) nên ta có

$$d(I; (P)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|2(1+2t) - 3 - 4t + 2t|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1 \Leftrightarrow |2t - 1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 1 = 3 \\ 2t - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \end{cases}$$

Với $t = 2 \Rightarrow I(5; 11; 2)$ nên phương trình mặt cầu là $(x-5)^2 + (y-11)^2 + (z-2)^2 = 1$

Với $t = -1 \Rightarrow I(-1; -1; -1)$ nên phương trình mặt cầu là $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$

Câu 7

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2; 1; 0), B(-2; 3; 2)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng d .

Lời giải

Gọi I là tâm mặt cầu. Do $I \in \Delta \Rightarrow I(1+2t; t; -2t)$.

Do mặt cầu đi qua hai điểm A, B nên ta có

$$\begin{aligned} IA = IB &\Leftrightarrow \sqrt{(1-2t)^2 + (1-t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{(-3-2t)^2 + (3-t)^2 + (2+2t)^2} \\ &\Leftrightarrow 20t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(-1; -1; 2); R = IA = \sqrt{17} \end{aligned}$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 17$

Câu 8

Cho d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 9 = 0, (Q): 2y + z + 5 = 0$. Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1; 1; 1)$ cắt d tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 16$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_1(1; -2; 1)$, (Q) có vector pháp tuyến $\vec{n}_2(0; 2; 1)$ nên d có vector chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n}_1; \vec{n}_2] = (-4; -1; 2)$.

Đường thẳng d đi qua điểm $N(14; 0; -5) \Rightarrow \overrightarrow{IN} = (13; -1; -6) \Rightarrow [\overrightarrow{IN}, \vec{u}] = (8; 2; 17)$

Khoảng cách từ I đến d là $h = \frac{[\overrightarrow{IN}, \vec{u}]}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{8^2 + 2^2 + 17^2}}{\sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \sqrt{17}$.

Gọi M là hình chiếu của I trên $d \Rightarrow M$ là trung điểm của AB và $IM = h, AM = 8$.

Bán kính mặt cầu là $R = IA = \sqrt{h^2 + AM^2} = \sqrt{17 + 8^2} = 9$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 81$.

Câu 9

Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 2 = 0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng d , tiếp xúc với (P) và có bán kính bằng 1.

Lời giải

Gọi I là tâm của mặt cầu. Do $I \in d$ nên $I(3t+1; t-2; t)$, với t là tham số thực.

Mặt khác, mặt cầu tiếp xúc với (P) và có bán kính bằng 1 nên $d(I; (P)) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{|2(3t+1) + t - 2 - 2t + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 1 \Leftrightarrow |5t + 2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 5t + 2 = 3 \\ 5t + 2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{5} \\ t = -1 \end{cases}.$$

Với $t = \frac{1}{5}$, ta có $I\left(\frac{8}{5}; -\frac{9}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Với $t = -1$, ta có $I(-2; -3; -1)$.

Như vậy có hai phương trình mặt cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{5}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{5}\right)^2 = 1; \quad (x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 1.$$

Câu 10

Cho ba điểm $A(2; 0; 1)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P) .

Lời giải

Gọi (S) là mặt cầu có phương trình tổng quát: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ với a, b, c, d là các hằng số thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. Suy ra (S) có tâm $I\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 5 + 2a + c + d = 0 \\ 1 + a + d = 0 \\ 3 + a + b + c + d = 0 \\ -\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} - 2 = 0 \end{cases}.$$

Giải hệ trên ta được
$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ c = -2 \\ d = 1 \end{cases}.$$

Vậy phương trình của (S) thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$.

Câu 11

Cho hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là $(P): x + y - 2z + 5 = 0$, $(Q): 2x - y + z + 2 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc d , và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

Lời giải

Gọi tâm và bán kính mặt cầu lần lượt là I, R .

Vì tâm $I \in d$ nên $I(2t; t+1; 2t-1)$.

Do mặt cầu tiếp xúc với 2 mặt phẳng $(P), (Q)$ nên $d(I, (P)) = d(I, (Q)) = R$.

$$\text{Có } d(I, (P)) = \frac{|2t+t+1-2(2t-1)+5|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{|-t+8|}{\sqrt{6}} \text{ và } d(I, (Q)) = \frac{|4t-t-1+2t-1+2|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{|5t|}{\sqrt{6}}.$$

$$\Rightarrow |-t+8| = |5t| \Leftrightarrow \begin{cases} -t+8=5t \\ -t+8=-5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t=8 \\ -4t=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{4}{3} \\ t=-2 \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = \frac{4}{3} \Rightarrow I\left(\frac{8}{3}; \frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right); R = \frac{|5t|}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{9}$$

$$\text{Phương trình mặt cầu là } \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{200}{27}.$$

$$\text{Với } t = -2 \Rightarrow I(-4; -1; -5); R = \frac{|5t|}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Phương trình mặt cầu là } (x+4)^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = \frac{50}{3}.$$

Câu 12

Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm $A(4; 4; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB) , biết điểm B thuộc (S) và tam giác OAB đều

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 2; 2)$ và bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

Nhận xét O, A cùng thuộc (S) .

Xét $\triangle OAB$ đều, có bán kính đường tròn ngoại tiếp $r = \frac{OA}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$$\text{Khoảng cách } d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{12 - \frac{32}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Phương trình mặt phẳng (P) qua O có dạng: $ax + by + cz = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Vì } (P) \text{ qua } A \text{ nên } 4a + 4b = 0 \Leftrightarrow b = -a \Rightarrow d(I, (P)) &= \frac{|2a + 2b + 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2c|}{\sqrt{2a^2 + c^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow 2a^2 + c^2 &= 3c^2 \Rightarrow c = \pm a. \end{aligned}$$

Với $c = -a$, chọn $a = 1 \Rightarrow b = -1; c = -1 \Rightarrow (P): x - y - z = 0$.

Với $c = a$, chọn $a = 1 \Rightarrow b = -1; c = 1 \Rightarrow (P): x - y + z = 0$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) thỏa mãn là: $x - y - z = 0$ hoặc $x - y + z = 0$.

Câu 13

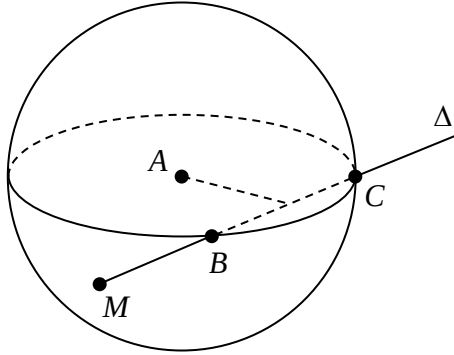
Cho điểm $A(0; 0; -2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến Δ . Viết phương trình mặt cầu tâm A , cắt Δ tại hai điểm phân biệt B và C sao cho $BC = 8$.

Lời giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-2; 2; -3)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 3; 2)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = (2; -2; 1) \Rightarrow [\vec{u}, \overrightarrow{MA}] = (7; 2; -10)$.

Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ là $d(A, \Delta) = \frac{|\vec{u}, \vec{MA}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{49+4+100}}{\sqrt{4+9+4}} = 3$.



Gọi (S) là mặt cầu tâm A , cắt Δ tại hai điểm phân biệt B và C sao cho $BC = 8$ khi đó ta có bán kính của mặt cầu (S) là $R = \sqrt{d^2(A, \Delta) + \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$.

Câu 14

Cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó?

Lời giải

Ta có $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25 \Rightarrow$ Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 5$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là $d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 3 - 4|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 3 < 5$ nên mặt phẳng

(P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) .

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) khi đó ta có $IH = d(I, (P)) = 3 \Rightarrow$ bán kính đường tròn (C) là $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua $I(1; 2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) khi đó Δ nhận vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (2; -2; -1)$ làm vector chỉ phương.

Phương trình đường thẳng Δ là $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

Tọa độ điểm $H(x; y; z)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 2y - z - 4 = 0 \\ x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$.

Vậy $H(3; 0; 2)$.

Câu 15

Cho mặt phẳng $(P): 6x + 3y - 2z - 1 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 2z - 11 = 0$ Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tọa độ tâm đường tròn đó.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 1)$ và bán kính $R = 5$

$$\text{Ta thấy } d(I; (P)) = \frac{|6 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2}} = 3 < R$$

Do đó mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) tâm H .

Do IH vuông góc với mặt phẳng (P) nên phương trình đường thẳng $IH: \frac{x-3}{6} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-2}$ suy ra $H(3+6t; 2+3t; 1-2t)$. H thuộc mặt phẳng (P) nên

$$6(3+6t) + 3(2+3t) - 2(1-2t) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-3}{7} \Rightarrow H\left(\frac{3}{7}; \frac{5}{7}; \frac{13}{7}\right).$$

Câu 16

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(0; -1; 2)$, $B(1; 0; 3)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$.

Lời giải

Gọi phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$, không mất tính tổng quát ta có thể chọn A, B, C thỏa mãn $A^2 + B^2 + C^2 = 2$ và $D \geq 0$.

Do (P) qua $A(0; -1; 2)$, $B(1; 0; 3)$ và tiếp xúc với (S) có tâm $I(1; 2; -1)$, bán kính $\sqrt{2}$ nên

$$\begin{cases} -B + 2C + D = 0 \\ A + 3C + D = 0 \\ \frac{|A + 2B - C + D|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ A^2 + B^2 + C^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -B + 2C + D = 0 \\ A + 3C + D = 0 \\ A + 2B - C + D = 2 \\ A^2 + B^2 + C^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 2C + D \\ A = -3C - D \\ D = 1 \\ A^2 + B^2 + C^2 = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Do } D \geq 0 \text{ nên } \begin{cases} B = 2C + D \\ A = -3C - D \\ D = 1 \\ A^2 + B^2 + C^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ C = -\frac{5}{7} \\ B = 2C + D \\ A = -3C - D \\ D = 1 \end{cases} \cdot \text{ Khi đó } \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 0 \\ D = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A = \frac{8}{7} \\ B = -\frac{3}{7} \\ C = -\frac{5}{7} \\ D = 1 \end{cases}.$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $-x + y + 1 = 0$ hoặc $8x - 3y - 5z + 7 = 0$.

Câu 17

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1;1;2)$, vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x + y - 6z + 5 = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 5 = 0$.

Lời giải

Gọi $M(a; b; c)$ là tiếp điểm của (P) với mặt cầu (S) suy ra $M \in (S)$ hay

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 4b - 4c + 5 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b+2)^2 + (c-2)^2 = 4 \quad (1)$$

Ta lại có $\overrightarrow{IM}$ (với $I(1; -2; 2)$ là tâm mặt cầu (S)) là một vector pháp tuyến của (P) nên $\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AM}$ hay $(a-1)^2 + (b+2)(b-1) + (c-2)^2 = 0 \quad (2)$

Mặt khác $(P) \perp (Q)$ nên $\overrightarrow{IM} \perp \vec{n}$ ($\vec{n} = (2; 1; -6)$ là một vector pháp tuyến của (Q)) hay $2(a-1) + (b+2) - 6(c-2) = 0 \quad (3)$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta có } \begin{cases} (a-1)^2 + (b+2)^2 + (c-2)^2 = 4 \\ (a-1)^2 + (b+2)(b-1) + (c-2)^2 = 0 \\ 2(a-1) + (b+2) - 6(c-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{2}{3} \\ c = \frac{8}{3} \\ c = \frac{26}{15} \\ a = 3c - \frac{17}{3} \end{cases}$$

Suy ra $M\left(\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{7}{15}; -\frac{2}{3}; \frac{26}{15}\right)$.

Từ đó, ta có phương trình mặt phẳng (P) là $\left(\frac{7}{3}-1\right)(x-1) + \left(-\frac{2}{3}+2\right)(y-1) + \left(\frac{8}{3}-2\right)(z-2) = 0$

hoặc $\left(-\frac{7}{15}-1\right)(x-1) + \left(-\frac{2}{3}+2\right)(y-1) + \left(\frac{26}{15}-2\right)(z-2) = 0$.

Hay $2x + 2y + z - 6 = 0$ hoặc $11x - 10y + 2z - 5 = 0$.

Câu 18

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ với $A(0; -3; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $B_1(4; 0; 4)$.

a) Tìm tọa độ các đỉnh A_1 , C_1 . Viết phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1) .

b) Gọi M là trung điểm của A_1B_1 . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A , M và song song với BC_1 . Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng A_1C_1 tại điểm N . Tính độ dài đoạn MN .

Lời giải

a) Ta có, $\overrightarrow{BB_1} = (0; 0; 4)$ và $\overrightarrow{AC} = (0; 3; 0)$.

Các mặt bên của lăng trụ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1} \Rightarrow A_1(0; -3; 4)$ và $C_1(0; 3; 4)$.

Ta lại có, $\overrightarrow{BC} = (-4; 3; 0)$, $\overrightarrow{BB_1} = (0; 0; 4) \Rightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB_1}] = (12; 16; 0)$.

Mặt phẳng (BCC_1B_1) nhận vtp $\vec{n} = \frac{1}{4}[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB_1}] = (3; 4; 0)$ nên ptmp (BCC_1B_1) là:

$$3(x-4) + 4y = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 0.$$

Mặt cầu (S) đi qua A , tiếp xúc với (BCC_1B_1) nên có bán kính

$$R = d(A, (BCC_1B_1)) = \frac{|-12-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{24}{5}.$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình mặt cầu } (S) \text{ là: } x^2 + (y+3)^2 + z^2 = \frac{576}{25}.$$

$$\text{b) Ta có, } M\left(2; \frac{-3}{2}; 4\right), \overrightarrow{AM} = \left(2; \frac{3}{2}; 4\right), \overrightarrow{BC_1} = (-4; 3; 4) \Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC_1}] = (-6; -24; 12).$$

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, M và song song với BC_1 nên có vecto pháp tuyến

$$\vec{n}_p = -\frac{1}{6}[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC_1}] = (1; 4; -2)$$

$$\Rightarrow (P): x + 4(y+3) - 2z = 0 \Leftrightarrow x + 4y - 2z + 12 = 0 \text{ (thỏa mãn vì } B \notin (P))$$

$$\text{Phương trình tham số của } A_1C_1: \begin{cases} x = 0 \\ y = -3+t; t \in \mathbb{R} \\ z = 4 \end{cases}$$

$$\text{Gọi } N \in A_1C_1 \Rightarrow N(0; -3+t; 4). \text{ Do } N \in (P) \text{ nên } 0 + 4(-3+t) - 8 + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

$$\Rightarrow N(0; -1; 4) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(-2; \frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow MN = \sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Câu 19

Cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 11 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 8 = 0$. Chứng minh (P) tiếp xúc với (S) . Tìm tọa độ tiếp điểm của (P) và (S)

Lời giải

$$\text{Mặt cầu } (S) \text{ có tâm } I(1; -2; 1) \text{ và bán kính } R = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2 - (-8)} = \sqrt{14}.$$

$$\text{Ta có, khoảng cách từ } I \text{ đến } (P) \text{ là: } d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 1 - 11|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \sqrt{14} = R.$$

Vậy (P) tiếp xúc với (S) .

Gọi d là đường thẳng đi qua điểm I và vuông góc với (P) .

$$\text{Suy ra đường thẳng } d \text{ có vtcp } \vec{u} = (2; 3; 1) \Rightarrow d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1}.$$

$$\text{Gọi tiếp điểm của } (P) \text{ và } (S) \text{ là } A \Rightarrow A \in d \Rightarrow A(2t+1; 3t-2; t+1)$$

$$\text{Mà } A \in (P) \text{ nên } 2(2t+1) + 3(3t-2) + (t+1) - 11 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A(3; 1; 2).$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;5;3)$ cắt đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B với chu vi tam giác IAB bằng $14 + 2\sqrt{31}$ có phương trình

- A. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 49$ B. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 196$
C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 31$ D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 124$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC nhọn có $H(2;2;1)$, $K\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, O lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên các cạnh BC, AC, AB . Gọi I là trực tâm tam giác ABC . Phương trình mặt cầu (S) tâm A , đi qua điểm I là?

- A. $(S): (x+4)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 20$ B. $(S): (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$
C. $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 20$ D. $(S): (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$, $D(2;-2;0)$. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D ?

- A. 7 B. 5 C. 6 D. 10

Câu 4. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;2;0)$, $B(5;4;4)$, $C\left(\frac{11}{3}; \frac{22}{3}; -\frac{16}{3}\right)$. Gọi $(S_1), (S_2), (S_3)$ là 3 mặt cầu tâm lần lượt là A, B, C và có $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ cùng bán kính là $\frac{13}{5}$. Xác định số tiếp diện chung của ba mặt cầu trên?

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$ có bán kính $r = 1$ và lần lượt có tâm là các điểm $A(0;3;-1)$, $B(-2;1;-1)$, $C(4;-1;-1)$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên. Mặt cầu S có bán kính nhỏ nhất là

- A. $R = 2\sqrt{2} - 1$ B. $R = \sqrt{10}$ C. $R = 2\sqrt{2}$ D. $R = \sqrt{10} - 1$

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$ và $(S_2): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn (C) . Tìm tọa độ tâm J của đường tròn (C) .

- A. $J\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$ B. $J\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$ C. $J\left(-\frac{1}{3}; \frac{7}{4}; -\frac{1}{4}\right)$ D. $J\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}; -\frac{1}{4}\right)$

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 3a + at \\ y = -2 + t \\ x = 2 + 3a + (1+a)t \end{cases}$. Biết rằng

khi a thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu cố định qua điểm $M(1;1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ . Tìm bán kính mặt cầu đó

A. $5\sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$

D. $3\sqrt{5}$

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y - 2z - 6 = 0$. Cho m là số thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $y = m$ và $x + z - 3 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu (S). Tích tất cả các giá trị mà m có thể nhận được bằng

A. -11

B. -10

C. -5

D. -8

Câu 9. Trong không gian Oxyz, cho các đường thẳng có phương trình $d: \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$, $d': \begin{cases} x=2 \\ y=t' \\ z=1+t' \end{cases}$ và

$\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc Δ và tiếp xúc với hai đường thẳng d, d' .

Phương trình của (S) là

A. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$

B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1$

C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

D. $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

Câu 10. Trong không gian Oxyz, gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$ và đi qua điểm $M(0;3;9)$. Biết điểm I có hoành độ là số nguyên và cách đều hai mặt phẳng $x - 2y + 2z + 2 = 0$, $3x - 2 = 0$. Phương trình của (S) là

A. $(x-6)^2 + (y-9)^2 + (z-13)^2 = \sqrt{88}$

B. $(x-4)^2 + (y-6)^2 + (z-9)^2 = 5$

C. $(x-6)^2 + (y-9)^2 + (z-13)^2 = 88$

D. $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 73$

Câu 11. Trong không gian Oxyz, cho điểm $I(3;4;0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-4}$.

Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 12 là

A. $(x+3)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 25$

B. $(x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 5$

C. $(x-3)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 5$

D. $(x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 25$

Câu 12. Trong không gian Oxyz, mặt cầu (S) tâm $I(2;5;3)$ cắt đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$

tại hai điểm phân biệt A, B với chu vi tam giác IAB bằng $10 + 2\sqrt{7}$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu (S)?

A. $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 100$

B. $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 7$

C. $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 25$

D. $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 28$

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$.

Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy).

A. $l = 2\sqrt{13}$

B. $l = 2\sqrt{41}$

C. $l = 2\sqrt{26}$

D. $l = 2\sqrt{11}$

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): 2x - z - 4 = 0$, $(Q): x - 2y - 2 = 0$ là

A. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$.

B. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{5}$.

C. $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 5$.

D. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{3}$ và $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-9}{3}$. Mặt cầu có một đường kính là đoạn thẳng vuông góc chung của d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\left(x - \frac{16}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + (z-14)^2 = 3$

B. $\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + (z-7)^2 = 12$

C. $\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + (z-7)^2 = 3$

D. $\left(x - \frac{16}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + (z-14)^2 = 12$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;-1)$, mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I nằm trên mặt phẳng (P) , đi qua điểm A và gốc tọa độ O sao cho chu vi tam giác OIA bằng $6 + \sqrt{2}$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 9$

B. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 9$ và $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 9$.

C. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$ và $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 9$.

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 9$ và $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1)$, $N\left(\frac{-8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OMN và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) .

A. $x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$

B. $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$

D. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$ và hai điểm $M(4;-4;2)$, $N(6;0;6)$. Gọi E là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho $EM + EN$ đạt giá trị lớn nhất. Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu (S) tại E .

A. $x - 2y + 2z + 8 = 0$ B. $2x + y - 2z - 9 = 0$ C. $2x + 2y + z + 1 = 0$ D. $2x - 2y + z + 9 = 0$

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$ và hai điểm $A(1;2;0)$, $B(2;3;1)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C . Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

- A. $R = 2\sqrt{3}$ B. $R = 12$ C. $R = 6$ D. $R = \sqrt{6}$

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$ và hai điểm $A(1;1;1)$, $B(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua A , B và tiếp xúc với (P) tại C . Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính R của đường tròn đó.

- A. $R = 4$ B. $R = \frac{2\sqrt{33}}{3}$ C. $R = \frac{2\sqrt{11}}{3}$ D. $R = 6$

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{-1}$ và điểm $A(1;1;1)$. Hai điểm B , C di động trên đường thẳng d sao cho mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt phẳng (OAC) . Gọi điểm B' là hình chiếu vuông góc của điểm B lên đường thẳng AC . Biết rằng quỹ tích các điểm B' là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

- A. $r = \frac{\sqrt{60}}{10}$ B. $r = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ C. $r = \frac{\sqrt{70}}{10}$ D. $r = \frac{3\sqrt{5}}{10}$

Câu 22. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4$ và các điểm $A(-2;0;-2\sqrt{2})$, $B(-4;-4;0)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thuộc (S) và thỏa mãn $MA^2 + \overline{MO} \cdot \overline{MB} = 16$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{7}}{4}$ D. $\frac{5}{2}$

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M thuộc mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$ và ba điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$. Biết rằng quỹ tích các điểm M thỏa mãn $MA^2 + 2\overline{MB} \cdot \overline{MC} = 8$ là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

- A. $r = \sqrt{3}$ B. $r = 6$ C. $r = 3$ D. $r = \sqrt{6}$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(3;1;2)$ và $B(5;7;0)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my - 2(m+1)z + m^2 + 2m + 8 = 0$$

Là phương trình của một mặt cầu (S) sao cho qua hai điểm A , B có duy nhất một mặt phẳng cắt mặt cầu (S) đó theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1.

- A. 1 B. 4 C. 3 D. 2

Câu 25. Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng có phương trình $(\alpha): x - my + z + 6m + 3 = 0$ và $(\beta): mx + y - mz + 3m - 8 = 0$ (với m là tham số thực); hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng Δ . Gọi Δ' là hình chiếu của Δ lên mặt phẳng Oxy. Biết rằng khi m thay đổi thì đường thẳng Δ' luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định có tâm $I(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng Oxy. Tính giá trị biểu thức $P = 10a^2 - b^2 + 3c^2$.

- A. $P = 56$ B. $P = 9$ C. $P = 41$ D. $P = 73$

Câu 26. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8$ và hai điểm $A(4;4;3)$, $B(1;1;1)$. Gọi (C) là tập hợp các điểm $M \in (S)$ để $|MA - 2MB|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết rằng (C) là một đường tròn bán kính R . Tính R .

- A. $\sqrt{7}$ B. $\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$ và hai điểm $A(1;1;1)$, $B(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C . Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó

- A. $R = 4$ B. $R = 6$ C. $R = \frac{2\sqrt{33}}{3}$ D. $R = \frac{2\sqrt{11}}{3}$

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$. Điểm M thay đổi trên mặt phẳng (ABC) và N là điểm trên tia OM sao cho $OM.ON = 12$. Biết rằng khi M thay đổi, điểm N luôn thuộc một mặt cầu cố định. Tính bán kính của mặt cầu đó.

- A. $\frac{7}{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\frac{5}{2}$

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm A, B, C (không trùng O) lần lượt thay đổi trên các trục Ox, Oy, Oz và luôn thỏa mãn điều kiện: tỉ số giữa diện tích của tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{3}{2}$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định, bán kính của mặt cầu đó bằng

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;0;0)$ và $B(3;4;0)$. Với C là điểm nằm trên trục Oz , gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Khi C di động trên trục Oz thì H luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

- A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\sqrt{3}$

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(10;6;-2)$, $B(5;10;-9)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + 2y + z - 12 = 0$. Điểm M di động trên (α) sao cho MA, MB luôn tạo với (α) các góc bằng nhau. Biết rằng M luôn thuộc một đường tròn (ω) cố định. Hoàng độ của tâm đường tròn (ω) bằng

- A. -4 B. $\frac{9}{2}$ C. 2 D. 10

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho tám điểm $A(-2;-2;0)$, $B(3;-2;0)$, $C(3;3;0)$, $D(-2;3;0)$, $M(-2;-2;5)$, $N(3;3;5)$, $P(3;-2;5)$, $Q(-2;3;5)$. Hình đa diện tạo bởi tám điểm đã cho có bao nhiêu mặt đối xứng?

- A. 3 B. 9 C. 8 D. 6

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$?

- A. 3 B. 1 C. 4 D. 8

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(0;0;0)$. Hỏi có bao nhiêu điểm cách đều 4 mặt phẳng $(ABC), (BCD), (CDA), (DAB)$.

- A. 4 B. 5 C. 1 D. 8

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $SABC$ có $S(0;0;1)$, $A(1;0;1)$, $B(0;1;1)$; $C(0;0;2)$.

Hỏi tứ diện $SABC$ có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 6 B. 1 C. 0 D. 3

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;0;-6)$, $B(0;1;-8)$, $C(1;2;-5)$ và $D(4;3;8)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó?

- A. Có vô số B. 1 mặt phẳng. C. 7 mặt phẳng. D. 4 mặt phẳng.

Câu 37. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt cầu có phương trình $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + z = 0$; $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z = 0$ cắt nhau theo một đường tròn (C) nằm trong mặt phẳng (P) . Cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$. Có bao nhiêu mặt cầu tâm thuộc (P) và tiếp xúc với cả ba đường thẳng AB , BC , CA ?

- A. 4 mặt cầu. B. 2 mặt cầu. C. 3 mặt cầu. D. 1 mặt cầu.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;-3)$, $B\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $C(1;1;4)$, $D(5;3;0)$

. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3, (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng $\frac{3}{2}$. Có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với 2 mặt cầu (S_1) , (S_2) đồng thời song song với đường thẳng đi qua 2 điểm C , D .

- A. 1 B. 2 C. 4 D. Vô số.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm A , B và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

- A. 1 mặt phẳng. B. 2 mặt phẳng. C. 0 mặt phẳng. D. Vô số mặt phẳng.

Câu 40. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng: $d_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}$,

$d_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$, $d_3: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$, $d_4: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}$. Số đường thẳng trong không gian cắt cả bốn đường thẳng trên là

- A. 0 B. 2 C. Vô số. D. 1

Câu 41. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + m = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (T) có chu vi bằng $4\pi\sqrt{3}$.

- A. 3 B. 4 C. 2 D. 1

Câu 42. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;1)$; $N(-1;0;-1)$. Có bao nhiêu mặt phẳng qua M , N cắt trục Ox , trục Oy lần lượt tại A , B ($A \neq B$) sao cho $AM = \sqrt{3}BN$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. Vô số

Câu 43. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;3)$, $B(2;1;0)$, $C(4;3;-2)$, $D(3;4;1)$, $E(1;1;-1)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng cách đều 5 điểm trên?

- A. 1 B. 4 C. 5 D. Không tồn tại.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$ và điểm $M(2; -1; 0)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với mp (Oxy) tại điểm M . Hỏi có bao nhiêu mặt cầu thỏa mãn?

- A. 2 B. 1 C. 0 D. Vô số.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn đường thẳng: $d_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}$, $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$, $d_3: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$, $d_4: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Số đường thẳng trong không gian cắt cả bốn đường thẳng trên là

- A. 0 B. 2 C. Vô số. D. 1

Câu 46. Có bao nhiêu mặt cầu (S) có tâm thuộc đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-2}$ đồng thời tiếp xúc với hai mặt phẳng $(\alpha_1): 2x+2y+z-6=0$ và $(\alpha_2): x-2y+2z=0$

- A. 1 B. 0 C. Vô số. D. 2

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;6)$, $D(1;1;1)$. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D ?

- A. 6 B. 10 C. 7 D. 5

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A , bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B, C và bán kính bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$.

- A. 5 B. 7 C. 6 D. 8

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng chứa hai điểm A, B và tiếp xúc với (S) .

- A. 3 B. 0 C. 1 D. 2

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(1;3;-2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$.

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 3

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho 5 điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;3;0)$, $C(2;3;-1)$, $D(3;2;5)$, $E(3;4;0)$. Tìm số mặt phẳng cách đều 5 điểm A, B, C, D, E .

- A. 0 B. 3 C. 5 D. 1

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;0;3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) qua điểm M và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $3OA = 2OB = OC \neq 0$.

- A. 3 B. 2 C. 4 D. 8

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$ và điểm $A(1;2;3)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu theo ba đường tròn. Tính tổng diện tích của ba đường tròn tương ứng đó.

- A. 10π B. 38π C. 33π D. 36π

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxyz, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overline{MA.MB} = \overline{MC.MD} = 1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

- A. $r = \frac{\sqrt{11}}{2}$ B. $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$ C. $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng $(P): x+2y+2z-6=0$. Trong (P) lấy điểm M và xác định điểm N thuộc đường thẳng OM sao cho $\overline{ON.ON} = 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Điểm N luôn thuộc mặt cầu có phương trình $\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$.
 B. Điểm N luôn thuộc mặt cầu có phương trình $\left(x-\frac{1}{12}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{16}$.
 C. Điểm N luôn thuộc mặt phẳng có phương trình $x+2y+2z-1=0$.
 D. Điểm N luôn thuộc mặt phẳng có phương trình $x+2y+2z+1=0$.

Câu 56. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ và điểm $A(1;1;-1)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua điểm A và đôi một vuông góc với nhau, cắt (S) theo giao tuyến là ba đường tròn. Tổng diện tích của hình tròn đó bằng

- A. 12π B. 3π C. 22π D. 11π

Câu 57. Biết rằng có n mặt phẳng có phương trình tương ứng là $(P_i): x+a_iy+b_iz+c_i=0$ ($i=1,2,...,n$) đi qua $M(1;2;3)$ (nhưng không đi qua O) và cắt các trục tọa độ Ox , Oy , Oz theo thứ tự tại A , B , C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều. Tính tổng $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

- A. $S = 3$ B. $S = 1$ C. $S = -4$ D. $S = -1$

Câu 58. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(P): x-y+2z+1=0$, $(Q): 2x+y+z-1=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành, đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r . Xác định r sao cho chỉ có đúng một mặt cầu (S) thỏa yêu cầu.

- A. $r = \sqrt{3}$ B. $r = \sqrt{\frac{3}{2}}$ C. $r = \sqrt{2}$ D. $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Câu 59. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(0;2;2)$, $B(2;-2;0)$. Gọi $I_1(1;1;-1)$ và $I_2(3;1;1)$ là tâm của hai đường tròn nằm trên hai mặt phẳng khác nhau và có chung một dây cung AB . Biết rằng luôn có một mặt cầu (S) đi qua cả hai đường tròn ấy. Tính bán kính R của (S) .

A. $R = \frac{\sqrt{219}}{3}$

B. $R = 2\sqrt{2}$

C. $R = \frac{\sqrt{129}}{3}$

D. $R = 2\sqrt{6}$

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$. Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ chứa d và tiếp xúc với (S) . Gọi M và N là tiếp điểm. Độ dài đoạn thẳng MN bằng?

A. $2\sqrt{2}$

B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. 4

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;-1)$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-3=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I nằm trên mặt phẳng (P) , đi qua điểm A và gốc tọa độ O sao cho diện tích tam giác OIA bằng $\frac{\sqrt{17}}{2}$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $R=3$

B. $R=9$

C. $R=1$

D. $R=5$

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Tọa độ điểm M trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được 3 tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn $AMB = 60^\circ, BMC = 90^\circ, CMA = 120^\circ$ có dạng $M(a;b;c)$ với $a < 0$. Tổng $a+b+c$ bằng?

A. $\frac{10}{3}$

B. 2

C. -2

D. 1

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$, mặt phẳng $(\alpha): x-y+z-4=0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A , vuông góc với (α) và đồng thời (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tọa độ giao điểm M của (P) và trục $x'Ox$ là

A. $M\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$

B. $M\left(-\frac{1}{3}; 0; 0\right)$

C. $M(1; 0; 0)$

D. $M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$

Câu 64. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3), B(-3;-2;-5)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $AM^2 + BM^2 = 30$ là một mặt cầu (S) . Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(-2;-2;-8); R=3$.

B. $I(-1;-1;-4); R=\sqrt{6}$.

C. $I(-1;-1;-4); R=3$.

D. $I(-1;-1;-4); R=\frac{\sqrt{30}}{2}$

Câu 65. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $(S): x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ có

bán kính $R = \sqrt{19}$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5+t \\ y = -2-4t \\ z = -1-4t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 3x-y-3z-1=0$. Trong các số

$\{a; b; c; d\}$ theo thứ tự dưới đây, số nào thỏa mãn $a + b + c + d = 43$, đồng thời tâm I của (S) thuộc đường thẳng d và (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) ?

- A. $\{-6; -12; -14; 75\}$. B. $\{6; 10; 20; 7\}$. C. $\{-10; 4; 2; 47\}$. D. $\{3; 5; 6; 29\}$.

Câu 66. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T và T' . Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .

- A. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$ B. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$ C. $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$ D. $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$

Câu 67. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): z - 2 = 0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính r của mặt cầu (S) có tâm thuộc trục Oz , cắt (Oxy) và (P) lần lượt theo giao tuyến là hai đường tròn có bán kính bằng 2 và 8.

- A. $\begin{cases} I(0; 0; -16) \\ r = \sqrt{65} \end{cases}$ B. $\begin{cases} I(0; 0; -16) \\ r = 2\sqrt{65} \end{cases}$ C. $\begin{cases} I(0; 0; 16) \\ r = \sqrt{65} \end{cases}$ D. $\begin{cases} I(0; 0; -16) \\ r = 2\sqrt{65} \end{cases}$

Câu 68. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, xét hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2} \text{ và } d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$$

Gọi (S) là mặt cầu thay đổi tiếp xúc với cả hai đường thẳng đã cho. Tính bán kính nhỏ nhất của (S)

- A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{6}$ D. $\sqrt{6}$

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$ và hai điểm $A(3; 4; 1), B(7; -4; -3)$. Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + (\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB})^2 = 96$ và $MA \cdot MB$ đạt giá trị lớn nhất. Tính y_0 ?

- A. $y_0 = \frac{7}{3}$. B. $y_0 = \frac{5}{3}$. C. $y_0 = \frac{-8}{3}$. D. $y_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $H(\sin a \cos b; \sin b \cos a; \cos a)$. Mặt phẳng (α) qua H cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC . Mặt cầu tâm O tiếp xúc với (α) có phương trình là

- A. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ B. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ C. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ D. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

Câu 71. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $H(a; b; c)$ với a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $ab + ac + bc = -1$. Mặt phẳng (α) qua H cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC . Mặt cầu tâm O tiếp xúc với (α) có bán kính nhỏ nhất bằng.

- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 4y + 2mz + m^2 + 4m = 0.$$

Với mỗi giá trị của m để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu. Tìm bán kính nhỏ nhất $R_{\min}$ của mặt cầu.

A. $R_{\min} = 3$ B. $R_{\min} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ C. $R_{\min} = \sqrt{3}$ D. $R_{\min} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x \cos \alpha - 2y \sin \alpha - 4z - (4 + \sin^2 \alpha) = 0.$$

Với mỗi giá trị của α để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu. Gọi R_1 là bán kính nhỏ nhất của mặt cầu đó; R_2 là bán kính lớn nhất của mặt cầu đó. Tính tỉ số $\frac{R_2}{R_1}$

A. $\frac{R_2}{R_1} = \frac{10}{9}$ B. $\frac{R_2}{R_1} = \frac{5}{4}$ C. $\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;3;-1), B(-2;1;1), C(4;1;7)$. Hỏi mặt cầu đi qua bốn điểm O, A, B, C có bán kính là ?

A. $\frac{9}{2}$ B. $\frac{\sqrt{77}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{115}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{83}}{2}$

Câu 75. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = m - mt \\ z = -m + (m-1)t \end{cases}$. Biết rằng tồn tại một mặt

cầu cố định đi qua điểm $B(5;4;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ khi tham số thực m thay đổi. Bán kính của mặt cầu (S) bằng

A. 4 B. $4\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 3

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;4)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-3}{1}$. Điểm M chạy trên đường thẳng d và điểm N nằm trên tia đối của tia MA sao cho $AM \cdot AN = 6$. Quỹ tích điểm N là đường cong có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. π D. $\frac{4\pi}{3}$

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 9 = 0$. Điểm M di động trên mặt phẳng (P) , điểm N nằm trên tia AM sao cho: $AM \cdot AN = 24$. Quỹ tích điểm N là một mặt cầu cố định có phương trình là?

A. $\left(x - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = 16.$ B. $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{3}\right)^2 = 25.$
C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 36.$ D. $(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25.$

Câu 78. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(m;0;0), B(0;n;0), C(0;0;2), D(1;2;1)$. Biết rằng hai số thực m và n thỏa mãn điều kiện $m+n=2$. Khi m, n thay đổi tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với (ABC) và qua điểm D . Tổng bán kính của hai mặt cầu bằng:

A. 5. B. 13
C. 10 D. 25

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(m,0,0), B(0;n,0), C(0;0;1), D(2;1;4+2\sqrt{2})$. Biết rằng hai số thực dương m, n thỏa mãn điều kiện: $m+n=1$. Khi m, n thay đổi tồn tại duy nhất

một mặt cầu cố định có bán kính R tiếp xúc với (ABC) và đi qua điểm D . Bán kính R nằm trong khoảng nào dưới đây?

- A. (4;5) B. (0;2)
C. (2;4) D. (5;7)

Câu 80. Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(m, 0, 0), B(0; n; 0), C(0; 0; 3), D(1; 1; p)$. Biết rằng hai số thực dương m, n thỏa mãn điều kiện $m + n = 3$; p là số thực dương. Khi m, n thay đổi tồn tại duy nhất một mặt cầu cố định tiếp xúc với (ABC) và đi qua điểm D . Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của p . Tổng tất cả các phần tử của S là

- A. 4 B. 3
C. 0 D. 2

Câu 81. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$ và điểm $A(2; 2; 1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A và tiếp xúc với (S) . Khoảng cách lớn nhất tính từ O đến (P) nằm trong khoảng

- A. (0;1) B. (1;3)
C. (3;4) D. (4;5)

Câu 82. Trong không gian Oxyz, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 16$ và $(S_2): x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 16$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả hai mặt cầu trên. Điểm $A(2; 1; 1)$ cách mặt phẳng (P) một khoảng cách lớn nhất bằng

- A. 6 B. $4 + \sqrt{5}$
C. $4 + 2\sqrt{3}$ D. 8

Câu 83. Trong không gian Oxyz, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 16$ và $(S_2): (x - 3)^2 + y^2 + z^2 = 16$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả hai mặt cầu trên. Khi điểm $A(2; 3; 4)$ cách mặt phẳng (P) một khoảng lớn nhất thì phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax + by + 4z + d = 0$. Giá trị của biểu thức $a - 4b + d$ bằng

- A. 8 B. 6
C. 0 D. 12

Câu 84. Trong không gian Oxyz, cho ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$ có tâm lần lượt là $I_1(0; 0; 1), I_2(2; 1; 0), I_3(1; 0; 3)$ và có bán kính lần lượt là $R_1 = 2; R_2 = 3; R_3 = 4$. Số mặt phẳng cùng tiếp xúc với ba mặt cầu là

- A. 4 B. 3
C. 2 D. 8

Câu 85. Trong không gian Oxyz, cho ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$ có tâm lần lượt là $I_1(0; 0; 1), I_2(2; 1; 0), I_3(1; 0; 3)$ và có bán kính lần lượt là $R_1 = 2, R_2 = 3, R_3 = 4$. Số mặt phẳng cùng tiếp xúc với cả ba mặt cầu là?

- A. 4 B. 3
C. 2 D. 8

Câu 86. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt cầu có tâm lần lượt là $I_1(0;0;1), I_2(0;0;2), I_3(0;0;6)$ và có bán kính lần lượt là $R_1=1, R_2=1, R_3=2$. Số mặt phẳng cùng tiếp xúc với ba mặt cầu là

- A. 0
B. 1
C. 2
D. 4

Câu 87. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$ có tâm lần lượt là $I_1(1;0;0), I_2(3;0;0), I_3(m;0;0)$ và có bán kính lần lượt là $R_1=1, R_2=2, R_3=5$. Gọi X là tập hợp chứa tất cả giá trị nguyên của m để tồn tại vô số mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả ba mặt cầu đã cho. Tổng tất cả các phần tử của X bằng?

- A. -2
B. 0
C. 20
D. -14

Câu 88. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$ có tâm lần lượt là $I_1(1;0;1), I_2(0;2;0), I_3(1;4;2)$ và có bán kính lần lượt là $R_1=1, R_2=2, R_3=3$. Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu đã cho sao cho (P) cắt Ox tại điểm có hoành độ dương. Biết mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+z+d=0$, với $b>-1$, tính giá trị biểu thức $2a+b+d$.

- A. $12-2\sqrt{13}$
B. 14
C. $-9+\sqrt{22}$
D. $-10+3\sqrt{5}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, mặt cầu tâm $I(2;5;3)$ cắt đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B với chu vi tam giác IAB bằng $14 + 2\sqrt{31}$ có phương trình

A. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 49$

B. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 196$

C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 31$

D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 124$

Lời giải

Gọi R ($R > 0$) là bán kính của mặt cầu cần tìm. Ta có d đi qua điểm $M(1;0;2)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;1;2)$.

Gọi H là hình chiếu của I lên d ta có $IH = d(I; d) = \frac{|\overrightarrow{MI}; \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 3\sqrt{2}$.

Suy ra $AB = 2\sqrt{R^2 - IH^2} = 2\sqrt{R^2 - 18}$.

Từ đó ta có $2R + 2\sqrt{R^2 - 18} = 14 + 2\sqrt{31} \Leftrightarrow R + \sqrt{R^2 - 18} = 7 + \sqrt{31}$

$$\Leftrightarrow (R-7) + \sqrt{R^2 - 18} - \sqrt{31} = 0 \Leftrightarrow (R-7) \left(1 + \frac{R+7}{\sqrt{R^2 - 18} + \sqrt{31}} \right) = 0 \Leftrightarrow R = 7.$$

Suy ra phương trình mặt cầu $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 49$.

Chọn ý A.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC nhọn có $H(2;2;1)$, $K\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, O lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên các cạnh BC, AC, AB .

Gọi I là trực tâm tam giác ABC . Phương trình mặt cầu (S) tâm A , đi qua điểm I là?

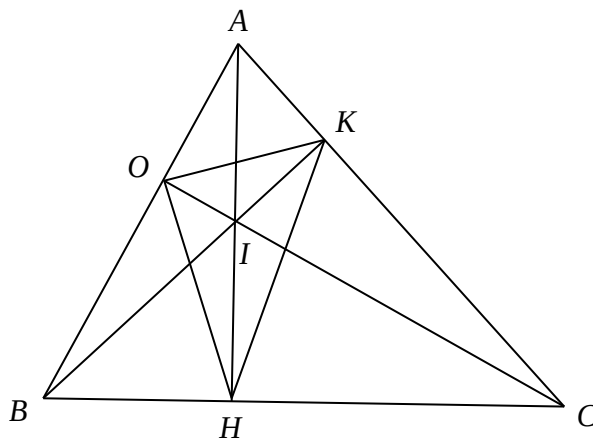
A. $(S): (x+4)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 20$

B. $(S): (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$

C. $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 20$

D. $(S): (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$

Lời giải



Trong mặt phẳng (ABC) , ta có tứ giác $AOIK$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AI , do đó $KAI = KOI$ (1) (cùng chắn cung KI). Ta cũng có tứ giác $ACHO$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AC , do đó $KAI = HOI$ (2) (cùng chắn cung HC).

Từ (1) và (2) suy ra $KOI = HOI$, hay IO là phân giác trong của góc KOH .

Tương tự, HI là phân giác trong của góc KHO .

Như vậy, điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OHK .

Ta có $OH = 3$, $OK = 4$, $HK = 5$.

Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OHK nên $HK \cdot \overrightarrow{IO} + OK \cdot \overrightarrow{IH} + OH \cdot \overrightarrow{IK} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{IO} + 4\overrightarrow{IH} + 3\overrightarrow{IK} = \vec{0} \Rightarrow I(0;1;1).$$

Đường thẳng AH có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{IH} = (2;1;0)$ nên phương trình AH là
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = 1 \end{cases}$$

Vì $A \in AH$ nên $A(2t;1+t;1) \Rightarrow \overrightarrow{OA}(2t;1+t;1)$.

Mà $OI \perp OA$ nên $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot (2t) + 1 \cdot (1+t) + 1 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow A(-4;-1;1)$.

Như vậy $AI = \sqrt{20}$. Vậy, phương trình mặt cầu (S) tâm A , đi qua điểm I là

$$(S): (x+4)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 20.$$

Chọn ý A.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$, $D(2;-2;0)$. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O , A , B , C , D ?

A. 7

B. 5

C. 6

D. 10

Lời giải

Ta thấy A , B , C lần lượt thuộc các trục tọa độ Ox , Oy , Oz . Phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1. \text{ Rõ ràng } D \in (ABC).$$

Ta cũng có $\overrightarrow{AB} = (-1;2;0)$ và $\overrightarrow{AD} = (1;-2;0)$ nên $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AD}$, suy ra D nằm trên đường thẳng AB .

Bởi vậy, có 5 mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O , A , B , C , D là

(OAB) , (OBC) , (OAC) , (ABC) và (OCD) .

Câu 4. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;2;0)$, $B(5;4;4)$, $C\left(\frac{11}{3}; \frac{22}{3}; -\frac{16}{3}\right)$. Gọi (S_1) , (S_2) , (S_3) là 3 mặt cầu tâm lần lượt là A , B , C và có $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

cùng bán kính là $\frac{13}{5}$. Xác định số tiếp diện chung của ba mặt cầu trên?

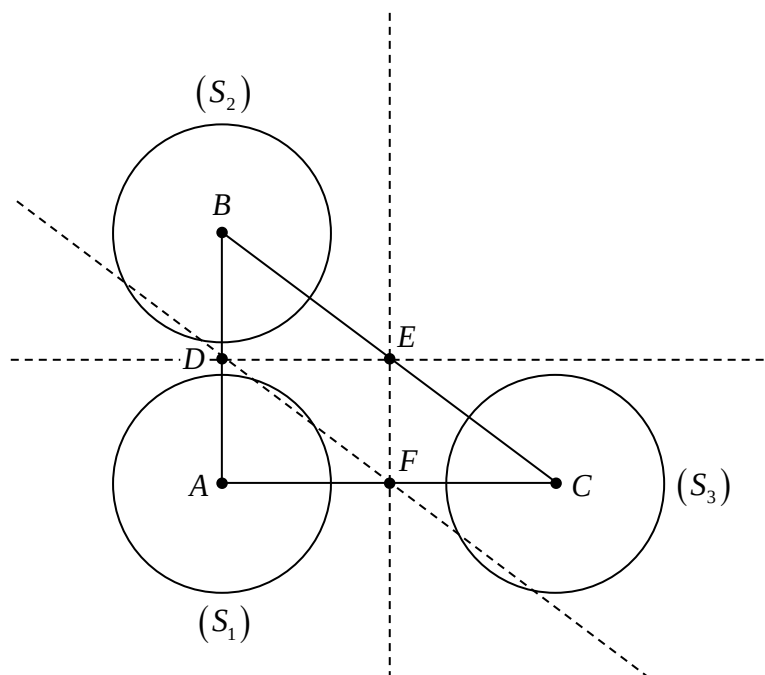
A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

Lời giải



Nhận xét. Trong không gian, cho điểm A và đường thẳng Δ , khi đó có đúng hai mặt phẳng (P) chứa Δ và cách A một khoảng là h nếu $h < d(A; \Delta)$ và không có mặt phẳng nào chứa Δ và cách A một khoảng là h nếu $h > d(A; \Delta)$.

Xét mặt phẳng (α) đi qua các điểm A, B, C . Ta có $AB = 6; AC = 8; BC = 10$. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, AC .

Mặt phẳng (P) xác định như sau

- Đi qua D, E : Ta có $d(B; DE) = BD = \frac{1}{2}AB = 3 > \frac{13}{5}$ nên có 2 mặt phẳng tiếp xúc với cả 3 mặt cầu như nhận xét trên.
- Đi qua E, F : Ta có $d(C; EF) = CF = \frac{1}{2}AC = 4 > \frac{13}{5}$ có 2 mặt phẳng tiếp xúc với cả 3 mặt cầu như nhận xét trên.
- Đi qua D, F : Ta có $d(A; DF) = \frac{1}{2}d(A; BC) = \frac{12}{5} < \frac{13}{5}$ nên không có mặt phẳng nào tiếp xúc với cả 3 mặt cầu như nhận xét trên.

Hơn nữa $(S_1), (S_2), (S_3)$ có cùng bán kính nên có 2 mặt phẳng tiếp xúc với chúng và song song với mặt phẳng (ABC) .

Vậy có tất cả 6 tiếp diện chung của ba mặt cầu.

Chọn ý A.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho các mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$ có bán kính $r = 1$ và lần lượt có tâm là các điểm $A(0; 3; -1), B(-2; 1; -1), C(4; -1; -1)$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên. Mặt cầu S có bán kính nhỏ nhất là

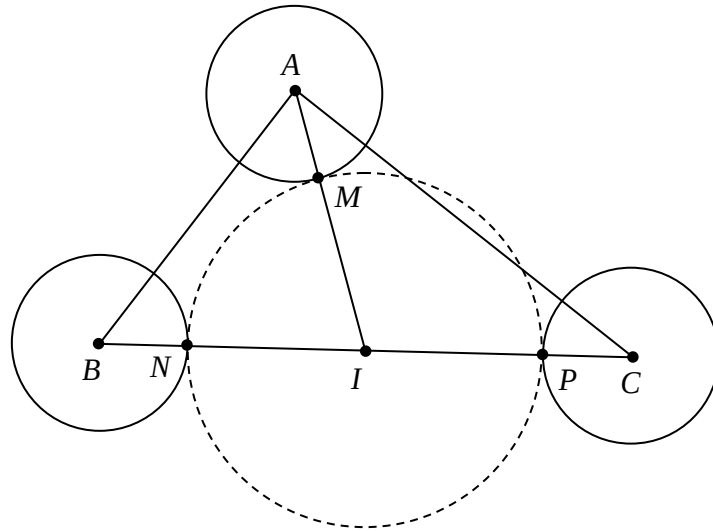
A. $R = 2\sqrt{2} - 1$

B. $R = \sqrt{10}$

C. $R = 2\sqrt{2}$

D. $R = \sqrt{10} - 1$

Lời giải



Ta có $AB = \sqrt{8}$, $AC = \sqrt{32}$, $BC = \sqrt{40}$ nên tam giác ABC vuông tại A . Gọi I là trung điểm của BC , khi đó $IM = IN = IP = \sqrt{10} - 1$. Do đó mặt cầu (S) thỏa mãn đề bài là mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{10} - 1$.

Chọn ý **D**.

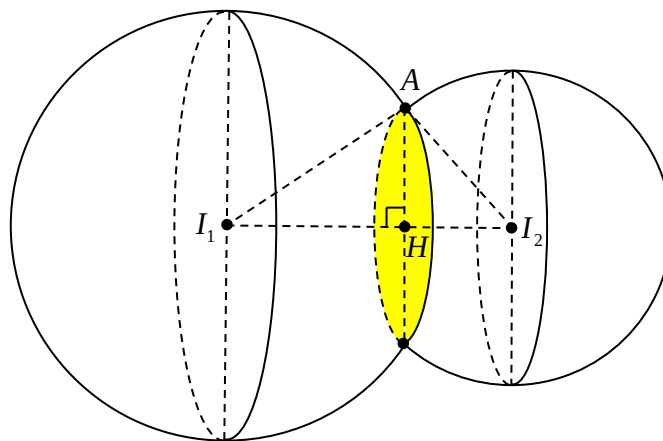
Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$ và $(S_2): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn (C) . Tìm tọa độ tâm J của đường tròn (C) .

- A. $J\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$ B. $J\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$ C. $J\left(-\frac{1}{3}; \frac{7}{4}; -\frac{1}{4}\right)$ D. $J\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}; -\frac{1}{4}\right)$

Lời giải

(S_1) và (S_2) có tâm và bán kính lần lượt là $I_1(1; 1; 2)$, $R_1 = 4$ và $I_2(-1; 2; -1)$, $R_2 = 3$

Gọi I là tâm của đường tròn giao tuyến (C) và A là một điểm thuộc (C) .



$$\text{Ta có } I_1I = I_1A \cdot \cos \angle AI_1I = R_1 \cdot \cos \angle AI_1I_2 = R_1 \cdot \frac{I_1A^2 + I_1I_2^2 - AI_2^2}{2 \cdot I_1A \cdot I_1I_2} = 4 \cdot \frac{4^2 + \sqrt{14}^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{14}} = \frac{21}{2\sqrt{14}}$$

$$\overrightarrow{I_1 I} = \frac{|\overrightarrow{I_1 I}|}{|\overrightarrow{I_1 I_2}|} \overrightarrow{I_1 I_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{I_1 I} = \frac{21}{\sqrt{14}} \overrightarrow{I_1 I_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{I_1 I} = \frac{3}{4} \overrightarrow{I_1 I_2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{3}{4}(-1-1) \\ y-1 = \frac{3}{4}(2-1) \\ z-2 = \frac{3}{4}(-1-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{7}{4} \\ z = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Chọn ý **D**.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 3a + at \\ y = -2 + t \\ x = 2 + 3a + (1+a)t \end{cases}$. Biết rằng

khi a thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu cố định qua điểm $M(1;1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ . Tìm bán kính mặt cầu đó

A. $5\sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$

D. $3\sqrt{5}$

Lời giải

Từ đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 3a + at \\ y = -2 + t \\ x = 2 + 3a + (1+a)t \end{cases} \Rightarrow x + y - z + 3 = 0$

Ta có Δ luôn qua điểm $A(1; -5; -1)$ cố định và Δ nằm trong mặt phẳng $(P): x + y - z + 3 = 0$

Mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng Δ với mọi a . Nên mặt cầu tiếp xúc mặt phẳng (P) tại A .

Đường thẳng IA qua A và vuông góc (P) có phương trình $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -5 + t \\ z = -1 - t \end{cases} \Rightarrow I(1+t; -5+t; -1-t)$

Mà $IA = IM \Leftrightarrow t^2 + t^2 + t^2 = t^2 + (t-6)^2 + (t+2)^2 \Leftrightarrow t = 5$ vậy $I(6; 0; -6) \Rightarrow R = IM = 5\sqrt{3}$

Chọn ý **A**.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y - 2z - 6 = 0$. Cho m là số thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $y = m$ và $x + z - 3 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu (S) . Tích tất cả các giá trị mà m có thể nhận được bằng

A. -11

B. -10

C. -5

D. -8

Lời giải

Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y - 2z - 6 = 0$ có tâm $I(2; -5; 1)$ và bán kính $R = 6$.

Giao tuyến của hai mặt phẳng $y = m$ và $x + z - 3 = 0$ là đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = m \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Δ đi qua $A(0; m; 3)$ và có một véc tơ chỉ phương

$$\vec{u} = (1; 0; -1), \quad \overrightarrow{IA} = (-2; m+5; 2), \quad [\overrightarrow{IA}, \vec{u}] = (-m-5; 0; -m-5).$$

Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{\left| \overrightarrow{IA}, \vec{u} \right|}{\left| \vec{u} \right|} = 6 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2(m+5)^2}}{\sqrt{2}} = 6 \Leftrightarrow m^2 + 10m - 11 = 0.$$

Vậy tích $m_1.m_2 = -11$.

Chọn ý A.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng có phương trình $d: \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$, $d': \begin{cases} x=2 \\ y=t' \\ z=1+t' \end{cases}$ và

$\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc Δ và tiếp xúc với hai đường thẳng d, d' .

Phương trình của (S) là

A. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$

B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1$

C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

D. $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

Lời giải

Đường thẳng Δ có phương trình tham số là: $\Delta: \begin{cases} x=1+m \\ y=m \\ z=1+m \end{cases}$.

Gọi I là tâm mặt cầu (S) ta có $I(m+1; m; m+1)$.

Đường thẳng d đi qua $A(1;1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (0;0;1) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (m; m-1, m+1)$.

Đường thẳng d' đi qua $B(2;0;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (0;1;1) \Rightarrow \overrightarrow{BI} = (m-1; m, m)$.

Do (S) tiếp xúc với hai đường thẳng d, d' nên ta có: $d(I; d) = d(I; d') = R$

$$\frac{\left| \overrightarrow{IA}, \vec{u}_1 \right|}{\left| \vec{u}_1 \right|} = \frac{\left| \overrightarrow{IB}, \vec{u}_2 \right|}{\left| \vec{u}_2 \right|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(m-1)^2 + m^2}}{1} = \frac{\sqrt{(m-1)^2 + (m-1)^2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = 0$$

$\Rightarrow I(1;0;1)$ và $R = 1$. Phương trình của mặt cầu (S) là $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

Chọn ý A.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$

và đi qua điểm $M(0;3;9)$. Biết điểm I có hoành độ là số nguyên và cách đều hai mặt phẳng

$x-2y+2z+2=0, 3x-2=0$. Phương trình của (S) là

A. $(x-6)^2 + (y-9)^2 + (z-13)^2 = \sqrt{88}$

B. $(x-4)^2 + (y-6)^2 + (z-9)^2 = 5$

C. $(x-6)^2 + (y-9)^2 + (z-13)^2 = 88$

D. $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 73$

Lời giải

Vì tâm I thuộc đường thẳng $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$ nên $I = (2t; 3t; 1+4t)$.

$$\text{Ta có } \frac{|(2t) - 2(3t) + 2(1+4t) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|3(2t) - 2|}{\sqrt{3^2}} \Leftrightarrow |2t + 2| = |3t - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \Rightarrow I(6; 9; 13) \\ t = -\frac{1}{5} \Rightarrow I\left(-\frac{2}{5}; -\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right) \end{cases}$$

Vì điểm I có hoành độ là số nguyên, do đó $I(6; 9; 13)$

$$\Rightarrow IM = \sqrt{(-6)^2 + (3-9)^2 + (9-13)^2} = \sqrt{88}.$$

Vậy, phương trình mặt cầu cần lập là $(x-6)^2 + (y-9)^2 + (z-13)^2 = 88$.

Chọn ý **C**.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3; 4; 0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-4}$.

Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 12 là

A. $(x+3)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 25$

B. $(x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 5$

C. $(x-3)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 5$

D. $(x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 25$

Lời giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1; 2; -1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; -4)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IM} = (-2; -2; -1) \Rightarrow [\overrightarrow{IM}, \vec{u}] = (9; -9; 0) \Rightarrow \left| [\overrightarrow{IM}, \vec{u}] \right| = 9\sqrt{2}.$$

$$\text{Khoảng cách từ } I \text{ đến đường thẳng } \Delta \text{ là } d(I, \Delta) = \frac{\left| [\overrightarrow{IM}, \vec{u}] \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = 3.$$

$$\text{Diện tích tam giác } IAB \text{ bằng 12 nên } AB = \frac{2S_{IAB}}{d(I, \Delta)} = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8.$$

$$\text{Bán kính mặt cầu } (S) \text{ là } R = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + [d(I, \Delta)]^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

$$\text{Phương trình mặt cầu } (S) \text{ cần lập là } (x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 25.$$

Chọn ý **D**.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(2; 5; 3)$ cắt đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$

tại hai điểm phân biệt A, B với chu vi tam giác IAB bằng $10 + 2\sqrt{7}$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu (S) ?

A. $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 100$

B. $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 7$

C. $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 25$

D. $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 28$

Lời giải

Gọi R là bán kính của mặt cầu, H là trung điểm của AB .

$$\text{Ta có } IH \perp AB \Rightarrow IH = d(I; d).$$

d qua $M(1;0;2)$ và có VTCP $\vec{u}=(2;1;2)$, $\vec{IM}=(-1;-5;-1)$.

$$\Rightarrow [\vec{u}; \vec{IM}] = (9;0;-9) \Rightarrow IH = \frac{||[\vec{u}, \vec{IM}]]||}{||\vec{u}||} = 3\sqrt{2}$$

Ta có $AB = 2AH = 2\sqrt{R^2 - IH^2} = 2\sqrt{R^2 - 18}$, $R > 3\sqrt{2}$.

Chu vi ΔABC là $IA + IB + AB = 10 + 2\sqrt{7} \Rightarrow 2R + 2\sqrt{R^2 - 18} = 10 + 2\sqrt{7}$

$$\Leftrightarrow R + \sqrt{R^2 - 18} = 5 + \sqrt{7} \Leftrightarrow R - 5 + \frac{R^2 - 25}{\sqrt{R^2 - 18} + \sqrt{7}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (R-5) \left(1 + \frac{R+5}{\sqrt{R^2 - 18} + \sqrt{7}} \right) = 0 \Leftrightarrow R = 5.$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;5;3)$, bán kính $R = 5$.

Phương trình mặt cầu (S) là: $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 25$.

Chú ý: $\underbrace{R + \sqrt{R^2 - 18} - 5 - \sqrt{7}}_{f(R)} = 0$ có $f'(R) = 1 + \frac{R}{\sqrt{R^2 - 18}} > 0$ với mọi $R > 3\sqrt{2}$ nên phương trình

có nghiệm duy nhất $R = 5$.

Chọn ý C.

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .

A. $l = 2\sqrt{13}$

B. $l = 2\sqrt{41}$

C. $l = 2\sqrt{26}$

D. $l = 2\sqrt{11}$

Lời giải

Gọi tâm mặt cầu là: $I(x; y; 0)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + 1^2} \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + 3^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2 + 4^2 = (y+3)^2 + 1^2 \\ x^2 - 2x + 1 + 16 = x^2 - 4x + 4 + 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 10 \\ 2x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow l = 2R = 2\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 4^2} = 2\sqrt{26}. \end{aligned}$$

Chọn ý C.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): 2x - z - 4 = 0$, $(Q): x - 2y - 2 = 0$ là

A. $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$.

B. $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\sqrt{5}$.

C. $(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=5$.

D. $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3$.

Lời giải

Gọi I là tâm mặt cầu (S) . Khi đó $I(t;1+t;2+t)$ và ta có

$$d(I,(P))=d(I,(Q)) \Leftrightarrow \frac{|2t-(2+t)-4|}{\sqrt{5}} = \frac{|t-2(1+t)-2|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |t-6|=|-t-4| \Leftrightarrow t=1.$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=d(I,(P))=\frac{|2 \cdot 1-(2+1)-4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

Do đó mặt cầu (S) có phương trình $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$.

Chọn ý **A**.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{3}$ và

$d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-9}{3}$. Mặt cầu có một đường kính là đoạn thẳng vuông góc chung của d_1 và d_2

có phương trình là

A. $\left(x-\frac{16}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+(z-14)^2=3$

B. $\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+(z-7)^2=12$

C. $\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+(z-7)^2=3$

D. $\left(x-\frac{16}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+(z-14)^2=12$

Lời giải

Vectơ chỉ phương của d_1 và d_2 lần lượt là $\vec{u}_1=(2;1;3)$, $\vec{u}_2=(1;2;3)$.

Gọi AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 với $A \in d_1$, $B \in d_2$.

Suy ra $A(-1+2a;-1+a;-1+3a)$; $B(2+b;2b;9+3b)$.

Khi đó $\overrightarrow{AB}=(-2a+b+3;-a+2b+1;-3a+3b+10)$.

Vì AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_1 \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14a-13b=37 \\ 13a-14b=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{7}{3} \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\left(\frac{11}{3};\frac{4}{3};6\right) \\ B\left(\frac{5}{3};-\frac{2}{3};8\right) \end{cases} \Rightarrow AB=2\sqrt{3}.$$

Gọi I là tâm mặt cầu (S) có đường kính là AB . Suy ra $I\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3};7\right)$ và $R=\frac{1}{2}AB=\sqrt{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S):\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+(z-7)^2=3$.

Chọn ý **C**.

Câu 16. Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1;0;-1)$, mặt phẳng $(P):x+y-z-3=0$. Mặt cầu (S) có tâm I nằm trên mặt phẳng (P) , đi qua điểm A và góc tọa độ O sao cho chu vi tam giác OIA bằng $6+\sqrt{2}$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x+2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=9$

B. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 9$ và $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 9$.

C. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$ và $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 9$.

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 9$ và $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Lời giải

Giả sử $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$).

Ta có (S) có $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ và tâm $I(a; b; c) \in (P) \Rightarrow a + b - c - 3 = 0$ (1)

(S) qua A và O nên $\begin{cases} 2 - 2a + 2c + d = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 - a + c = 0$ (2) $\Rightarrow c = a - 1$.

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta suy ra $b = 2$. Từ đó, suy ra $I(a; 2; a-1)$.

Chu vi tam giác OIA bằng $6 + \sqrt{2}$ nên $OI + OA + AI = 6 + \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2a^2 - 2a + 5} = 6 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}.$$

Với $a = -1 \Rightarrow I(-1; 2; -2) \Rightarrow R = 3$. Do đó $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 9$.

+ Với $a = 2 \Rightarrow I(2; 2; 1) \Rightarrow R = 3$. Do đó $(S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Chọn ý **D**.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2; 2; 1)$, $N\left(\frac{-8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OMN và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) .

A. $x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$

B. $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$

D. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$

Lời giải

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN .

Ta áp dụng tính chất sau: “Cho tam giác OMN với I là tâm đường tròn nội tiếp, ta có

$$a\vec{IO} + b\vec{IM} + c\vec{IN} = \vec{0}, \text{ với } a = MN, b = ON, c = OM$$

Ta có $OM = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$, $ON = \sqrt{\left(\frac{-8}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = 4$.

Và $MN = \sqrt{\left(\frac{-8}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 1\right)^2} = 5$.

$$\text{Ta có } 5\vec{IO} + 4\vec{IM} + 3\vec{IN} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{5.0 + 4.2 + 3.\left(\frac{-8}{3}\right)}{3+4+5} = 0 \\ y_I = \frac{5.0 + 4.2 + 3.\left(\frac{4}{3}\right)}{3+4+5} = 1 \\ z_I = \frac{5.0 + 4.2 + 3.\left(\frac{8}{3}\right)}{3+4+5} = 1 \end{cases}.$$

Mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y = 0$.

Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) nên mặt cầu có bán kính $R = d(I, (Oxz)) = 1$.

Vậy phương trình mặt cầu là $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

Chọn ý **B**.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$ và hai điểm $M(4; -4; 2)$, $N(6; 0; 6)$. Gọi E là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho $EM + EN$ đạt giá trị lớn nhất. Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu (S) tại E .

A. $x - 2y + 2z + 8 = 0$ **B.** $2x + y - 2z - 9 = 0$ **C.** $2x + 2y + z + 1 = 0$ **D.** $2x - 2y + z + 9 = 0$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 2)$ và bán kính $R = 3$.

Gọi K là trung điểm của $MN \Rightarrow K(5; -2; 4)$ và K nằm ngoài mặt cầu (S) .

Do đó $\vec{IK} = (4; -4; 2)$, $\vec{MN} = (2; 4; 4)$, $MN = 6$ và $IK \perp MN$.

$$\text{Ta có } EM + EN \leq \sqrt{2(EM^2 + EN^2)} = \sqrt{2\left(EK^2 + \frac{MN^2}{2}\right)} = \sqrt{2EK^2 + 36}.$$

Bởi vậy $EM + EN$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $EM = EN$ và EK lớn nhất.

$$\text{Vì } IK \perp MN \text{ nên } EM = EN \text{ thì } E \text{ thuộc đường thẳng } IK: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm E của đường thẳng IK với mặt cầu (S) ứng với t là nghiệm phương trình

$$(1+2t-1)^2 + (2-2t-2)^2 + (2+t-2)^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Như vậy $E_1(3; 0; 3)$ hoặc $E_2(-1; 4; 1)$.

Ta có $E_1K = 3$, $E_2K = 9$. Suy ra $E = (-1; 4; 1) \Rightarrow \vec{IE} = (-2; 2; -1)$, nên phương trình tiếp diện của mặt cầu (S) tại E có phương trình

$$-2(x+1) + 2(y-4) - 1(z-1) = 0 \text{ hay } 2x - 2y + z + 9 = 0.$$

Chọn ý **D**.

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$ và hai điểm $A(1; 2; 0)$, $B(2; 3; 1)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C . Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

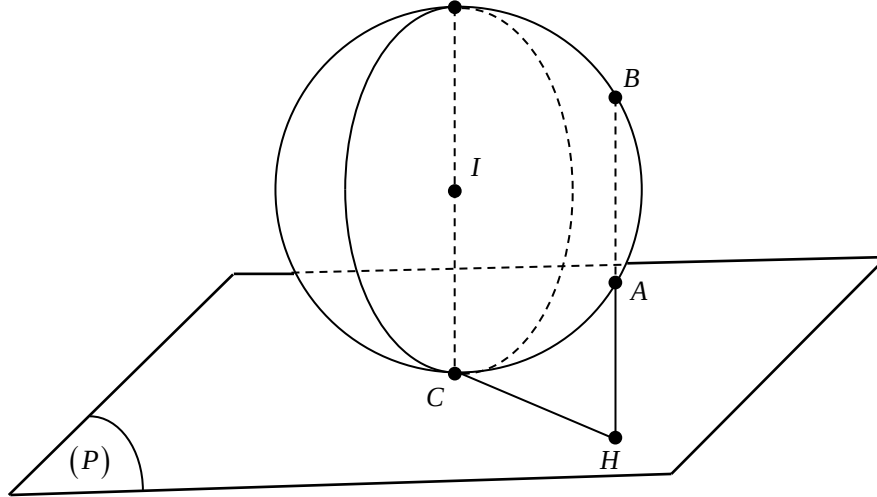
A. $R = 2\sqrt{3}$

B. $R = 12$

C. $R = 6$

D. $R = \sqrt{6}$

Lời giải



Ta có VTPT của (P) là $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

$$\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1) \text{ suy ra } AB \perp (P). \quad d(A, (P)) = \sqrt{3}, \quad d(B, (P)) = 2\sqrt{3}.$$

Gọi $H = AB \cap (P)$

$$\text{Ta có } HA \cdot HB = HC^2 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = HC^2 \Leftrightarrow HC = \sqrt{6}.$$

Vậy C nằm trên đường tròn (C) cố định trên mặt phẳng (P) và có bán kính $R = HC = \sqrt{6}$.

Chọn ý D.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$ và hai điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-3; -3; -3)$. Mặt cầu (S) đi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại C . Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính R của đường tròn đó.

A. $R = 4$

B. $R = \frac{2\sqrt{33}}{3}$

C. $R = \frac{2\sqrt{11}}{3}$

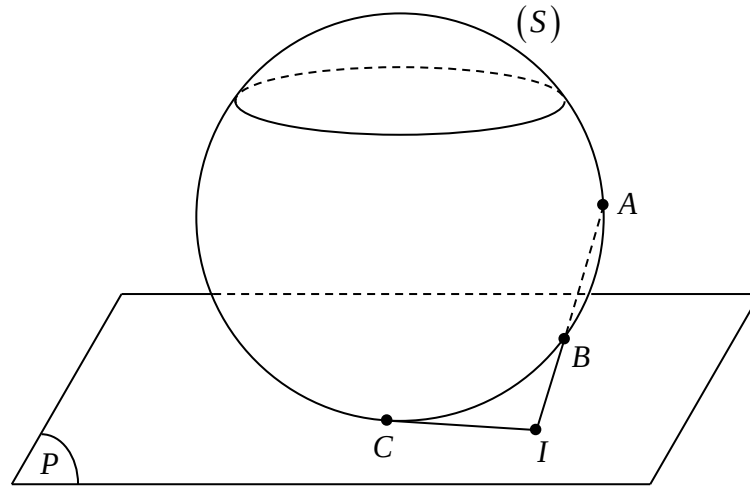
D. $R = 6$

Lời giải

Xét mặt cầu (S) bất kì đi qua A, B và tiếp xúc (P) tại C , có $\overrightarrow{AB} = (-4; -4; -4)$.

$$\text{Phương trình tham số của đường thẳng } AB \text{ là: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$\text{Gọi } I = AB \cap (P). \text{ Ta có } I(3; 3; 3). \text{ Ta có } IC^2 = IA \cdot IB \Rightarrow IC = \sqrt{IA \cdot IB}.$$



Mặt khác A, B và (P) cố định nên I cố định. Suy ra C thuộc đường tròn nằm trong mặt phẳng (P) có tâm I và bán kính $R = \sqrt{IA \cdot IB}$.

Ta có $IA = 2\sqrt{3}$, $IB = 6\sqrt{3}$. Vậy $R = \sqrt{2\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}} = 6$.

Chọn ý **D**.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{-1}$ và điểm $A(1;1;1)$. Hai điểm B, C di động trên đường thẳng d sao cho mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt phẳng (OAC) . Gọi điểm B' là hình chiếu vuông góc của điểm B lên đường thẳng AC . Biết rằng quỹ tích các điểm B' là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

A. $r = \frac{\sqrt{60}}{10}$

B. $r = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

C. $r = \frac{\sqrt{70}}{10}$

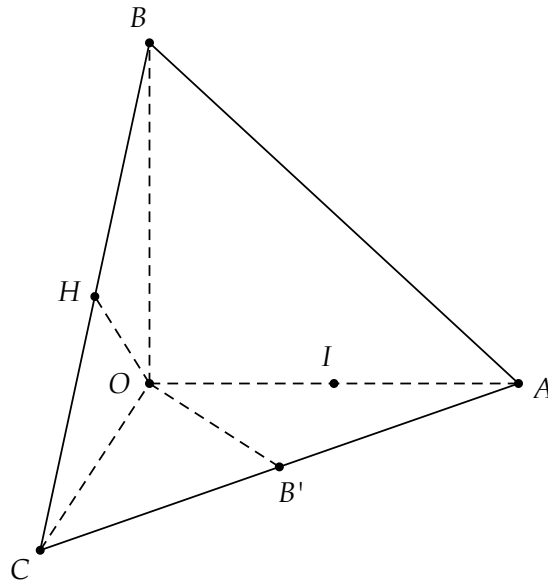
D. $r = \frac{3\sqrt{5}}{10}$

Lời giải

Ta có một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (2; -1; -1)$. Suy ra $\vec{u} \perp \vec{OA}$.

Gọi H là hình chiếu của O trên đường thẳng $d \Rightarrow H(2t; 1-t; -1-t)$. Do $OH \perp d$ nên $4t - 1 + t + 1 + t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow H(0; 1; -1) \Rightarrow \vec{OH} \cdot \vec{OA} = 0 \Rightarrow OH \perp OA$ và $OA \perp BC$

Nên $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp OB, \left. \begin{matrix} (OAB) \perp (OAC) \\ OA = (OAB) \cap (OAC) \end{matrix} \right\} \Rightarrow OB \perp (OAC)$.



Do đó ta có $\begin{cases} OB \perp AC \\ BB' \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (OBB') \Rightarrow AB' \perp OB'.$

Vậy B' thuộc mặt cầu (S) đường kính $OA = \sqrt{3}$. Gọi $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là trung điểm OA

Phương trình mặt cầu $(S): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$. Mặt khác $B' \in (ABC) \equiv (A; d)$. Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{AH}; \vec{u}] = (2; 5; -1)$. Phương trình mặt phẳng $(ABC): 2x + 5y - z - 6 = 0$.

Vậy B' thuộc đường tròn cố định là đường tròn (C) , giao tuyến của mặt cầu (S) và (ABC) . (C)

có bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$, với $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $d = d(I, (ABC)) = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

Chọn ý **D**.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4$ và các điểm $A(-2; 0; -2\sqrt{2})$, $B(-4; -4; 0)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thuộc (S) và thỏa mãn $MA^2 + \vec{MO} \cdot \vec{MB} = 16$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{3\sqrt{7}}{4}$

D. $\frac{5}{2}$

Lời giải

Mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4$ có tâm $I(-1; -2; 0)$, bán kính $R = 2$.

Gọi $M(x; y; z)$ ta được $MA^2 = (x+2)^2 + y^2 + (z+2\sqrt{2})^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4\sqrt{2}z + 12$.

và $\begin{cases} \vec{MO} = (-x; -y; -z) \\ \vec{MB} = (-4-x; -4-y; -z) \end{cases} \Rightarrow \vec{MO} \cdot \vec{MB} = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y.$

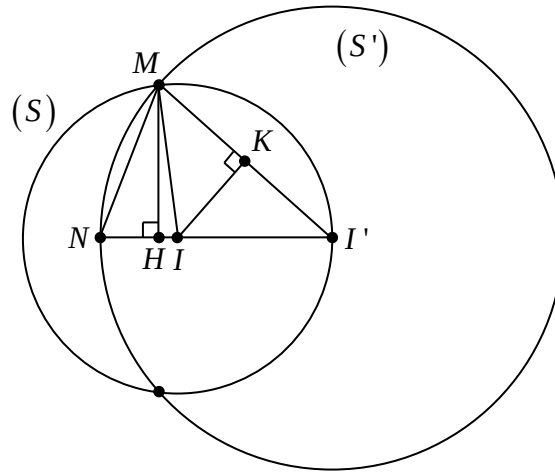
Ta có $MA^2 + \vec{MO} \cdot \vec{MB} = 16 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8x + 4y + 4\sqrt{2}z - 4 = 0$.

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 2\sqrt{2}z - 2 = 0$.

Suy ra M thuộc mặt cầu (S') tâm $I'(-2; -1; -\sqrt{2})$, bán kính $R' = 3$.

Nên $M \in (S) \cap (S')$ là đường tròn (C) có tâm H là hình chiếu của M lên II' .

Vì $II' = 2$ nên $I' \in (S)$.



Gọi K là trung điểm của $I'M$ ta có $IK = \sqrt{2^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Mà $\sin MI'I = \frac{MH}{I'M} = \frac{IK}{II'}$ suy ra $MH = \frac{I'M \cdot IK}{II'} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$.

Vậy bán kính của đường tròn (C) là $r = MH = \frac{3\sqrt{7}}{4}$.

Chọn ý C.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M thuộc mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$ và ba điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$; $C(0;2;-3)$. Biết rằng quỹ tích các điểm M thỏa mãn $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 8$ là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

A. $r = \sqrt{3}$

B. $r = 6$

C. $r = 3$

D. $r = \sqrt{6}$

Lời giải

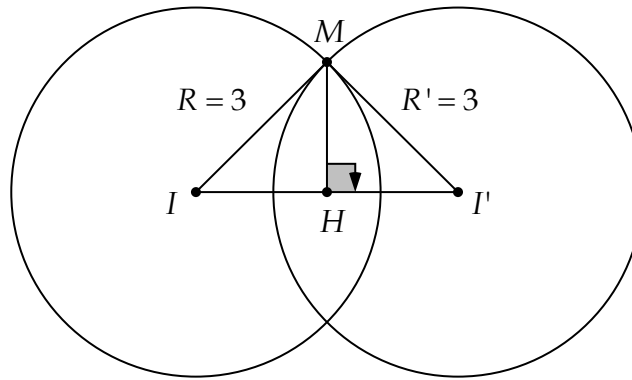
Mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$ có tâm $I(3;3;2)$, bán kính $R = 3$.

Gọi $M(x; y; z)$ ta được $MA^2 = (1-x)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 1$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MB} = (2-x; 1-y; 3-z) \\ \overrightarrow{MC} = (-x; 2-y; -3-z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y - 7$.

Ta có $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 8 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 6y - 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 7 = 0$

Suy ra M thuộc mặt cầu (S') tâm $I'(1;1;0)$, bán kính $R' = 3$. Nên $M \in (S) \cap (S')$ là đường tròn (C) có tâm H là trung điểm của đoạn II' (do $R = R' = 3$).



Vậy bán kính của đường tròn (C) : $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{6}$.

Chọn ý **D**.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2)$ và $B(5;7;0)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my - 2(m+1)z + m^2 + 2m + 8 = 0$$

Là phương trình của một mặt cầu (S) sao cho qua hai điểm A, B có duy nhất một mặt phẳng cắt mặt cầu (S) đó theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1.

A. 1

B. 4

C. 3

D. 2

Lời giải

Đặt $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my - 2(m+1)z + m^2 + 2m + 8 = 0$ (1)

Ta có $a = 2$, $b = -m$, $c = m+1$, $d = m^2 + 2m + 8$.

Ta có (1) là phương trình mặt cầu (S) khi $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

$$\Leftrightarrow 4 + m^2 + (m+1)^2 - (m^2 + 2m + 8) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{3} \\ m < -\sqrt{3} \end{cases}$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -m; m+1)$, bán kính $R = \sqrt{m^2 - 3}$.

Trường hợp 1: (P) là (ABI) và (S) có bán kính $R = 1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 3} = 1$ và A, B, I không thẳng hàng. Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 6; -2)$, $\overrightarrow{AI} = (-1; -m-1; m-1) \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$.

Trường hợp 2: (P) cách I một khoảng lớn nhất, đồng thời $d^2(I, (P)) = R^2 - 1$.

Gọi H, K là hình chiếu của I lên (P) và AB, ta có $d(I, (P)) = IH \leq IK$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d_{\max} = IK = d(I, AB) &= \frac{|\overrightarrow{[AB, AI]}|}{|\overrightarrow{AB}|}, \quad \overrightarrow{[AB, AI]} = (4m-8; 4-2m; 4-2m) \\ &= (m-2)(4; -2; -2) \Rightarrow d(I, AB) = \frac{|m-2| \cdot 2\sqrt{6}}{2\sqrt{11}} = \frac{|m-2| \sqrt{66}}{11} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } d^2(I, (P)) = R^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{6}{11}(m-2)^2 = m^2 - 4 \Leftrightarrow 5m^2 + 24m - 68 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(l) \\ m = -\frac{34}{5}(t/m) \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn ý **D**.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng có phương trình $(\alpha): x - my + z + 6m + 3 = 0$ và $(\beta): mx + y - mz + 3m - 8 = 0$ (với m là tham số thực); hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng Δ . Gọi Δ' là hình chiếu của Δ lên mặt phẳng Oxy . Biết rằng khi m thay đổi thì đường thẳng Δ' luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định có tâm $I(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng Oxy . Tính giá trị biểu thức $P = 10a^2 - b^2 + 3c^2$.

A. $P = 56$

B. $P = 9$

C. $P = 41$

D. $P = 73$

Lời giải

Mặt phẳng $(\alpha): x - my + z + 6m + 3 = 0$ có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1; -m; 1)$, và mặt phẳng $(\beta): mx + y - mz + 3m - 8 = 0$ có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (m; 1; -m)$.

Ta có $M\left(-3m + \frac{4}{m} - 3; 0; -3m - \frac{4}{m}\right) \in \Delta = (\alpha) \cap (\beta)$

Có Δ có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}_1; \vec{n}_2] = (m^2 - 1; 2m; m^2 + 1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng Δ và vuông góc với mặt phẳng (Oxy) . Khi đó (P) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{u}; \vec{k}] = (2m; 1 - m^2; 0)$ (với $\vec{k} = (0; 0; 1)$).

Phương trình mặt phẳng (P) là $2mx + (1 - m^2)y + 6m^2 + 6m - 8 = 0$.

Vì $I(a; b; c) \in (Oxy)$ nên $I(a; b; 0)$.

Theo giả thiết ta suy ra (P) là tiếp diện của mặt cầu $(S) \Rightarrow d(I; (P)) = R$ (cố định)

$$\Leftrightarrow \frac{|2ma + (1 - m^2)b + 6m^2 + 6m - 8|}{\sqrt{4m^2 + (1 - m^2)^2}} = R > 0 \text{ (cố định)} \Leftrightarrow \frac{|2m(a + 3) + (6 - b)m^2 + b - 8|}{m^2 + 1} = R > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m(a + 3) + (6 - b)m^2 + b - 8 = R(m^2 + 1) \\ 2m(a + 3) + (6 - b)m^2 + b - 8 = -R(m^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a + 3) = 0 \\ 6 - b = R \\ b - 8 = R \\ R > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ 6 - b = b - 8 \\ R = 6 - b > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(a + 3) = 0 \\ 6 - b = -R \\ b - 8 = -R \\ R > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 = 0 \\ 6 - b = b - 8 \\ -R = 6 - b < 0 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} a = -3 \\ b = 7 \end{cases}$. Vậy $I(-3; 7; 0)$, do đó $P = 10a^2 - b^2 + 3c^2 = 41$.

Chọn ý **C**.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8$ và hai điểm $A(4;4;3)$, $B(1;1;1)$. Gọi (C) là tập hợp các điểm $M \in (S)$ để $|MA - 2MB|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết rằng (C) là một đường tròn bán kính R . Tính R .

A. $\sqrt{7}$

B. $\sqrt{6}$

C. $2\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;3)$ và bán kính $R_1 = 2\sqrt{2}$.

Với $M(x; y; z) \in (S)$ tùy ý, ta có $T = |MA - 2MB| \geq 0$. Do đó, $\min T = 0 \Leftrightarrow MA = 2MB$.

Khi đó, ta có $(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 4[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2]$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2z - 29 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{3}z - \frac{29}{3} = 0.$$

Ta được hệ
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{3}z - \frac{29}{3} = 0 \\ x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8 \\ z = 2 \end{cases}$$

Lấy PT thứ nhất trừ theo vế cho PT thứ hai ta được $\frac{16}{3}z - \frac{32}{3} = 0 \Leftrightarrow z - 2 = 0$

Do đó M thuộc đường tròn (C) là giao tuyến của $(S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8$ và $(P): z - 2 = 0$

Ta có (S) có tâm $I(0;0;3)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có $d(I; (P)) = 1$ nên đường tròn (C) có bán kính $R = \sqrt{R_1^2 - d^2} = \sqrt{7}$.

Chọn ý A.

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$ và hai điểm $A(1;1;1)$, $B(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C . Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó

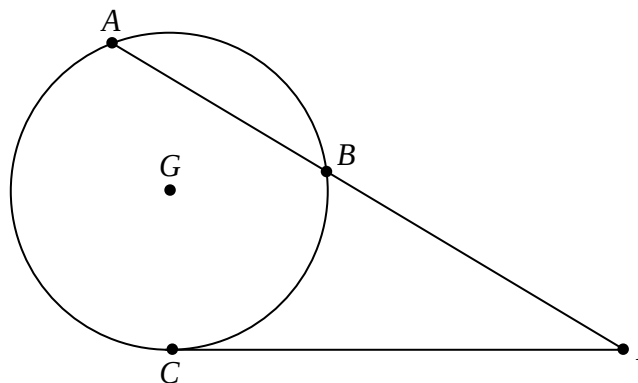
A. $R = 4$

B. $R = 6$

C. $R = \frac{2\sqrt{33}}{3}$

D. $R = \frac{2\sqrt{11}}{3}$

Lời giải



Phương trình đường thẳng AB là
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Giao điểm của AB và (P) là $I(3;3;3)$. Suy ra $IA = 2\sqrt{3}$ và $IB = 6\sqrt{3}$.

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại C nên IC là tiếp tuyến của mặt cầu (S) . Do đó $IA \cdot IB = IC^2 \Leftrightarrow IC = \sqrt{IA \cdot IB} = 6$ (không đổi). Vậy C luôn thuộc một đường tròn cố định nằm trên mặt phẳng (P) với tâm $I(3;3;3)$, bán kính bằng 6.

Chọn ý B.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$. Điểm M thay đổi trên mặt phẳng (ABC) và N là điểm trên tia OM sao cho $OM \cdot ON = 12$. Biết rằng khi M thay đổi, điểm N luôn thuộc một mặt cầu cố định. Tính bán kính của mặt cầu đó.

- A. $\frac{7}{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\frac{5}{2}$

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (ABC) : $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 12 = 0$

Gọi $N(x; y; z)$. Theo giả thiết ta có N là điểm trên tia OM sao cho $OM \cdot ON = 12$ suy ra

$$\overrightarrow{OM} = \frac{12}{ON^2} \cdot \overrightarrow{ON}. \text{ Do đó } M\left(\frac{12x}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{12y}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{12z}{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } M \in (ABC) \text{ nên } 6 \frac{12x}{x^2 + y^2 + z^2} + 3 \frac{12y}{x^2 + y^2 + z^2} + 2 \frac{12z}{x^2 + y^2 + z^2} - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - (x^2 + y^2 + z^2) &= 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 3y - 2z = 0. \end{aligned}$$

Do đó điểm N luôn thuộc một mặt cầu cố định (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 3y - 2z = 0$

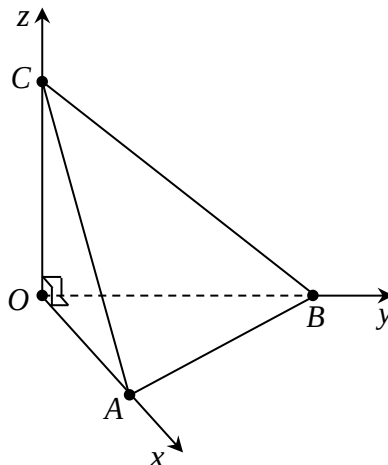
$$\text{Có tâm } I\left(3; \frac{3}{2}; 1\right) \text{ và bán kính } R = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{7}{2}.$$

Chọn ý A.

Câu 29. Trong không gian Oxyz, cho các điểm A, B, C (không trùng O) lần lượt thay đổi trên các trục Ox, Oy, Oz và luôn thỏa mãn điều kiện: tỉ số giữa diện tích của tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{3}{2}$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định, bán kính của mặt cầu đó bằng

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Lời giải



$$\text{Ta có } \frac{S_{ABC}}{V_{OABC}} = \frac{S_{ABC}}{\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot d(O, (ABC))} = \frac{3}{d(O, (ABC))}$$

$$\text{Mà } \frac{S_{ABC}}{V_{OABC}} = \frac{3}{2} \text{ nên } d(O, (ABC)) = 2.$$

Vậy mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc mặt cầu tâm O , bán kính $R = 2$.

Chọn ý **B**.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;0;0)$ và $B(3;4;0)$. Với C là điểm nằm trên trục Oz , gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Khi C di động trên trục Oz thì H luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

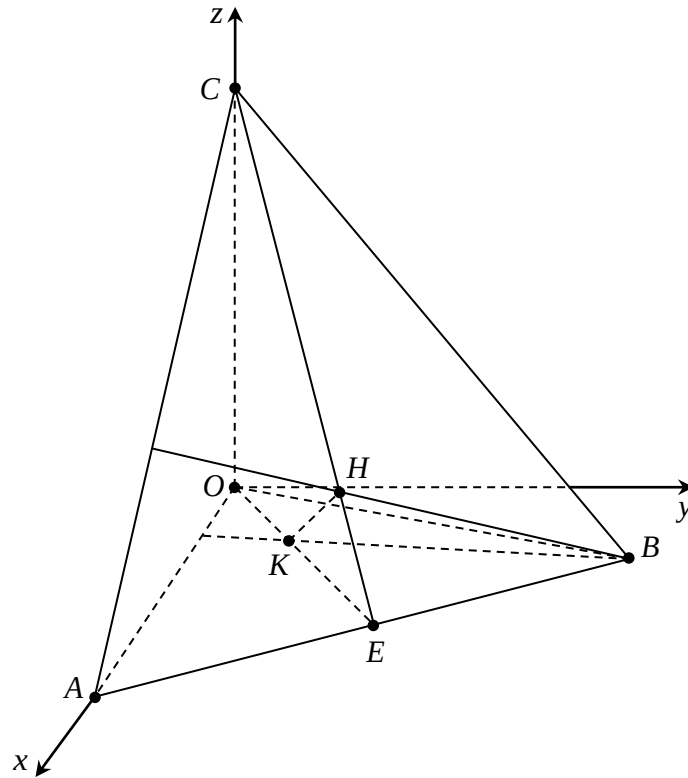
A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. $\sqrt{3}$

Lời giải



Ta có $C(0;0;c)$. Dễ thấy tam giác ABC cân tại C . Gọi $E = (4;2;0)$ là trung điểm của AB . Ta có mặt phẳng (OCE) vuông góc với AB (do $\begin{cases} AB \perp OC \\ AB \perp CE \end{cases}$) và là mặt phẳng cố định.

Gọi K là trực tâm tam giác OAB , do A , B và K cùng nằm trong mặt phẳng (Oxy) nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot (-2) + y \cdot 4 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Tìm được $K = \left(3; \frac{3}{2}; 0\right)$. Ta chứng minh được $KH \perp (CAB)$ do $\begin{cases} AB \perp (OEC) \\ CA \perp (BHK) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HK \perp AB \\ HK \perp CA \end{cases}$.

Suy ra $\angle KHE = 90^\circ$. Suy ra H thuộc mặt cầu đường kính $KE = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ và

$\Rightarrow d(B, (SCD)) = \frac{3}{2}d(H, (SCD))$ thuộc mặt phẳng (OCE) cố định.

Vậy H luôn thuộc một đường tròn cố định có bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

Chọn ý A.

Câu 31. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(10;6;-2)$, $B(5;10;-9)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + 2y + z - 12 = 0$. Điểm M di động trên (α) sao cho MA, MB luôn tạo với (α) các góc bằng nhau. Biết rằng M luôn thuộc một đường tròn (ω) cố định. Hoành độ của tâm đường tròn (ω) bằng

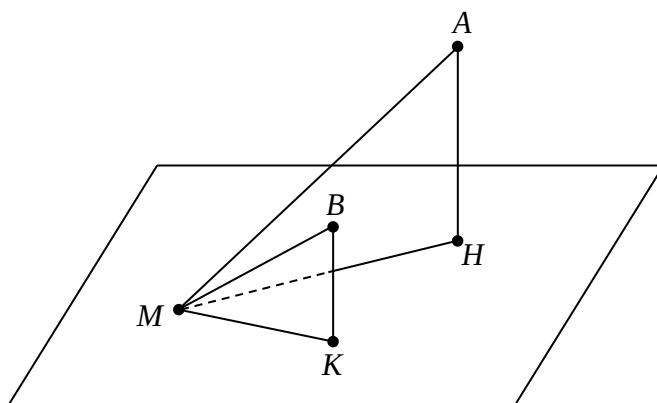
A. -4

B. $\frac{9}{2}$

C. 2

D. 10

Lời giải



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên mặt phẳng (α) , khi đó:

$$AH = d(A; (\alpha)) = \frac{|2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 + (-2) - 12|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 6;$$

$$BK = d(B; (\alpha)) = \frac{|2 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + (-9) - 12|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3.$$

Vì MA, MB với (α) các góc bằng nhau nên $AMH = BMK$. Từ $AH = 2BK$ suy ra $MA = 2MB$.

Gọi $M(x; y; z)$, ta có $MA = 2MB \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2$

$$\Leftrightarrow (x-10)^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 = 4[(x-5)^2 + (y-10)^2 + (z+9)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{20}{3}x - \frac{68}{3}y + \frac{68}{3}z + 228 = 0.$$

Như vậy, điểm M nằm trên mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{10}{3}; \frac{34}{3}; -\frac{34}{3}\right)$ và bán kính $R = 2\sqrt{10}$. Do đó, đường tròn (ω) là giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α) , nên tâm J của đường tròn D là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (α) .

Phương trình đường thẳng d đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là
$$\begin{cases} x = \frac{10}{3} + 2t \\ y = \frac{34}{3} + 2t \\ z = -\frac{34}{3} + t \end{cases}$$

Tọa độ điểm J là nghiệm $(x; y; z)$ của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = \frac{10}{3} + 2t \\ y = \frac{34}{3} + 2t \\ z = -\frac{34}{3} + t \\ 2x + 2y + z - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \\ z = -\frac{38}{3} \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy $J = \left(2; 10; -\frac{38}{3}\right)$.

Chọn ý C.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho tám điểm $A(-2; -2; 0)$, $B(3; -2; 0)$, $C(3; 3; 0)$, $D(-2; 3; 0)$, $M(-2; -2; 5)$, $N(3; 3; 5)$, $P(3; -2; 5)$, $Q(-2; 3; 5)$. Hình đa diện tạo bởi tám điểm đã cho có bao nhiêu mặt đối xứng?

A. 3

B. 9

C. 8

D. 6

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (5; 0; 0)$, $\overrightarrow{DC} = (5; 0; 0)$ nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành, mặt khác

$\overrightarrow{AD} = (0; 5; 0) \Rightarrow \begin{cases} AB \perp AD \\ AB = AD = 5 \end{cases}$. Vậy $ABCD$ là hình vuông.

Tương tự, ta có $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QN} = (5; 0; 0)$; $\overrightarrow{MQ} = (0; 5; 0)$ nên $MPNQ$ cũng là hình vuông.

Lại có, $\overrightarrow{AM} = (0; 0; 5)$ nên $AM \perp (ABCD)$ và $AM = AB = AD$. Vậy 8 điểm trên tạo thành hình lập phương nên có 9 mặt phẳng đối xứng.

Chọn ý B.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 1; 2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ lần lượt tại điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$?

A. 3

B. 1

C. 4

D. 8

Lời giải

Gọi $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$. Từ đó ta có $OA = |a|$, $OB = |b|$, $OC = |c|$

Mặt phẳng đoạn chắn đi qua các điểm A, B, C có dạng: $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì $M \in (P)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1$.

Vì $OA = OB = OC \Rightarrow |a| = |b| = |c|$. Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1 \\ |a| = |b| = |c| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1 \\ |a| = |b| \\ |b| = |c| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1 \\ a = b \\ a = -b \\ b = c \\ b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = 2 \\ a = -b = c = 2 \\ a = -b = -c = -2 \end{cases}.$$

Vậy có 3 mặt phẳng thỏa mãn.

Chọn ý **A**.

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(0;0;0)$. Hỏi có bao nhiêu điểm cách đều 4 mặt phẳng (ABC) , (BCD) , (CDA) , (DAB) .

A. 4

B. 5

C. 1

D. 8

Lời giải

Gọi điểm cần tìm là $M(x_0; y_0; z_0)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0$.

Phương trình mặt phẳng (BCD) là: $x = 0$.

Phương trình mặt phẳng (CDA) là: $y = 0$.

Phương trình mặt phẳng (DAB) là: $z = 0$.

Ta có M cách đều 4 mặt phẳng (ABC) , (BCD) , (CDA) , (DAB) nên:

$$\frac{|x_0 + y_0 + z_0 - 1|}{\sqrt{3}} = |x_0| = |y_0| = |z_0| \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \pm y_0 \\ x_0 = \pm z_0 \\ x_0 + y_0 + z_0 - 1 = \pm x_0 \end{cases}.$$

Ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $\begin{cases} x_0 = y_0 = z_0 \\ x_0 + y_0 + z_0 - 1 = \sqrt{3}x_0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{3 - \sqrt{3}}.$

Trường hợp 2. $\begin{cases} x_0 = -y_0 = z_0 \\ x_0 + y_0 + z_0 - 1 = \sqrt{3}x_0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = -y_0 = z_0 = \frac{1}{1 - \sqrt{3}}.$

Trường hợp 3. $\begin{cases} x_0 = y_0 = -z_0 \\ x_0 + y_0 + z_0 - 1 = \sqrt{3}x_0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = y_0 = -z_0 = \frac{1}{1 - \sqrt{3}}.$

Trường hợp 4. $\begin{cases} x_0 = y_0 = z_0 \\ x_0 + y_0 + z_0 - 1 = -\sqrt{3}x_0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{3 + \sqrt{3}}.$

Trường hợp 5. $\begin{cases} x_0 = -y_0 = -z_0 \\ x_0 + y_0 + z_0 - 1 = \sqrt{3}x_0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = -y_0 = -z_0 = \frac{-1}{1 + \sqrt{3}}.$

Trường hợp 6. $\begin{cases} x_0 = -y_0 = z_0 \\ x_0 + y_0 + z_0 - 1 = -\sqrt{3}x_0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = -y_0 = z_0 = \frac{1}{1 + \sqrt{3}}.$

Trường hợp 7.
$$\begin{cases} x_0 = y_0 = -z_0 \\ x_0 + y_0 + z_0 - 1 = -\sqrt{3}x_0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = y_0 = -z_0 = \frac{1}{1+\sqrt{3}}.$$

Trường hợp 8.
$$\begin{cases} x_0 = -y_0 = -z_0 \\ x_0 + y_0 + z_0 - 1 = -\sqrt{3}x_0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = -y_0 = -z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}-1}.$$

Vậy có 8 điểm M thỏa mãn bài toán.

Chọn ý **D**.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $SABC$ có $S(0;0;1)$, $A(1;0;1)$, $B(0;1;1)$; $C(0;0;2)$

. Hỏi tứ diện $SABC$ có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 6

B. 1

C. 0

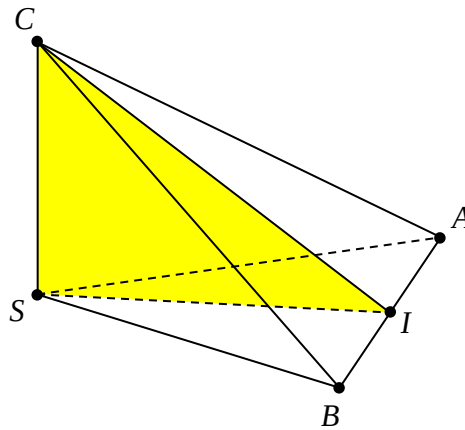
D. 3

Lời giải

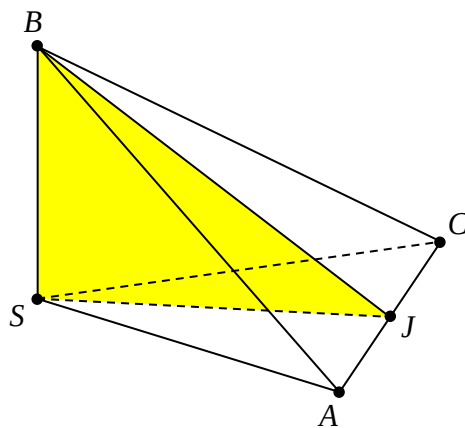
Ta có: $\overrightarrow{SA} = (1;0;0)$, $\overrightarrow{SB} = (0;1;0)$, $\overrightarrow{SC} = (0;0;1)$ nên $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 0$, $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$, $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA} = 0$ và $|\overrightarrow{SA}| = |\overrightarrow{SB}| = |\overrightarrow{SC}| = 1$

Tức là tứ diện $SABC$ có các cạnh SA , SB , SC bằng nhau và đôi một vuông góc. Vậy tứ diện $SABC$ có tất cả ba mặt phẳng đối xứng đó là:

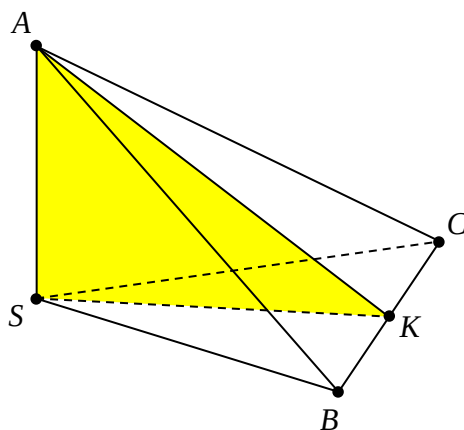
Mặt phẳng trung trực của cạnh AB .



Mặt phẳng trung trực của cạnh AC .



- Mặt phẳng trung trực của cạnh BC .



Chọn ý **D**.

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;0;-6)$, $B(0;1;-8)$, $C(1;2;-5)$ và $D(4;3;8)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó?

- A.** Có vô số **B.** 1 mặt phẳng. **C.** 7 mặt phẳng. **D.** 4 mặt phẳng.

Lời giải

Ta có $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$, suy ra bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

Gọi (P) là mặt phẳng cách đều bốn điểm A, B, C, D .

Trường hợp 1. Có một điểm nằm khác phía với ba điểm còn lại so với (P) . Có bốn mặt phẳng thỏa mãn.

Trường hợp 2. Mỗi phía của mặt phẳng (P) có hai điểm. Có ba mặt phẳng thỏa mãn.

Vậy có bảy mặt phẳng thỏa mãn.

Chọn ý **C**.

Câu 37. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt cầu có phương trình $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + z = 0$; $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z = 0$ cắt nhau theo một đường tròn (C) nằm trong mặt phẳng (P) . Cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$. Có bao nhiêu mặt cầu tâm thuộc (P) và tiếp xúc với cả ba đường thẳng AB, BC, CA ?

- A.** 4 mặt cầu. **B.** 2 mặt cầu. **C.** 3 mặt cầu. **D.** 1 mặt cầu.

Lời giải

Mặt phẳng (P) chứa đường tròn (C) có phương trình là: $6x + 3y + 2z = 0$.

Mặt phẳng (ABC) có phương trình là: $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

Do đó $(P) \parallel (ABC)$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với cả ba đường thẳng AB, BC, CA sẽ giao với mặt phẳng (ABC) theo một đường tròn tiếp xúc với ba đường thẳng AB, BC, CA . Trên mặt phẳng (ABC) có 4 đường tròn tiếp xúc với ba đường thẳng AB, BC, CA đó là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và ba đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C . Do đó có 4 mặt cầu có tâm nằm trên (P) và tiếp xúc với cả ba đường thẳng AB, BC, CA . Tâm của 4 mặt cầu là hình chiếu của tâm 4 đường tròn tiếp xúc với ba đường thẳng AB, BC, CA lên mặt phẳng (P) .

Chọn ý **A**.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;-3)$, $B\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $C(1;1;4)$, $D(5;3;0)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3, (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng $\frac{3}{2}$. Có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với 2 mặt cầu (S_1) , (S_2) đồng thời song song với đường thẳng đi qua 2 điểm C , D .

A. 1

B. 2

C. 4

D. Vô số.

Lời giải

Cách 1: Gọi $\vec{n} = (a; b; c) \neq \vec{0}$ là vtpt của mp(P) cần tìm.

Trường hợp 1. $a \neq 0$, chọn $a = 1$. Khi đó $\vec{n} = (1; b; c)$.

$\overrightarrow{CD} = (4; 2; -4)$. Vì $\overrightarrow{CD} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow b = 2c - 2 \Rightarrow \vec{n} = (1; 2c - 2; c)$.

Phương trình mặt phẳng (P): $x + (2c - 2)y + cz + d = 0$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} d(A; (P)) = 3 \\ d(B; (P)) = \frac{3}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|c + d - 3|}{\sqrt{1 + (2c - 2)^2 + c^2}} = 3 \\ \frac{\left|\frac{5}{2}c + d - \frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1 + (2c - 2)^2 + c^2}} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |c + d - 3| = 2\left|\frac{5}{2}c + d - \frac{3}{2}\right| \\ \frac{|c + d - 3|}{\sqrt{1 + (2c - 2)^2 + c^2}} = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} d = -4c \\ d = -2c + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|c + d - 3|}{\sqrt{1 + (2c - 2)^2 + c^2}} = 3 \\ \frac{|c + d - 3|}{\sqrt{1 + (2c - 2)^2 + c^2}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -4c \\ 4c^2 - 10c + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Với $c = 2$ ta có phương trình mặt phẳng (P): $x + 2y + 2z - 8 = 0$: T/m vì song song với CD

Với $c = \frac{1}{2}$ ta có phương trình mặt phẳng (P): $x - y + \frac{1}{2}z - 2 = 0$: Loại vì chứa điểm C .

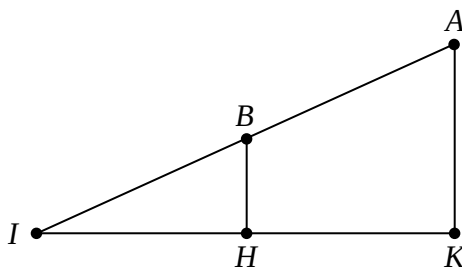
Trường hợp 2. $a = 0$. Khi đó $\vec{n} = (0; b; c)$. Vì $\overrightarrow{CD} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow b = 2c - 2 \Rightarrow b = 2c \Rightarrow \vec{n} = (0; 2; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (P): $2y + z + d = 0$.

$$\begin{cases} d(A; (P)) = 3 \\ d(B; (P)) = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|d + 1|}{\sqrt{5}} = 3 \\ \frac{\left|d + \frac{5}{2}\right|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Không tồn tại mp.}$$

Vậy có một mặt phẳng thỏa mãn

Cách 2: Ta có $AB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ mà $R_1 + R_2 = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ nên hai mặt cầu cắt nhau theo một đường tròn giao tuyến.



Gọi $I = AB \cap (\alpha)$ với (α) là mặt phẳng thỏa mãn bài toán. Hạ BH, AK vuông góc với mặt phẳng (α) . Khi đó ta có I nằm ngoài AB và B là trung điểm AI vì $R_2 = \frac{3}{2} = \frac{1}{2} R_1 \Leftrightarrow BH = \frac{1}{2} AK$.

Suy ra $I(2;1;2)$. Gọi $(\alpha): a(x-2)+b(y-1)+c(z-2)=0$.

Vì $(\alpha) \parallel CD$ mà $\overrightarrow{CD} = (4;2;-4)$ nên ta có $2a+b-2c=0 \Leftrightarrow b=2c-2a$

$$\text{Khi đó } d(A;(\alpha)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|-a+b-5c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow (c+a)^2 = a^2 + (2c-2a)^2 + c^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=2c \Rightarrow b=-2c \\ a=\frac{1}{2}c \Rightarrow b=c \end{cases}.$$

Ta có hai trường hợp:

Trường hợp 1. $b=-2c; a=2c \Rightarrow (\alpha): 2c(x-2)-2c(y-1)+c(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x-2y+z-4=0$

Mặt khác $CD \parallel (\alpha)$ nên $C, D \notin (\alpha) \Rightarrow$ loại trường hợp trên.

Trường hợp 2. $b=c; a=\frac{1}{2}c \Rightarrow (\alpha): \frac{1}{2}c(x-2)+c(y-1)+c(z-2)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-8=0$

Kiểm tra thấy $C, D \notin (\alpha)$ nên nhận trường hợp này.

Vậy $(\alpha): x+2y+2z-8=0$.

Chọn ý A.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

- A. 1 mặt phẳng. B. 2 mặt phẳng. C. 0 mặt phẳng. D. Vô số mặt phẳng.

Lời giải

Gọi phương trình mặt phẳng là $(P): Ax + By + Cz + D = 0 (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$.

Theo đề bài, mặt phẳng qua A, B nên ta có $\begin{cases} A+D=0 \\ 2C+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2C \\ D=-2C \end{cases}$.

Vậy mặt phẳng (P) có dạng: $2Cx + By + Cz - 2C = 0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1,1,0)$ và $R=1$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|2C + B - 2C|}{\sqrt{5C^2 + B^2}} = 1 \Leftrightarrow B^2 = 5C^2 + B^2 \Leftrightarrow C = 0$.

Suy ra $A = D = 0$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): y = 0$.

Chọn ý A.

Câu 40. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng: $d_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}$, $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$, $d_3: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$, $d_4: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}$. Số đường thẳng trong không gian cắt cả bốn đường thẳng trên là

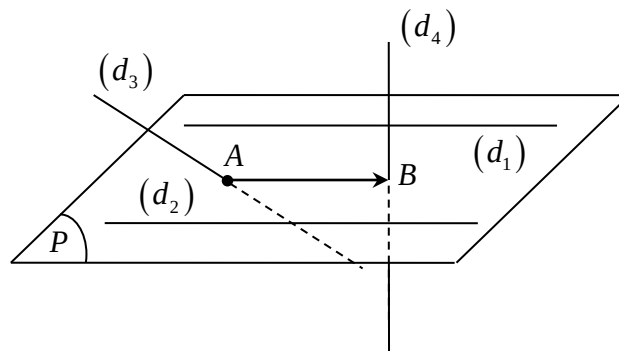
A. 0

B. 2

C. Vô số.

D. 1

Lời giải



Ta có d_1 song song d_2 , phương trình mặt phẳng chứa hai

Hai đường thẳng d_1, d_2 là $(P): x + y + z - 1 = 0$.

Gọi $A = d_3 \cap (P) \Rightarrow A(1; -1; 1)$, ($A \notin d_1, A \notin d_2$).

$B = d_4 \cap (P) \Rightarrow B(0; 1; 0)$, ($B \notin d_1, B \notin d_2$).

Mà $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; -1)$ cùng phương với véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng d_1, d_2 nên không tồn tại đường thẳng nào đồng thời cắt cả bốn đường thẳng trên.

Chọn ý A.

Câu 41. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + m = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (T) có chu vi bằng $4\pi\sqrt{3}$.

A. 3

B. 4

C. 2

D. 1

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = 4$.

Gọi H là hình chiếu của I lên (P) .

Khi đó $IH = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 - 2 \cdot 3 + m|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|m - 6|}{3}$.

Đường tròn (T) có chu vi là $4\pi\sqrt{3}$ nên có bán kính là $r = \frac{4\pi\sqrt{3}}{2\pi} = 2\sqrt{3}$.

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (T) có chu vi bằng $4\pi\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow IH = \sqrt{R^2 - r^2} \Leftrightarrow \frac{|m-6|}{3} = \sqrt{16-12} \Leftrightarrow |m-6| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m-6=6 \\ m-6=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=12 \\ m=0 \end{cases}.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn ý C.

Câu 42. Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho hai điểm $M(1;2;1)$; $N(-1;0;-1)$. Có bao nhiêu mặt phẳng qua M, N cắt trục Ox, trục Oy lần lượt tại A, B ($A \neq B$) sao cho $AM = \sqrt{3}BN$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. Vô số

Lời giải

Gọi $\vec{n} = (A; B; C)$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ là vectơ pháp tuyến của mp(P) thỏa yêu cầu bài toán.

Mặt phẳng (P) qua $N(-1;0;-1)$ nên phương trình mặt phẳng có dạng:

$$A(x+1) + By + C(z+1) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + A + C = 0.$$

Mặt phẳng (P) qua $M(1;2;1)$ suy ra $A + 2B + C + A + C = 0 \Leftrightarrow A + B + C = 0 \Leftrightarrow A + C = -B$ (1).

Mặt phẳng (P) cắt trục Ox tại $A(a;0;0)$ suy ra $A.a + A + C = 0 \Leftrightarrow A.a - B = 0$.

$$\Rightarrow a = \frac{B}{A} \text{ (Do nếu } A = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow C = 0 \text{ nên } A \neq 0). \text{ Suy ra } A\left(\frac{B}{A}; 0; 0\right)$$

Mặt phẳng (P) cắt trục Oy tại $B(0;b;0)$ suy ra $B.b + A + C = 0 \Leftrightarrow B.b - B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ b = 1 \end{cases}$.

Trường hợp 1. $B = 0 \Rightarrow A + C = 0 \Rightarrow A = -C$. Chọn $C = 1 \Rightarrow A = -1$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $x - z = 0 \Rightarrow A \equiv B \equiv O(0;0;0)$ không thỏa yêu cầu.

Trường hợp 2. $b = 1 \Rightarrow B(0;1;0)$

Ta có $AM = \sqrt{\left(1 - \frac{B}{A}\right)^2 + 5}$; $BN = \sqrt{3}$

$$\text{Mặt khác } AM = \sqrt{3}BN \Leftrightarrow \sqrt{\left(1 - \frac{B}{A}\right)^2 + 5} = 3 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{B}{A}\right)^2 + 5 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{B}{A} = 2 \\ 1 - \frac{B}{A} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{B}{A} = -1 \\ \frac{B}{A} = 3 \end{cases}$$

- Với $\frac{B}{A} = -1 \Rightarrow B = -A \Rightarrow C = 0$. Chọn $A = 1 \Rightarrow B = -1$.

Phương trình mặt phẳng (P): $x - y + 1 = 0$

- Với $\frac{B}{A} = 3 \Rightarrow B = 3A \Rightarrow C = -4A$. Chọn $A = 1 \Rightarrow B = 3 \Rightarrow C = -4$.

Phương trình mặt phẳng (P): $x + 3y - 4z - 3 = 0$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa yêu cầu.

Chọn ý B.

Câu 43. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;3)$, $B(2;1;0)$, $C(4;3;-2)$, $D(3;4;1)$, $E(1;1;-1)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng cách đều 5 điểm trên?

- A. 1 B. 4 C. 5 D. Không tồn tại.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -3)$, $\overrightarrow{DC} = (1; -1; -3)$, $\overrightarrow{AD} = (2; -4; -2)$. Suy ra $ABCD$ là hình bình hành.

Ta lại có $\overrightarrow{AE} = (0; -1; -4)$, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = (-10; -4; -2) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AE} = 12 \neq 0$

$\Rightarrow E.ABCD$ là hình chóp đáy là hình bình hành nên các mặt phẳng cách đều 5 điểm là

- + Mặt phẳng qua 4 trung điểm của 4 cạnh bên.
- + Mặt phẳng qua 4 trung điểm lần lượt của ED , EC , AD , BC .
- + Mặt phẳng qua 4 trung điểm lần lượt của EC , EB , DC , AB .
- + Mặt phẳng qua 4 trung điểm lần lượt của EA , EB , AD , BC .
- + Mặt phẳng qua 4 trung điểm lần lượt của EA , ED , AB , DC .

Chọn ý C.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$ và điểm $M(2; -1; 0)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với mp (Oxy) tại điểm M . Hỏi có bao nhiêu mặt cầu thỏa mãn?

- A. 2 B. 1 C. 0 D. Vô số.

Lời giải

Ta có $d: \begin{cases} x = 3+t \\ y = t \\ z = -2+t \end{cases}$ nên $I \in d \Rightarrow I(3+t; t; -2+t)$, $\overrightarrow{IM} = (1+t; t+1; -2+t)$

Mặt phẳng (Oxy) có vtpt $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Ta có $[\overrightarrow{IM}; \vec{k}] = (1+t; -t-1; 0) = \vec{0} \Leftrightarrow t+1=0 \Leftrightarrow t=-1$ nên $I(2; -1; -3)$

Ta có $R = d(I, (Oxy)) = \frac{|3|}{1} = 3$. Vậy $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 9$.

Chọn ý B.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn đường thẳng: $d_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}$, $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$, $d_3: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$, $d_4: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Số đường thẳng trong không gian cắt cả bốn đường thẳng trên là

- A. 0 B. 2 C. Vô số. D. 1

Lời giải

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(3; -1; -1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; -2; 1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(0; 0; 1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (1; -2; 1)$.

Do $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ và $M_1 \notin d_1$ nên hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau.

Ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3; 1; 2)$, $[\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2}] = (-5; -5; -5) = -5(1; 1; 1)$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1 và d_2 khi đó (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; 1)$. Phương trình mặt phẳng (α) là $x + y + z - 1 = 0$.

Gọi $A = d_3 \cap (\alpha)$ thì $A(1; -1; 1)$. Gọi $B = d_4 \cap (\alpha)$ thì $B(-1; 2; 0)$.

Do $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; -1)$ không cùng phương với $\vec{u}_1 = (1; -2; 1)$ nên đường thẳng AB cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 .

Chọn ý D.

Câu 46. Có bao nhiêu mặt cầu (S) có tâm thuộc đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-2}$ đồng thời tiếp xúc với hai mặt phẳng $(\alpha_1): 2x + 2y + z - 6 = 0$ và $(\alpha_2): x - 2y + 2z = 0$

A. 1

B. 0

C. Vô số.

D. 2

Lời giải

Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

Gọi tâm $I \in \Delta \Rightarrow I(3 + 2t; 1 - t; 1 - 2t)$

Vì mặt cầu (S) đồng thời tiếp xúc với hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) nên ta có

$$d(I, (\alpha_1)) = d(I, (\alpha_2))$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2(3+2t) + 2(1-t) + 1 - 2t - 6|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|3 + 2t - 2(1-t) + 2(1-2t)|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \Leftrightarrow \frac{|3|}{3} = \frac{|3|}{3} \text{ (luôn đúng).}$$

Do đó có vô số mặt cầu thỏa yêu cầu đề bài.

Chọn ý C.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 6)$, $D(1; 1; 1)$. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O , A , B , C , D ?

A. 6

B. 10

C. 7

D. 5

Lời giải

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$.

Ta thấy 4 điểm A , B , C , D đồng phẳng (do $D \in (ABC)$).

Chọn 3 trong 5 điểm có $C_5^3 = 10$ cách.

Chọn 3 trong 4 điểm đồng phẳng A , B , C , D có $C_4^3 = 4$ cách.

Vậy có $10 - 4 + 1 = 7$ mặt phẳng phân biệt đi qua 5 điểm đã cho.

Chọn ý C.

Câu 48. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 1)$ và $C(-1; -1; 1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A , bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B , C và bán kính bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) .

A. 5

B. 7

C. 6

D. 8

Lời giải

Gọi phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả ba mặt cầu đã cho có phương trình là $ax + by + cz + d = 0$ (đk: $a^2 + b^2 + c^2 > 0$).

Khi đó ta có hệ điều kiện sau:

$$\begin{cases} d(A; (P)) = 2 \\ d(B; (P)) = 1 \\ d(C; (P)) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|a + 2b + c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 2 \\ \frac{|3a - b + c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 1 \\ \frac{|-a - b + c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a + 2b + c + d| = 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ |3a - b + c + d| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ |-a - b + c + d| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}.$$

Khi đó ta có: $|3a - b + c + d| = |-a - b + c + d|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b + c + d = -a - b + c + d \\ 3a - b + c + d = a + b - c - d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - b + c + d = 0 \end{cases}$$

Với $a = 0$ thì ta có

$$\begin{cases} |2b + c + d| = 2\sqrt{b^2 + c^2} \\ |2b + c + d| = 2|-b + c + d| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b + c + d| = 2\sqrt{b^2 + c^2} \\ 4b - c - d = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = d = 0, b \neq 0 \\ c + d = 4b, c = \pm 2\sqrt{2}b \end{cases}$$

Do đó có 3 mặt phẳng thỏa bài toán.

$$\text{Với } a - b + c + d = 0 \text{ thì ta có } \begin{cases} |3b| = 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ |2a| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3b| = 4|a| \\ |2a| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| = \frac{4}{3}|a| \\ |c| = \frac{\sqrt{11}}{3}|a| \end{cases}$$

Do đó có 4 mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Vậy có 7 mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Chọn ý **B**.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng chứa hai điểm A, B và tiếp xúc với (S) .

A. 3

B. 0

C. 1

D. 2

Lời giải

$$\text{Có: } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} I(1;1;0) \\ R=1 \end{cases}.$$

Gọi (P) là mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Ta có $A(1;0;0) \in (S) \Rightarrow$ nếu tồn tại (P) thì (P) tiếp xúc với (S) tại A .

Ta có $\begin{cases} A \in (P) \\ VTPT \text{ } \overline{IA} \end{cases} \Rightarrow (P): y = 0$ Ta thấy $B(0;0;2) \in (P) \Rightarrow$ Duy nhất một mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Ghi chú: Bài toán này thường thường thì sẽ có hai mặt phẳng thỏa mãn, nhưng với số liệu của bài này thì chỉ có một mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Chọn ý C.

Câu 50. Trong không gian Oxyz cho điểm $M(1;3;-2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ lần lượt tại ba điểm phân biệt A , B , C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$.

A. 1

B. 2

C. 4

D. 3

Lời giải

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$; $C(0;0;c)$. Ta có $OA = |a|$; $|OB| = b$; $|OC| = |c|$.

Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A , B , C là $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Theo giả thiết ta có điểm $M(1;3;-2) \in (P)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{3}{b} - \frac{2}{c} = 1$.

Vì $OA = OB = OC \Rightarrow |a| = |b| = |c|$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{3}{b} - \frac{2}{c} = 1 \\ |a| = |b| = |c| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{3}{b} - \frac{2}{c} = 1 \\ |a| = |b| \\ |b| = |c| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{3}{b} - \frac{2}{c} = 1 \\ a = b \\ a = -b \\ b = c \\ b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = 2 \\ a = b = -c = 6 \\ a = -b = c = 4 \end{cases}$$

Vậy có 3 mặt phẳng thỏa mãn.

Chọn ý D.

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho 5 điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;3;0)$, $C(2;3;-1)$, $D(3;2;5)$, $E(3;4;0)$. Tìm số mặt phẳng cách đều 5 điểm A, B, C, D, E .

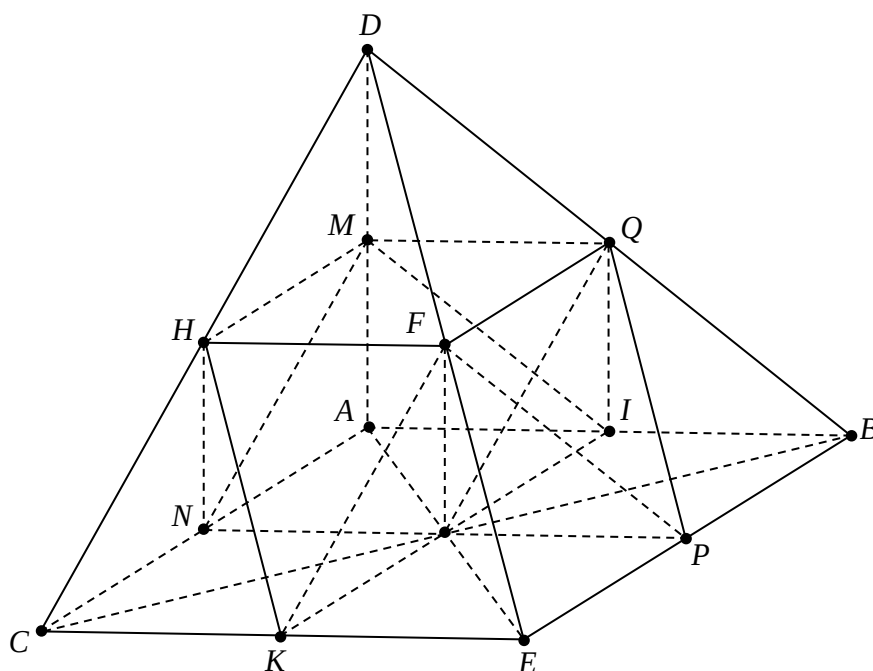
A. 0

B. 3

C. 5

D. 1

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{BE} = (1; 1; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 1; 0)$ suy ra $ACEB$ là hình bình hành.

$D.ACEB$ là hình chóp. Có 5 mặt phẳng cách đều 5 điểm A, B, C, D, E , các mặt phẳng đó đi qua trung điểm các cạnh của hình chóp. Đó là các mặt phẳng $(HMQF)$, $(MQPN)$, $(HFPN)$, $(FQIK)$, $(MHKI)$.

Chọn ý C.

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 0; 3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) qua điểm M và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $3OA = 2OB = OC \neq 0$.

A. 3

B. 2

C. 4

D. 8

Lời giải

Vì 3 điểm A, B, C thuộc các trục Ox, Oy, Oz nên ta giả sử tọa độ của ba điểm lần lượt là $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$.

Khi đó mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Ta có $3OA = 2OB = OC \neq 0$ nên suy ra $\begin{cases} a, b, c \neq 0 \\ 3|a| = 2|b| \quad (1) \\ 3|a| = |c| \quad (2) \end{cases}$

Điểm $M(-1; 0; 3) \in (P)$ nên ta có: $\frac{-1}{a} + \frac{3}{c} = 1 \quad (3)$

Từ (2) suy ra $c = 3a$ hoặc $c = -3a$

Thay $c = 3a$ vào (3) ta có $\frac{-1}{a} + \frac{1}{a} = 1$ (vô nghiệm)

Thay $c = -3a$ vào (3) ta có $\frac{-1}{a} - \frac{1}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{-2}{a} = 1 \Leftrightarrow a = -2$.

Suy ra $c = 6, b = 3$ hoặc $c = 6, b = -3$.

Vậy ta có hai phẳng (P) là: $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$ hoặc $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{6} = 1$.

Chọn ý B.

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu theo ba đường tròn. Tính tổng diện tích của ba đường tròn tương ứng đó.

A. 10π

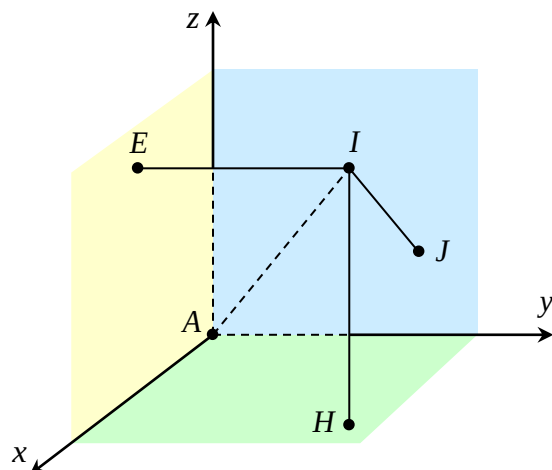
B. 38π

C. 33π

D. 36π

Lời giải

Cách 1



Cho ba mặt phẳng đôi một vuông góc với nhau $(P), (Q), (R)$ tại A và điểm I bất kỳ. Hạ IH, IJ, IK lần lượt vuông góc với ba mặt phẳng trên thì ta luôn có: $IA^2 = IH^2 + IJ^2 + IK^2$.

Chứng minh

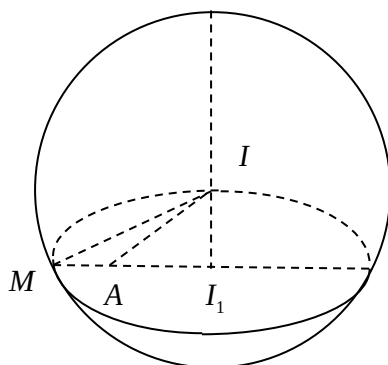
Chọn hệ trục tọa độ với $A(0;0;0)$, ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt là ba giao tuyến của ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$.

Khi đó $I(a,b,c)$ thì $IA^2 = a^2 + b^2 + c^2 = d^2(I; (Ayz)) + d^2(I; (Axz)) + d^2(I; (Axy))$

Hay $IA^2 = IH^2 + IJ^2 + IK^2$ (đpcm).

Áp dụng

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$ và có bán kính $r = 4$. $\overrightarrow{IA} = (0;3;1) \Rightarrow IA = \sqrt{10}$.



Gọi H, J, K và r_1, r_2, r_3 lần lượt là tâm và bán kính của các đường tròn.

Ta có tổng diện tích các đường tròn là $S = \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = \pi(r^2 - IH^2 + r^2 - IJ^2 + r^2 - IK^2)$
 $= \pi[3r^2 - (IH^2 + IJ^2 + IK^2)] = \pi(3r^2 - IA^2) = 38\pi$

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

A. $r = \frac{\sqrt{11}}{2}$

B. $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$

C. $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Lời giải

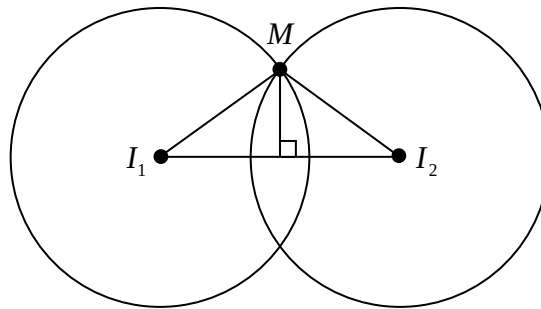
Gọi $M(x; y; z)$ là tập hợp các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có

$$\overrightarrow{AM} = (x; y+1; z-2), \overrightarrow{BM} = (x-2; y+3; z), \overrightarrow{CM} = (x+2; y-1; z-1), \overrightarrow{DM} = (x; y+1; z-3).$$

Từ giả thiết: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1 \\ \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) + (y+1)(y+3) + z(z-2) = 1 \\ x(x+2) + (y+1)(y-1) + (z-1)(z-3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

Suy ra quỹ tích điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm $I_1(1;-2;1)$, $R_1 = 2$ và mặt cầu tâm $I_2(-1;0;2)$, $R_2 = 2$.



Ta có: $I_1I_2 = \sqrt{5}$. Dễ thấy: $r = \sqrt{R_1^2 - \left(\frac{I_1I_2}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

Chọn ý **A**.

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 6 = 0$. Trong (P) lấy điểm M và xác định điểm N thuộc đường thẳng OM sao cho $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} = 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Điểm N luôn thuộc mặt cầu có phương trình $\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

B. Điểm N luôn thuộc mặt cầu có phương trình $\left(x - \frac{1}{12}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{16}$.

C. Điểm N luôn thuộc mặt phẳng có phương trình $x + 2y + 2z - 1 = 0$.

D. Điểm N luôn thuộc mặt phẳng có phương trình $x + 2y + 2z + 1 = 0$.

Lời giải

Vì O, M, N thẳng hàng và $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 1$ nên $OM \cdot ON = 1$, do đó $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{ON^2} \cdot \overrightarrow{ON}$.

Gọi $N(a; b; c)$, khi đó $M\left(\frac{a}{a^2 + b^2 + c^2}; \frac{b}{a^2 + b^2 + c^2}; \frac{c}{a^2 + b^2 + c^2}\right)$.

Vì $M \in (P)$ nên $\frac{a}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2b}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2c}{a^2+b^2+c^2} - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 - \frac{a}{6} - \frac{b}{3} - \frac{c}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{12}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

Chọn ý B.

Câu 56. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ và điểm $A(1;1;-1)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua điểm A và đôi một vuông góc với nhau, cắt (S) theo giao tuyến là ba đường tròn. Tổng diện tích của hình tròn đó bằng

A. 12π

B. 3π

C. 22π

D. 11π

Lời giải

Ba mặt phẳng $(P): x=1$, $(Q): y=1$ và $(R): z=-1$ đều đi qua điểm A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến lần lượt là các đường tròn $(C_1), (C_2)$ và (C_3) .

Trong mặt phẳng (P), đường tròn $(C_1): (y-1)^2 + (z+2)^2 = 5 \Rightarrow R_1 = \sqrt{5}$

Trong mặt phẳng (Q), đường tròn $(C_2): (x+1)^2 + (z+2)^2 = 9 \Rightarrow R_2 = 3$

Trong mặt phẳng (R), đường tròn $(C_3): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 8 \Rightarrow R_3 = 2\sqrt{2}$

Tổng diện tích ba hình tròn $(C_1), (C_2)$ và (C_3) là $S = \pi(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2) = 22\pi$.

Chọn ý C.

Câu 57. Biết rằng có n mặt phẳng có phương trình tương ứng là $(P_i): x + a_i y + b_i z + c_i = 0$ ($i=1,2,\dots,n$) đi qua $M(1;2;3)$ (nhưng không đi qua O) và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo thứ tự tại A, B, C sao cho hình chóp O.ABC là hình chóp đều. Tính tổng $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

A. $S = 3$

B. $S = 1$

C. $S = -4$

D. $S = -1$

Lời giải

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, với $abc \neq 0$, khi đó phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1;2;3)$ (nhưng không đi qua O) và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo thứ tự tại A, B, C có

dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì (P) đi qua $M(1;2;3)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$ (1).

Hình chóp O.ABC là hình chóp đều nên $|a| = |b| = |c| = m > 0$.

Ta có các khả năng sau:

+ $a = b = c = m$: thay vào (1) ta được $\frac{6}{m} = 1 \Leftrightarrow m = 6$, phương trình mặt phẳng (P_1) thỏa mãn đề bài là $(P_1): x + y + z - 6 = 0$. Như vậy $a_1 = 1$.

+ $a = b = c = -m$: thay vào (1) ta được $\frac{6}{-m} = 1 \Leftrightarrow m = -6$ (loại).

+ $a = b = m$; $c = -m$: thay vào (1) ta được $0 = 1$ (vô lí).

+ $a = b = -m$; $c = m$: thay vào (1) ta được $0 = 1$ (vô lí).

+ $a = c = m; b = -m$: thay vào (1) ta được $\frac{2}{m} = 1 \Leftrightarrow m = 2$, phương trình mặt phẳng (P_2) thỏa mãn đề bài là (P_2): $x - y + z - 2 = 0$. Như vậy $a_2 = -1$.

+ $a = c = -m; b = m$: thay vào (1) ta được $\frac{2}{-m} = 1 \Leftrightarrow m = -2$ (loại).

+ $a = m; b = c = -m$: thay vào (1) ta được $-\frac{4}{m} = 1 \Leftrightarrow m = -4$ (loại).

+ $a = -m; b = c = m$: thay vào (1) ta được $\frac{4}{m} = 1 \Leftrightarrow m = 4$, phương trình mặt phẳng (P_3) thỏa mãn đề bài là (P_3): $x - y - z + 4 = 0$. Như vậy $a_3 = -1$.

Như vậy, chỉ có 3 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ta có: $S = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + (-1) + (-1) = -1$.

Chọn ý D.

Câu 58. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng (P): $x - y + 2z + 1 = 0$, (Q): $2x + y + z - 1 = 0$.

Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành, đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r . Xác định r sao cho chỉ có đúng một mặt cầu (S) thỏa yêu cầu.

A. $r = \sqrt{3}$ B. $r = \sqrt{\frac{3}{2}}$ C. $r = \sqrt{2}$ D. $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Gọi $I(m; 0; 0)$ là tâm mặt cầu có bán kính R , d_1, d_2 là các khoảng cách từ I đến (P) và (Q). Ta

có $d_1 = \frac{|m+1|}{\sqrt{6}}$ và $d_2 = \frac{|2m-1|}{\sqrt{6}}$

Theo đề ta có $\sqrt{d_1^2 + 4} = \sqrt{d_2^2 + r^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{m^2 + 2m + 1}{6} + 4} = \sqrt{\frac{4m^2 - 4m + 1}{6} + r^2}$
 $\Leftrightarrow m^2 - 2m + 2r^2 - 8 = 0 \quad (1).$

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có đúng một nghiệm $m \Leftrightarrow 1 - (2r^2 - 8) = 0$

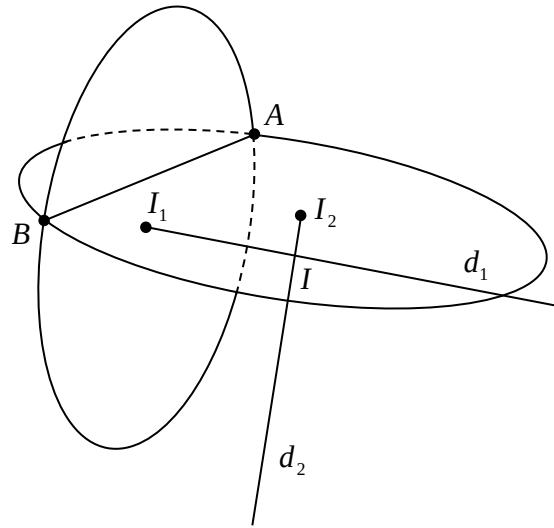
$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn ý D.

Câu 59. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(0; 2; 2)$, $B(2; -2; 0)$. Gọi $I_1(1; 1; -1)$ và $I_2(3; 1; 1)$ là tâm của hai đường tròn nằm trên hai mặt phẳng khác nhau và có chung một dây cung AB . Biết rằng luôn có một mặt cầu (S) đi qua cả hai đường tròn ấy. Tính bán kính R của (S).

A. $R = \frac{\sqrt{219}}{3}$ B. $R = 2\sqrt{2}$ C. $R = \frac{\sqrt{129}}{3}$ D. $R = 2\sqrt{6}$

Lời giải



Gọi d_1 là đường thẳng đi qua I_1 và vuông góc với mặt phẳng (I_1AB) , khi đó d_1 chứa tâm các mặt cầu đi qua đường tròn tâm I_1 ; d_2 là đường thẳng đi qua I_2 và vuông góc với mặt phẳng (I_2AB) , khi đó d_2 chứa tâm các mặt cầu đi qua đường tròn tâm I_2 . Do đó, mặt cầu (S) đi qua cả hai đường tròn tâm (I_1) và (I_2) có tâm I là giao điểm của d_1 và d_2 và bán kính $R = IA$

Ta có $\overrightarrow{I_1A} = (-1; 1; 3)$, $\overrightarrow{I_1B} = (1; -3; 1)$. Đường thẳng d_1 có véc-tơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{I_1A}; \overrightarrow{I_1B}] = (10; 4; 2) = 2(5; 2; 1)$.

Phương trình đường thẳng d_1 là $d_1: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

Ta có $\overrightarrow{I_2A} = (-3; 1; 1)$, $\overrightarrow{I_2B} = (-1; -3; -1)$. Đường thẳng d_2 có véc-tơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{I_2A}; \overrightarrow{I_2B}] = (2; -4; 10) = 2(1; -2; 5)$.

Phương trình đường thẳng d_2 là $d_2: \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 1 - 2s \\ z = 1 + 5s \end{cases}$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 1 + 5t = 3 + s \\ 1 + 2t = 1 - 2s \\ -1 + t = 1 + 5s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ s = -\frac{1}{3} \end{cases}$. Suy ra $I = \left(\frac{8}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Bán kính mặt cầu (S) là $R = IA = \sqrt{\left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(2 + \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{129}}{3}$.

Chọn ý C.

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$. Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ chứa d và tiếp xúc với (S) . Gọi M và N là tiếp điểm. Độ dài đoạn thẳng MN bằng?

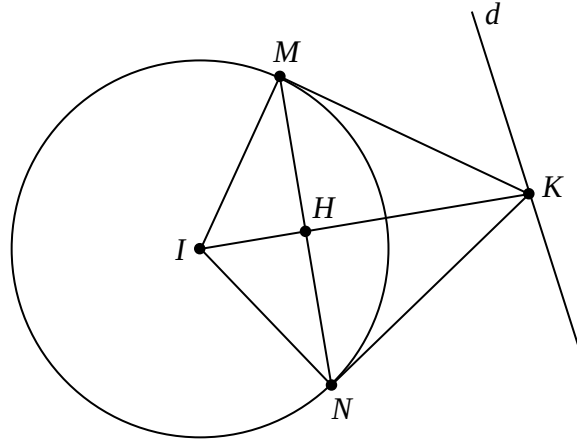
A. $2\sqrt{2}$

B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. 4

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và bán kính $R = IM = IN = \sqrt{2}$.

Kẻ $IK \perp d$ và gọi $H = IK \cap MN$.

$$\text{Ta có } d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow K(2t+2; -t; 4t) \Rightarrow \overrightarrow{IK} = (2t+1; -t-2; 4t-1).$$

Đường thẳng d có một VTCP là $\vec{u} = (2; -1; 4)$.

$$\text{Ta có } IK \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{IK} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2t+1) + (-t-2) + 4(4t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IK} = (1; -2; -1) \Rightarrow IK = \sqrt{6} \Rightarrow IH = \frac{IM^2}{IK} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow MH = \sqrt{IM^2 - IH^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow MN = 2MH = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Chú ý: Ta có thể tính IK như sau:

$$d \text{ qua } M_0(2;0;0) \text{ có VTCP } \vec{u} = (2; -1; 4); IK = d(I; d) = \frac{[\overrightarrow{IM_0}, \vec{u}]}{|\vec{u}|} = \sqrt{6}$$

Chọn ý B.

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;-1)$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I nằm trên mặt phẳng (P) , đi qua điểm A và gốc tọa độ O sao cho diện tích tam giác OIA bằng $\frac{\sqrt{17}}{2}$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $R = 3$

B. $R = 9$

C. $R = 1$

D. $R = 5$

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$

Ta có $IA = IO = R \Leftrightarrow$ hình chiếu của I lên OA là trung điểm $H\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{-1}{2}\right)$ của OA .

$$S_{\Delta OIA} = \frac{1}{2} IH.OA = \frac{1}{2} \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + b^2 + \left(c + \frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - a + c + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow 17 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2a + 2c + 1$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2a + 2c - 16 = 0.$$

Theo bài ra ta có $\begin{cases} OI = IA \\ S_{\Delta OIA} = \frac{\sqrt{17}}{2} \\ I \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(a-1)^2 + b^2 + (c+1)^2} \\ 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2a + 2c - 16 = 0 \\ a + b - c - 3 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - c - 1 = 0 & (1) \\ a^2 + b^2 + c^2 - a + c - 8 = 0 & (2) \\ a + b - c - 3 = 0 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) ta có $\begin{cases} a - c = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + c \\ b = 2 \end{cases}$ thế vào (2) ta có

$$(c+1)^2 + 4 + c^2 - (c+1) + c - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(-1; 2; -2) \\ I(2; 2; 1) \end{cases} \Rightarrow OI = R = 3.$$

Chọn ý A.

Câu 62. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Tọa độ điểm M trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được 3 tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn $\angle AMB = 60^\circ$, $\angle BMC = 90^\circ$, $\angle CMA = 120^\circ$ có dạng $M(a; b; c)$ với $a < 0$. Tổng $a + b + c$ bằng?

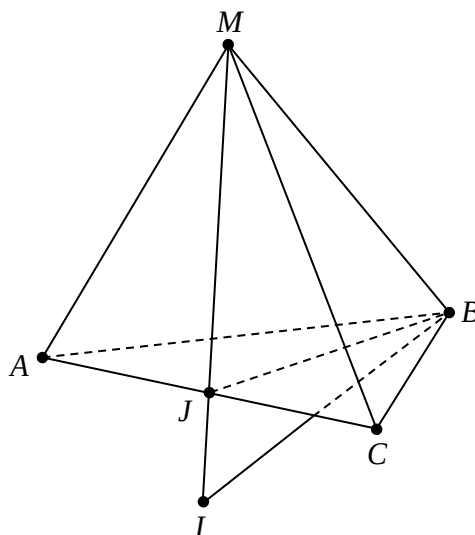
A. $\frac{10}{3}$

B. 2

C. -2

D. 1

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -3)$ và có bán kính $R = 3\sqrt{3}$.

Vì MA , MB và MC là các tiếp tuyến của (S) nên $MA = MB = MC$ nên MI là trục của tam giác ABC . Đặt $MA = x$. Khi đó $AB = x$, $BC = x\sqrt{2}$ và $CA = x\sqrt{3}$. Như vậy $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại B .

Gọi J là trung điểm AC ta có J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow J \in MI$ và

$BJ = \frac{1}{2}AC = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Trong tam giác vuông MBI ta có:

- $\frac{1}{BJ^2} = \frac{1}{MB^2} + \frac{1}{BI^2} \Leftrightarrow \frac{4}{3x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{27} \Leftrightarrow x = 3$.
- $MI^2 = MB^2 + IB^2 = 9 + 27 = 36 \Rightarrow MI = 6$.

Phương trình tham số của d :
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Ta có $M \in d$ nên $M(-1+t; -2+t; 1+t)$ với $t < 1$ (vì $a = -1+t < 0$)

Có $MI = 6 \Leftrightarrow (2+t)^2 + (4-t)^2 + (4+t)^2 = 36 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{4}{3} \end{cases} (L)$.

Vậy $M(-1; -2; 1)$. Tổng $a+b+c = -1-2+1 = -2$

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0; 1; 2)$, mặt phẳng $(\alpha): x - y + z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A , vuông góc với (α) và đồng thời (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tọa độ giao điểm M của (P) và trục $x'Ox$ là

- A. $M\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ B. $M\left(-\frac{1}{3}; 0; 0\right)$ C. $M(1; 0; 0)$ D. $M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$

Lời giải

Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$ là một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Theo đề bài ta có mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x - y + z - 4 = 0$ nên ta có phương trình $a - b + c = 0 \Leftrightarrow b = a + c \Rightarrow \vec{n} = (a; a + c; c)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(0; 1; 2)$ và có vec tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; a + c; c)$ là $ax + (a + c)(y - 1) + c(z - 2) = 0$.

Khoảng cách từ tâm $I(3; 1; 2)$ đến mặt phẳng (P) là $d(I, (P)) = h = \frac{|3a|}{\sqrt{2(a^2 + ac + c^2)}}$.

Gọi r là bán kính của đường tròn giao tuyến giữa mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) ta có $r^2 = 16 - h^2 \Rightarrow r$ nhỏ nhất khi h lớn nhất.

Khi $a = 0$ thì $h = 0$.

Khi $a \neq 0$ thì $h = \sqrt{\frac{9}{2\left(1 + \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2}\right)}}$.

Do $2\left(1 + \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2}\right) = 2\left[\left(\frac{c}{a} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \geq \frac{3}{2}$ nên $h = \sqrt{\frac{9}{2\left(1 + \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2}\right)}} \leq 9 \cdot \frac{2}{3} = 6$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = -2c \Rightarrow$ một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 1; -1)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P) là $2x + y - z + 1 = 0$.

Vậy tọa độ giao điểm M của (P) và trục $x'Ox$ là $M\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$

Câu 64. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1; 0; -3)$, $B(-3; -2; -5)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $AM^2 + BM^2 = 30$ là một mặt cầu (S) . Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(-2; -2; -8)$; $R = 3$.

B. $I(-1; -1; -4)$; $R = \sqrt{6}$.

C. $I(-1; -1; -4)$; $R = 3$.

D. $I(-1; -1; -4)$; $R = \frac{\sqrt{30}}{2}$

Lời giải

Gọi tọa độ điểm $M(x; y; z)$. Khi đó $AM^2 + BM^2 = 30$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 + (x+3)^2 + (y+2)^2 + (z+5)^2 = 30$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 4y + 16z + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 8z + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 9$$

Là phương trình của mặt cầu (S) , có tâm $I(-1; -1; -4)$ và bán kính $R = 3$.

Chọn ý C.

Câu 65. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho $(S): x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ có

bán kính $R = \sqrt{19}$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = -1 - 4t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 3x - y - 3z - 1 = 0$. Trong các

số $\{a; b; c; d\}$ theo thứ tự dưới đây, số nào thỏa mãn $a + b + c + d = 43$, đồng thời tâm I của (S) thuộc đường thẳng d và (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) ?

A. $\{-6; -12; -14; 75\}$. B. $\{6; 10; 20; 7\}$. C. $\{-10; 4; 2; 47\}$. D. $\{3; 5; 6; 29\}$.

Lời giải

Ta có $I \in d \Rightarrow I(5+t; -2-4t; -1-4t)$.

Do (S) tiếp xúc với (P) nên $d(I; (P)) = R = \sqrt{19} \Leftrightarrow |19 + 19t| = 19 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases}$

Mặt khác (S) có tâm $I\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$; bán kính $R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}} - d = \sqrt{19}$

Xét khi $t = 0 \Rightarrow I(5; -2; -1) \Rightarrow \{a; b; c; d\} = \{-10; 4; 2; 47\}$

Do $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d \neq 19$ nên ta loại trường hợp này.

Xét khi $t = 2 \Rightarrow \{a; b; c; d\} = \{-6; -12; -14; 75\}$

Do $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d = 19$ nên thỏa.

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng

$d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T và T' . Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .

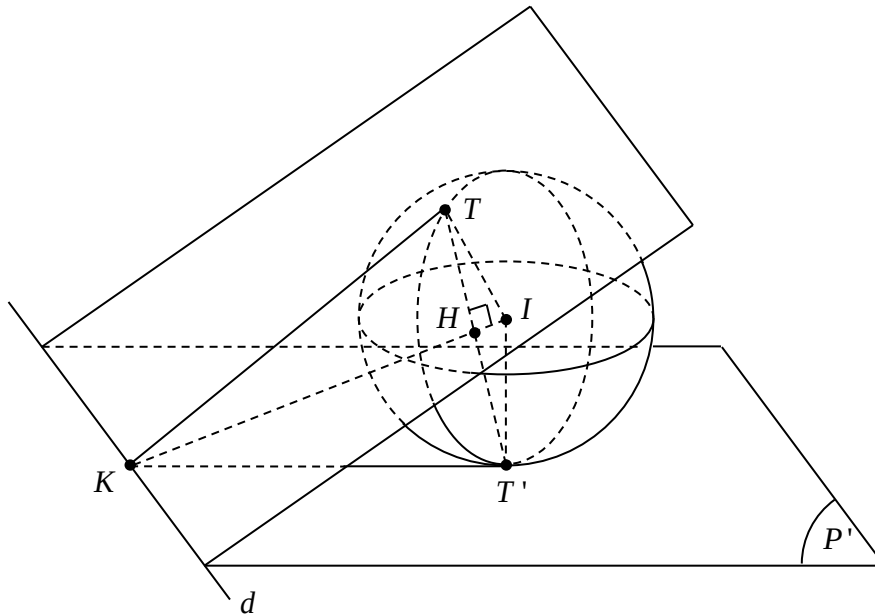
A. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$

B. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$

C. $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$

D. $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$

Lời giải



(S) có tâm mặt cầu $I(1; 0; -1)$, bán kính $R = 1$.

Gọi $K = d \cap (ITT')$. Ta có $\begin{cases} d \perp IT \\ d \perp IT' \end{cases} \Rightarrow d \perp (ITT')$ nên K là hình chiếu vuông góc của I trên d .

Ta có $K(0; 2; 0)$

Ta có $\frac{IH}{IK} = \frac{IH \cdot IK}{IK^2} = \frac{R^2}{IK^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{1}{6}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{1}{6} \overrightarrow{IK} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HK} = \vec{0}, \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{5x_I + x_K}{5+1} = \frac{5}{6} \\ y_H = \frac{5y_I + y_K}{5+1} = \frac{2}{6} \\ z_H = \frac{5z_I + z_K}{5+1} = \frac{-5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{-5}{6}\right).$$

Chọn ý **A**.

Câu 67. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): z - 2 = 0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính r của mặt cầu (S) có tâm thuộc trục Oz , cắt (Oxy) và (P) lần lượt theo giao tuyến là hai đường tròn có bán kính bằng 2 và 8.

A. $\begin{cases} I(0;0;-16) \\ r = \sqrt{65} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} I(0;0;-16) \\ r = 2\sqrt{65} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} I(0;0;16) \\ r = \sqrt{65} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} I(0;0;-16) \\ r = 2\sqrt{65} \end{cases}$

Lời giải

Giả sử (S) có tâm I , I thuộc Oz , nên $I(0;0;m)$.

Theo giả thuyết bài toán bán kính mặt cầu là

$$\begin{cases} r^2 = r_1^2 + d^2(I; Oxy) = 4 + m^2 \\ r^2 = r_2^2 + d^2(I; (P)) = 64 + (m-2)^2 \end{cases} \Rightarrow m = 16; r = 2\sqrt{65}$$

Vậy $\begin{cases} I(0;0;-16) \\ r = 2\sqrt{65} \end{cases} (D).$

Câu 68. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2} \text{ và } d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$$

Gọi (S) là mặt cầu thay đổi tiếp xúc với cả hai đường thẳng đã cho. Tính bán kính nhỏ nhất của (S) .

A. $2\sqrt{3}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{6}$ **D.** $\sqrt{6}$

Lời giải

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $A(4;1;-5)$, vectơ chỉ phương $\vec{a} = (3; -1; -2)$

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $B(2; -3; 0)$, vectơ chỉ phương $\vec{b} = (1; 3; 1)$

Ta có $\left[\vec{a}; \vec{b} \right] = (5; -5; 10), \overrightarrow{AB} = (-2; -4; 5) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \left[\vec{a}; \vec{b} \right] = 60$

Vì vậy $d(d_1; d_2) = \frac{\left| \overrightarrow{AB} \cdot \left[\vec{a}; \vec{b} \right] \right|}{\left\| \left[\vec{a}; \vec{b} \right] \right\|} = \frac{60}{\sqrt{5^2 + 5^2 + 10^2}} = 2\sqrt{6}$

Mặt cầu tiếp xúc đồng thời hai đường thẳng và có bán kính nhỏ nhất chính là mặt cầu có đường kính là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng và $r = \frac{d(d_1; d_2)}{2} = \sqrt{6}$

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$ và hai điểm $A(3; 4; 1), B(7; -4; -3)$. Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + (\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB})^2 = 96$ và $MA \cdot MB$ đạt giá trị lớn nhất. Tính y_0

A. $y_0 = \frac{7}{3}$. B. $y_0 = \frac{5}{3}$. C. $y_0 = \frac{-8}{3}$. D. $y_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Ta có $MA^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + (\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB})^2 = 96$

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})^2 + (\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB})^2 &= 96 \Leftrightarrow AB^2 + (\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB})^2 = 96 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB})^2 &= 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MA \perp MB. \end{aligned}$$

Khi đó theo $AM - GM$ và pytago, ta có $MA \cdot MB \leq \frac{MA^2 + MB^2}{2} = \frac{AB^2}{2} = 48$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\triangle AMB$ vuông cân tại M , do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 48 \Leftrightarrow x_0 = \frac{7}{3} \pm \frac{2}{\sqrt{3}}, y_0 = \frac{-8}{3}, z_0 = \frac{5}{3} \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \\ (x-7)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = 48 \end{cases}$$

Chọn đáp án C

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(\sin a \cos b; \sin b \cos b; \cos a)$. Mặt phẳng (α) qua H cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC . Mặt cầu tâm O tiếp xúc với (α) có phương trình là

A. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ B. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ C. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ D. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

Lời giải

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên $OH \perp (\alpha)$, do đó

$$\begin{aligned} R = OH &= \sqrt{\sin^2 a \cos^2 b + \sin^2 b \cos^2 a + \cos^2 a} \\ &= \sqrt{\sin^2 a (\sin^2 a + \cos^2 a) + \cos^2 a} = \sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a} = 1 \end{aligned}$$

Mặt cầu cần tìm là $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Chọn đáp án A.

Câu 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(a; b; c)$ với a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $ab + ac + bc = -1$. Mặt phẳng (α) qua H cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC . Mặt cầu tâm O tiếp xúc với (α) có bán kính nhỏ nhất bằng.

A. 1 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

Lời giải

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên $OH \perp (\alpha)$, do đó $R = OH = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = (a+b+c)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow R \geq \sqrt{2}$

Dấu bằng đạt tại $a+b+c=0$

Chọn đáp án C

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 4y + 2mz + m^2 + 4m = 0.$$

Với mỗi giá trị của m để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu. Tìm bán kính nhỏ nhất $R_{\min}$ của mặt cầu.

- A. $R_{\min} = 3$ B. $R_{\min} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ C. $R_{\min} = \sqrt{3}$ D. $R_{\min} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Lời giải

Ta có $R = \sqrt{4m^2 + 2^2 + m^2 - (m^2 + 4m)} = \sqrt{4m^2 - 4m + 4} = \sqrt{(2m-1)^2 + 3} \geq \sqrt{3}$.

Chọn đáp án C.

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x \cos \alpha - 2y \sin \alpha - 4z - (4 + \sin^2 \alpha) = 0.$$

Với mỗi giá trị của α để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu. Gọi R_1 là bán kính nhỏ nhất của mặt cầu đó; R_2 là bán kính lớn nhất của mặt cầu đó. Tính tỉ số $\frac{R_2}{R_1}$

- A. $\frac{R_2}{R_1} = \frac{10}{9}$ B. $\frac{R_2}{R_1} = \frac{5}{4}$ C. $\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

Lời giải

Ta có $R = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2^2 - (-(4 + \sin^2 \alpha))} = \sqrt{9 + \sin^2 \alpha} \in [3; \sqrt{10}]$.

Do đó $R_1 = 3; R_2 = \sqrt{10} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Chọn đáp án D.

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 3; -1), B(-2; 1; 1), C(4; 1; 7)$. Hỏi mặt cầu đi qua bốn điểm O, A, B, C có bán kính là ?

- A. $\frac{9}{2}$ B. $\frac{\sqrt{77}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{115}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{83}}{2}$

Lời giải

Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$

Thay tọa độ các điểm O, A, B, C vào phương trình ta được:

$$\begin{cases} d = 0 \\ -4a + 2b + 2c + d + 6 = 0 \\ 2a + 6b - 2c + d + 11 = 0 \\ 8a + 2b + 14c + d + 66 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}, b = -\frac{5}{2}, c = -\frac{7}{2}, d = 0.$$

Suy ra $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \frac{\sqrt{83}}{2}$

Chọn đáp án D.

Câu 75. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = m - mt \\ z = -m + (m-1)t \end{cases}$. Biết rằng tồn tại một

mặt cầu cố định đi qua điểm $B(5;4;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ khi tham số thực m thay đổi. Bán kính của mặt cầu (S) bằng

A. 4

B. $4\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{3}$

D. 3

Lời giải

Điểm cố định mà đường thẳng Δ đi qua là $A(1;0;-1)$. (Khi tham số $t = 1$).

Mặt cầu (S) cố định tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm cố định A . Gọi tâm mặt cầu là $I(a;b;c)$.

Suy ra I nằm trên đường thẳng vuông góc với Δ với mọi giá trị của m , với $\overrightarrow{AI} = (a-1;b;c+1)$.

$$\overrightarrow{IA} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 1(a-1) - m(b-0) + (m-1)(c+1) = 0 \Leftrightarrow m(c-b+1) + (a-c-2) = 0. \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-c-2=0 \\ c-b+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c+2 \\ b=c+1 \end{cases} (*)$$

Bán kính mặt cầu:

$$R = IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-0)^2 + (c+1)^2} = \sqrt{(a-5)^2 + (b-4)^2 + (c-3)^2} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $a = 3; b = 2; c = 1$. Suy ra $I(3;2;1)$. Suy ra bán kính $R = IA = 2\sqrt{3}$.

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;4)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

Điểm M chạy trên đường thẳng d và điểm N nằm trên tia đối của tia MA sao cho $AM \cdot AN = 6$. Quỹ tích điểm N là đường cong có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{2\pi}{3}$

C. π

D. $\frac{4\pi}{3}$

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d , dễ dàng tìm được $H(0;-1;2)$.

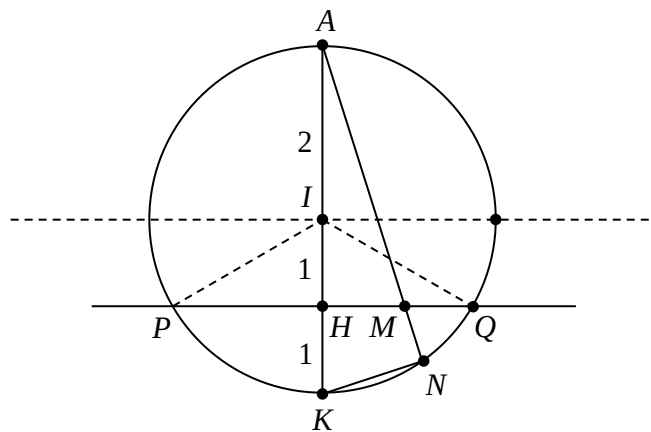
Dựng một đường thẳng vuông góc với AN tại N cắt AH tại K . Khi đó hai tam giác vuông AHM và ANK đồng dạng với nhau.

$$\Rightarrow AH \cdot AK = AM \cdot AN = 12 \Rightarrow AK = \frac{AM \cdot AN}{AH} = \frac{12}{3} = 4$$

Suy ra điểm K cố định và thỏa mãn: $\overrightarrow{AK} = \frac{4}{3} \overrightarrow{AH} \Rightarrow K\left(-\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$

Nhận thấy rằng $N \in mp(A, d)$; $\angle ANK = 90^\circ$; $AN \geq AM \Rightarrow$ quỹ tích điểm N là cung tròn giới hạn bởi đường thẳng d và đường tròn đường kính AK (nằm trong mặt phẳng chứa A và d).

Độ dài đường cong chứa N chính là độ dài cung tròn PQ như hình vẽ.



Ta có: $IH = 1, IP = IQ = 2$. Suy ra: $HIP = HIQ = 60^\circ \Rightarrow PIQ = 120^\circ$

$$\Rightarrow \text{Độ dài cung } PQ \text{ là } PQ = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi R = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4\pi}{3}.$$

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 9 = 0$. Điểm M di động trên mặt phẳng (P) , điểm N nằm trên tia AM sao cho: $AM \cdot AN = 24$. Quỹ tích điểm N là một mặt cầu cố định có phương trình là?

A. $\left(x - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = 16.$

B. $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{3}\right)^2 = 25.$

C. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 36.$

D. $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 25.$

Lời giải

Cách 1. Gọi $N(x; y; z)$

$$\text{Ta có } AM \cdot AN = 24 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{24}{AN^2} \overrightarrow{AN} \Rightarrow \begin{cases} x_M - 1 = \frac{24}{AN^2} (x - 1) \\ y_M - 0 = \frac{24}{AN^2} (y - 0) \\ z_M - 2 = \frac{24}{AN^2} (z - 2) \end{cases}$$

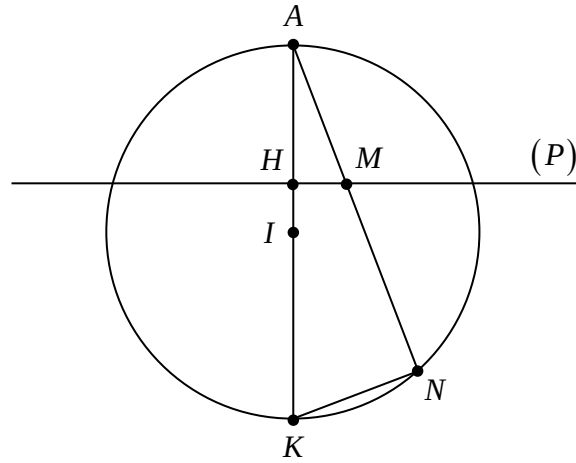
$$\text{Mà } M \in (\alpha) \Rightarrow 2x_M + 2y_M - z_M - 9 = 0 \Rightarrow \frac{48}{AN^2}(x-1) + \frac{48}{AN^2}y - \frac{24}{AN^2}(z-2) - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 48(x-1)+48y-24(z-2)-9AN^2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{3}x - \frac{16}{3} + \frac{16}{3}y - \frac{8}{3}z + \frac{16}{3} - [(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{22}{3}x - \frac{16}{3}y - \frac{4}{3}z + 5 = 0. \Leftrightarrow \left(x - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = 16.$$

Cách 2.



Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) , dễ dàng tìm được $H(3; 2; 1)$.

Khi đó $AH = d(A; (P)) = 3$.

Dựng một đường thẳng vuông góc với AN tại N cắt AH tại K . Khi đó hai tam giác vuông AHK và ANK đồng dạng với nhau. Suy ra $AH \cdot AK = AM \cdot AN = 24 \Rightarrow AK = \frac{AM \cdot AN}{AH} = 8$.

Suy ra điểm K cố định và thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = \frac{8}{3} \overrightarrow{AH} \Rightarrow K\left(\frac{19}{3}; \frac{16}{3}; \frac{-2}{3}\right)$.

Nhận thấy rằng $ANK = 90^\circ$ và A, K cố định, suy ra quỹ tích điểm N là mặt cầu đường kính $AK = 8$.

Suy ra tâm của mặt cầu là điểm $I\left(\frac{11}{3}; \frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$ là trung điểm của AK .

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $\left(x - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = 16$

Câu 78. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(m; 0; 0), B(0; n; 0), C(0; 0; 2), D(1; 2; 1)$. Biết rằng hai số thực m và n thỏa mãn điều kiện $m + n = 2$. Khi m, n thay đổi tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với (ABC) và qua điểm D . Tổng bán kính của hai mặt cầu bằng:

A. 5.

B. 13

C. 10

D. 25

Lời giải

Mặt phẳng (ABC) được suy ra nhanh từ phương trình đoạn chắn $(ABC): \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{2} - 1 = 0$.

Gọi tâm mặt cầu cố định (S) là $I(a; b; c)$. Khi đó: $ID = d(I, (ABC)) = R$ với mọi giá trị của m, n .

Suy ra: $R = \frac{\left|\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}}}$;

Chú ý rằng có một kết quả rất quan trọng: $\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \left|\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right|$.

$$\text{Suy ra } R = \frac{\left| \frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{2} - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}}} = \frac{\left| \frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{2} - 1 \right|}{\left| \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right|}$$

$$\text{Trường hợp 1: } R = \frac{\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{2} - 1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}} = \text{const} \Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{\frac{c}{2} - 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{2-c}{1} = R.$$

$$\text{Suy ra: } AD^2 = R^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2 = R^2 = (R-1)^2 + (R-2)^2 + (2-R-1)^2.$$

$$\text{Suy ra được: } R_1 = 1 \text{ hoặc } R_2 = 3. \text{ Suy ra: } R_1 + R_2 = 4.$$

$$\text{Trường hợp 2: } R = \frac{\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{2} - 1}{-\frac{1}{m} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}} = \text{const} \Leftrightarrow \frac{a}{-1} = \frac{b}{-1} = \frac{\frac{c}{2} - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{c-2}{1} = R.$$

$$\text{Suy ra: } AD^2 = R^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2 = R^2 = (-R-1)^2 + (-R-2)^2 + (2+R-1)^2.$$

$$\text{Suy ra được: } R_1 = -1 \text{ hoặc } R_2 = -3 \text{ (Loại).}$$

$$\text{Vậy tổng bình phương hai bán kính là } (1^2 + 3^2) = 10.$$

Câu 79. Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(m, 0, 0), B(0; n; 0), C(0; 0; 1), D(2; 1; 4 + 2\sqrt{2})$.

Biết rằng hai số thực dương m, n thỏa mãn điều kiện: $m + n = 1$. Khi m, n thay đổi tồn tại duy nhất một mặt cầu cố định có bán kính R tiếp xúc với (ABC) và đi qua điểm D . Bán kính R nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. (4; 5)

B. (0; 2)

C. (2; 4)

D. (5; 7)

Lời giải

Mặt phẳng (ABC) được suy nhanh từ phương trình đoạn chắn, $(ABC): \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{1} - 1 = 0$

Gọi tâm mặt cầu cố định (S) là $I(a; b; c)$. Khi đó: $ID = d_{(I, (ABC))} = R$ với mọi giá trị của m, n .

$$\text{Suy ra } R = \frac{\left| \frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{1} - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + 1}} = \frac{\left| \frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{1} - 1 \right|}{\left| \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1 \right|}$$

$$\text{Trường hợp 1: } R = \frac{\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{1} - 1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} = \text{không đổi} \Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{\frac{c}{1} - 1}{-1} = R \Rightarrow \begin{cases} a = R \\ b = R \\ c = 1 - R \end{cases}$$

$$\text{Suyra: } AD^2 = R^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-4-2\sqrt{2})^2 = (R-2)^2 + (R-1)^2 + (1-R-4-2\sqrt{2})^2$$

$$\text{Suy ra được giá trị duy nhất } R = 3 + \sqrt{2} \in (4; 5)$$

Vậy ta chọn đáp án A.

Khi đó bán kính là nghiệm kép của phương trình
$$\begin{cases} p = -1 \Rightarrow R = \frac{p-5}{2} = -3 \\ p = 3 \Rightarrow R = \frac{p-5}{2} = -1 \end{cases} \quad (\text{Loại})$$

Vậy có hai giá trị của p thỏa mãn và tập $S = \{-1; 3\}$. Suy ra tổng tất cả các phần tử của S bằng 2.

Chọn đáp án **D**.

Chú ý. Luôn chỉ có một trường hợp thỏa mãn điều kiện bán kính R dương. Khi ta đã làm trường hợp 1 thỏa mãn điều kiện thì ta có thể bỏ qua trường hợp 2. Hoặc khi làm trường hợp 1 ra bán kính âm thì ta có thể đổi dấu dương và chấp nhận kết quả luôn mà không cần quan tâm đến trường hợp 2.

Câu 81. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ và điểm $A(2; 2; 1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A và tiếp xúc với (S) . Khoảng cách lớn nhất tính từ O đến (P) nằm trong khoảng

A. (0;1)

B. (1;3)

C. (3;4)

D. (4;5)

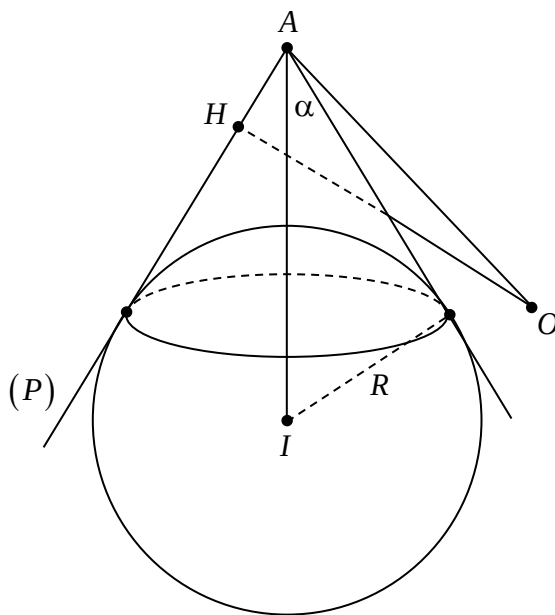
Lời giải

- Mặt cầu có tâm $I(0; 0; 1)$, bán kính $R = 2$. α

Ta hình dung mặt phẳng (P) sẽ tiếp xúc với mặt cầu (S) tại những tiếp điểm M , khi (P) thay đổi AM là đường sinh tạo thành một mặt nón trong không gian với đỉnh nón là A và đường cao nón (chính xác là trục của nón) là AI , nửa góc ở đỉnh là $\alpha = \angle MAI$;

$$\sin \alpha = \frac{IM}{IA} = \frac{R}{IA} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Khoảng cách lớn nhất tính từ O đến mặt phẳng (P) là OH , ứng với trường hợp như hình vẽ.



Gọi góc $\beta = \angle OAI \rightarrow \cos \beta = \left| \cos(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AI}) \right| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \sin \beta = \frac{1}{3}$.

Suy ra $d(O, (P))_{\max} = OH = OA \cdot \sin(\beta + \alpha) = 3(\sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha) = \frac{4 + \sqrt{2}}{2} \approx 4,71$.

Câu 82. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 16$ và $(S_2): x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 16$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả hai mặt cầu trên. Điểm $A(2;1;1)$ cách mặt phẳng (P) một khoảng cách lớn nhất bằng

- A. 6
B. $4 + \sqrt{5}$
C. $4 + 2\sqrt{3}$
D. 8

Lời giải

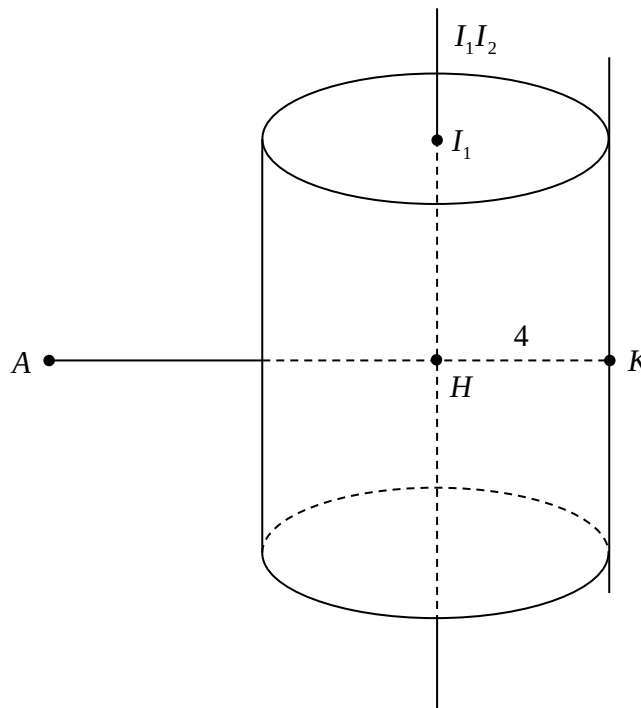
Ta có $I_1 \equiv 0 = (0;0;0); I_2 = (0;2;0)$ và $R_1 = R_2 = 4$.

Hai mặt cầu cắt nhau và có bán kính bằng nhau nên các mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả hai mặt cầu sẽ có đường thẳng nối hai tiếp điểm là đường sinh của một mặt trụ tròn xoay có trục là đường thẳng nối hai tâm cầu và bán kính trụ là bán kính cầu.

Như ở bài toán này, trục hình trụ là đường thẳng I_1I_2 dễ dàng nhận thấy là trục Oy :
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

Khi đó khoảng cách lớn nhất từ A đến mặt phẳng (P) là AK như hình vẽ.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên trục của hình trụ; suy ra $H(0;1;0)$.



$\Rightarrow AH = \sqrt{5}$. Suy ra khoảng cách lớn nhất từ A đến (P) là: $AK = AH + HK = AH + R = \sqrt{5} + 4$.

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 16$ và $(S_2): (x-3)^2 + y^2 + z^2 = 16$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả hai mặt cầu trên. Khi điểm $A(2;3;4)$

cách mặt phẳng (P) một khoảng lớn nhất thì phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax + by + 4z + d = 0$. Giá trị của biểu thức $a - 4b + d$ bằng

A. 8

B. 6

C. 0

D. 12

Lời giải

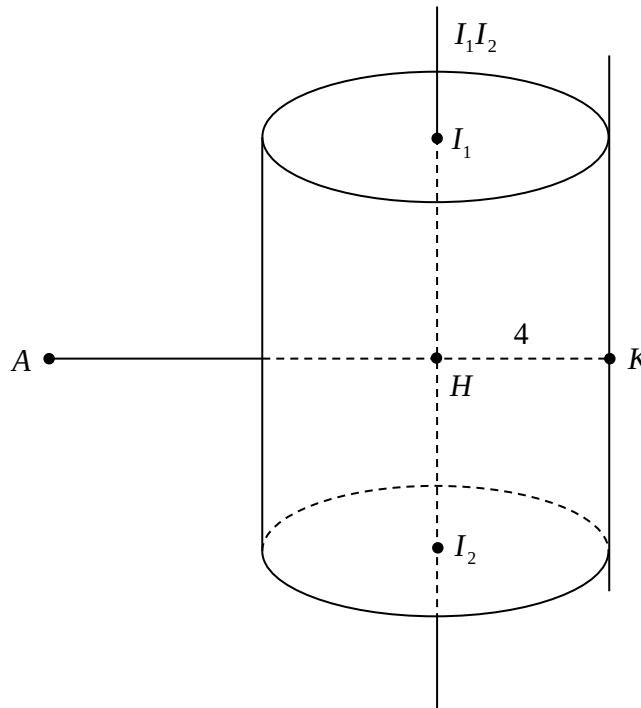
Ta có $(S_1): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ có tâm $I_1 = O = (0; 0; 0)$, $I_2 = (3; 0; 0)$; $R_1 = R_2 = 4$.

Hai mặt cầu cắt nhau và có bán kính bằng nhau nên các mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả hai mặt cầu sẽ có đường thẳng nối hai tiếp điểm là đường sinh của một mặt trụ tròn xoay có trục là đường thẳng nối hai tâm mặt cầu và bán kính trụ là bán kính hình cầu.

Theo giả thiết, ta có $I_1 I_2 \equiv Ox: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Do đó khoảng cách lớn nhất từ A đến mặt phẳng (P) là AK

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên trục hoành (trục hình trụ), suy ra $H(2; 0; 0)$.



Suy ra $AH = 5$. Do đó khoảng cách lớn nhất từ A đến (P) là

$$AK = AH + HK = AH + R = 5 + 4 = 9.$$

Có $\overrightarrow{AH} = (0; -3; -4)$.

Mặt phẳng (P) vuông góc với AH và đi qua điểm K .

Từ hệ thức $\overrightarrow{AK} = \frac{9}{5} \overrightarrow{AH} \Rightarrow K\left(2; -\frac{12}{5}; -\frac{16}{5}\right)$.

Suy ra phương trình $(P): -3\left(y + \frac{12}{5}\right) - 4\left(z + \frac{16}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow 3y + 4z + 20 = ax + by + 4z + d$

Suy ra $a = 0; b = 3; d = 20 \Rightarrow a - 4b + d = 8$.

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$ có tâm lần lượt là $I_1(0;0;1), I_2(2;1;0), I_3(1;0;3)$ và có bán kính lần lượt là $R_1 = 2; R_2 = 3; R_3 = 4$. Số mặt phẳng cùng tiếp xúc với ba mặt cầu là

- A. 4
B. 3
C. 2
D. 8

Lời giải

Nhận thấy ngay $1 = |R_1 - R_2| < I_1I_2 = \sqrt{6} < R_1 + R_2 = 5$ suy ra hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ cắt nhau.

Tương tự, $1 = |R_2 - R_3| < I_2I_3 = \sqrt{11} < R_2 + R_3 = 7$ suy ra hai mặt cầu $(S_3), (S_2)$ cắt nhau.

Tương tự, $2 = |R_1 - R_3| < I_1I_3 = \sqrt{5} < R_1 + R_3 = 6$ suy ra hai mặt cầu $(S_3), (S_1)$ cắt nhau.

Vậy ba mặt cầu đôi một cắt nhau. Ta có thể hình dung được chỉ có 2 mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu đã cho.

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$ có tâm lần lượt là $I_1(0;0;1), I_2(2;1;0), I_3(1;0;3)$ và có bán kính lần lượt là $R_1 = 2, R_2 = 3, R_3 = 4$. Số mặt phẳng cùng tiếp xúc với cả ba mặt cầu là?

- A. 4
B. 3
C. 2
D. 8

Lời giải

Nhận thấy ngay: $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2; I_2I_3 > R_2 + R_3; I_1I_3 > R_1 + R_3$ suy ra hai mặt cầu (S_1) và (S_2) cắt nhau, đồng thời nằm ngoài mặt cầu (S_3) .

Ta có thể hình dung được chỉ có 4 mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu đã cho. Có hai mặt phẳng sao cho ba tâm nằm cùng phía, hai mặt phẳng có tâm I_1, I_2 cùng phía và I_3 khác phía.

Vậy ta chọn đáp án A.

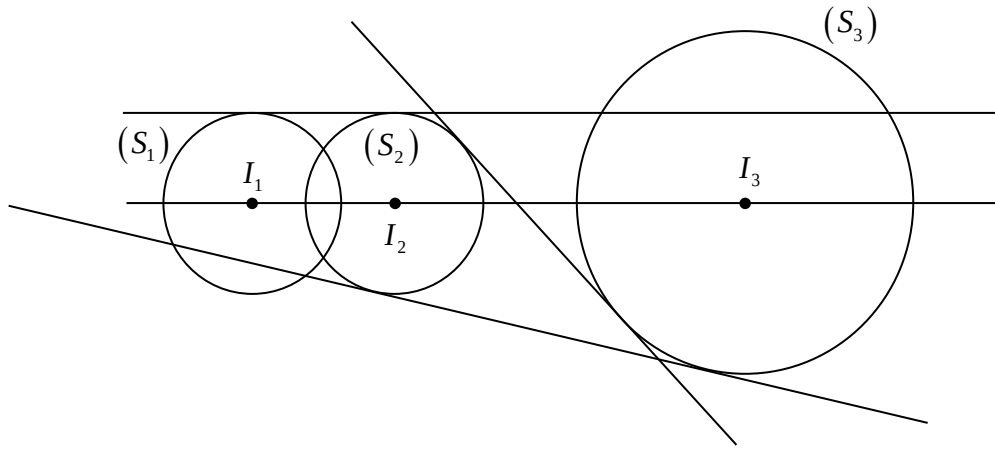
Câu 86. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt cầu có tâm lần lượt là $I_1(0;0;1), I_2(0;0;2), I_3(0;0;6)$ và có bán kính lần lượt là $R_1 = 1, R_2 = 1, R_3 = 2$. Số mặt phẳng cùng tiếp xúc với ba mặt cầu là

- A. 0
B. 1
C. 2
D. 4

Lời giải

Lưu ý rằng ba tâm mặt cầu nằm trên cùng một đường thẳng (cùng nằm trên trục Oz).

Có $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2; I_2I_3 > R_2 + R_3; I_1I_3 > R_1 + R_3$. Suy ra hai mặt cầu (S_1) và (S_2) cắt nhau cùng bán kính và nằm ngoài mặt cầu (S_3) không cùng bán kính. Dễ thấy không tồn tại mặt phẳng nào thoả mãn.



Câu 87. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) có tâm lần lượt là $I_1(1;0;0)$, $I_2(3;0;0)$, $I_3(m;0;0)$ và có bán kính lần lượt là $R_1=1$, $R_2=2$, $R_3=5$. Gọi X là tập hợp chứa tất cả giá trị nguyên của m để tồn tại vô số mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả ba mặt cầu đã cho. Tổng tất cả các phần tử của X bằng?

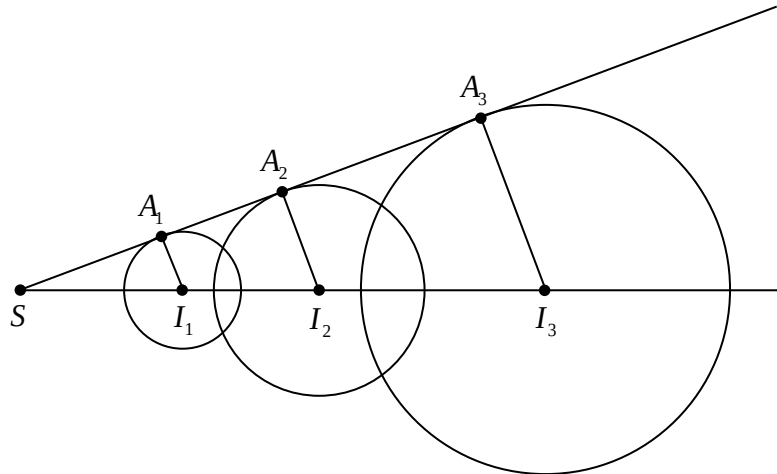
A. -2

B. 0

C. 20

D. -14

Lời giải



Để thấy ba mặt cầu có tâm cùng nằm trên trục Ox , đồng thời hai mặt cầu (S_1) , (S_2) cắt nhau vì $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$.

Yêu cầu bài toán dẫn đến vị trí của ba mặt cầu phải như hình vẽ trên.

$$\text{Ta có } \frac{SI_1}{R_1} = \frac{SI_2}{R_2} \Rightarrow R_2 \cdot \overrightarrow{SI_1} = R_1 \cdot \overrightarrow{SI_2} \Rightarrow S(-1;0;0).$$

$$\text{Lại có } \frac{SI_1}{R_1} = \frac{SI_3}{R_3} \Rightarrow \begin{cases} R_3 \cdot \overrightarrow{SI_1} = R_1 \cdot \overrightarrow{SI_3} \\ R_3 \cdot \overrightarrow{SI_1} = -R_1 \cdot \overrightarrow{SI_3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_3(9;0;0) \\ I_3(-11;0;0) \end{cases}.$$

$$\text{Mà } \frac{SI_1}{R_1} = \frac{SI_3}{R_3} = \frac{SI_2 + I_2I_3}{R_3} = 2 = \frac{4 + I_2I_3}{5} \Rightarrow I_2I_3 = 6.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} m=9 \\ m=-11 \end{cases} \Rightarrow X = \{-11;9\}.$$

Câu 88. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) có tâm lần lượt là $I_1(1;0;1)$, $I_2(0;2;0)$, $I_3(1;4;2)$ và có bán kính lần lượt là $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_3 = 3$. Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu đã cho sao cho (P) cắt Ox tại điểm có hoành độ dương. Biết mặt phẳng (P) có dạng $ax + by + z + d = 0$, với $b > -1$, tính giá trị biểu thức $2a + b + d$.

A. $12 - 2\sqrt{13}$

B. 14

C. $-9 + \sqrt{22}$

D. $-10 + 3\sqrt{5}$

Lời giải

Ta đã biết mặt phẳng (P) nếu tiếp xúc với hai mặt cầu (S_1) , (S_2) thì nó sẽ đi qua một trong hai tâm vị tự của hai mặt cầu được xác định bởi hệ thức $R_2 \overrightarrow{NI_1} = R_1 \overrightarrow{NI_2}$ (tâm vị tự ngoài) hoặc $R_2 \overrightarrow{NI_1} = -R_1 \overrightarrow{NI_2}$ (tâm vị tự trong). Với hai mặt cầu cắt nhau thì chỉ tồn tại tâm vị tự ngoài: $R_2 \overrightarrow{NI_1} = R_1 \overrightarrow{NI_2}$.

Vì ba mặt cầu cắt nhau nên mỗi cặp mặt cầu chỉ có tâm vị tự ngoài.

- Tâm vị tự ngoài của (S_1) và (S_2) là A được xác định bởi $R_2 \overrightarrow{AI_1} = R_1 \overrightarrow{AI_2} \Leftrightarrow A(2; -2; 2)$.
- Tâm vị tự ngoài của (S_2) và (S_3) là B được xác định bởi $R_3 \overrightarrow{BI_2} = R_2 \overrightarrow{BI_3} \Leftrightarrow B(-2; -2; -4)$
- Tâm vị tự ngoài của (S_3) và (S_1) là C được xác định bởi $R_3 \overrightarrow{CI_1} = R_1 \overrightarrow{CI_3} \Leftrightarrow C1\left(2; -2; \frac{1}{2}\right)$.

Để kiểm tra được A , B , C thẳng hàng nên ta chỉ sử dụng được hai điểm. Mặt phẳng (P) qua A ,

B nên $\begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ d = 2b + 1 \end{cases}$. Lại có (P) tiếp xúc (S_1) nên

$$d(I_1, (P)) = R_1 \Leftrightarrow \frac{|a + 1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-7 - \sqrt{22}}{3} < -1 \\ b = \frac{-7 + \sqrt{22}}{3} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{2}, b = \frac{-7 + \sqrt{22}}{3}, d = \frac{-11 + 2\sqrt{22}}{3}.$$

Chương

5

Các bài toán cực trị trong hình học không gian Oxyz

Tóm tắt nội dung

Trong hình tọa độ không gian Oxyz thì vấn đề về cực trị luôn là một vấn đề khó và xuất hiện rất nhiều trong các đề thi thử, đề thi THPT Quốc Gia. Trong chủ đề lần này chúng ta sẽ cùng giải quyết các bài toán về chủ đề này.



A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

Bất đẳng thức AM – GM.

+ Cho 2 số thực dương a, b khi đó $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu “=” khi và chỉ khi $a = b$

+ Cho 3 số thực dương a, b, c khi đó $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu “=” khi và chỉ khi $a = b = c$

+ Tổng quát với các số thực dương $\sum_{i=1}^n x_i \geq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$. Dấu “=” khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

+ Dạng cộng mẫu số $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n x_i}$. Dấu “=” khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Khi cho $n = 2, n = 3$ thì ta được 2 bất đẳng thức quen thuộc

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq \frac{4}{x_1 + x_2} \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \geq \frac{9}{x_1 + x_2 + x_3} \end{cases}$$

Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz:

+ Cho 2 bộ số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ khi đó ta có $\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2$

Dấu “=” khi và chỉ khi các số lập thành các bộ số tỉ lệ.

Chú ý khi cho $n = 2, n = 3$ ta được 2 bất đẳng thức quen thuộc

$$+ (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2$$

$$+ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2$$

+ Dạng cộng mẫu Engel tổng quát $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n b_i}$. Trong đó dạng $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$ là dạng ta hay

gặp nhất

Bất đẳng thức trên còn có thể gọi là bất đẳng thức Svacxo.

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$. Riêng dạng cộng mẫu thì cần thêm điều kiện là $b_1, b_2, \dots, b_n > 0$

Bất đẳng thức Minkowski.

Tổng quát: Cho số thực $r \geq 1$ và mọi số dương $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ thì ta có:

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^r \right]^{\frac{1}{r}} \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^r \right]^{\frac{1}{r}} + \left[\sum_{i=1}^n b_i^r \right]^{\frac{1}{r}}$$

Ở đây chỉ xét trường hợp cho 2 bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Khi đó ta có:

$$\sqrt[n]{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n b_i^2} \geq \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Dạng mà ta hay gặp nhất $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$. Bất đẳng thức này còn gọi là bất đẳng thức Vector.

Bất đẳng thức Holder.

Cho các số dương $x_{i,j} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$.

Khi đó với mọi số $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \geq 0$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ ta có: $\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x_{i,j} \right)^{\omega_j} \geq \sum_{j=1}^m \left(\prod_{i=1}^n x_{i,j}^{\omega_j} \right)$

Ở đây ta chỉ xét trường hợp đơn giản nhất cho 3 dãy số gồm $(a, b, c); (m, n, p); (x, y, z)$. Ta có:

$$(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(m^3 + n^3 + p^3) \geq (axm + byn + czp)^3$$

Dấu “=” xảy ra khi 3 dãy tương ứng tỷ lệ.

Một bất đẳng thức ở dạng này mà ta hay gặp: $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3$

Bất đẳng thức trị tuyệt đối.

Cho 2 số thực a, b khi đó ta có $|a| + |b| \geq |a+b| \geq |a| - |b|$

Dấu “=” thứ nhất khi a, b cùng dấu, dấu “=” thứ 2 khi a, b trái dấu.

Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$. Khi đó nếu:

- + $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm, đồng nghĩa về trái luôn không âm hoặc không dương
- + $\Delta > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt

Ứng dụng của kiến thức này sẽ áp dụng cho những bài tìm điều kiện có nghiệm để suy ra min, max. Ngoài ra phải chú ý tới một số phép biến đổi logarit mà ta đã học.

Tính chất hàm đơn điệu

1. Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và liên tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f(x) = a$ có tối đa một nghiệm
2. Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và không liên tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f(x) = a$ có tối đa $n+1$ nghiệm

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1.

Trong không gian cho hai điểm A, B , mặt phẳng (P) và đường thẳng d .

1. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho chu vi tam giác MAB nhỏ nhất.
2. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho chu vi tam giác MAB nhỏ nhất.

Lời giải

1. Xét vị trí tương đối của hai điểm A, B so với (P) .

- Nếu A, B nằm về hai phía so với (P) thì không tồn tại điểm M .
- Nếu A, B nằm về một phía so với (P) thì
 - + Tìm điểm A' đối xứng với A qua (P) .
 - + Viết phương trình đường thẳng $A'B$.
 - + Gọi $I = A'B \cap (P)$

Chú ý với mọi điểm M thuộc (P) ta có $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.

- Chu vi tam giác MAB là $MA + MB + AB \geq A'B + AB$
- Chu vi tam giác MAB nhỏ nhất bằng $A'B + AB$ khi $M \equiv I$.

2. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho chu vi tam giác MAB nhỏ nhất.

Trường hợp 1: Đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng d .

Ta làm như sau

- Viết phương trình mặt phẳng (α) qua A, B và vuông góc với d .
- Sử dụng mệnh đề: chu vi của tam giác MAB nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của (α) với đường thẳng AB .
- Xác định giao điểm M của (α) và d và kết luận M là điểm cần tìm.

Trường hợp 2: Đường thẳng AB không vuông góc với đường thẳng d .

- Tham số hoá điểm M theo phương trình đường thẳng d đã cho. Tính MA, MB .
- Sử dụng mệnh đề: Chu vi của tam giác MAB nhỏ nhất khi và chỉ khi $MA + MB$ nhỏ nhất.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + MB$ và kết luận.

Chú ý. Người ta thường tìm GTNN của $MA + MB$ bằng bất đẳng thức hoặc hàm số.

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA.

Câu 1

Trong không gian cho hai điểm $A(1;2;2), B(1;1;2)$, mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho chu vi tam giác MAB nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có $(x_A + y_A + z_A - 2)(x_B + y_B + z_B - 2) = 6 > 0$ suy ra A, B nằm về một phía so với (P) .

Gọi Δ là đường thẳng qua A vuông góc với (P) .

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ có phương trình } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

$$\text{Gọi } H = \Delta \cap (P), \text{ tọa độ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2 + t \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow H(0;1;1).$$

Gọi A' đối xứng với A qua (P) , khi đó $A'(-1;0;0)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{A'B} = (2;1;2), \text{ phương trình đường thẳng } A'B \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\text{Gọi } I = A'B \cap (P), \text{ tọa độ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 2t \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ z = \frac{6}{5} \\ t = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right).$$

Với mọi điểm M thuộc (P) ta có $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.

Chu vi tam giác MAB là $MA + MB + AB \geq A'B + AB$

Chu vi tam giác MAB nhỏ nhất bằng $A'B + AB$ khi $M \equiv I$.

Câu 2

Trong không gian cho hai điểm $A(0;1;1), B(2;1;1)$, mặt phẳng $(P): x - y + z - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho chu vi tam giác MAB nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có $(x_A - y_A + z_A - 3)(x_B - y_B + z_B - 3) = 3 > 0$ suy ra A, B nằm về một phía so với (P) .

Gọi Δ là đường thẳng qua A vuông góc với (P) .

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ có phương trình } \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$\text{Gọi } H = \Delta \cap (P), \text{ tọa độ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \\ x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow H(1; 0; 2).$$

Gọi A' đối xứng với A qua (P) , khi đó $A'(2; -1; 3)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{A'B} = (0; 2; -2), \text{ phương trình đường thẳng } A'B \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$\text{Gọi } I = A'B \cap (P), \text{ tọa độ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \\ x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{3}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(2; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Với mọi điểm M thuộc (P) ta có $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.

Chu vi tam giác MAB là $MA + MB + AB \geq A'B + AB$

Chu vi tam giác MAB nhỏ nhất bằng $A'B + AB$ khi $M \equiv I$.

Câu 3

Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}$ và hai điểm $A(-4; 1; 1)$ và $B(3; 6; -3)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho tam giác MAB có chu vi nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (7; 5; -4)$. Chọn $\vec{u} = (2; -2; 1)$ là một véc tơ chỉ phương của d .

Vì $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0$ nên $d \perp AB$.

Gọi (α) là mặt phẳng qua A, B và vuông góc d .

Suy ra phương trình của (α) là $(\alpha): 2x - 2y + z + 9 = 0$.

- Vì A và B cố định nên chu vi tam giác MAB nhỏ nhất khi và chỉ khi $MA + MB$ nhỏ nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của (α) và đường thẳng AB .
- Giả sử $M(1 + 2m; -2 - 2m; 3 + m) \in d, (m \in \mathbb{R})$. Thay tọa độ điểm M vào phương trình (α) ta được $2(1 + 2m) + 2(2 + 2m) + (m + 1) + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Vậy $M(-3; 2; 1)$ là điểm cần tìm.

Câu 4

Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ và hai điểm $A(-1; 1; 1)$ và $B(1; 4; 0)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho tam giác MAB có chu vi nhỏ nhất.

Lời giải

Giả sử $M(1 + 2m; 2 + 2m; 1 + m) \in d, m \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (2m+2; 2m+1; m) \\ \overrightarrow{BM} = (2m; 2m-2; m+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{9m^2 + 12m + 5} = \sqrt{(3m+2)^2 + 1} \\ BM = \sqrt{9m^2 - 6m + 5} = \sqrt{(3m-1)^2 + 4} \end{cases}$$

Vì A và B cố định nên chu vi tam giác MAB nhỏ nhất khi và chỉ khi $MA + MB$ nhỏ nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi biểu thức $f(m) = \sqrt{9m^2 + 12m + 5} + \sqrt{9m^2 - 6m + 5}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\text{Đặt } \begin{cases} \vec{u} = (3m+2; 1) \\ \vec{v} = (1-3m; 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = AM; |\vec{v}| = BM \\ \vec{u} + \vec{v} = (3; 3) \end{cases} \Rightarrow f(m) = |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = 3\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}$ cùng hướng $\vec{v}$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$2(3m+2) = 1(1-3m) \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

Vậy $M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$ là điểm cần tìm.

Cách 2. Để tìm giá trị nhỏ nhất của $f(m)$ là dùng hàm số như sau

$$\text{Ta có } f'(m) = 0 \Leftrightarrow \frac{3m+2}{\sqrt{9m^2 + 12m + 5}} = \frac{1-3m}{\sqrt{9m^2 - 6m + 5}} \quad (*)$$

$$\text{Điều kiện cần để } t \text{ là nghiệm của } (*) \text{ thì } (3m+2)(1-3m) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq m \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow (3m+2)^2(9m^2 - 6m + 5) = (1-3m)^2(9m^2 + 12m + 5) \Leftrightarrow 4(3m+2)^2 = (3m-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(3m+2) = 3m-1 \\ 2(3m+2) = 1-3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{5}{3} \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện thì $m = -\frac{1}{3}$. Ta có bảng biến thiên

m	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(m)$		0	
$f(m)$	$+\infty$	$3\sqrt{2}$	$+\infty$

Do đó $f(m)$ nhỏ nhất khi $m = -\frac{1}{3}$.

Vậy $M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$ là giá trị cần tìm.

Dạng 2.

Cho hai điểm A, B và đường thẳng (d) . Tìm trên (d) điểm M để

- $(MA^2 + MB^2)$ đạt giá trị nhỏ nhất
- $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất
- Tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất

Phương pháp. Đây là một dạng toán dễ, cách làm rất đơn giản, ta chỉ việc gọi điểm M 1 ẩn rồi sau đó thế vào yêu cầu đề bài là bài toán sẽ được giải quyết. Sau đây là các bài toán minh họa!

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA.

Câu 1

Trong hệ trục Oxyz, cho đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \end{cases}$ và hai điểm $A(1; 4; 2), B(-1; 2; 4)$

- Tìm điểm M trên (Δ) sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất
- Tìm điểm M trên (Δ) sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất
- Tìm điểm M trên (Δ) sao cho diện tích tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Theo giả thiết ta có $M \in (\Delta)$ nên $M(1-t; -2+t; 2t) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (t; 6-t; 2-2t) \\ \overrightarrow{MB} = (-2+t; 4-t; 4-2t) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MA^2 + MB^2 &= t^2 + (6-t)^2 + (2-2t)^2 + (-2+t)^2 + (4-t)^2 + (4-2t)^2 \\ &= 12t^2 - 48t + 76 = 12(t-2)^2 + 28 \geq 28 \end{aligned}$$

Vậy $\min(MA^2 + MB^2) = 28$ khi $t = 2 \Leftrightarrow M(-1; 0; 4)$

b) Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (t; 6-t; 2-2t) \\ \overrightarrow{MB} = (-2+t; 4-t; 4-2t) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (2t-2; 10-2t; 6-4t)$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = \sqrt{(2t-2)^2 + (10-2t)^2 + (6-4t)^2} = \sqrt{24t^2 - 96t + 140}$$

Mặt khác $f(t) = 24t^2 - 96t + 140 = 24(t-2)^2 + 44 \geq 44$

Vậy $\min|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2\sqrt{11}$ khi $t = 2 \Rightarrow M(-1; 0; 4)$

c) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -2; 2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$

Ta có $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} d(M, AB) \cdot AB$. Vậy diện tích tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất khi khoảng cách từ M đến AB đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó khoảng cách từ M đến AB là độ dài đoạn vuông góc chung của AB và (Δ)

Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 4 - t' \\ z = 2 + t' \end{cases}$

Ta có $M \in (\Delta)$ nên $M(1-t; -2+t; 2t)$. Giả sử $N \in AB \Rightarrow N(1-t'; 4-t'; 2+t')$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (t'-t; 6-t'-t+4; 2+t'-2t), \overrightarrow{u_{AB}} = (-1; -1; 1), \overrightarrow{u_{\Delta}} = (-1; 1; 2)$$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{u_{AB}} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{u_{\Delta}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(t-t') - (6-t-t') + 2+t'-2t = 0 \\ -(t-t') + 6-t-t'+2(2+t'-2t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = \frac{22}{7} \\ t = \frac{19}{7} \end{cases}$

Vậy $M\left(-\frac{12}{7}; \frac{5}{7}; \frac{38}{7}\right)$

Câu 2

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(3; -2; 3); B(1; 0; 5)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{2}$. Tìm tọa độ điểm M là điểm trên đường thẳng d sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất?

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa mãn sao cho $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ thì I là trung điểm của AB .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} \end{aligned}$$

Ta thấy $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI^2 đạt giá trị nhỏ nhất suy ra M là hình chiếu của I lên đường thẳng d .

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

Ta có $I(2; -1; 4); M \in d \Rightarrow M(t+1; 2-2t; 3+2t) \Rightarrow \overrightarrow{IM}(t-1; 3-2t; 2t-1)$

Đến đây ta có 2 cách làm!

Cách 1. Ta có

$$\overrightarrow{IM}(t-1; 3-2t; 2t-1) \Rightarrow IM^2 = (t-1)^2 + (3-2t)^2 + (2t-1)^2 = 9t^2 - 18t + 11 = 9(t-1)^2 + 2 \geq 2$$

Suy ra MI^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi $t=1 \Rightarrow M(2; 0; 5)$.

Cách 2. Ta có $\overrightarrow{u_d} = (1; -2; -2)$.

Ta có hệ phương trình $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow 1(t-4) - 2(3-2t) + 2(2t-1) = 0 \Leftrightarrow 9t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Câu 3

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(0; 1; 5); B(0; 3; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$. Tìm tọa độ điểm M là điểm trên đường thẳng d sao cho biểu thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa mãn sao cho $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ thì I là trung điểm của AB .

$$\text{Khi đó } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}| = |2\overrightarrow{MI}| = 2|\overrightarrow{MI}|$$

$|\overrightarrow{MI}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi M là hình chiếu của I lên đường thẳng d .

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$

Ta có $I(0;2;4); M \in d \Rightarrow M(t+4; t-1; t) \Rightarrow \overrightarrow{IM}(t+4; t-3; t-4)$

$$\Rightarrow IM = \sqrt{(t+4)^2 + (t-3)^2 + (t-4)^2} = \sqrt{3t^2 - 6t + 41} = \sqrt{3(t-1)^2 + 38} \geq \sqrt{38}$$

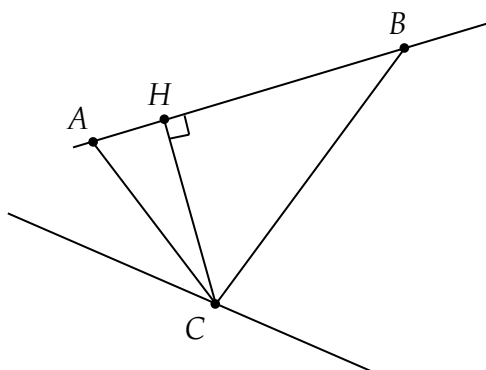
Vậy MI^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi $t=1 \Rightarrow M(5;0;1)$

Câu 4

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho 2 điểm $A(1;5;0); B(3;3;6)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Gọi C là điểm trên đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.

Khoảng cách giữa 2 điểm A và C là?

Lời giải



Ta có 2 đường thẳng AB và d chéo nhau.

Gọi C là điểm trên d và H là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB.

Vì $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \sqrt{11} \cdot CH$ nên S_{ABC} nhỏ nhất khi CH nhỏ nhất $\Leftrightarrow CH$ là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng AB và d.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 6) \Rightarrow \overrightarrow{u_{AB}} = (1; -1; 3)$.

Phương trình tham số của AB là $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 5 - t' \\ z = 3t' \end{cases}$

Phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_1} = (2; -1; 2)$

Ta có $C(-1+2t; 1-t; 2t); H(1+t'; 5-t'; 3t') \in AB \Rightarrow \overrightarrow{CH} = (t'-2t+2; -t'+t+4; 3t'-2t)$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{u_{AB}} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11t' - 9t = 2 \\ 9t' - 9t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 1 \end{cases}$

Ta có $C(1; 0; 2) \Rightarrow AC = \sqrt{29}$.

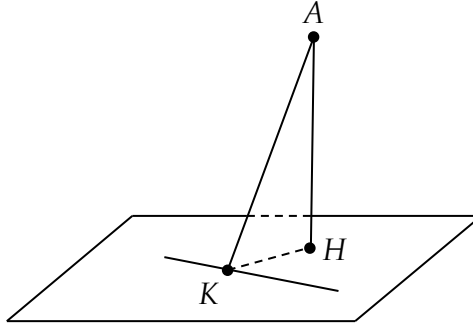
Dạng 3.

Cho điểm A và đường thẳng (d). Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) có d(A, (Q)) lớn nhất, nhỏ nhất.

Câu 1

Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;4;2)$ và đường thẳng $(d): \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) sao cho $d(A, (Q))$ lớn nhất, nhỏ nhất.

Lời giải



- Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) sao cho $d(A, (Q))$ lớn nhất

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (Q) và K là hình chiếu vuông góc của A trên (d) . Theo tính chất đoạn vuông góc và đoạn xiên thì $AH \leq AK$ nên AH lớn nhất khi $H \equiv K$.

Vậy mặt phẳng (Q) cần tìm là mặt phẳng vuông góc với AK tại K

Ta có $K \in (d)$ nên $K(1-t; -2+t; 2t) \Rightarrow \overrightarrow{AK} = (-t; t-6; 2t-2)$.

Đường thẳng (d) có vector chỉ phương $\vec{a} = (-1; 1; 2)$.

Mặt khác $\overrightarrow{AK} \perp \vec{a} \Leftrightarrow t = \frac{5}{3}$. Do đó $\overrightarrow{AK} = \left(-\frac{5}{3}; -\frac{13}{3}; \frac{4}{3} \right)$.

Chọn vector pháp tuyến của (Q) là $\vec{n} = (5; 13; -4)$.

Chọn điểm $M_0(1; -2; 0) \in (d) \Rightarrow M_0 \in (Q)$

Phương trình mặt phẳng (Q) là $5(x-1) + 13(y+2) - 4(z-0) = 0 \Leftrightarrow 5x + 13y - 4z + 21 = 0$.

- Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) sao cho $d(A, (Q))$ nhỏ nhất

Khoảng cách $d(A, (Q))$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AH = 0$ khi đó A thuộc mặt phẳng (Q) tức là ta lập mặt phẳng (Q) chứa điểm A và đường thẳng (d) .

Ta có $\overrightarrow{AM_0} = (0; -6; -2)$ và $[\overrightarrow{AM_0}; \vec{a}] = (-10; 2; -6) = -2(5; -1; 3)$.

Mặt phẳng (Q) chứa $A(1;4;2)$ có một vector pháp tuyến $\vec{u} = (5; -1; 3)$.

Phương trình $(Q): 5(x-1) - 1(y-4) + 3(z-2) = 0 \Leftrightarrow 5x - y + 3z - 7 = 0$.

Dạng 4.

Cho hai đường thẳng d, d' . Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và tạo với đường thẳng d' một góc lớn nhất.

Phương pháp hình học.

Trước hết ta xét trường hợp d và d' chéo nhau.

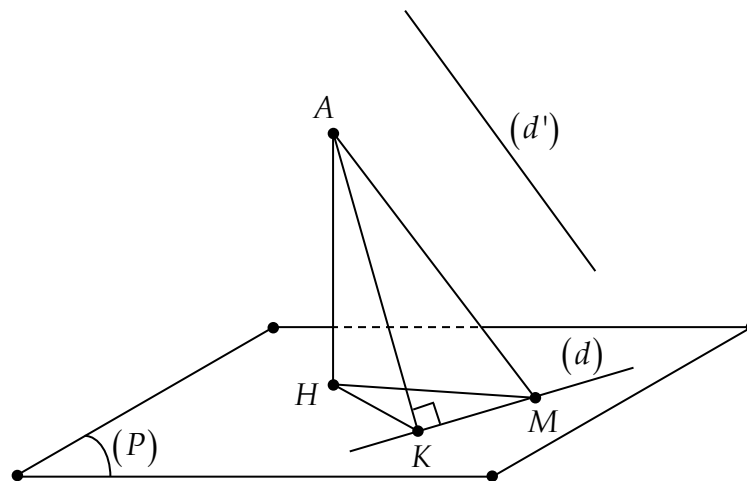
Gọi M là một điểm nào đó thuộc d , dựng đường thẳng qua M và song song với d' . Lấy điểm A cố định trên đường thẳng đó. Hạ $AH \perp (P), AK \perp d$.

Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d' là AMH . Ta có $\cos AMH = \frac{HM}{AM} \geq \frac{KM}{AM}$.

Mà $\frac{KM}{AM}$ không đổi nên AMH lớn nhất khi $\cos AMH$ nhỏ nhất hay $H \equiv K$.

Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (AKM) , hay vector pháp tuyến của (P) vuông góc với hai vector $\vec{u}_d$ và $[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]$

Nên vector pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d, [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]]$.



Trường hợp d và d' cắt nhau tại M , bài toán giải tương tự như trên ta đều có vector pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d, [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]]$.

Phương pháp hàm số.

Ta có thể giải bằng phương pháp chuyển về tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số theo các bước

- Gọi $(P): Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0$
- Vì (P) chứa d nên (P) đi qua hai điểm $M, N \in d$. Khi đó các tham số A, B, C, D sẽ phụ thuộc vào hai trong bốn tham số, chẳng hạn đó là A, B . Ta giải điều kiện $\vec{n} \cdot \vec{MN} = 0$ để rút hai ẩn C, D theo A, B
- Xác định góc giữa đường thẳng d' và mặt phẳng (P) . Đây là một phân thức hai biến A, B với tử thức và mẫu thức cùng bậc, nên có thể chuyển về một biến $t = \frac{A}{B}$.
- Khảo sát hàm $f(t)$ để xác định giá trị lớn nhất (nhỏ nhất)

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA.

Câu 1

Cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$ và $d': \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và tạo với đường thẳng d' một góc lớn nhất.

Lời giải

Cách 1. Sử dụng phương pháp hình học.

Vận dụng kết quả đã chứng minh trong phần lí thuyết, ta có mặt phẳng (P) cần tìm qua M và có vector pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d, [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]]$.

Ta có $\vec{u}_d = (1; 2; -1), \vec{u}_{d'} = (2; -1; 2) \Rightarrow [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] = (3; -4; -5)$.

Do đó $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d, [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]] = -2(7; -1; 5)$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): 7x - y + 5z - 9 = 0$.

Cách 2. Sử dụng phương pháp hàm số.

Đường thẳng d đi qua hai điểm $M(1; -2; 0), N(2; 0; -1)$.

Phương trình mp (P) qua M có dạng $(P): A(x-1) + B(y+2) + Cz = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Vì (P) qua N nên $C = A + 2B$.

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (A; B; A+2B), A^2 + B^2 + (A+2B)^2 > 0$ và $\vec{u}_{d'} = (2; -1; 2)$ nên góc giữa mp (P) và đường

thẳng d' là α thỏa mãn $\sin \alpha = \left| \cos(\vec{n}_{(P)}, \vec{u}_{d'}) \right| = \frac{|4A+3B|}{3\sqrt{A^2+B^2+(A+2B)^2}}$

Nếu $B = 0$ thì $A \neq 0$ nên $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Nếu $B \neq 0$ thì ta đặt $t = \frac{A}{B}, t \in \mathbb{R}$, ta có

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}} = \frac{1}{3} \sqrt{f(t)}, f(t) = \frac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}$$

Vì $f'(t) = \frac{4(4t+3)(t+7)}{(2t^2+4t+5)^2}$ nên $\max f(t) = \frac{25}{3}$ khi và chỉ khi $t = -7$ hay $A = -7B$.

Tức là $(P): 7x - y + 5z - 9 = 0$

Mà trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\sin \alpha$ lớn nhất đạt được tương ứng với α lớn nhất nên

$$\max \alpha = \arcsin \frac{5\sqrt{3}}{9} \text{ khi } (P): 7x - y + 5z - 9 = 0.$$

Câu 2

Cho hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$ và $d': \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{2}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và tạo với đường thẳng d' một góc lớn nhất.

Lời giải

Cách 1. Sử dụng phương pháp hình học.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(2; 1; -1)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_d = (1; 2; -2)$.

Đường thẳng d' có vector chỉ phương $\vec{u}_{d'} = (1; 1; 2)$

Ta có mặt phẳng (P) cần tìm qua M và có vector pháp tuyến của (P) là

$$\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d, [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]]$$

Ta có $[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] = (6; -4; -1)$.

Do đó $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d, [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]] = (-10; -11; -16)$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): 10x + 11y + 16z - 15 = 0$.

Cách 2. Sử dụng phương pháp hàm số.

Đường thẳng d đi qua hai điểm $M(2; 1; -1)$, $N(1; -1; 1)$.

Phương trình mp (P) qua M có dạng

$$(P): A(x-2) + B(y-1) + C(z+1) = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Vì (P) qua N nên $A = -2B + 2C$.

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (-2B + 2C; B; C)$, $(-2B + 2C)^2 + B^2 + C^2 > 0$ và $\vec{u}_{d'} = (1; 1; 2)$ nên góc giữa mp (P) và d'

là α thỏa mãn $\sin \alpha = \left| \cos(\vec{n}_{(P)}, \vec{u}_{d'}) \right| = \frac{|4C - B|}{6\sqrt{5B^2 - 8BC + 5C^2}}$

Nếu $C = 0$ thì $B \neq 0$ nên $\sin \alpha = \frac{1}{6\sqrt{5}}$

Nếu $C \neq 0$ thì ta đặt $t = \frac{B}{C}, t \in \mathbb{R}$, ta có

$$\sin \alpha = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{(t-4)^2}{5t^2 - 8t + 5}} = \frac{1}{6} \sqrt{f(t)}, f(t) = \frac{(t-4)^2}{5t^2 - 8t + 5}$$

Vì $f'(t) = \frac{(16t-11)(t-4)}{(5t^2-8t+5)^2} \Rightarrow \max f(t) = \frac{53}{9}$ khi và chỉ khi $t = \frac{11}{16} \Rightarrow B = \frac{11}{16}C$ hay $A = \frac{10}{16}C$.

Tức là $(P): 10x + 11y + 16z - 15 = 0$.

Mà trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\sin \alpha$ lớn nhất đạt được tương ứng với α lớn nhất nên

$$\max \alpha = \arcsin \frac{\sqrt{53}}{18} \text{ khi } (P): 10x + 11y + 16z - 15 = 0$$

Câu 3

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 1 = 0$ và đường thẳng $(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{1}$ hai điểm $A(1; 2; -2)$, $B(2; 0; -1)$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) . Khi đó góc giữa (P) và (Q) nhỏ nhất khi và chỉ khi $\Delta \perp d$.

Ta có (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; -1)$ và $\vec{u}_d = (1; -2; 1) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = [\vec{n}, \vec{u}_d] = (-1; -2; -3)$

Suy ra vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta] = (8; 2; -4) = 2(4; 1; -2)$

$$\Rightarrow (Q): 4(x-1) + (y-2) - 2(z+2) = 0 \Leftrightarrow 4x + y - 2z - 10 = 0$$

Câu 4

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(2;3;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z-5=0$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, B và tạo với (α) một góc nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz+d=0$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $a, b, c, d < 5$). Khi đó tích $a.b.c.d$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) . Khi đó góc giữa (P) và (Q) nhỏ nhất khi và chỉ khi $\Delta \perp AB$.

Ta có (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 2)$ và $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 2) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = [\vec{n}, \overrightarrow{AB}] = 4(-2; 0; 1)$

Suy ra vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_{(Q)} = [\overrightarrow{AB}, \vec{u}_\Delta] = 4(-2; 5; -4)$

Phương trình mặt phẳng (Q)

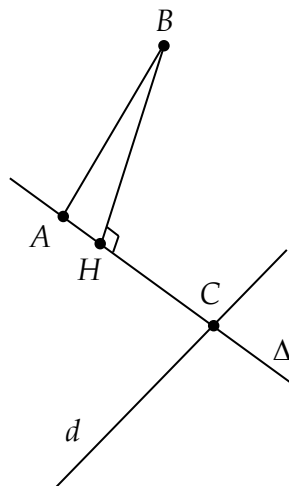
$$-2(x-1)+5(y-1)-4z=0 \Leftrightarrow -2x+5y-4z-3=0 \Leftrightarrow 2x-5y+4z+3=0.$$

Vậy $a.b.c.d = 2.(-5).4.3 = -120$.

Dạng 5.

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm A, B và đường thẳng d . Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , cắt d và cách điểm B một khoảng lớn nhất.

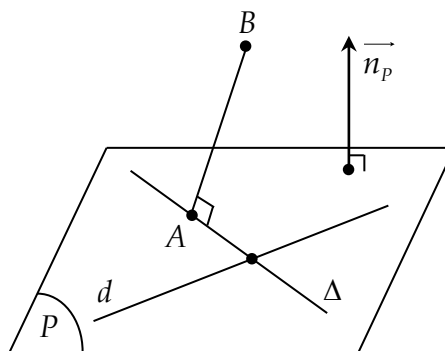
Phương pháp



Gọi H là hình chiếu của B trên $\Delta \Rightarrow d(B, \Delta) = BH \geq AB$.

$\Rightarrow d(B, \Delta)$ lớn nhất khi và chỉ khi $\Delta \perp AB$.

Cách 1.



Gọi (P) là mặt phẳng xác định bởi điểm A và đường thẳng d .

- Δ đi qua A cắt $d \Rightarrow \Delta \subset (P)$.
- Δ cách B một khoảng lớn nhất khi $\Delta \perp AB$.
- $\Delta \perp AB \Rightarrow \vec{u}_\Delta \perp \vec{AB}$.
- $\Delta \subset (P) \Rightarrow \vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_p$

$$\Rightarrow \vec{u}_\Delta = [\vec{n}_p, \vec{AB}].$$

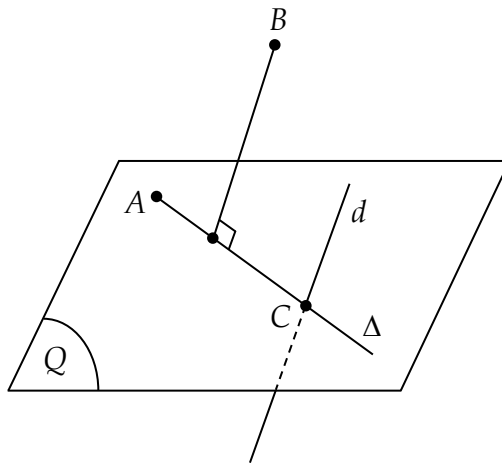
Bước 1. Lấy $M \in d$ suy ra tìm $\vec{n}_p = [\vec{AM}, \vec{u}_d]$

Bước 2. $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_p, \vec{AB}]$

Bước 3. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_p, \vec{AB}]$

Chú ý. Kiểm tra xem Δ có cắt d không?

Cách 2.



Do đi qua A và $\Delta \perp AB$ nên Δ nằm trong mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc AB .

- Dựng (Q) đi qua A và vuông góc AB .
- Tìm giao điểm $C = d \cap (P)$.
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và C .

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA

Câu 1

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(2;3;1)$, $B(1;-1;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A , cắt d và cách điểm B một khoảng lớn nhất?

Lời giải

Cách 1.

Gọi (P) là mặt phẳng xác định bởi A và d .

Lấy hai điểm $M(1;0;2) \in d$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{AM} = (-1; -3; 1) \\ \vec{u}_d = (2; 3; -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_p = [\vec{AM}, \vec{u}_d] = (0; 1; 3)$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{AB} = (-1; -4; -1) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{AB}] = (11; -3; 1) \Rightarrow \Delta: \frac{x-2}{11} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{1}$$

Ta có $\overrightarrow{u_\Delta}(11; -3; 1)$ không cùng phương với $\overrightarrow{u_d}$ nên Δ thỏa mãn.

Cách 2.

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-1; -4; -1) \Rightarrow (Q): x-1+4(y-3)+z-1=0 \Leftrightarrow (Q): x+4y+z-15=0.$$

Gọi $C = (Q) \cap d$. Mà $C \in d \Rightarrow C(1+2t; 3t; 2-t)$

$$C \in (Q) \Rightarrow 1+2t+12t+2-t-15=0 \Leftrightarrow t = \frac{12}{13} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \left(\frac{11}{13}; -\frac{3}{13}; \frac{1}{13} \right)$$

Ta có Δ đi qua A và nhận $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{11}{13}; -\frac{3}{13}; \frac{1}{13} \right)$ làm vector chỉ phương

$$\Rightarrow \Delta: \frac{x-2}{11} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{1}$$

Câu 2

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -2; -1)$, $B(2; -1; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{3}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A , cắt d và cách điểm B một khoảng lớn nhất?

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng xác định bởi A và d .

Lấy hai điểm $M(1; -1; -2) \in d$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (1; 1; -1) \\ \overrightarrow{u_d} = (-2; 1; 3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_p} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_d}] = (4; -1; 3)$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{AB} = (2; 1; 2)$$

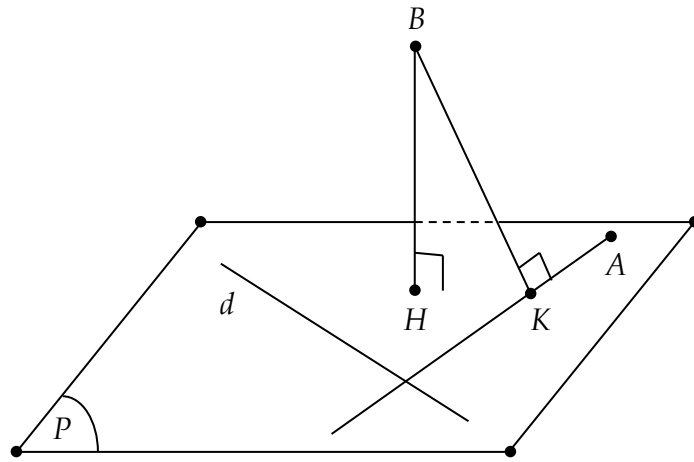
$$\Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{AB}] = (-5; -2; 6) \text{ không cùng phương với } \overrightarrow{u_d} = (-2; 1; 3) \text{ nên } \Delta \text{ thỏa mãn.}$$

$$\text{Vậy phương trình } \Delta: \frac{x}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-6}$$

Dạng 6.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm A , B và đường thẳng d . Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , cắt d và cách điểm B một khoảng nhỏ nhất.

Phương pháp



Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và chứa đường thẳng d . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm B trên mặt phẳng (P) và trên đường thẳng Δ . Do Δ đi qua A cắt d nên $\Delta \subset (P)$.

Ta có $d(B, \Delta) = BK \geq BH$.

Do đó $d(B, \Delta)$ nhỏ nhất khi $K \equiv H$ hay Δ đi qua hai điểm A và H .

$\Rightarrow \vec{u}_\Delta = k\vec{AH}, (k \neq 0)$.

Chú ý: Ta phải kiểm tra xem đường thẳng Δ có cắt đường thẳng d không? Do Δ và d nằm trong cùng mặt phẳng (P) nên nếu $\vec{u}_\Delta, \vec{u}_d$ không cùng phương thì Δ cắt đường thẳng d .

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA

Câu 1

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -1; 2)$, $B(2; 1; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , cắt d và cách điểm B một khoảng nhỏ nhất

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và chứa đường thẳng d . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm B trên mặt phẳng (P) và trên đường thẳng Δ . Do Δ đi qua A cắt d nên $\Delta \subset (P)$.

Ta có $d(B, \Delta) = BK \geq BH$. Do đó $d(B, \Delta)$ nhỏ nhất khi $K \equiv H$ hay Δ đi qua hai điểm A và H
 $\Rightarrow \vec{u}_\Delta = k\vec{AH} (k \neq 0)$

Lấy $M(-1; 0; 2) \in d$ Ta có $\vec{AM} = (-1; 1; 0), \vec{u}_d = (2; 1; -1), [\vec{AM}, \vec{u}_d] = (-1; -1; -3)$
 $\Rightarrow \vec{n}_{(P)} = [\vec{AM}, \vec{u}_d] = (-1; -1; -3)$

Phương trình mặt phẳng (P) là $-1(x-0) - 1(y+1) - 3(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + y + 3z - 5 = 0$.

Phương trình đường thẳng BH là
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Tọa độ điểm $H(2-t; 1-t; 1-3t)$ ứng với tham số t thỏa mãn

$$2-t+1-t+3(1-3t)-5=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{11}$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{21}{11}; \frac{10}{11}; \frac{8}{11}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(\frac{21}{11}; \frac{21}{11}; -\frac{14}{11}\right)$$

Chọn $\overrightarrow{u_\Delta} = \frac{11}{7} \overrightarrow{AH} = (3; 3; -2)$

Dễ thấy $\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_d}$ không cùng phương nên Δ cắt đường thẳng d .

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-2}$

Câu 2

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 4)$, $B(1; 2; -2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = 2 \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , cắt d và cách điểm B một khoảng nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và chứa đường thẳng d . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm B trên mặt phẳng (P) và trên đường thẳng Δ . Do Δ đi qua A cắt d nên $\Delta \subset (P)$.

Ta có $d(B, \Delta) = BK \geq BH$.

Do đó $d(B, \Delta)$ nhỏ nhất khi $K \equiv H$ hay Δ đi qua hai điểm A và $H \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = k \overrightarrow{AH}, (k \neq 0)$

Lấy $M(2; -1; 2) \in d$

Ta có $\overrightarrow{AM} = (1; -3; -2), \overrightarrow{u_d} = (-1; 1; 0), [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_d}] = (2; 2; -2)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_{(P)}} = \frac{1}{2} [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_d}] = (1; 1; -1)$$

Phương trình mặt phẳng (P) là $1(x-1) + 1(y-2) - 1(z-4) = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 1 = 0$.

Phương trình đường thẳng BH là $\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 + s \\ z = -2 - s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$

Tọa độ điểm $H(1+s; 2+s; -2-s)$ ứng với tham số s thỏa mãn

$$1+s+2+s-(-2-s)+1=0 \Leftrightarrow s=-2 \Rightarrow H(-1; 0; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-2; -2; -4).$$

Chọn $\overrightarrow{u_\Delta} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AH} = (1; 1; 2)$.

Dễ thấy $\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_d}$ không cùng phương nên Δ cắt đường thẳng d .

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{2}$.

Dạng 7.

1. Tìm M sao cho $P = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2$

a) Nhỏ nhất khi $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$

b) Lớn nhất khi $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$

Phương pháp.

2. Tìm M sao cho $P = \left| \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right|$ nhỏ nhất hoặc lớn nhất, trong đó $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$.

Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ điểm I tồn tại và duy nhất nếu $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. Khi đó:

$$P = \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1})^2 + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2})^2 + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n})^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) IM^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i IA_i^2$$

Do $\sum_{i=1}^n \alpha_i IA_i^2$ không đổi nên

- Nếu $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$ thì P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất
- Nếu $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$ thì P lớn nhất $\Leftrightarrow MI$ lớn nhất

$$2. P = \left| \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n}) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \right| \cdot MI$$

Do đó P nhỏ nhất hoặc lớn nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất hoặc lớn nhất

- Nếu M thuộc đường thẳng Δ (hoặc mặt phẳng (P)) thì MI lớn nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên Δ (hoặc (P)).
- Nếu M thuộc mặt cầu (S) và đường thẳng đi qua I và tâm của (S) , cắt (S) tại 2 điểm A, B ($IA > IB$) thì MI nhỏ nhất (lớn nhất) $\Leftrightarrow M \equiv B$ ($M \equiv A$)

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA.

Câu 1

Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1; 2; -1)$, $B(3; -2; 1)$, $C(5; -1; 2)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng Oyz sao cho $MA^2 + MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi điểm $I(x; y; z)$ thỏa mãn: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} 1-x+3-x-(5-x)=0 \\ 2-y+(-2-y)-(-1-y)=0 \\ -1-z+1-z-(2-z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow I(-1; 1; -2)$$

$$IA^2 + IB^2 - IC^2 = (4+1+1) + (16+9+9) - (36+4+16) = -16$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 - MC^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 = MI^2 + IA^2 + IB^2 - IC^2$$

Với điểm I cố định, $IA^2 + IB^2 - IC^2 = -16$ và điểm M trên mặt phẳng Oyz sao cho $MA^2 + MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng Oyz.

Vậy $M(0; 1; -2)$.

Câu 2

Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1; 2; -1)$, $B(3; -2; 1)$, $C(5; -1; 2)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 5 = 0$ sao cho $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Gọi điểm $I(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 1-x-(3-x)-(5-x)=0 \\ 2-y-(-2-y)-(-1-y)=0 \\ -1-z-(1-z)-(2-z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-5 \\ z=4 \end{cases} \Leftrightarrow I(7; -5; 4)$$

$$IA^2 - IB^2 - IC^2 = (36 + 49 + 25) - (16 + 9 + 9) - (4 + 16 + 4) = 52$$

$$\Rightarrow MA^2 - MB^2 - MC^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 = -MI^2 + IA^2 - IB^2 - IC^2$$

Với điểm I cố định, $IA^2 - IB^2 - IC^2 = 52$ và điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) .

$$\text{Gọi đường thẳng } d \text{ qua } I \text{ và vuông góc với mặt phẳng } (P) \Rightarrow d: \begin{cases} x=7+t \\ y=-5+2t \\ z=4-t \end{cases}$$

M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) là giao điểm của (P) và d

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} x=7+t \\ y=-5+2t \\ z=4-t \\ x+2y-z-5=0 \end{cases} \Rightarrow 7+t+2(-5+2t)-4-t-5=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow M(9; -1; 3)$$

Vậy $M(9; -1; 3)$.

Câu 3

Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1; 2; -1)$, $B(3; -2; 1)$, $C(5; -1; 2)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng Oxz sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi điểm $I(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 1-x+2(3-x)-4(5-x)=0 \\ 2-y+2(-2-y)-4(-1-y)=0 \\ -1-z+2(1-z)-4(2-z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=13 \\ y=-2 \\ z=7 \end{cases} \Leftrightarrow I(13; -2; 7)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}| = |-\overrightarrow{MI}| = MI$$

Với điểm I cố định điểm M trên mặt phẳng Oxz sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng Oxz.

Vậy $M(13; 0; -2)$.

Câu 4

Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1; 2; -1)$, $B(3; -2; 1)$, $C(5; -1; 2)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 6 = 0$ sao cho $|\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi điểm $I(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 1 - x - 5(3 - x) + 3(5 - x) = 0 \\ 2 - y - 5(-2 - y) + 3(-1 - y) = 0 \\ -1 - z - 5(1 - z) + 3(2 - z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -11 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow I(-1; -11; 0)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}| = |-\overrightarrow{MI}| = MI$$

Với điểm I cố định điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $|\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng P .

$$\text{Gọi đường thẳng } d \text{ qua } I \text{ và vuông góc với mặt phẳng } (P) \Rightarrow d: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -11 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) là giao điểm của (P) và d

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -11 + t \\ z = 2t \\ x + y - 2z + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow -1 + t + (-11 + t) + 4t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow M(0; -10; -2)$$

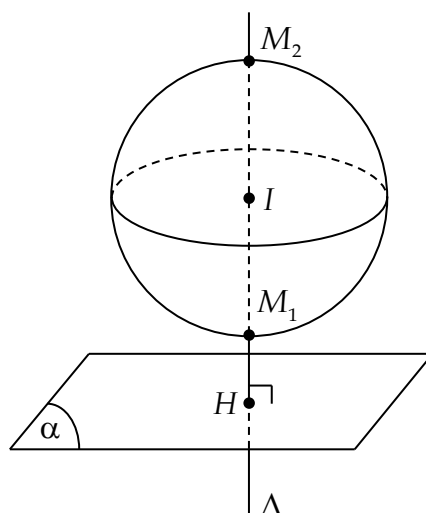
Vậy $M(0; -10; -2)$

Dạng 8. Cho mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$, và $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Tìm điểm M trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ nó đến mặt cầu đạt giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất!

Phương pháp

Giả sử mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$, bán kính r . Gọi H là hình chiếu của I lên mp (α) .

- **Trường hợp 1.** $IH > R \Rightarrow (S) \cap (\alpha) = \emptyset$

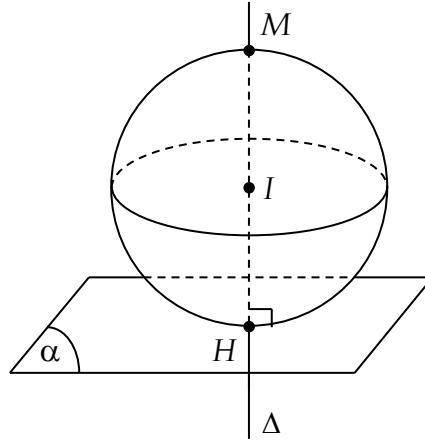


Gọi (Δ) là đường thẳng qua I và vuông góc với (α) , (Δ) cắt (S) tại hai điểm $M_1; M_2$.

Giả sử $d(M_2, \Delta) > d(M_1, \Delta) \Rightarrow \forall M \in (S): d(M_1, (\alpha)) \leq d(M, (\alpha)) \leq d(M_2, (\alpha))$.

Vậy M_2 là điểm thuộc mặt cầu có khoảng cách đến $\text{mp}(\alpha)$ đạt max và M_1 là điểm thuộc mặt cầu có khoảng cách đến $\text{mp}(\alpha)$ đạt min.

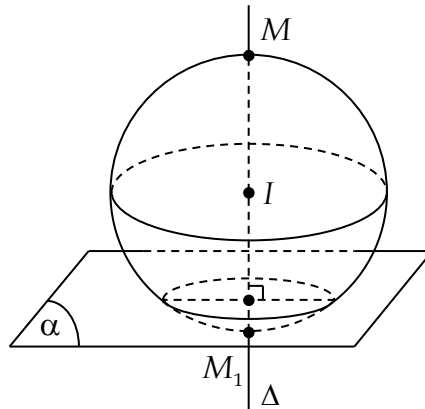
- **Trường hợp 2.** $IH = R \Rightarrow (S) \cap (\alpha) = \{H\}$: Mặt cầu tiếp xúc mặt phẳng tại H .



Ta có (Δ) là đường thẳng qua I và vuông góc với (α) , (Δ) cắt (S) tại hai điểm $H; M$.

Khi đó $d(H, (\alpha)) = 0 = \min; d(M, (\alpha)) = \max$.

- **Trường hợp 3.** $IH < R \Rightarrow (S) \cap (\alpha) = (C, R = \sqrt{r^2 - IH^2})$



Mặt cầu cắt với $\text{mp}(\alpha)$ theo giao tuyến là đường tròn (C) tâm H bán kính $R = \sqrt{r^2 - IH^2}$. Gọi (Δ) là đường thẳng qua I và vuông góc với (α) , (Δ) cắt (S) tại hai điểm $M_1; M_2$ (M_2 thuộc tia HI) thì M_2 là điểm thuộc mặt cầu có khoảng cách đến $\text{mp}(\alpha)$ đạt max và tập hợp tất cả các điểm thuộc đường tròn (C) là điểm thuộc mặt cầu có khoảng cách đến $\text{mp}(\alpha)$ bằng 0 tức đạt min.

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA.

Câu 1

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 49$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - 3y + 6z - 72 = 0$. Tìm điểm M thuộc sao cho khoảng cách từ M đến $\text{mp}(\alpha)$ là

1. Lớn nhất
2. Nhỏ nhất

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 3)$ và bán kính $r = \sqrt{49} = 7$.

$$\text{Ta có } d(I, (\alpha)) = \frac{|2(-1) - 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 - 72|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{62}{7} > r \Rightarrow (S) \cap (\alpha) = \emptyset$$

$$(\Delta) \text{ là đường thẳng qua } I \text{ và vuông góc với } (\alpha), (\Delta): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + 6t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

Giao điểm của (Δ) và (S) là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + 6t \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_1(1; -1; 9) \\ M_2(-3; 5; -3) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } d(M_1, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) + 6 \cdot 9 - 72|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{13}{7}; d(M_2, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot (-3) - 3 \cdot 5 + 6 \cdot (-3) - 72|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{111}{7}$$

a) Vậy $M_2(-3; 5; -3) \in (S)$ thì khoảng cách từ M_2 đến mp (α) là lớn nhất.

b) Vậy $M_1(1; -1; 9) \in (S)$ thì khoảng cách từ M_1 đến mp (α) là nhỏ nhất.

thongqna@gmail.com

Dạng 9.

$$\text{Cho mặt cầu } (S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \text{ và đường thẳng } (d): \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + b_1t \\ z = z_0 + c_1t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

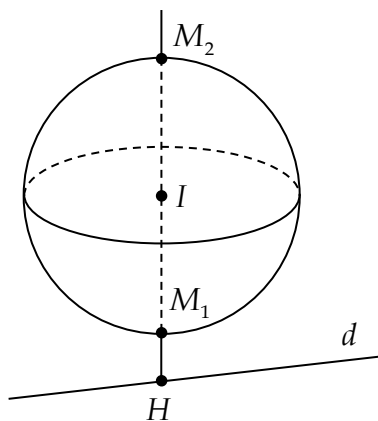
Tìm điểm M trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ nó đến đường thẳng d đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất?

Phương pháp

Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$, bán kính R . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d .

Khi đó xảy ra các trường hợp sau

- **Trường hợp 1.** $IH > R$ hay (S) và d không có điểm chung.

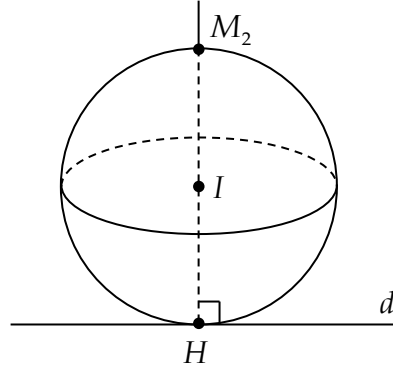


Gọi $M_1; M_2$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng IH và mặt cầu (S) . Không mất tính tổng quát, ta giả sử $HM_2 > HM_1$.

Với M thuộc mặt cầu (S) , ta có $M_2H \geq d(M; d) \geq M_1H$, dấu bằng xảy ra khi $M \equiv M_2$ và $M \equiv M_1$.

Vậy khoảng cách từ M đến đường thẳng d đạt giá trị lớn nhất khi $M \equiv M_2$ và đạt giá trị nhỏ nhất khi $M \equiv M_1$.

- **Trường hợp 2.** $IH = R$ hay (S) và d tiếp xúc với nhau.

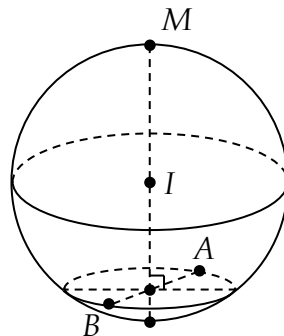


Gọi $M_1; M_2$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng IH và mặt cầu (S) . Không mất tính tổng quát, ta giả sử $M_1 \equiv H$.

Với M thuộc mặt cầu (S) , ta có $M_2H \geq d(M; d) \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi $M \equiv M_2$ và $M \equiv H$.

Vậy khoảng cách từ M đến đường thẳng d đạt giá trị lớn nhất khi $M \equiv M_2$ và đạt giá trị nhỏ nhất là 0 khi $M \equiv H$.

- **Trường hợp 3.** $IH < R$ hay (S) và d cắt nhau tại hai điểm A và B .



Gọi $M_1; M_2$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng IH và mặt cầu (S) trong đó M_2 nằm trên tia HO . Khi đó $M_2H \geq d(M; d) \geq 0$.

Hơn nữa, $d(M; d) = 0$ khi $M \equiv A$ hoặc $M \equiv B$ và $d(M; d) = M_2H$ khi $M \equiv M_2$.

Vậy khoảng cách từ M đến đường thẳng d đạt giá trị lớn nhất khi $M \equiv M_2$ và đạt giá trị nhỏ nhất là 0 khi $M \equiv A$ hoặc $M \equiv B$.

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA

Câu 1

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho: mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 6$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = -6-t \end{cases}. \text{ Tìm điểm } M \text{ thuộc } (S) \text{ sao cho khoảng cách từ } M \text{ đến đường thẳng } d \text{ là}$$

1. Lớn nhất

2. Nhỏ nhất

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;0;2)$ và bán kính $r = \sqrt{6}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên d .

Vì $H \in d$ nên $H(1+t;1-t;-6-t)$. Khi đó $\overrightarrow{HI} = (1-t; -1+t; 8+t)$.

Mà $IH \perp d$ suy ra $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow 1-t+1-t-8-t=0 \Leftrightarrow t=-2$.

Khi đó, ta tìm được $H(-1;3;-4)$ và $IH = \sqrt{54} > R$ nên (S) và d không có điểm chung.

Đường thẳng IH có phương trình
$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$$

Gọi $M_1; M_2$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng IH và mặt cầu (S) .

Khi đó, tọa độ các điểm $M_1; M_2$ thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2t \\ (x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 6 \end{cases}$$

Giải hệ ta tìm được $M_1(1;1;0); M_2(3;-1;4)$.

Khi đó $M_2H = 4\sqrt{2}, M_1H = 2\sqrt{6}$.

Với M thuộc mặt cầu (S) , ta có $4\sqrt{2} \geq d(M;d) \geq 2\sqrt{6}$, dấu bằng xảy ra khi $M \equiv M_2$ và $M \equiv M_1$.

Vậy khoảng cách từ M đến đường thẳng d lớn nhất bằng $4\sqrt{2}$ khi $M \equiv M_2(3;-1;4)$ và nhỏ nhất bằng $2\sqrt{6}$ khi $M \equiv M_1(1;1;0)$.

CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z - 15 = 0$ và ba điểm $A(1; 2; 0)$, $B(1; -1; 3)$, $C(1; -1; -1)$. Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (P) sao cho $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị $2x_0 + 3y_0 + z_0$ bằng?

- A. 11 B. 5 C. 15 D. 10

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 4; 5)$, $B(3; 4; 0)$, $C(2; -1; 0)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y - 2z - 12 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ thuộc (P) sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a + b + c$.

- A. 3 B. 2 C. -2 D. -3

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng π và ba điểm $A(1; 2; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(0; 0; 3)$. Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (P) sao cho $MA^2 + 3MB^2 + 2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị $x_0 + 2y_0 - z_0$ bằng?

- A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{6}{9}$ C. $\frac{46}{9}$ D. $\frac{4}{9}$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1; -7; -8)$, $B(2; -5; -9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7; -1; -2)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Biết (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b; 4)$, khi đó giá trị của tổng $a + b$ là

- A. -1 B. 3 C. 6 D. 2

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2; -2; 1)$, $A(1; 2; -3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm một vector chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M , vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

- A. $\vec{u} = (2; 2; -1)$ B. $\vec{u} = (1; 7; -1)$ C. $\vec{u} = (1; 0; 2)$ D. $\vec{u} = (3; 4; -4)$

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(7; 2; 3)$, $B(1; 4; 3)$, $C(1; 2; 6)$, $D(1; 2; 3)$ và điểm M tùy ý. Tính OM khi biểu thức $P = MA + MB + MC + \sqrt{3}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $OM = \frac{3\sqrt{21}}{4}$ B. $OM = \sqrt{26}$ C. $OM = \sqrt{14}$ D. $OM = \frac{5\sqrt{17}}{4}$

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(S_2): x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 4$ và các điểm $A(4; 0; 0)$, $B\left(\frac{1}{4}; 0; 0\right)$, $C(1; 4; 0)$, $D(4; 4; 0)$. Gọi M là điểm thay đổi trên (S_1) , N là điểm thay đổi trên (S_2) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = MA + 2ND + 4MN + 6BC$ là

- A. $2\sqrt{265}$ B. $\frac{5\sqrt{265}}{2}$ C. $3\sqrt{265}$ D. $\frac{7\sqrt{265}}{2}$

Câu 8. Trong không gian tọa độ Oxyz cho $A(1;3;10)$, $B(4;6;5)$ và M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho MA , MB cùng tạo với mặt phẳng (Oxy) các góc bằng nhau. Tính giá trị nhỏ nhất của AM ?

- A. $6\sqrt{3}$ B. 10 C. $\sqrt{10}$ D. $8\sqrt{2}$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P): x - y + z + 3 = 0$, $(Q): x + 2y - 2z - 5 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$. Gọi M là điểm di động trên (S) và N là điểm di động trên (P) sao cho MN luôn vuông góc với (Q) . Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN bằng?

- A. $9 + 5\sqrt{3}$ B. 28 C. 14 D. $3 + 5\sqrt{3}$

Câu 10. Trong không gian Oxyz, cho điểm $I(1;0;0)$, mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 1 = 0$ và đường

thẳng $d: \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Gọi d' là đường thẳng đi qua điểm I và vuông góc với mặt phẳng (P) , M là

hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P) , N là điểm thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác IMN nhỏ nhất. Tọa độ điểm N là

- A. $N\left(2; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ B. $N\left(2; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$ C. $N\left(2; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ D. $N\left(2; -\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $(S_m): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-m)^2 = \frac{m^2}{4}$ (với $m > 0$ là tham số thực) và hai điểm $A(2;3;5)$, $B(1;2;4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để trên (S_m) tồn tại điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = 9$.

- A. $m = 1$ B. $m = 3 - \sqrt{3}$ C. $m = 8 - 4\sqrt{3}$ D. $m = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}$

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho ba mặt phẳng: $(P): x - 2y + z - 1 = 0$, $(Q): x - 2y + z + 8 = 0$, $(R): x - 2y + z - 4 = 0$. Một đường thẳng d thay đổi cắt ba mặt phẳng (P) , (Q) , (R) lần lượt tại A , B , C . Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = AB^2 + \frac{144}{AC}$.

- A. $72\sqrt{3}$ B. 96 C. 108 D. $72\sqrt{4}$

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ Descartes Oxyz, cho điểm $A(3;-1;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

- A. $x + y - z = 0$ B. $x + y - z - 2 = 0$ C. $x + y - z + 1 = 0$ D. $-x + 2y + z + 5 = 0$

Câu 14. Trong không gian cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(3;6;-5)$. Điểm M thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là

- A. $M(1;2;0)$ B. $M(0;0;-1)$ C. $M(1;3;-1)$ D. $M(1;3;0)$

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

- A. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$ B. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{-11} = \frac{z-1}{2}$
 C. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{2}$ D. $d: \frac{x+3}{-26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 2)$ và mặt phẳng $(P): (m-1)x + y + mz - 1 = 0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là

- A. $2 < m < 6$ B. Không có m . C. $-2 < m < 2$ D. $-6 < m < -2$

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ và mặt cầu $(S):$

$x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Đường thẳng d thay đổi đi qua điểm M , cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A , B . Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB .

- A. $S = 4$ B. $S = 2\sqrt{7}$ C. $S = \sqrt{7}$ D. $S = 2\sqrt{2}$

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2), B(1;1;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó, giá trị $T = a + 2b + 3c$ bằng

- A. 5 B. 3 C. 4 D. 10

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z + 9 = 0$ và ba điểm $A(2;1;0), B(0;2;1), C(1;3;-1)$. Điểm $M \in (\alpha)$ sao cho $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $x_M + y_M + z_M = 1$ B. $x_M + y_M + z_M = 4$ C. $x_M + y_M + z_M = 3$ D. $x_M + y_M + z_M = 2$

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;2;-5)$, $B(-1;0;2)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $T = |MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất là $T_{\max}$. Khi đó, $T_{\max}$ bằng bao nhiêu?

- A. $T_{\max} = 3$ B. $T_{\max} = 2\sqrt{6} - 3$ C. $T_{\max} = \sqrt{57}$ D. $T_{\max} = 3\sqrt{6}$

Câu 21. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$, $B(6;5;5)$. Gọi (S) là mặt cầu có đường kính AB . Mặt phẳng (P) vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H (giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P)) có thể tích lớn nhất, biết rằng $(P): 2x + by + cz + d = 0$ với $b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tính $S = b + c + d$.

- A. $S = -18$ B. $S = -11$ C. $S = -24$ D. $S = -14$

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(4;2;5)$, $B(0;4;-3)$, $C(2;-3;7)$. Biết điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ nằm trên mặt phẳng Oxy sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $P = x_0 + y_0 + z_0$.

- A. $P = -3$ B. $P = 0$ C. $P = 3$ D. $P = 6$

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và hai điểm $A(0;-1;3)$, $B(1;-2;1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M(5;2;-4)$ B. $M(-1;-1;-1)$ C. $M(1;0;-2)$ D. $M(3;1;-3)$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$, điểm $A(2;2;4)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) , cắt d sao cho khoảng cách từ A đến Δ lớn nhất.

- A. $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{1}$ B. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-3}{1}$ C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-4}{1}$ D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 1 = 0$, $(Q): x - 2y + 2z - 8 = 0$, $(R): x - 2y + 2z + 4 = 0$. Một đường thẳng Δ thay đổi cắt ba mặt phẳng (P) , (Q) , (R) lần lượt tại các điểm A , B , C . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $AB + \frac{96}{AC^2}$ là

- A. $\frac{41}{3}$ B. 99 C. 18 D. 24

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(6;3;2)$, $B(2;-1;6)$. Trên mặt phẳng (Oxy) , lấy điểm $M(a;b;c)$ sao cho $MA + MB$ bé nhất. Tính $P = a^2 + b^3 - c^4$.

- A. $P = 129$ B. $P = -48$ C. $P = 33$ D. $P = 48$

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(m;0;0)$, $B(0;m-1;0)$; $C(0;0;m+4)$ thỏa mãn $BC = AD$, $CA = BD$ và $AB = CD$. Giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{14}}{2}$ C. $\sqrt{7}$ D. $\sqrt{14}$

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P) bằng

- A. $\frac{11\sqrt{2}}{6}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{11}}{18}$ D. $\frac{7\sqrt{2}}{6}$

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 12$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường

tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của mặt cầu và đáy là hình tròn giới hạn bởi (C) có thể tích lớn nhất. Phương trình của mặt phẳng (Q) là

- A. $2x + 2y - z - 4 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 17 = 0$.
 B. $2x + 2y - z + 2 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 8 = 0$.
 C. $2x + 2y - z - 1 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 11 = 0$.
 D. $2x + 2y - z - 6 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 3 = 0$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Một đường thẳng đi qua điểm M và cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B . Diện tích lớn nhất của tam giác OAB bằng

- A. 4 B. $2\sqrt{7}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{7}$

Câu 31. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 4$. Gọi $N(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc (S) sao cho khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (Oxz) lớn nhất. Giá trị của biểu thức $P = x_0 + y_0 + z_0$ bằng

- A. 6 B. 8 C. 5 D. 4

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - t \end{cases}$. Mặt phẳng (P)

chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất có phương trình là

- A. $x + 2y + 4z + 7 = 0$ B. $4x - 7y + z - 2 = 0$ C. $4x - 5y + 3z + 2 = 0$ D. $x + y + 3z + 5 = 0$

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-m}{2}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$. Tìm m để đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt E, F sao cho độ dài đoạn EF lớn nhất

- A. $m = 1$ B. $m = 0$ C. $m = -\frac{1}{3}$ D. $m = \frac{1}{3}$

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$, $d': \begin{cases} x = 2t' \\ y = 1 + t' \\ z = 2 + t' \end{cases}$. Đường thẳng

Δ cắt d, d' lần lượt tại các điểm A, B thỏa mãn độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng Δ là

- A. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{3}$ B. $\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$ C. $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{-3}$ D. $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$

Câu 35. Cho 2 mặt cầu $(S_1): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$, $(S_2): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Gọi d là đường thẳng đồng thời tiếp xúc với hai mặt cầu trên, cắt đoạn thẳng nối tâm hai mặt cầu và cách gốc toạ độ O một khoảng lớn nhất. Nếu $\vec{u} = (a; 1; b)$ là một vector chỉ phương của d thì tổng $S = 2a + 3b$ bằng bao nhiêu?

- A. $S = 2$ B. $S = 1$ C. $S = 0$ D. $S = 4$

Câu 36. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ và $d_2: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Điểm

$M \in d_1$ và $N \in d_2$ sao cho đoạn thẳng MN ngắn nhất

A. $M\left(\frac{3}{35}; \frac{3}{35}; \frac{6}{35}\right), N\left(\frac{69}{35}; \frac{-17}{35}; \frac{18}{35}\right).$

B. $M\left(\frac{3}{35}; \frac{3}{35}; \frac{6}{35}\right), N\left(\frac{-1}{35}; \frac{-17}{35}; \frac{18}{35}\right).$

C. $M\left(\frac{3}{35}; \frac{3}{35}; \frac{6}{35}\right), N\left(\frac{69}{35}; \frac{17}{35}; \frac{18}{35}\right).$

D. $M\left(\frac{3}{5}; \frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right), N\left(\frac{69}{5}; \frac{-17}{5}; \frac{18}{5}\right).$

Câu 37. Trong không gian Oxyz, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(2;-2;2)$, $A'(3;0;-1)$, điểm M thuộc cạnh DC . Giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách $AM + MC'$ là

A. $\sqrt{17}$

B. $\sqrt{17+4\sqrt{6}}$

C. $\sqrt{17+8\sqrt{3}}$

D. $\sqrt{17+6\sqrt{2}}$

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2; -1; 1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất là:

A. $2x - y + z + 6 = 0$

B. $2x - y + z - 6 = 0$

C. $2x + y + z - 6 = 0$

D. $2x + y - z - 6 = 0$

Câu 39. Trong không gian Oxyz cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$$

Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có

phương trình là

A. $3x - 2y - 4z - 8 = 0$

B. $y + z + 1 = 0$

C. $x - 2y - 3 = 0$

D. $x + 3y + 5z + 2 = 0$

Câu 40. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ và

$d': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$. Phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với đường thẳng d' một góc lớn nhất là

A. $x - z + 1 = 0$

B. $x - 4y + z - 7 = 0$

C. $3x - 2y - 2z - 1 = 0$

D. $-x + 4y - z - 7 = 0$

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(0;4;5)$. Gọi M là điểm sao cho $MA = 2MB$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 6 = 0$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $\frac{7}{9}$

B. $\frac{14}{9}$

C. $\frac{17}{9}$

D. $\frac{11}{9}$

Câu 42. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ chứa đường thẳng AB và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $M = 2a + b - c$.

A. $M = 2$

B. $M = 3$

C. $M = 1$

D. $M = 4$

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất. Khi đó:

- A. $a + b + c = 8$ B. $a + b + c = 5$ C. $a + b + c = 6$ D. $a + b + c = 7$

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2; -2; 1)$, $A(1; 2; -3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M , vuông góc với đường thẳng d , đồng thời cách điểm A một khoảng lớn nhất.

- A. $\vec{u} = (4; -5; -2)$ B. $\vec{u} = (1; 0; 2)$ C. $\vec{u} = (8; -7; 2)$ D. $\vec{u} = (1; 1; -4)$

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 1; 0)$, $B(4; 4; -3)$, $C(2; 3; -2)$ và đường thẳng $(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d) sao cho A, B, C ở cùng phía đối với mặt phẳng (α) . Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ A, B, C đến (α) . Tìm giá trị lớn nhất của $T = d_1 + 2d_2 + 3d_3$.

- A. $T_{\max} = 2\sqrt{21}$ B. $T_{\max} = 6\sqrt{14}$ C. $T_{\max} = \sqrt{14} + \frac{\sqrt{203}}{3} + 3\sqrt{21}$ D. $T_{\max} = \sqrt{203}$

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với a, b, c là các số thực dương thay đổi tùy ý sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất là

- A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B. 1 C. $\frac{1}{3}$ D. 3

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; 1; 0)$, $B(-9; 4; 9)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x - y + z + 1 = 0$. Gọi $I(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|IA - IB|$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tổng $a + b + c$ bằng

- A. -4 B. 22 C. 13 D. -13

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$ và đường

thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = m - 1 + t \end{cases}$. Gọi T là tập tất cả các giá trị của m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A

, B sao cho các tiếp diện của (S) tại A và B tạo với nhau góc lớn nhất có thể. Tính tổng các phần tử của tập hợp T .

- A. 3 B. -3 C. -5 D. -4

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 2018 = 0$ và $(Q): x + my + (m-1)z + 2017 = 0$. Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì điểm H nào dưới đây nằm trong mặt phẳng (Q) ?

- A. $H(-2017; 1; 1)$ B. $H(2017; -1; 1)$ C. $H(-2017; 0; 0)$ D. $H(0; -2017; 0)$

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$,

$d_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = t' \\ z = -t' \end{cases}$. Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng trên là

A. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = \frac{9}{4}$

B. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = \frac{9}{4}$

C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = \frac{3}{2}$

D. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = \frac{3}{2}$

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ và hai điểm

$A(1; 2; -1)$, $B(3; 1; 2)$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A và cắt đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d là lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là:

A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{-1}$ **B.** $\frac{x}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{4}$ **C.** $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ **D.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+1}{-5}$

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O , các đỉnh $B(m; 0; 0)$, $D(0; m; 0)$, $A'(0; 0; n)$ với $m, n > 0$ và $m + n = 4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Khi đó thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{245}{108}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{64}{27}$ **D.** $\frac{75}{32}$

Câu 53. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; -2; -1)$, $B(-2; -4; 3)$, $C(1; 3; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z - 3 = 0$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$ **B.** $M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$ **C.** $M(2; 2; -4)$ **D.** $M(-2; -2; 4)$

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0; 0; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng Ozx . Tính khoảng cách nhỏ nhất giữa điểm $B(0; 4; 0)$ tới điểm C trong đó C là điểm cách đều đường thẳng Δ và trục Ox .

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $3\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{6}$ **D.** $\frac{\sqrt{65}}{2}$

Câu 55. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $M(0; -1; 2)$, $N(-1; 1; 3)$. Một mặt phẳng (P) đi qua M, N sao cho khoảng cách từ điểm $K(0; 0; 2)$ đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tìm tọa độ vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (P) .

- A. $\vec{n} = (1; -1; 1)$ B. $\vec{n} = (1; 1; -1)$ C. $\vec{n} = (2; -1; 1)$ D. $\vec{n} = (2; 1; -1)$

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với a, b, c là các số thực dương thay đổi tùy ý sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất bằng:

- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D. 1

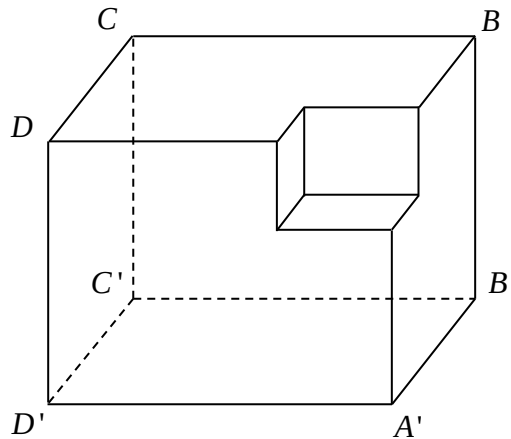
Câu 57. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, trong đó $a > 0, b > 0, c > 0$. Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $I(1; 2; 3)$ sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó các số a, b, c thỏa mãn đẳng thức nào sau đây?

- A. $a + b + c = 12$ B. $a^2 + b = c - 6$ C. $a + b + c = 18$ D. $a + b - c = 0$

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 0; -2)$, $B(4; 0; 0)$. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất, đi qua O, A, B có tâm là

- A. $I(0; 0; -1)$ B. $I(2; 0; 0)$ C. $I(2; 0; -1)$ D. $I\left(\frac{4}{3}; 0; -\frac{2}{3}\right)$

Câu 59. Một khối đa diện H được tạo thành bằng cách từ một khối lập phương cạnh bằng 3, ta bỏ đi khối lập phương cạnh bằng 1 ở một “góc” của nó như hình vẽ.



Gọi S là khối cầu có thể tích lớn nhất chứa trong H và tiếp xúc với các mặt phẳng $(A'B'C'D')$, $(BCC'B')$ và $(DCC'D')$. Tính bán kính của S .

- A. $\frac{2 + \sqrt{3}}{3}$ B. $3 - \sqrt{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{2}$

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất, mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C . Tính thể tích khối chóp $O.ABC$.

- A. $\frac{1372}{9}$ B. $\frac{686}{9}$ C. $\frac{524}{3}$ D. $\frac{343}{9}$

Câu 61. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 7 = 0$. Cho ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $AMB = 90^\circ$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng?

- A. 4 B. 2 C. 4π D. Không tồn tại.

Câu 62. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $M(0;1;3)$, $N(10;6;0)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 10 = 0$. Điểm $I(-10;a;b)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|IM - IN|$ lớn nhất. Khi đó tổng $T = a + b$ bằng

- A. $T = 5$ B. $T = 1$ C. $T = 2$ D. $T = 6$

Câu 63. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $M(1;1;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt chiều dương của các trục Ox , Oy , Oz lần lượt tại các điểm A , B , C thỏa mãn $OA = 2OB$. Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $OABC$.

- A. $\frac{64}{27}$ B. $\frac{10}{3}$ C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{81}{16}$

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và các điểm $A(1;0;2)$, $B(-1;2;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm A , B sao cho thiết diện của (P) với mặt cầu (S) có diện tích nhỏ nhất. Khi viết phương trình (P) dưới dạng $(P): ax + by + cz + 3 = 0$. Tính $T = a + b + c$.

- A. 3 B. -3 C. 0 D. -2

Câu 65. Cho a, b, c, d, e, f là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} (d-1)^2 + (e-2)^2 + (f-3)^2 = 1 \\ (a+3)^2 + (b-2)^2 + c^2 = 9 \end{cases}$. Gọi giá

trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2}$ lần lượt là M, m Khi đó, $M - m$ bằng

- A. 10 B. $\sqrt{10}$ C. 8 D. $2\sqrt{2}$

Câu 66. Trong không gian (Oxyz), cho hai điểm $A(0;8;2)$, $B(9;-7;23)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$. Mặt phẳng $(P): x + by + cz + d = 0$ đi qua điểm A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Giá trị của $b + c + d$ khi đó là

- A. $b + c + d = 2$ B. $b + c + d = 4$ C. $b + c + d = 3$ D. $b + c + d = 1$

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

- A. $6\sqrt{3}$ B. $12\sqrt{3}$ C. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ D. $5\sqrt{3}$

Câu 68. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(-1;0;1)$, $B(3;2;1)$, $C(5;3;7)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $MA = MB$ và $MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + b + c$

- A. $P = 4$ B. $P = 0$ C. $P = 2$ D. $P = 5$

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm $A(2;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x + my + (2m+1)z - m - 2 = 0$, m là tham số. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P) . Tính $a + b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất?

- A. $a + b = -\frac{1}{2}$ B. $a + b = 2$ C. $a + b = 0$ D. $a + b = \frac{3}{2}$

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$, $B(0;1;-1)$. Hai điểm D , E thay đổi trên các đoạn OA , OB sao cho đường thẳng DE chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau. Khi DE ngắn nhất thì trung điểm của đoạn DE có tọa độ là

- A. $I\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right)$ B. $I\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}; 0\right)$ C. $I\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$ D. $I\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 0\right)$

Câu 71. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua O , vuông góc với mặt phẳng (ABC) sao cho mặt phẳng (P) cắt các cạnh AB , AC tại các điểm M , N thỏa mãn thể tích tứ diện $OAMN$ nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) có phương trình:

- A. $x + y - 2z = 0$ B. $x + y + 2z = 0$ C. $x - z = 0$ D. $y - z = 0$

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua $E(-2; 1; -2)$, song song với (P) đồng thời tạo với d góc bé nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (m; n; 1)$. Tính $T = m^2 - n^2$.

- A. $T = -5$ B. $T = 4$ C. $T = 3$ D. $T = -4$

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ và hai điểm $A(2;0;3)$, $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc d thỏa mãn $MA^4 + MB^4$ nhỏ nhất. Tìm x_0 .

- A. $x_0 = 1$ B. $x_0 = 3$ C. $x_0 = 0$ D. $x_0 = 2$

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(0;0;2)$, $B(3;4;1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AX + BY$ với X, Y là hai điểm thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $XY = 1$.

- A. 3 B. 5. C. $2 + \sqrt{17}$ D. $1 + 2\sqrt{5}$

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3;4;-4)$ cắt (P) tại B . Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90° . Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

- A. $H(-2;-1;3)$ B. $I(-1;-2;3)$ C. $K(3;0;15)$ D. $J(-3;2;7)$

Câu 76. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Gọi $M(a;b;c) \in \Delta$ sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $T = a + b + c$?

- A. $T = 2$ B. $T = 3$ C. $T = 4$ D. $T = 5$

Câu 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $B(2;-1;-3)$, $C(-6;-1;3)$. Trong các tam giác ABC thỏa mãn các đường trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau, điểm $A(a;b;0)$, $b > 0$ sao cho góc A lớn nhất. Tính giá trị $\frac{a+b}{\cos A}$.

- A. 10 B. -20 C. 15 D. $-\frac{\sqrt{31}}{3}$

Câu 78. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối diện bằng nhau và D khác phía với O so với (ABC) ; đồng thời A, B, C lần lượt là giao điểm của các trục Ox, Oy, Oz và $(\alpha): \frac{x}{m} + \frac{y}{m+2} + \frac{z}{m-5} = 1$ (với $m \neq -2, m \neq 0, m \neq 5$). Tìm khoảng cách ngắn nhất từ tâm mặt cầu ngoại tiếp I của tứ diện $ABCD$ đến O .

- A. $\sqrt{30}$ B. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ C. $\sqrt{26}$ D. $\frac{\sqrt{26}}{2}$

Câu 79. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-15}{1} = \frac{y-22}{2} = \frac{z-37}{2}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z + 4 = 0$. Một đường thẳng (Δ) thay đổi cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$. Gọi A', B' là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với d . Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA' + BB'$ là

- A. $\frac{8+30\sqrt{3}}{9}$ B. $\frac{24+18\sqrt{3}}{5}$ C. $\frac{12+9\sqrt{3}}{5}$ D. $\frac{16+60\sqrt{3}}{9}$

Câu 80. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;1)$ có bán kính bằng 4 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(2;1;5)$ có bán kính bằng 2. (P) là mặt phẳng thay đổi tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$. Đặt M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm O đến (P) . Giá trị $M + m$ bằng

- A. $\sqrt{15}$ B. $8\sqrt{3}$ C. 9 D. 8

Câu 81. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0), M(1;1;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua AM cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại B, C . Khi mặt phẳng (P) thay đổi thì diện tích tam giác ABC đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

- A. $5\sqrt{6}$ B. $3\sqrt{6}$ C. $4\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{6}$

Câu 82. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z = 0$ và điểm $M(1;2;-1)$. Một đường thẳng thay đổi qua M và cắt (S) tại hai điểm A, B . Tìm giá trị lớn nhất của tổng $MA + MB$.

- A. 8 B. 10 C. $2\sqrt{17}$ D. $8 + 2\sqrt{5}$

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4$, và mặt cầu

$(S_2): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 1$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2-t \\ y = -3t \\ z = -2-t \end{cases}$. Gọi A, B là hai điểm tùy ý

thuộc $(S_1), (S_2)$ và M thuộc đường thẳng d . Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + MB$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2211}}{11}$ B. $\frac{\sqrt{3707}}{11} - 3$ C. $\frac{\sqrt{1771} + 2\sqrt{110}}{11}$ D. $\frac{\sqrt{3707}}{11}$

Câu 84. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - 4z = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và điểm $A(1; 3; 1)$ thuộc mặt phẳng (P) . Gọi Δ là đường thẳng đi qua A , nằm trong mặt phẳng (P) và cách đường thẳng d một khoảng cách lớn nhất. Gọi $\vec{u} = (a; b; 1)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ . Tính $a + 2b$.

- A. $a + 2b = -3$ B. $a + 2b = 0$ C. $a + 2b = 4$ D. $a + 2b = 7$

Câu 85. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(2; 2; -3)$ và $N(-4; 2; 1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M , nhận vectơ $\vec{u} = (a; b; c)$ làm vectơ chỉ phương và song song với mặt phẳng $(P): 2x + y + z = 0$ sao cho khoảng cách từ N đến Δ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết $|a|, |b|$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Khi đó $|a| + |b| + |c|$ bằng:

- A. 15 B. 13 C. 16 D. 14

Câu 86. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -1; 2)$, $B(1; 1; 2)$, $C(1; -1; 4)$, đường tròn (C) là giao của mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6z + 10 = 0$. Hỏi có bao nhiêu điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho $T = MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất?

- A. 3 B. 2 C. 4 D. 1

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z - 15 = 0$ và ba điểm $A(1; 2; 0)$, $B(1; -1; 3)$, $C(1; -1; -1)$. Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (P) sao cho $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị $2x_0 + 3y_0 + z_0$ bằng?

A. 11

B. 5

C. 15

D. 10

Lời giải

Xét điểm I thỏa $2\vec{IA} - \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$ suy ra $I(1; 2; -2)$.

$$2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 2(\vec{MI} + \vec{IA})^2 - (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2 = 2MI^2 + 2IA^2 - IB^2 + IC^2.$$

$2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I lên (P) . Lúc đó,

$$\text{đường thẳng } MI \text{ có phương trình } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} x_0 = 1 + 3t \\ y_0 = 2 - 3t \\ z_0 = -2 + 2t \end{cases}.$$

$$\text{Mà } 3x_0 - 3y_0 + 2z_0 - 15 = 0 \Leftrightarrow 3(1 + 3t) - 3(2 - 3t) + 2(-2 + 2t) - 15 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\Rightarrow 2x_0 + 3y_0 + z_0 = 2(1 + 3t) + 3(2 - 3t) + (-2 + 2t) = 6 - t = 5.$$

Chọn ý B.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1; 4; 5)$, $B(3; 4; 0)$, $C(2; -1; 0)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y - 2z - 12 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ thuộc (P) sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a + b + c$.

A. 3

B. 2

C. -2

D. -3

Lời giải

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\vec{IA} + \vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0}$ (*).

Ta có $\vec{IA} = (1 - x; 4 - y; 5 - z)$, $\vec{IB} = (3 - x; 4 - y; -z)$ và $3\vec{IC} = (6 - 3x; -3 - 3y; -3z)$.

$$\text{Từ (*) ta có hệ phương trình: } \begin{cases} 1 - x + 3 - x + 6 - 3x = 0 \\ 4 - y + 4 - y - 3 - 3y = 0 \\ 5 - z - z - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I(2; 1; 1).$$

$$\text{Khi đó: } MA^2 = \vec{MA}^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 = MI^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IA} + IA^2.$$

$$MB^2 = \vec{MB}^2 = (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = MI^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IB} + IB^2.$$

$$3MC^2 = 3\vec{MC}^2 = 3(\vec{MI} + \vec{IC})^2 = 3(MI^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IC} + IC^2).$$

$$\text{Do đó } S = MA^2 + MB^2 + 3MC^2 = 5MI^2 + IA^2 + IB^2 + 3IC^2.$$

Do $IA^2 + IB^2 + 3IC^2$ không đổi nên S đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI đạt giá trị nhỏ nhất. Tức là M là hình chiếu của I lên mặt phẳng $(P): 3x - 3y - 2z - 12 = 0$.

Vector chỉ phương của IM là $\vec{n} = (3; -3; -2)$.

$$\text{Phương trình tham số của } IM \text{ là: } \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

Gọi $M(2+3t; 1-3t; 1-2t) \in (P)$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) .

Khi đó: $3(2+3t) - 3(1-3t) - 2(1-2t) - 12 = 0 \Leftrightarrow 22t - 11 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Suy ra $M\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$. Vậy $a+b+c = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 3$.

Chọn ý **A**.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng π và ba điểm $A(1; 2; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(0; 0; 3)$. Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (P) sao cho $MA^2 + 3MB^2 + 2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị $x_0 + 2y_0 - z_0$ bằng?

A. $\frac{2}{9}$

B. $\frac{6}{9}$

C. $\frac{46}{9}$

D. $\frac{4}{9}$

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}) \Rightarrow I\left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}; \frac{13}{6}\right)$.

Khi đó, ta có: $Q = MA^2 + 3MB^2 + 2MC^2$

$$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 = 6MI^2 + IA^2 + 3IB^2 + 2IC^2$$

Do $IA^2 + 3IB^2 + 2IC^2$ không đổi nên Q nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất.

Mà M thuộc mặt phẳng (P) nên MI nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (P) .

$$MI \perp (P) \text{ nên phương trình } MI \text{ là } \begin{cases} x = \frac{1}{6} + t \\ y = \frac{5}{6} + t \\ z = \frac{13}{6} + t \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{6} + t; \frac{5}{6} + t; \frac{13}{6} + t\right).$$

$$\text{Ta có } M \in (P) \Leftrightarrow \frac{1}{6} + t + \frac{5}{6} + t + \frac{13}{6} - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{18} \Rightarrow M\left(\frac{4}{9}; \frac{10}{9}; \frac{22}{9}\right).$$

$$\text{Suy ra } x_0 + 2y_0 - z_0 = \frac{4}{9} + \frac{20}{9} - \frac{22}{9} = \frac{2}{9}.$$

Chọn ý **A**.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1; -7; -8)$, $B(2; -5; -9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7; -1; -2)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Biết (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b; 4)$, khi đó giá trị của tổng $a + b$ là

A. -1

B. 3

C. 6

D. 2

Lời giải

Do (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b; 4)$ và qua $A(1; -7; -8)$ nên

$$(P): a(x-1) + b(y+7) + 4(z+8) = 0.$$

Do (P) đi qua $B(2; -5; -9)$ nên $a + 2b - 4 = 0 \Rightarrow a = 4 - 2b$.

$$\text{Với } M(7; -1; -2), \text{ ta có } d = d(M, (P)) = \frac{6|a+b+4|}{\sqrt{a^2+b^2+16}} = \frac{6|8-b|}{\sqrt{5b^2-16b+32}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2}{36} = \frac{b^2-16b+64}{5b^2-16b+32} = f(b)$$

$$\text{Ta có } f'(b) = \frac{64b^2 - 576b + 512}{(5b^2 - 16b + 32)^2}. \text{ Cho } f'(b) = 0 \Leftrightarrow b = 1 \vee b = 8.$$

Lập bảng biến thiên ta thấy d đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $f(b)$ đạt giá trị lớn nhất

$$\Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a + b = 3.$$

Cách khác: Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên (P) và đường thẳng AB .

Ta có: $K(3; -3; -10)$ và $d(M, (P)) = MH \leq MK$.

Dấu bằng xảy ra khi $H \equiv K$, khi đó $\overrightarrow{MH} = (-4; -2; -8) = -2(2; 1; 4)$, mặt phẳng (P) nhận vectơ $\vec{n} = (2; 1; 4)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy $a + b = 3$.

Chọn ý **B**.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $M(-2; -2; 1)$, $A(1; 2; -3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M , vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

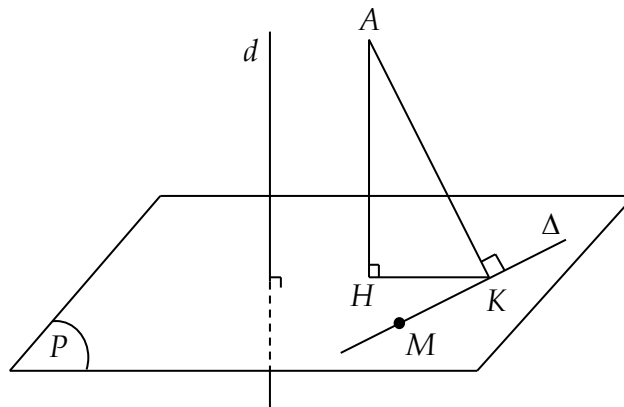
A. $\vec{u} = (2; 2; -1)$

B. $\vec{u} = (1; 7; -1)$

C. $\vec{u} = (1; 0; 2)$

D. $\vec{u} = (3; 4; -4)$

Lời giải



Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d , khi đó (P) chứa Δ .

Mặt phẳng (P) qua $M(-2; -2; 1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_p = \vec{u}_d = (2; 2; -1)$ nên có phương trình $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và Δ . Khi đó: $AK \geq AH = \text{const}$ nên $AK_{\min}$ khi $K \equiv H$. Đường thẳng AH đi qua $A(1, 2, -3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (2; 2; -1)$ nên

$$AH \text{ có phương trình tham số: } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

Ta có $H \in AH \Rightarrow H(1 + 2t; 2 + 2t; -3 - t)$.

Đồng thời $H \in (P) \Rightarrow 2(1+2t) + 2(2+2t) - (-3-t) + 9 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow H(-3; -2; -1)$.

Vậy $\vec{u} = \overrightarrow{HM} = (1; 0; 2)$.

Chọn ý C.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(7; 2; 3)$, $B(1; 4; 3)$, $C(1; 2; 6)$, $D(1; 2; 3)$ và điểm M tùy ý. Tính OM khi biểu thức $P = MA + MB + MC + \sqrt{3}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $OM = \frac{3\sqrt{21}}{4}$ B. $OM = \sqrt{26}$ C. $OM = \sqrt{14}$ D. $OM = \frac{5\sqrt{17}}{4}$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{DA} = (6; 0; 0)$, $\overrightarrow{DB} = (0; 2; 0)$, $\overrightarrow{DC} = (0; 0; 3)$ nên tứ diện $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh D . Giả sử $M(x+1; y+2; z+3)$.

Ta có $MA = \sqrt{(x-6)^2 + y^2 + z^2} \geq |x-6| \geq 6-x$, $MB = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} \geq |y-2| \geq 2-y$.

$$MC = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} \geq |z-3| \geq 3-z, \quad \sqrt{3}MD = \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \sqrt{(x+y+z)^2} \geq x+y+z.$$

Do đó $P \geq (6-x) + (2-y) + (3-z) + (x+y+z) = 11$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 11, khi và chỉ khi
$$\begin{cases} x = y = z = 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 2-y \geq 0 \\ 3-z \geq 0 \\ x+y+z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Khi đó $M(1; 2; 3)$ suy ra $OM = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Chọn ý C.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(S_2): x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 4$ và các điểm $A(4; 0; 0)$, $B\left(\frac{1}{4}; 0; 0\right)$, $C(1; 4; 0)$, $D(4; 4; 0)$. Gọi M là điểm thay đổi trên (S_1) , N là điểm thay đổi trên (S_2) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = MA + 2ND + 4MN + 6BC$ là

- A. $2\sqrt{265}$ B. $\frac{5\sqrt{265}}{2}$ C. $3\sqrt{265}$ D. $\frac{7\sqrt{265}}{2}$

Lời giải

Mặt cầu (S_1) có tâm $O(0; 0; 0)$ bán kính bằng 1, mặt cầu (S_2) có tâm $I(0; 4; 0)$ bán kính bằng 2.

Ta có bốn điểm O , A , D , I là bốn đỉnh của hình vuông cạnh bằng 4, và $OB = \frac{1}{4}$, $IC = 1$.

Ta có $\triangle OMA \sim \triangle OBM$ ($c-g-c$) $\Rightarrow \frac{MA}{BM} = \frac{OM}{OB} = 4 \Rightarrow MA = 4MB$

$$\bullet \quad \triangle IND \sim \triangle ICN$$
 ($c-g-c$) $\Rightarrow \frac{ND}{CN} = \frac{IN}{IC} = 2 \Rightarrow ND = 2NC$

Ta có $Q = 4MB + 4NC + 4MN + 6BC$

$$= 4(BM + MN + NC) + 6BC \geq 4BC + 6BC = 10BC = 10 \cdot \frac{\sqrt{265}}{4} = \frac{5\sqrt{265}}{2}.$$

Vậy Q nhỏ nhất là bằng $\frac{5\sqrt{265}}{2}$, dấu “=” xảy ra khi M, N là giao điểm của BC với các mặt cầu.

Chọn ý **B**.

Câu 8. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;3;10)$, $B(4;6;5)$ và M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho MA, MB cùng tạo với mặt phẳng (Oxy) các góc bằng nhau. Tính giá trị nhỏ nhất của AM ?

A. $6\sqrt{3}$

B. 10

C. $\sqrt{10}$

D. $8\sqrt{2}$

Lời giải

Gọi $M(x; y; 0) \in (Oxy)$. Ta có $d(A, (Oxy)) = 10$; $d(B, (Oxy)) = 5$.

Do đó, MA, MB cùng tạo với mặt phẳng (Oxy) các góc bằng nhau khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} MA = 2MB &\Leftrightarrow (1-x)^2 + (3-y)^2 + 100 = 4[(4-x)^2 + (6-y)^2 + 25] \\ &\Leftrightarrow (1-x)^2 + (3-y)^2 + 100 = 4[(4-x)^2 + (6-y)^2 + 25] \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 14y + 66 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-7)^2 = 8. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x-5 = \sqrt{8} \cos \alpha \\ y-7 = \sqrt{8} \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{8} \cos \alpha + 5 \\ y = \sqrt{8} \sin \alpha + 7 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó, ta có } AM^2 &= (x-1)^2 + (y-3)^2 + 100 = (\sqrt{8} \cos \alpha + 4)^2 + (\sqrt{8} \sin \alpha + 4)^2 + 100 \\ &= 16\sqrt{2}(\sin \alpha + \cos \alpha) + 140 = 32 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + 140 \geq 108. \end{aligned}$$

Suy ra $AM \geq 6\sqrt{3}$. Dấu “=” xảy ra khi $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow M(3;5;0)$. Vậy $\min AM = 6\sqrt{3}$.

Chọn ý **A**.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - y + z + 3 = 0$, $(Q): x + 2y - 2z - 5 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$. Gọi M là điểm di động trên (S) và N là điểm di động trên (P) sao cho MN luôn vuông góc với (Q) . Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN bằng?

A. $9 + 5\sqrt{3}$

B. 28

C. 14

D. $3 + 5\sqrt{3}$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = 5$; $d(I, (P)) = 3\sqrt{3}$.

Có MN có vector chỉ phương $\vec{u}(1; 2; -2)$, mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n}(1; -1; 1)$.

$$\text{Gọi } \alpha \text{ là góc giữa } MN \text{ và mặt phẳng } (P) \Rightarrow \sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ta có $MN = \frac{d(M, (P))}{\sin \alpha} = \sqrt{3} \cdot d(M, (P)) \leq \sqrt{3} \cdot [d(I, (P)) + R] = 9 + 5\sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN bằng $9 + 5\sqrt{3}$.

Chọn ý **A**.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; 0; 0)$, mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 1 = 0$ và đường

thẳng $d: \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Gọi d' là đường thẳng đi qua điểm I và vuông góc với mặt phẳng (P) , M

là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P) , N là điểm thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác IMN nhỏ nhất. Tọa độ điểm N là

A. $N\left(2; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ **B.** $N\left(2; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$ **C.** $N\left(2; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ **D.** $N\left(2; -\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

Lời giải

Phương trình đường thẳng d' là: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = -2t \end{cases}$. Tọa độ điểm M ứng với t là nghiệm phương trình

$$(1+t) - 2(-2t) - 2(-2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{9} \Rightarrow M\left(\frac{7}{9}; \frac{4}{9}; \frac{4}{9}\right).$$

Như vậy $IM = \frac{2}{3}$. Gọi H là hình chiếu của N trên d thì $S_{\triangle IMN} = \frac{1}{2} IM \cdot NH = \frac{1}{3} NH$.

Do đó, diện tích tam giác IMN nhỏ nhất khi và chỉ khi độ dài NH nhỏ nhất.

Ta có N là điểm thuộc đường thẳng d nên $N(2; n; 1+n) \Rightarrow \overrightarrow{IN}(1; n; 1+n)$.

Đường thẳng d' có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}' = (1; -2; -2)$.

Ta có: $[\overrightarrow{IN}, \vec{u}'] = (2; n+3; -n-2)$, nên:

$$NH = d(N; d') = \frac{[\overrightarrow{IN}, \vec{u}']}{|\vec{u}'|} = \frac{\sqrt{2^2 + (n+3)^2 + (-n-2)^2}}{3} = \frac{\sqrt{2\left(n+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}}}{3} \geq \frac{1}{2}.$$

Như vậy, NH nhỏ nhất là bằng $\frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $n = -\frac{5}{2} \Rightarrow N\left(2; -\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Chọn ý **D**.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(S_m): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-m)^2 = \frac{m^2}{4}$ (với $m > 0$ là tham số thực) và hai điểm $A(2; 3; 5)$, $B(1; 2; 4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để trên (S_m) tồn tại điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = 9$.

A. $m = 1$ **B.** $m = 3 - \sqrt{3}$ **C.** $m = 8 - 4\sqrt{3}$ **D.** $m = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Gọi $M(x; y; z)$, suy ra $MA^2 - MB^2 = 9$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 - [(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2] = 9 \Leftrightarrow x + y + z - 4 = 0$$

Suy ra tập các điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $MA^2 - MB^2 = 9$ là mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$

Trên (S_m) tồn tại điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = 9$ khi và chỉ khi (S_m) và (P) có điểm chung

$$\Leftrightarrow d(I; (P)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|1+1+m-4|}{\sqrt{1+1+1}} \leq \frac{|m|}{2} \Leftrightarrow 2|m-2| \leq \sqrt{3}|m|$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 16m + 16 \leq 0 \Leftrightarrow 8 - 4\sqrt{3} \leq m \leq 8 + 4\sqrt{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là $8 - 4\sqrt{3}$.

Chọn ý C.

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho ba mặt phẳng: $(P): x - 2y + z - 1 = 0$, $(Q): x - 2y + z + 8 = 0$, $(R): x - 2y + z - 4 = 0$. Một đường thẳng d thay đổi cắt ba mặt phẳng (P) , (Q) , (R) lần lượt tại A , B , C . Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = AB^2 + \frac{144}{AC}$.

A. $72\sqrt{3}$

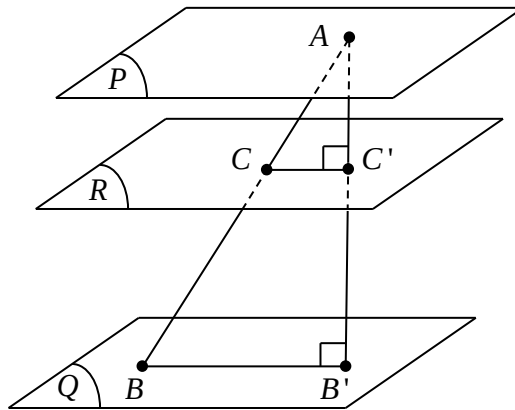
B. 96

C. 108

D. $72\sqrt{4}$

Lời giải

Ta có $M(1; 0; 0) \in (P)$ và ba mặt phẳng (P) , (Q) , (R) đôi một song song với nhau.



Gọi B' , C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các mặt phẳng (Q) , (R) , ta có:

$$AB' = d(A; (Q)) = d(M; (Q)) = \frac{|1 - 2 \cdot 0 + 0 + 8|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

$$AC' = d(A; (R)) = d(M; (R)) = \frac{|1 - 2 \cdot 0 + 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Do $AB' = 3AC'$ nên đặt $CC' = a \Rightarrow BB' = 3a$.

$$\text{Ta có } AB^2 = AB'^2 + BB'^2 = \frac{27}{2} + 9a^2; \quad AC = \sqrt{AC'^2 + CC'^2} = \sqrt{\frac{3}{2} + a^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Nên } T = AB^2 + \frac{144}{AC} &= \frac{27}{2} + 9a^2 + \frac{144}{\sqrt{\frac{3}{2} + a^2}} = 9\left(\frac{3}{2} + a^2\right) + \frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2} + a^2}} + \frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2} + a^2}} \\ &\geq 3\sqrt[3]{9\left(\frac{3}{2} + a^2\right) \cdot \frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2} + a^2}} \cdot \frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2} + a^2}}} = 108. \end{aligned}$$

Do đó $\min T = 108$ khi $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn ý **C**.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

- A.** $x + y - z = 0$ **B.** $x + y - z - 2 = 0$ **C.** $x + y - z + 1 = 0$ **D.** $-x + 2y + z + 5 = 0$

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của A đến d . Khi đó $H(2-t; -1+2t; 1+t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-1-t; 2t; 1+t)$.

Do $AH \perp d \Rightarrow -(-1-t) + 2 \cdot 2t + 1+t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$. Khi đó $\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất khi $AH \perp (\alpha)$.

Do đó (α) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Vậy $(\alpha): 1(x-2) + 1(y+1) - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0$.

Chọn ý **A**.

Câu 14. Trong không gian cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(3; 6; -5)$. Điểm M thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là

- A.** $M(1; 2; 0)$ **B.** $M(0; 0; -1)$ **C.** $M(1; 3; -1)$ **D.** $M(1; 3; 0)$

Lời giải

Lấy $G(1; 3; -1)$ là trọng tâm của tam giác ABC .

Ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$
 $= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2$ bé nhất khi MG bé nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của điểm G lên mặt phẳng Oxy .

Vậy $M(1; 3; 0)$.

Chọn ý **D**.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 0; 1)$, $B(1; -1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

- A.** $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$ **B.** $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{-11} = \frac{z-1}{2}$
C. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{2}$ **D.** $d: \frac{x+3}{-26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$

Lời giải

Gọi mặt phẳng (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P) . Khi đó phương trình của mặt phẳng (Q) là $1(x+3)-2(y-0)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow x-2y+2z+1=0$.

Gọi H là hình chiếu của điểm B lên mặt phẳng (Q) , khi đó đường thẳng BH đi qua $B(1;-1;3)$ và

nhận $\vec{n}_{(Q)} = (1;-2;2)$ làm vector chỉ phương có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-2t \\ z=3+2t \end{cases}$$

Vì $H = BH \cap (Q) \Rightarrow H \in BH \Rightarrow H(1+t;-1-2t;3+2t)$ và $H \in (Q)$ nên ta có

$$(1+t)-2(-1-2t)+2(3+2t)+1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{10}{9} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9}\right).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(\frac{26}{9}; \frac{11}{9}; \frac{-2}{9}\right) = \frac{1}{9}(26; 11; -2).$$

Gọi K là hình chiếu của B lên đường thẳng d , khi đó

Ta có $d(B; d) = BK \geq BH$ nên khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất khi $BK = BH$, do đó đường thẳng d đi qua A và có vector chỉ phương $\vec{u} = (26; 11; -2)$ có phương trình chính tắc:

$$d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}.$$

Chọn ý **A**.

Câu 16. Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1; 1; 2)$ và mặt phẳng $(P): (m-1)x + y + mz - 1 = 0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là

A. $2 < m < 6$

B. Không có m .

C. $-2 < m < 2$

D. $-6 < m < -2$

Lời giải

$$\text{Ta có } d(A; (P)) = \frac{|(m-1) \cdot 1 + 1 + m \cdot 2 - 1|}{\sqrt{(m-1)^2 + 1^2 + m^2}} = \frac{|3m-1|}{\sqrt{2m^2-2m+2}} = \sqrt{\frac{9m^2-6m+1}{2m^2-2m+2}}$$

Nhận xét $T = \frac{9m^2-6m+1}{2m^2-2m+2} \geq 0$, với $m \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } T = \frac{9m^2-6m+1}{2m^2-2m+2} \Leftrightarrow (2T-9)m^2 - 2(T-3)m + 2T-1 = 0 \quad (*)$$

Phương trình $(*)$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = (T-3)^2 - (2T-9)(2T-1) \geq 0 \Leftrightarrow -3T^2 + 14T \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq T \leq \frac{14}{3}.$$

Do đó $d(A; (P))$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{42}}{3}$ khi $m = 5 \in (2; 6)$.

Chọn ý **A**.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ và mặt cầu $(S):$

$x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Đường thẳng d thay đổi đi qua điểm M , cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B . Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB .

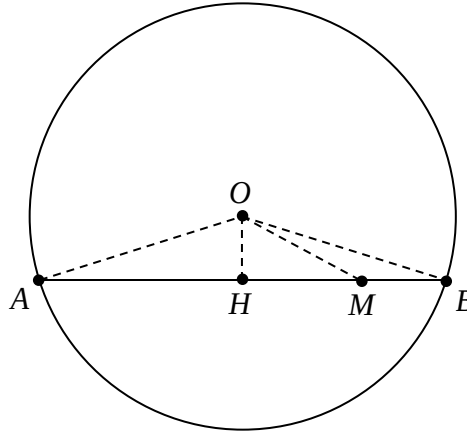
A. $S = 4$

B. $S = 2\sqrt{7}$

C. $S = \sqrt{7}$

D. $S = 2\sqrt{2}$

Lời giải



(S) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$, $OM = 1 < 2\sqrt{2} \Rightarrow M$ nằm trong mặt cầu (S).

Gọi H là trung điểm của AB thì $OH \perp AB$.

Ta có $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB.\sin AOB = 4\sin AOB$.

Trường hợp 1. $AOB \leq 90^\circ$, khi đó S_{OAB} đạt giá trị lớn nhất khi $\sin AOB = 1 \Rightarrow S_{OAB} = 4$

Trường hợp 2. $AOB > 90^\circ$, AOB giảm dần thì giá trị $\sin AOB$ tăng dần $\Rightarrow AB$ giảm dần $\Rightarrow OH$ tăng dần, mà $OH \leq OM = 1$, dấu bằng xảy ra khi $H \equiv M$, khi đó

$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{7} \Rightarrow S_{\max} = OM.AM = \sqrt{7}.$$

Chọn ý C.

Câu 18. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(0;-1;2), B(1;1;2)$ và đường thẳng

$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện

tích nhỏ nhất. Khi đó, giá trị $T = a + 2b + 3c$ bằng

A. 5

B. 3

C. 4

D. 10

Lời giải

Ta có $S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2}.d(M;AB).AB$ nên ΔMAB có diện tích nhỏ nhất khi $d(M;AB)$ nhỏ nhất.

Gọi Δ là đường vuông góc chung của d, AB. Khi đó $M = \Delta \cap d$. Gọi $N = \Delta \cap AB$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;2;0)$, phương trình đường thẳng AB:
$$\begin{cases} x = s \\ y = -1 + 2s \\ z = 2 \end{cases}$$

Do $N \in AB \Rightarrow N(s; -1 + 2s; 2)$, $M \in d \Rightarrow M(-1 + t; t; 1 + t)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{NM} = (t - s - 1; t - 2s + 1; t - 1)$. Mà $MN \perp d, MN \perp \Delta$ nên

$$\begin{cases} t - s - 1 + 2t - 4s + 2 = 0 \\ t - s - 1 + t - 2s + 1 + t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t - 5s = -1 \\ 3t - 3s = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{3} \\ s = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right) \text{ hay } T = a + 2b + 3c = 10.$$

Chọn ý D.

Câu 19. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z + 9 = 0$ và ba điểm $A(2; 1; 0), B(0; 2; 1), C(1; 3; -1)$. Điểm $M \in (\alpha)$ sao cho $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $x_M + y_M + z_M = 1$ **B.** $x_M + y_M + z_M = 4$ **C.** $x_M + y_M + z_M = 3$ **D.** $x_M + y_M + z_M = 2$

Lời giải

Xét điểm $I(a; b; c)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Khi đó:

$$\begin{cases} 2(2-a) - 3a - 4(1-a) = 0 \\ 2(1-b) + 3(2-b) - 4(3-b) = 0 \\ -2c + 3(1-c) - 4(-1-c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -4 \\ c = 7 \end{cases} \Rightarrow I(0; -4; 7).$$

Khi đó: $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{MI} - 4\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 4\overrightarrow{IC}| = IM$.

Do đó $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì M là hình chiếu của I trên (α) .

Gọi Δ qua I và vuông góc với (α) . Khi đó: $\Delta: \begin{cases} x = 2t \\ y = -4 + t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$.

Ta có: $2(2t) + (-4 + t) - 2(7 - 2t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy $M(2; -3; 5) \Rightarrow x_M + y_M + z_M = 4$.

Chọn ý **B**.

Câu 20. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1; 2; -5), B(-1; 0; 2)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $T = |MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất là $T_{\max}$. Khi đó, $T_{\max}$ bằng bao nhiêu?

- A.** $T_{\max} = 3$ **B.** $T_{\max} = 2\sqrt{6} - 3$ **C.** $T_{\max} = \sqrt{57}$ **D.** $T_{\max} = 3\sqrt{6}$

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (-2; -2; 7)$.

Phương trình đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = -1 - 2t' \\ y = -2t' \\ z = 2 + 7t' \end{cases}$.

Xét vị trí tương đối của Δ và AB ta thấy Δ cắt AB tại điểm $C\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

$\overrightarrow{AC} = \left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{14}{3}\right)$; $\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$ nên B nằm giữa A và C .

$T = |MA - MB| \leq AB$ Dấu bằng xảy ra khi M trùng C . Vậy $T_{\max} = AB = \sqrt{57}$.

Chọn ý **C**.

Câu 21. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$, $B(6;5;5)$. Gọi (S) là mặt cầu có đường kính AB . Mặt phẳng (P) vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H (giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P)) có thể tích lớn nhất, biết rằng $(P): 2x + by + cz + d = 0$ với $b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tính $S = b + c + d$.

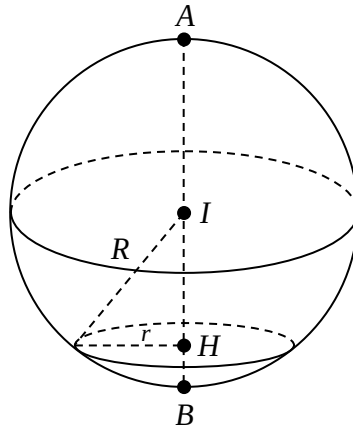
A. $S = -18$

B. $S = -11$

C. $S = -24$

D. $S = -14$

Lời giải



Ta có $\overline{AB} = (4; 4; 2) \Rightarrow AB = 6$ suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(4; 3; 4)$ và bán kính $R = 3$.

Đặt $IH = x$ ($0 \leq x \leq 3$).

Gọi r là bán kính đường tròn tâm H suy ra $r = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{9 - x^2}$.

Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot AH = \frac{1}{3} \pi (3^2 - x^2) \cdot (3 + x)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có $V = \frac{1}{6} \pi (6 - 2x)(3 + x)(3 + x) \leq \frac{1}{6} \pi \left(\frac{6 + 3 + 3}{3} \right)^3 \Leftrightarrow V \leq \frac{32\pi}{3}$.

Vậy thể tích khối nón lớn nhất bằng $\frac{32\pi}{3}$ khi $6 - x = 3 + x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow IH = \frac{3}{2}$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; b; c)$. Vì (P) vuông góc với đoạn AB nên ta có $\vec{n}$ cùng phương với $\overline{AB} \Leftrightarrow \frac{2}{4} = \frac{b}{4} = \frac{c}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$. Vậy $(P): 2x + 2y + z + d = 0$.

Mặt khác $d(I; (P)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|8 + 6 + 4 + d|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow |18 + d| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 18 + d = 3 \\ 18 + d = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -15 \\ d = -21 \end{cases}$.

Mặt khác A và I nằm cùng phía với mặt phẳng (P) nên ta có $(9 + d)(18 + d) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d < -18 \\ d > -9 \end{cases}$. Vậy

$d = -21$ suy ra $S = b + c + d = 2 + 1 - 21 = -18$.

Chọn ý A.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(4; 2; 5)$, $B(0; 4; -3)$, $C(2; -3; 7)$.

Biết điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ nằm trên mặt phẳng Oxy sao cho $|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tính tổng $P = x_0 + y_0 + z_0$.

A. $P = -3$

B. $P = 0$

C. $P = 3$

D. $P = 6$

Lời giải

Gọi $d(A, \Delta) = AH \leq AB$, nên $d(A, \Delta)$ đạt giá trị lớn nhất là AB . Khi đó đường thẳng Δ qua B và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n_p}, \vec{AB}] = -(1; -2; 1)$ với $\vec{n_p} = (1; 1; 1)$.

Thế tọa độ $B(1; 0; 1)$ vào bốn phương án, chỉ phương án B thỏa mãn.

Chọn ý B.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 1 = 0$, $(Q): x - 2y + 2z - 8 = 0$, $(R): x - 2y + 2z + 4 = 0$. Một đường thẳng Δ thay đổi cắt ba mặt phẳng (P) , (Q) , (R) lần lượt tại các điểm A , B , C . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $AB + \frac{96}{AC^2}$ là

A. $\frac{41}{3}$

B. 99

C. 18

D. 24

Lời giải

Ta có ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ đôi một song song và (P) nằm giữa $(Q), (R)$.

$$d((P), (Q)) = \frac{|1+8|}{\sqrt{1+2^2+2^2}} = 3, \quad d((P), (R)) = \frac{|1-4|}{\sqrt{1+2^2+2^2}} = 1.$$

Suy ra $AB + \frac{96}{AC^2} \geq 3 + \frac{96}{1^2} = 99$.

Đẳng thức xảy ra khi Δ vuông góc với (P) .

Chọn ý B.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(6; 3; 2)$, $B(2; -1; 6)$. Trên mặt phẳng (Oxy) , lấy điểm $M(a; b; c)$ sao cho $MA + MB$ bé nhất. Tính $P = a^2 + b^3 - c^4$.

A. $P = 129$

B. $P = -48$

C. $P = 33$

D. $P = 48$

Lời giải

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z = 0$, và A, B nằm cùng phía với (Oxy) . Gọi A' là điểm đối xứng với A qua $(Oxy) \Rightarrow A'(6; 3; -2)$.

Ta có $MA + MB = MA' + MB$ bé nhất khi M, A', B thẳng hàng, khi đó $M = A'B \cap (Oxy)$.

Ta có $\vec{A'B} = (-4; -4; 8) = -4(1; 1; -2)$ suy ra $A'B$ có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; -2)$

$$\Rightarrow A'B: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 6 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad M \in A'B \Rightarrow M(2+t; -1+t; 6-2t).$$

Do $M \in (Oxy) \Rightarrow 6 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow M(5; 2; 0)$. Vậy $P = a^2 + b^3 - c^4 = 33$.

Chọn ý C.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(m; 0; 0)$, $B(0; m-1; 0)$; $C(0; 0; m+4)$ thỏa mãn $BC = AD$, $CA = BD$ và $AB = CD$. Giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

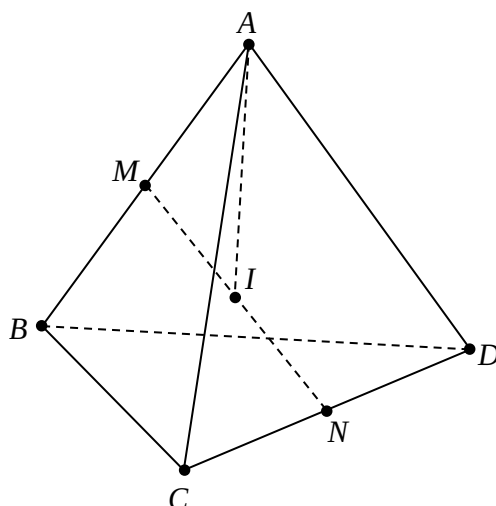
A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{14}}{2}$

C. $\sqrt{7}$

D. $\sqrt{14}$

Lời giải



Đặt $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$.

Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB và CD .

Theo giả thiết ta có tam giác $\triangle ABC = \triangle CDA$ (c.c.c) $\Rightarrow CM = DM$ hay tam giác CMD cân tại M
 $\Rightarrow MN \perp CD$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $MN \perp AB$.

Gọi I là trung điểm của MN thì $IA = IB$ và $IC = ID$.

Mặt khác ta lại có $AB = CD$ nên $\triangle BMI = \triangle CNI \Rightarrow IB = IC$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

$$\text{Ta có } IA^2 = IM^2 + AM^2 = \frac{MN^2}{4} + \frac{AB^2}{4} = \frac{MN^2 + c^2}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } CM \text{ là đường trung tuyến của tam giác } ABC \text{ nên } CM^2 &= \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} \\ \Rightarrow MN^2 = CI^2 - CN^2 &= \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } IA^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}.$$

$$\text{Với } a^2 + b^2 + c^2 = 2m^2 + 2(m-1)^2 + 2(m+4)^2 = 6(m+1)^2 + 28$$

$$\text{Vậy } IA^2 = \frac{6(m+1)^2 + 28}{8} \geq \frac{7}{2} \Rightarrow IA_{\min} = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Chọn ý B.

Câu 28. Trong không gian Oxyz cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{11\sqrt{2}}{6}$

B. $3\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{11}}{18}$

D. $\frac{7\sqrt{2}}{6}$

Lời giải

Gọi $I(1+2t; t; 2+2t)$ là hình chiếu vuông góc của A trên d .

d có vectơ chỉ phương là $\vec{u_d} = (2; 1; 2)$

Ta có $\overrightarrow{AI} \cdot \vec{u_d} = 0 \Rightarrow (2t-1)2 + (t-5) + (2t-1)2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ suy ra $I(3; 1; 4)$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) là $AH = d(A, (P)) \leq AI$ suy ra khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất bằng AI . Khi đó mặt phẳng (P) qua I và nhận $\overrightarrow{AI} = (1; -4; 1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) : $x - 4y + z - 3 = 0$

Khoảng cách từ $M(1; 2; -1)$ đến mặt phẳng (P) là $d(M, (P)) = \frac{|1 - 8 - 1 - 3|}{\sqrt{1 + 16 + 1}} = \frac{11\sqrt{2}}{6}$.

Chọn ý **A**.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 12$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của mặt cầu và đáy là hình tròn giới hạn bởi (C) có thể tích lớn nhất. Phương trình của mặt phẳng (Q) là

A. $2x + 2y - z - 4 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 17 = 0$.

B. $2x + 2y - z + 2 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 8 = 0$.

C. $2x + 2y - z - 1 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 11 = 0$.

D. $2x + 2y - z - 6 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 3 = 0$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

Gọi r là bán kính đường tròn (C) và H là hình chiếu của I lên (Q) .

Đặt $IH = x$ ta có $r = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{12 - x^2}$

Vậy thể tích khối nón tạo được là $V = \frac{1}{3} \cdot IH \cdot S_{((C))} = \frac{1}{3} \cdot x \cdot \pi (\sqrt{12 - x^2})^2 = \frac{1}{3} \pi (12x - x^3)$.

Gọi $f(x) = 12x - x^3$ với $x \in (0; 2\sqrt{3})$. Thể tích nón lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất

Ta có $f'(x) = 12 - 3x^2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Leftrightarrow x = 2$.

Lập bảng biến thiên ta dễ thấy $V_{\max} = \frac{1}{3} \pi 16 = \frac{16\pi}{3}$ khi $x = IH = 2$.

Mặt phẳng $(Q) \parallel (P)$ nên $(Q): 2x + 2y - z + a = 0$

Và $d(I; (Q)) = IH \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 + 2(-2) - 3 + a|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow |a - 5| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 11 \\ a = -1 \end{cases}$.

Vậy mặt phẳng (Q) có phương trình $2x + 2y - z - 1 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 11 = 0$.

Chọn ý **C**.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Một đường thẳng đi qua điểm M và cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B . Diện tích lớn nhất của tam giác OAB bằng

A. 4

B. $2\sqrt{7}$

C. $2\sqrt{2}$

D. $\sqrt{7}$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right) \Rightarrow OM = 1 < R \Rightarrow$ điểm M nằm trong mặt cầu (S).

Gọi H là trung điểm AB $\Rightarrow OH \leq OM$.

Đặt $OH = x \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$.

Đặt $\angle AOH = \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{AH}{OA} = \frac{\sqrt{OA^2 - OH^2}}{OA} = \frac{\sqrt{8 - x^2}}{2\sqrt{2}}; \cos \alpha = \frac{OH}{OA} = \frac{x}{2\sqrt{2}}$.

Suy ra $\sin \angle AOB = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{x\sqrt{8 - x^2}}{4}$.

Ta có: $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB = x\sqrt{8 - x^2}$ với $0 \leq x \leq 1$.

Xét hàm số $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$ trên đoạn $[0;1]$

$$f'(x) = \sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{8 - x^2}} = \frac{8 - 2x^2}{\sqrt{8 - x^2}} > 0, \forall x \in [0;1] \Rightarrow \max_{[0;1]} f(x) = f(1) = \sqrt{7}$$

Vậy diện tích lớn nhất của tam giác OAB bằng $\sqrt{7}$.

Chọn ý D.

Câu 31. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 4$.

Gọi $N(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc (S) sao cho khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (Oxz) lớn nhất. Giá trị của biểu thức $P = x_0 + y_0 + z_0$ bằng

A. 6

B. 8

C. 5

D. 4

Lời giải

Gọi d là đường thẳng đi qua tâm $I(1;3;2)$ của mặt cầu (S) và vuông góc với (Oxz).

Phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 \end{cases}$

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d và (S) suy ra: $A(1;5;2), B(1;1;2)$.

Ta có $d(A; (Oxz)) > d(B; (Oxz))$.

Theo đề bài thì $N \equiv A \Rightarrow N(1;5;2) \Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 = 8$.

Chọn ý B.

Câu 32. Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(2;1;1)$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - t \end{cases}$. Mặt phẳng

(P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất có phương trình là

A. $x + 2y + 4z + 7 = 0$

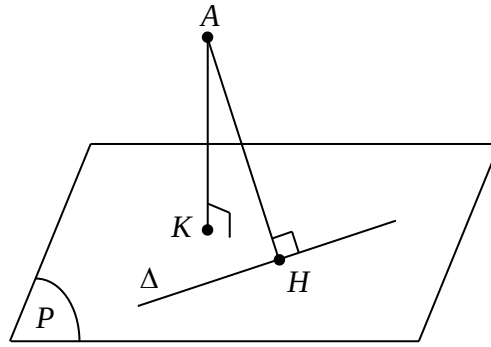
B. $4x - 7y + z - 2 = 0$

C.

$4x - 5y + 3z + 2 = 0$

D. $x + y + 3z + 5 = 0$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A trên d ; K là hình chiếu của A trên (P) .

Ta có $d(A; (P)) = AK \leq AH$ (không đổi)

$\Rightarrow d(A; (P))$ lớn nhất khi $K \equiv H$.

Vì $H \in d$ nên $H(1+2t; t; -2-t)$. Ta có $\overrightarrow{AH} = (2t-1; t-1; -3-t)$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; -1)$

Vì H là hình chiếu của A trên d nên $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1) + 1(t-1) + (-3-t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Vậy $H = (1; 0; -2) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-1; -1; -3)$.

Mặt phẳng (P) qua H và vuông góc với AH nên (P) có phương trình $x + y + 3z + 5 = 0$.

Chọn ý **D**.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-m}{2}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$. Tìm m để đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt E, F sao cho độ dài đoạn EF lớn nhất

- A.** $m = 1$ **B.** $m = 0$ **C.** $m = -\frac{1}{3}$ **D.** $m = \frac{1}{3}$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; 2)$ và bán kính $R = 3$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên d , khi đó H là trung điểm đoạn EF .

Ta có $EF = 2EH = 2\sqrt{R^2 - (d(I, (P)))^2}$. Suy ra EF lớn nhất khi $d(I, (P))$ nhỏ nhất

Đường thẳng d qua $A(1; -1; m)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 2)$.

Ta có $\overrightarrow{AI} = (0; 2; 2-m)$, $[\overrightarrow{AI}, \vec{u}] = (2+m; 2-m; -2)$.

Suy ra $d(I, (P)) = \frac{|\overrightarrow{AI} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{2m^2 + 12}}{\sqrt{1+1+4}} \geq \sqrt{2}$.

Do đó $d(I, (P))$ nhỏ nhất khi $m = 0$. Khi đó $EF = 2EH = 2\sqrt{R^2 - (d(I, (P)))^2} = 2\sqrt{7}$

Chọn ý **B**.

Câu 34. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases}, d': \begin{cases} x=2t' \\ y=1+t' \\ z=2+t' \end{cases}$. Đường thẳng Δ cắt d, d' lần lượt tại các điểm A, B thỏa mãn độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{3}$ **B.** $\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$ **C.** $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{-3}$ **D.** $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$

Lời giải

Ta có $\Delta \cap d = A(1+t; 2-t; t), \Delta \cap d' = B(2t'; 1+t'; 2+t')$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t' - t - 1 - t' - t + 1 + t' - t + 2 = 0 \\ 4t' - 2t - 2 + t' + t - 1 + t' - t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t' - 3t = -2 \\ 6t' - 2t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases}$$

Suy ra $A(2; 1; 1), \overrightarrow{AB} = \left(-1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

AB ngắn nhất khi và chỉ khi AB là đoạn vuông góc chung của d, d' .

Vậy Δ đi qua $A(2; 1; 1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} = (-2; 1; 3) \Rightarrow \Delta: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$

Chọn ý **D**.

Câu 35. Cho 2 mặt cầu $(S_1): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4, (S_2): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Gọi d là đường thẳng đồng thời tiếp xúc với hai mặt cầu trên, cắt đoạn thẳng nối tâm hai mặt cầu và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất. Nếu $\vec{u} = (a; 1; b)$ là một vectơ chỉ phương của d thì tổng $S = 2a + 3b$ bằng bao nhiêu?

A. $S = 2$ **B.** $S = 1$ **C.** $S = 0$ **D.** $S = 4$

Lời giải

(S_1) có tâm $I_1(3; 2; 2)$, bán kính $R_1 = 2$.

(S_2) có tâm $I_2(1; 0; 1)$, bán kính $R_2 = 1$.

Ta có: $I_1I_2 = 3 = R_1 + R_2$, do đó (S_1) và (S_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm $A\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Vì d tiếp xúc với hai mặt cầu, đồng thời cắt đoạn thẳng nối hai tâm I_1I_2 nên d phải tiếp xúc với hai mặt cầu tại $A \Rightarrow d \perp I_1I_2$.

Mặt khác $d = d(O; d) \leq OA \Rightarrow d_{\max} = OA$ khi $d \perp OA$.

Khi đó, d có một vectơ chỉ phương là $\Rightarrow \vec{u} = (-2; 1; 2) \Rightarrow a = -2, b = 2$.

Vậy $S = 2$.

Chọn ý **A**.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ và $d_2: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Điểm $M \in d_1$ và $N \in d_2$ sao cho đoạn thẳng MN ngắn nhất

A. $M\left(\frac{3}{35}; \frac{3}{35}; \frac{6}{35}\right), N\left(\frac{69}{35}; \frac{-17}{35}; \frac{18}{35}\right)$.

B. $M\left(\frac{3}{35}; \frac{3}{35}; \frac{6}{35}\right), N\left(\frac{-1}{35}; \frac{-17}{35}; \frac{18}{35}\right)$

C. $M\left(\frac{3}{35}; \frac{3}{35}; \frac{6}{35}\right), N\left(\frac{69}{35}; \frac{17}{35}; \frac{18}{35}\right)$.

D. $M\left(\frac{3}{5}; \frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right), N\left(\frac{69}{5}; \frac{-17}{5}; \frac{18}{5}\right)$.

Lời giải

+ Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; 1; 2)$ và đi qua điểm $O(0; 0; 0)$.

+ Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (-2; 1; 1)$ và đi qua điểm $K(-1; 0; 1)$.

+ Ta có: $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1; -5; 3)$. Vì $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{OK} = 4$ nên hai đường thẳng đã cho có vị trí chéo nhau.

+ Vì $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{OK} = 5$ nên hai đường thẳng đã cho có vị trí chéo nhau.

+ Suy ra MN ngắn nhất khi và chỉ khi MN là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 .

+ Vì $M \in d_1$ nên $M(m; m; 2m)$, $m \in \mathbb{R}$ và $N \in d_2$ nên $N(-1-2n; n; 1+n)$, $n \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\vec{MN} = (-2n-m-1; n-m; n-2m+1)$.

Cách 1. Từ yêu cầu của bài toán ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \vec{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-6m=-1 \\ 6n-m=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=\frac{-17}{35} \\ m=\frac{3}{35} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{35}; \frac{3}{35}; \frac{6}{35}\right), N\left(\frac{-1}{35}; \frac{-17}{35}; \frac{18}{35}\right).$$

Cách 2. Từ yêu cầu của bài toán ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \vec{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-6m=-1 \\ 6n-m=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=\frac{-17}{35} \\ m=\frac{3}{35} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{35}; \frac{3}{35}; \frac{6}{35}\right), N\left(\frac{-1}{35}; \frac{-17}{35}; \frac{18}{35}\right)$$

Chọn ý **B**.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(2; -2; 2)$, $A'(3; 0; -1)$, điểm M thuộc cạnh DC . Giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách $AM + MC'$ là

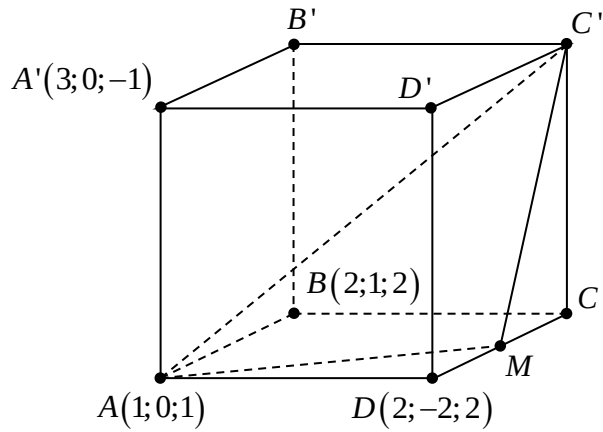
A. $\sqrt{17}$

B. $\sqrt{17+4\sqrt{6}}$

C. $\sqrt{17+8\sqrt{3}}$

D. $\sqrt{17+6\sqrt{2}}$

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;1;1)$; $\overrightarrow{AA'} = (2;0;-2)$; $\overrightarrow{AD} = (1;-2;1)$.

Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} \Rightarrow C'(5;-1;1)$.

Phương trình đường thẳng DC đi qua $D(2;-2;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (1;1;1)$ làm véc tơ chỉ phương là

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Gọi $M(2+t;-2+t;2+t) \in DC$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (t+1;t-2;t+1) \Rightarrow |MA| = \sqrt{3t^2+6}$, $\overrightarrow{C'M} = (t-3;t-1;t+1) \Rightarrow |MC'| = \sqrt{3(t-1)^2+8}$.

Xét vector $\vec{u} = (\sqrt{3}t; \sqrt{6})$, $\vec{v} = (\sqrt{3}-\sqrt{3}t; 2\sqrt{2})$.

Do $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ nên $AM + MC' \geq \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{8})^2} \Leftrightarrow AM + MC' \geq \sqrt{17+8\sqrt{3}}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{3}(1-t)} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{t}{1-t} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow t = 2\sqrt{3}-3$

$$\Rightarrow M(2\sqrt{3}-1; 1-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}-1).$$

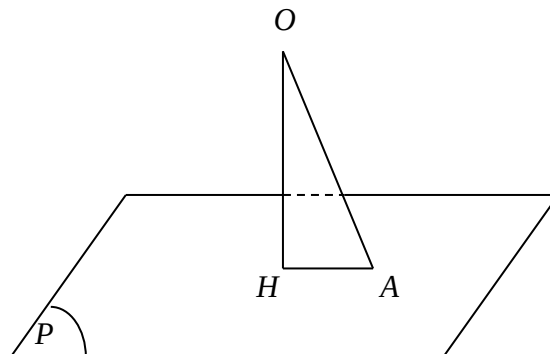
Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách $AM + MC'$ là $\sqrt{17+8\sqrt{3}}$.

Chọn ý C.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2; -1; 1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất là:

- A. $2x - y + z + 6 = 0$ B. $2x - y + z - 6 = 0$ C. $2x + y + z - 6 = 0$ D. $2x + y - z - 6 = 0$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) . Suy ra khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) chính là OH . Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất khi $H \equiv A$ hay $OA \perp (P)$.

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm A và nhận $\overrightarrow{OA} = (2; -1; 1)$ làm một vectơ pháp tuyến:
 $2(x-2) - 1(y+1) + 1(z-1) = 0$ hay $2x - y + z - 6 = 0$.

Chọn ý **B**.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases} \text{ Mặt phẳng chứa } d \text{ và cắt } (S) \text{ theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có}$$

phương trình là

A. $3x - 2y - 4z - 8 = 0$ **B.** $y + z + 1 = 0$ **C.** $x - 2y - 3 = 0$ **D.** $x + 3y + 5z + 2 = 0$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;0)$ và bán kính là $R = 2$.

Ta có $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; -1)$

Gọi $H(1+2t; -1+t; -t)$ là hình chiếu của I trên d .

Ta có $\overrightarrow{IH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (2t-2)2 + (t-2) + t = 0 \Leftrightarrow t = 1$ suy ra $H(3; 0; -1)$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d .

Bán kính đường tròn giao tuyến của mặt phẳng chứa d và mặt cầu (S) là $r = \sqrt{R^2 - (d(I, (Q)))^2}$,

suy ra r nhỏ nhất khi $d(I, (Q))$ lớn nhất.

Gọi M là hình chiếu của I trên (Q) .

Ta có $d(I, (Q)) = IM \leq IH$ suy ra $d(I, (Q))$ lớn nhất khi $d(I, (Q)) = IH$, lúc đó mặt phẳng (Q) qua $H(3; 0; -1)$ và có một véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IH} = (0; -1; -1)$.

Phương trình mặt phẳng $(Q): y + z + 1 = 0$.

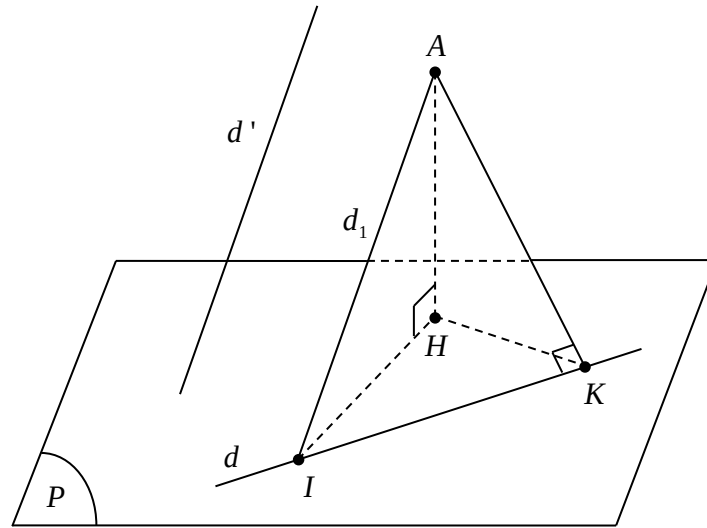
Chọn ý **B**.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ và

$d': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$. Phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với đường thẳng d' một góc lớn nhất là

A. $x - z + 1 = 0$ **B.** $x - 4y + z - 7 = 0$ **C.** $3x - 2y - 2z - 1 = 0$ **D.** $-x + 4y - z - 7 = 0$

Lời giải



Ta có đường thẳng d đi qua điểm $I(1;-1;2)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;1;2)$. Đường thẳng d' có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}' = (1;2;1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng cần dựng.

Qua $I(1;-1;2)$ kẻ đường thẳng $d_1 \parallel d'$, khi đó góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng d_1 và mặt phẳng (P) .

Gọi A là một điểm bất kỳ trên đường thẳng d_1 , và gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P) và đường thẳng d , ta có góc giữa đường thẳng d_1 và mặt phẳng (P) là góc AIH . Ta có

$$\begin{cases} \sin AIH = \frac{AH}{AI} \\ \sin AIK = \frac{AK}{AI} \end{cases}.$$

Do $AH \leq AK$ nên $\sin AIH \leq \sin AIK$ nên AIH lớn nhất khi và chỉ khi $AH = AK \Rightarrow H \equiv K$. Khi đó mặt phẳng (P) đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (d, d_1) .

$\Rightarrow$ Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = [\vec{u}, [\vec{u}, \vec{u}']] \Rightarrow \vec{n} = (3; -12; 3)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(1;-1;2)$ và có một véc tơ pháp tuyến

Chọn ý **B**.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(0;4;5)$. Gọi M là điểm sao cho $MA = 2MB$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 6 = 0$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $\frac{7}{9}$

B. $\frac{14}{9}$

C. $\frac{17}{9}$

D. $\frac{11}{9}$

Lời giải

Gọi $M(x; y; z)$.

Ta có $MA = 2MB$ nên $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4[x^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2]$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2}{3}x - \frac{28}{3}y - \frac{34}{3}z + 50 = 0.$$

Suy ra tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA = 2MB$ là mặt cầu (S) có tâm $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{14}{3}; \frac{17}{3}\right)$ và bán kính $R = 2$.

Vì $d(I; (P)) = \frac{29}{9} > R$ nên (P) không cắt (S) .

Do đó, khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 6 = 0$ đạt giá trị nhỏ nhất là $d_{\min} = d(I; (P)) - R = \frac{29}{9} - 2 = \frac{11}{9}$.

Chọn ý D.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và hai điểm $A(3; -2; 6)$, $B(0; 1; 0)$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ chứa đường thẳng AB và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $M = 2a + b - c$.

A. $M = 2$ B. $M = 3$ C. $M = 1$ D. $M = 4$

Lời giải

Ta có: $(P) \perp \vec{n} = (a; b; c)$ trong đó $a; b; c$ không đồng thời bằng 0. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 5$.

Do mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AB nên ta có:
$$\begin{cases} 3a - 2b + 6c - 2 = 0 \\ b - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 2 - 2c \end{cases} \quad (1)$$

Bán kính đường tròn giao tuyến là $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ trong đó

$$d = d(I; (P)) = \frac{|c + 4|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{c^2 + 8c + 16}{5c^2 - 8c + 8}}.$$

Để bán kính đường tròn nhỏ nhất điều kiện là d lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{c^2 + 8c + 16}{5c^2 - 8c + 8} = \frac{1}{5} + \frac{24}{5} \cdot \frac{2c + 3}{5c^2 - 8c + 8}$ lớn

nhất $\Leftrightarrow m = \frac{2c + 3}{5c^2 - 8c + 8}$ lớn nhất.

Coi hàm số $m = \frac{2c + 3}{5c^2 - 8c + 8}$ là một phương trình ẩn c ta được

$$5mc^2 - 2(4m + 1)c + (8m - 3) = 0,$$

Phương trình có nghiệm $c \Leftrightarrow \Delta' = -24m^2 + 23m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{24} \leq m \leq 1 \Rightarrow m$ lớn nhất $\Leftrightarrow c = 1$.

$$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow M = 2a + b - c = 1.$$

Chọn ý C.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất. Khi đó:

A. $a + b + c = 8$ B. $a + b + c = 5$ C. $a + b + c = 6$ D. $a + b + c = 7$

Lời giải

Mặt (S) cầu có tâm $I(1; 2; 3)$, $R = 3$.

$$d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{4}{3} < R \text{ mặt phẳng cắt mặt cầu theo một đường tròn}$$

Gọi $M(a; b; c)$ là điểm trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất.

Khi M thuộc đường thẳng Δ vuông đi qua M và vuông góc với (P)

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ Thay vào mặt cầu } (S) \Rightarrow (2t)^2 + (-2t)^2 + (t)^2 = 9 \Rightarrow 9t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 1$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow M(3; 0; 4) \Rightarrow d(M; (P)) = \frac{|2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 4 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{10}{3}$$

$$\text{Với } t = -1 \Rightarrow M(-1; 4; 2) \Rightarrow d(M; (P)) = \frac{|2 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 + 2 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } M(3; 0; 4) \Rightarrow a + b + c = 7.$$

Chọn ý D.

Câu 44. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $M(-2; -2; 1)$, $A(1; 2; -3)$ và đường thẳng

$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M , vuông góc với đường thẳng d , đồng thời cách điểm A một khoảng lớn nhất.

A. $\vec{u} = (4; -5; -2)$ B. $\vec{u} = (1; 0; 2)$ C. $\vec{u} = (8; -7; 2)$ D. $\vec{u} = (1; 1; -4)$

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên Δ , ta có $d(A; \Delta) = AH$.

Mặt khác, vì $M \in \Delta$ nên $AH \leq AM$. Do đó, $AH_{\max} = AM \Leftrightarrow H \equiv M$.

Khi đó, đường thẳng Δ đi qua M , vuông góc với đường thẳng d và vuông góc với đường thẳng AM nên có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{u}_d; \overrightarrow{AM}] = (4; -5; -2)$.

Chọn ý A.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(-2; 1; 0)$, $B(4; 4; -3)$, $C(2; 3; -2)$

và đường thẳng $(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d) sao cho A, B, C ở

cùng phía đối với mặt phẳng (α) . Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ A, B, C đến (α) .

Tìm giá trị lớn nhất của $T = d_1 + 2d_2 + 3d_3$.

A. $T_{\max} = 2\sqrt{21}$

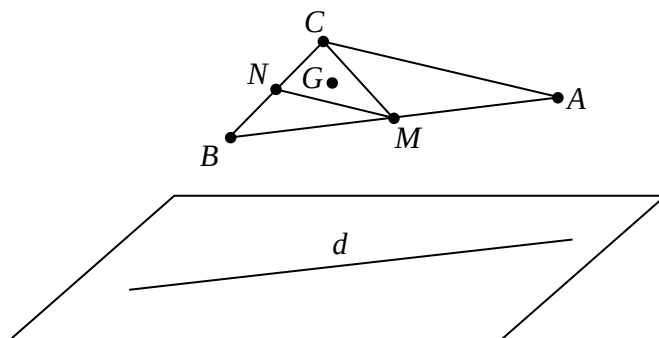
B. $T_{\max} = 6\sqrt{14}$

C.

$T_{\max} = \sqrt{14} + \frac{\sqrt{203}}{3} + 3\sqrt{21}$

D. $T_{\max} = \sqrt{203}$

Lời giải



Ta có $AB = 3\sqrt{6}$; $AC = 2\sqrt{6}$; $BC = \sqrt{6}$.

Ta có $T = d_1 + 2d_2 + 3d_3 = d_1 + d_2 + d_2 + d_3 + 2d_3$.

Gọi M là trung điểm AB , và N là trung điểm của BC ta có $2d(M;(\alpha)) = d_1 + d_2$ và $2d(N;(\alpha)) = d_2 + d_3$.

Gọi G là trọng tâm tam giác MNC . Khi đó ta có

$$T = 2d(M;(\alpha)) + 2d(N;(\alpha)) + 2d_3 = 6d(G;(\alpha)).$$

Do đó $T = 6d(G;(\alpha)) \leq 6d(G;(d))$.

Ta có $M\left(1; \frac{5}{2}; \frac{-3}{2}\right)$; $N\left(3; \frac{7}{2}; \frac{-5}{2}\right)$ suy ra $G(2; 3; -2)$.

Gọi $H(1+t; 1-2t; 1-t)$ là hình chiếu của G lên đường thẳng (d) , ta có $\overrightarrow{GH} = (t-1; -2t-2; 3-t)$.

$$\overrightarrow{GH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow (t-1) - 2(-2t-2) - (3-t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Vậy $T_{\max} = 6GH = 6\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = 6\sqrt{14}$.

Chọn ý **B**.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với a, b, c là các số thực dương thay đổi tùy ý sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất là

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

B. 1

C. $\frac{1}{3}$

D. 3

Lời giải

Do $a, b, c > 0$ nên phương trình mặt phẳng (ABC) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

$$\text{Do đó } d(O, (ABC)) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}.$$

Ta có theo BĐT Côsi: $(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 9$.

Do đó $d(O, (ABC)) \leq \frac{1}{3}$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn ý **C**.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;1;0)$, $B(-9;4;9)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x - y + z + 1 = 0$. Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|IA - IB|$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tổng $a + b + c$ bằng

- A. -4 B. 22 C. 13 D. -13

Lời giải

Thay tọa độ hai điểm $A(3;1;0)$, $B(-9;4;9)$ vào vế trái phương trình mặt phẳng (P) , ta có

$$2 \cdot 3 - 1 + 0 + 1 = 6 > 0 \text{ và } 2 \cdot (-9) - 4 + 9 + 1 = -12 < 0.$$

Nên suy ra, hai điểm A , B nằm khác phía với mặt phẳng (P) .

Gọi $A'(-1;3;-2)$ là điểm đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P) . Ta có

$$|IA - IB| = |IA' - IB| \leq A'B = \sqrt{186}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi A' , B , I thẳng hàng và I nằm ngoài đoạn $A'B$. Suy ra I là giao điểm của đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (P) .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{A'B} = (-8;1;11), \text{ nên suy ra phương trình đường thẳng } A'B \text{ là } \begin{cases} x = -1 - 8t \\ y = 3 + t \\ z = -2 + 11t \end{cases}.$$

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = -1 - 8t \\ y = 3 + t \\ z = -2 + 11t \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \\ z = -13 \\ t = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } I(7;2;-13) \text{ nên } a + b + c = 7 + 2 + (-13) = -4.$$

Chọn ý A.

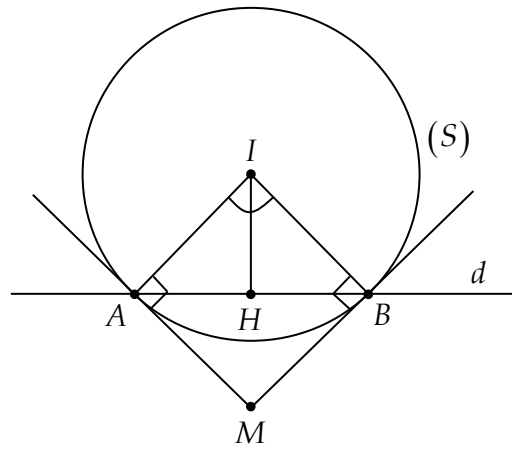
Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$ và

đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = m - 1 + t \end{cases}$. Gọi T là tập tất cả các giá trị của m để d cắt (S) tại hai điểm phân

biệt A , B sao cho các tiếp diện của (S) tại A và B tạo với nhau góc lớn nhất có thể. Tính tổng các phần tử của tập hợp T .

- A. 3 B. -3 C. -5 D. -4

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=2$.

Đường thẳng d đi qua điểm $N(2;0;m-1)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;1;1)$.

$$\begin{aligned} \text{Điều kiện để } d \text{ cắt } (S) \text{ tại hai điểm phân biệt là } d(I;(d)) < R &\Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{IN} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} < 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2m^2+6m+6}}{\sqrt{3}} < 2 \Leftrightarrow \frac{-3-\sqrt{21}}{2} < m < \frac{-3+\sqrt{21}}{2}. \end{aligned}$$

Khi đó, tiếp diện của (S) tại A và B vuông góc với IA và IB nên góc giữa chúng là góc $(IA;IB)$.

Ta có $0^\circ \leq (IA;IB) \leq 90^\circ$ nên $(IA;IB)_{\max} = 90^\circ \Leftrightarrow IA \perp IB$.

$$\text{Từ đó suy ra } d(I;(d)) = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2m^2+6m+6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2m^2+6m=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-3 \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Vậy $T = \{-3;0\}$. Tổng các phần tử của tập hợp T bằng -3 .

Chọn ý B.

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x+2y-2z+2018=0$ và $(Q): x+my+(m-1)z+2017=0$. Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì điểm H nào dưới đây nằm trong mặt phẳng (Q) ?

- A. $H(-2017; 1; 1)$ B. $H(2017; -1; 1)$ C. $H(-2017; 0; 0)$ D. $H(0; -2017; 0)$

Lời giải

Vector pháp tuyến của (P) và (Q) lần lượt là $\vec{n}_{(P)}=(1; 2; -2)$; $\vec{n}_{(Q)}=(1; m; m-1)$.

Gọi φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

$$\text{Ta có: } \vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)} = 3; |\vec{n}_{(P)}| = 3; |\vec{n}_{(Q)}| = \sqrt{2m^2-2m+2} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}.$$

Để (P) và (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì $\cos \varphi$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sqrt{2m^2-2m+2}$ nhỏ nhất.

$$\text{Mà } \sqrt{2m^2-2m+2} = \sqrt{2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ nên giá trị lớn nhất của } \cos \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ khi } m = \frac{1}{2}$$

$$\text{Khi đó } (Q): x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 2017 = 0$$

$$\text{Vậy } H(-2017; 1; 1) \in (Q).$$

Chọn ý **A**.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$,

$d_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = t' \\ z = -t' \end{cases}$. Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng trên là

A. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = \frac{9}{4}$

B. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = \frac{9}{4}$

C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = \frac{3}{2}$

D. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = \frac{3}{2}$

Lời giải

Cách 1: d_1 đi qua điểm $A(4; 0; 3)$ có vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (-2; 1; 0)$

d_2 đi qua điểm $B(1; 0; 0)$ có vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (0; 1; -1)$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1 và (β) là mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_2

Ta có VTPT của (α) và (β) là $\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (1; 2; 2)$

$\Rightarrow (\alpha): x + 2y + 2z - 1 = 0$, $(\beta): x + 2y + 2z - 10 = 0$

$\Rightarrow$ mặt phẳng song song và cách đều hai mặt phẳng (α) và (β) là $(\gamma): x + 2y + 2z - \frac{11}{2} = 0$

Vì (α) tiếp xúc với d_1 và d_2 nên bán kính mặt cầu $R = \frac{1}{2}d(A, (\alpha)) = \frac{3}{2} \Rightarrow$ loại C, D.

Nhận thấy phương án B có tâm $I\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right) \in (\gamma)$ nên **Chọn B**

Cách 2: Đường thẳng d_1 có vtcp $\vec{u}_1 = (-2; 1; 0)$; đường thẳng d_2 có vtcp $\vec{u}_2 = (0; 1; -1)$

Giả sử $M \in d_1 \Rightarrow M(4 - 2t; t; 3)$, $N \in d_2 \Rightarrow N(1; t'; -t')$.

Khi đó: $\overrightarrow{MN} = (2t - 3; t' - t; -t' - 3)$.

MN là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 khi $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' - 5t + 6 = 0 \\ 2t' - t + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = -1 \end{cases}$

Vậy $M(2; 1; 3)$, $N(1; -1; 1)$.

Mặt cầu cần tìm là mặt cầu đường kính MN nên có tâm $I\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right)$, bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$

Chọn ý **B**.

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ và hai điểm

$A(1; 2; -1)$, $B(2; -3; -4)$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A và cắt đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d là lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là:

A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{-1}$ B. $\frac{x}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{4}$ C. $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+1}{-5}$

Lời giải

Gọi $I = \Delta \cap d$. Khi đó $I(-1+2t; 3t; -1-t)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; -3; -4)$; $\overrightarrow{AI} = (2t-2; 3t-1; -t) \Rightarrow [\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AB}] = (8-15t; 6t-8; 10-12t)$.

$$\text{Suy ra: } d(B; d) = \frac{|\overrightarrow{AI} \cdot [\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AB}]|}{|\overrightarrow{AI}| \cdot |[\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AB}]|} = \sqrt{\frac{405t^2 - 576t + 228}{14t^2 - 20t + 8}}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{405t^2 - 576t + 228}{14t^2 - 20t + 8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{135t^2 - 192t + 76}{7t^2 - 10t + 4}$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{3}{2} \cdot \frac{-6t^2 + 16t - 8}{(7t^2 - 10t + 4)^2}. \text{ Cho } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Do đó $d(B; d)$ nhỏ nhất khi $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 27 tại $t = \frac{2}{3}$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AI} = \left(\frac{1}{3}; 2; -\frac{5}{3}\right).$$

Chọn một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = 3\overrightarrow{AI} = (1; 6; -5)$.

Vậy phương trình đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+1}{-5}$.

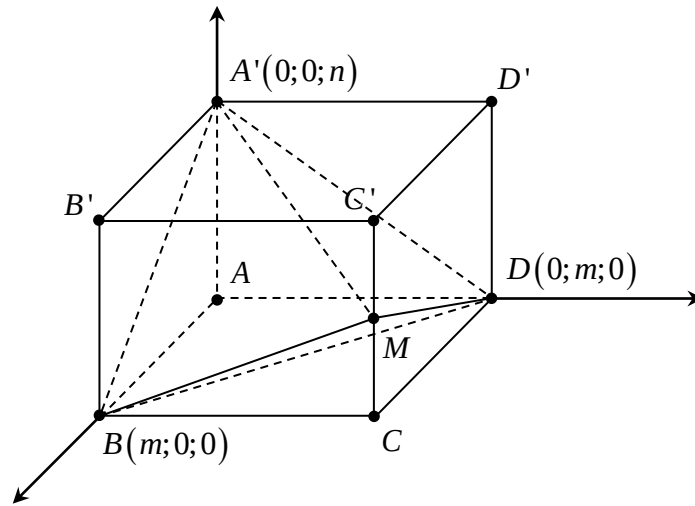
Chọn ý D.

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O , các đỉnh $B(m; 0; 0)$, $D(0; m; 0)$, $A'(0; 0; n)$ với $m, n > 0$ và $m+n=4$.

Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Khi đó thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{245}{108}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{64}{27}$ D. $\frac{75}{32}$

Lời giải



Cách 1: Ta chia khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ thành các hình chóp có thể tích $V_{M.BCD} = V_1$, $V_{B.B'C'A'} = V_2$, $V_{A'.BCM} = V_3$, $V_{A'.MDC'} = V_4$, $V_{D.A'D'C'} = V_5$, $V_{A'.ABD} = V_6$ và $V_{BDA'M} = V_7$. Khi đó, ta có:

$$V = V_{ABCD.A'B'C'D'} = m^2 \cdot n = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7.$$

Trong đó $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2} m^2 = \frac{1}{12} V$; $V_2 = \frac{1}{3} n \cdot \frac{1}{2} m^2 = \frac{1}{6} V$; $V_3 = \frac{1}{3} m \cdot \frac{1}{4} m \cdot n = \frac{1}{12} V$; $V_4 = \frac{1}{12} V$; $V_5 = \frac{1}{6} V$;

$V_6 = \frac{1}{6} V$. Suy ra $V_{BDA'M} = V_7 = V - (V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6) = V - \frac{3}{4} V = \frac{1}{4} V = \frac{1}{4} m^2 n$;

Do $m + n = 4 \Rightarrow n = 4 - m \Rightarrow V_{BDA'M} = V_7 = \frac{1}{4} m^2 (4 - m) = \frac{1}{4} (4m^2 - m^3)$.

Xét hàm số $V_7 = \frac{1}{4} (4m^2 - m^3)$ xác định và liên tục trên $[0; 4]$:

$$(V_7)' = 2m - \frac{3}{4} m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \in [0; 4] \\ m = \frac{8}{3} \in [0; 4] \end{cases}, V_7(0) = 0, V_7\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{27}, V_7(4) = 0. \text{ Vậy } \max_{[0; 4]} V_7 = \frac{64}{27}.$$

Cách 2: Dùng phương pháp tọa độ trong không gian.

Vì M là trung điểm của cạnh CC' nên $M\left(m; m; \frac{n}{2}\right)$, $m + n = 4 \Rightarrow n = 4 - m$.

Xét tứ diện $BDA'M$, với các đỉnh có tọa độ là $B(m; 0; 0)$, $D(0; m; 0)$, $A'(0; 0; 4 - m)$, $M\left(m; m; \frac{4 - m}{2}\right)$. Ta có $\overrightarrow{BD} = (-m; m; 0)$, $\overrightarrow{BA'} = (-m; 0; 4 - m)$, $\overrightarrow{BM} = \left(0; m; \frac{4 - m}{2}\right)$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] = \left(\begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & 4 - m \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -m \\ 4 - m & -m \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -m & m \\ -m & 0 \end{vmatrix} \right) = (4m - m^2; 4m - m^2; m^2),$$

$$[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] \cdot \overrightarrow{BM} = m(4m - m^2) + m^2 \frac{4 - m}{2} = 6m^2 - \frac{3}{2} m^3.$$

Áp dụng công thức tính thể tích tứ diện:

$$V_{BDA'M} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] \cdot \overrightarrow{BM}| = \frac{1}{6} \left| 6m^2 - \frac{3}{2} m^3 \right| = m^2 \left| \frac{4 - m}{4} \right| = m^2 \left(\frac{4 - m}{4} \right).$$

Xét hàm số $V_{BDA'M} = V_7 = \frac{1}{4} (4m^2 - m^3)$ xác định và liên tục trên $[0; 4]$:

$$(V_7)' = 2m - \frac{3}{4}m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \in [0; 4] \\ m = \frac{8}{3} \in [0; 4] \end{cases}, V_7(0) = 0, V_7\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{27}, V_7(4) = 0.$$

Vậy $\max_{[0;4]} V_7 = \frac{64}{27}$.

Chọn ý C.

Câu 53. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; -2; -1)$, $B(-2; -4; 3)$, $C(1; 3; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z - 3 = 0$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$ B. $M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$ C. $M(2; 2; -4)$ D. $M(-2; -2; 4)$

Lời giải

Gọi I , O lần lượt là trung điểm của AB và IC , khi đó với điểm M bất kỳ ta luôn có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI}$; tương tự $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO}$.

Suy ra $d = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC}| = 4|\overrightarrow{MO}|$ nên d nhỏ nhất khi và chỉ khi $|\overrightarrow{MO}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MO \perp (P)$ nên M là hình chiếu vuông góc của O lên (P) .

Có $A(0; -2; -1)$, $B(-2; -4; 3) \Rightarrow I(-1; -3; 1)$, kết hợp với $C(1; 3; -1)$ ta có $O(0; 0; 0)$.

Đường thẳng qua $O(0; 0; 0)$ vuông góc với (P) có phương trình $d: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$.

Giao điểm của d và (P) chính là hình chiếu vuông góc M của $O(0; 0; 0)$ lên mặt phẳng (P) .

Giải hệ $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \\ x + y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$ ta được $t = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = -1$.

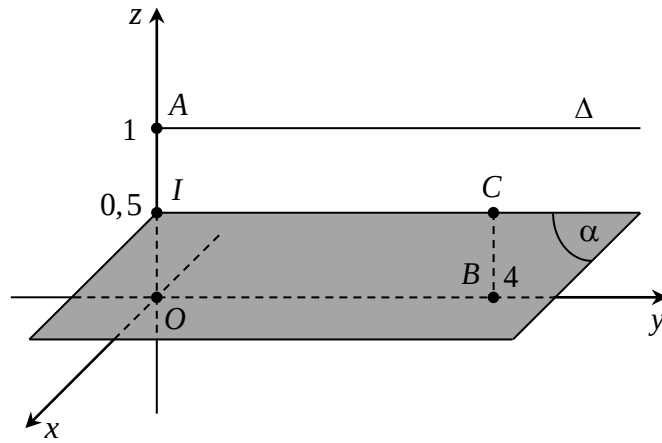
Vậy $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$.

Chọn ý A.

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0; 0; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng Ozx . Tính khoảng cách nhỏ nhất giữa điểm $B(0; 4; 0)$ tới điểm C trong đó C là điểm cách đều đường thẳng Δ và trục Ox .

- A. $\frac{1}{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\frac{\sqrt{65}}{2}$

Lời giải



Vì đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;0;1)$ và vuông góc với mặt phẳng Oxz thì Δ song song với trục Oy và nằm trong mặt phẳng Oyz . Dễ thấy OA là đường vuông góc chung của Δ và Ox .

Xét mặt phẳng (α) đi qua $I\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$ và là mặt phẳng trung trực của OA . Khi đó $\Delta // (\alpha)$, $Ox // (\alpha)$ và mọi điểm nằm trên (α) có khoảng cách đến Δ và Ox là bằng nhau.

Vậy tập hợp điểm C là các điểm cách đều đường thẳng Δ và trục Ox là mặt phẳng (α) .

Mặt phẳng (α) đi qua $I\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$ có véc tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$ nên có phương trình: $z - \frac{1}{2} = 0$. Đoạn BC nhỏ nhất khi C là hình chiếu vuông góc của B lên (α) . Do đó khoảng cách nhỏ nhất giữa điểm $B(0;4;0)$ tới điểm C chính là khoảng cách từ $B(0;4;0)$ đến mặt phẳng (α) :

$$z - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \min(BC) = d(B;(\alpha)) = \frac{\left|0 - \frac{1}{2}\right|}{1} = \frac{1}{2}.$$

Chọn ý **A**.

Câu 55. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;-1;2)$, $N(-1;1;3)$. Một mặt phẳng (P) đi qua M , N sao cho khoảng cách từ điểm $K(0;0;2)$ đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tìm tọa độ véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (P) .

- A.** $\vec{n} = (1;-1;1)$ **B.** $\vec{n} = (1;1;-1)$ **C.** $\vec{n} = (2;-1;1)$ **D.** $\vec{n} = (2;1;-1)$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-1;2;1)$.

Đường thẳng (d) qua hai điểm M , N có phương trình tham số $\begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của K lên đường thẳng $(d) \Rightarrow I(-t;-1+2t;2+t)$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{KI} = (-t;-1+2t;t)$.

Do $KI \perp MN \Rightarrow \overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow t - 2 + 4t + t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{KI} = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}(1;1;-1)$.

Ta có $d(K;(P)) \leq KI \Rightarrow d(K;(P))_{\max} = KI \Leftrightarrow KI \perp (P) \Rightarrow \vec{n} = (1;1;-1)$.

Chọn ý **B**.

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c là các số thực dương thay đổi tùy ý sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất bằng:

- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D. 1

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (ABC) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$$\text{Khi đó: } d(O; (ABC)) = \frac{\left| \frac{0}{a} + \frac{0}{b} + \frac{0}{c} - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ hay } d(O; (ABC)) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$$

Vậy Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$ tại $a = b = c = 1$.

Chọn ý D.

Câu 57. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $I(1;2;3)$ sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó các số a, b, c thỏa mãn đẳng thức nào sau đây?

- A. $a + b + c = 12$ B. $a^2 + b = c - 6$ C. $a + b + c = 18$ D. $a + b - c = 0$

Lời giải

$$\text{Ta có } (ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \text{ Do } I \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1.$$

$$\text{Ta có } 1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Rightarrow abc \leq 162. \text{ Suy ra } V_{OABC} = \frac{1}{6}abc \geq 27.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \frac{1}{3} = \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} \Rightarrow a = 3; b = 6; c = 9.$$

Chọn ý C.

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;-2)$, $B(4;0;0)$. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất, đi qua O, A, B có tâm là

- A. $I(0;0;-1)$ B. $I(2;0;0)$ C. $I(2;0;-1)$ D. $I\left(\frac{4}{3}; 0; -\frac{2}{3}\right)$

Lời giải

Gọi J là trung điểm $AB \Rightarrow J(2;0;-1)$

Tam giác ABO vuông tại O nên J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB .

Gọi I là tâm mặt cầu (S) , (S) qua các điểm A, B, O .

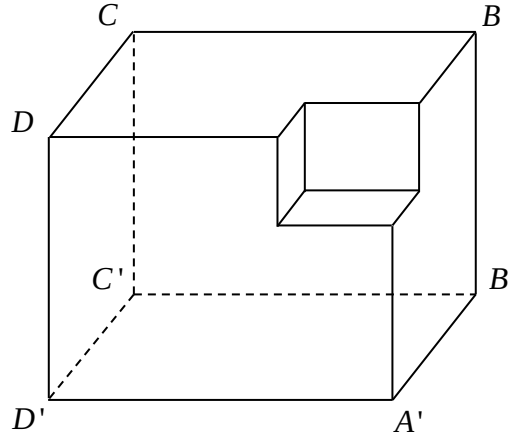
Ta có đường thẳng IJ qua J và có một VTCP là $\vec{j} = (0;1;0)$ nên có PTTS $\begin{cases} x = 2 \\ y = b \\ z = -1 \end{cases}$.

Ta có $I \in (IJ) \Rightarrow I(2; b; -1)$, $IA = \sqrt{b^2 + 5} \Rightarrow IA \geq \sqrt{5}$. Dấu bằng xảy ra khi $b = 0$

Vậy $I(2; 0; -1)$.

Chọn ý C.

Câu 59. Một khối đa diện H được tạo thành bằng cách từ một khối lập phương cạnh bằng 3, ta bỏ đi khối lập phương cạnh bằng 1 ở một “góc” của nó như hình vẽ.



Gọi S là khối cầu có thể tích lớn nhất chứa trong H và tiếp xúc với các mặt phẳng $(A'B'C'D')$, $(BCC'B')$ và $(DCC'D')$. Tính bán kính của S .

- A. $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ B. $3-\sqrt{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{2}$

Lời giải

Gọi M là đỉnh của hình lập phương có cạnh bằng 1 nằm trên đường chéo AC' và nằm trên khối còn lại sau khi cắt. Gọi I là tâm của khối cầu có thể tích lớn nhất thỏa yêu cầu bài toán.

Ta có $d(I, (A'B'C'D')) = d(I, (BCC'B')) = d(I, (DCC'D'))$

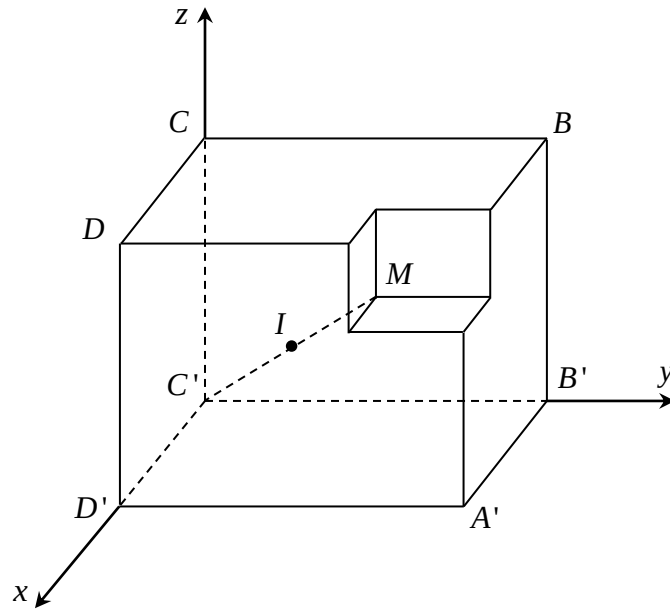
Suy ra I thuộc đoạn thẳng $C'M$ và mặt cầu tâm I cần tìm đi qua điểm M .

Đặt $d(I, (DCC'D')) = a$, ta có $IC' = a\sqrt{3}$. Mà $C'A = 3\sqrt{3}$, $AM = \sqrt{3}$. Suy ra $IM = 2\sqrt{3} - a\sqrt{3}$

Ta có $d(I, (DCC'D')) = IM \Leftrightarrow a = 2\sqrt{3} - a\sqrt{3} \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = 3 - \sqrt{3}$.

Cách khác

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho $C'(0;0;0)$, $B'(0;3;0)$, $D'(3;0;0)$, $C(0;0;3)$.



Khi đó $M(2;2;2)$. Ta có phương trình đường thẳng $C'M$ là
$$\begin{cases} x=t \\ y=t \Rightarrow I(t;t;t) \\ z=t \end{cases}$$
 với $2 > t > 0$ do I

thuộc đoạn thẳng $C'M$. Ta có $d(I, (Oyz)) = IM \Leftrightarrow |t| = \sqrt{3(t-2)^2} \Leftrightarrow t = (2-t)\sqrt{3} \Leftrightarrow t = 3 - \sqrt{3}$.

Suy ra $R = IM = 3 - \sqrt{3}$.

Chọn ý B.

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất, mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C . Tính thể tích khối chóp $O.ABC$.

A. $\frac{1372}{9}$

B. $\frac{686}{9}$

C. $\frac{524}{3}$

D. $\frac{343}{9}$

Lời giải

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Ta có phương trình mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Gọi H là hình chiếu của O lên (P) . Ta có: $d(O; (P)) = OH \leq OM$.

Do đó $\max d(O; (P)) = OM$ khi và chỉ khi (P) qua $M(1;2;3)$ nhận $\overrightarrow{OM} = (1;2;3)$ làm VTPT. Do

đó (P) có phương trình $1(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 14 \Leftrightarrow \frac{x}{14} + \frac{y}{7} + \frac{z}{\frac{14}{3}} = 1$.

Suy ra: $a = 14$, $b = 7$, $c = \frac{14}{3}$.

Vậy $V_{O.ABC} = \frac{1}{6} \cdot OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot 14 \cdot 7 \cdot \frac{14}{3} = \frac{686}{9}$.

Chọn ý B.

Câu 61. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 7 = 0$. Cho ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $AMB = 90^\circ$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng?

- A. 4 B. 2 C. 4π D. Không tồn tại.

Lời giải

Ta có (S): $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 4 \Rightarrow$ (S) có tâm $I(1;1;3)$ và bán kính $R = 2$.

Bài ra A, M, B nằm trên mặt cầu (S) và $AMB = 90^\circ \Rightarrow AB$ qua I $\Rightarrow AB = 2R = 4$.

Ta có $S_{AMB} = \frac{1}{2} MA \cdot MB \leq \frac{MA^2 + MB^2}{4} = \frac{AB^2}{4} = 4$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MA = MB = \frac{AB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ và $AB = 4$.

Do đó diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng 4.

Chọn ý A.

Câu 62. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $M(0;1;3)$, $N(10;6;0)$ và mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 10 = 0$. Điểm $I(-10;a;b)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|IM - IN|$ lớn nhất. Khi đó tổng $T = a + b$ bằng

- A. $T = 5$ B. $T = 1$ C. $T = 2$ D. $T = 6$

Lời giải

Ta có: $(x_M - 2y_M + 2z_M - 10)(x_N - 2y_N + 2z_N - 10) = (0 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 10)(10 - 2 \cdot 6 + 2 \cdot 0 - 10) > 0$

Nên hai điểm M và N nằm cùng phía so với mặt phẳng (P).

Ta luôn có: $|IM - IN| \leq MN = \sqrt{134}$, nên $|IM - IN|$ lớn nhất khi và chỉ khi I là giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (P).

Đường thẳng MN có vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{MN} = (10;5;-3)$,

nên phương trình đường thẳng MN là
$$\begin{cases} x = 10t \\ y = 1 + 5t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm I của đường thẳng MN với mặt phẳng (P) ứng với t là nghiệm phương trình:

$$(10t) - 2(1 + 5t) + 2(3 - 3t) - 10 = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

Do đó $I = (-10; -4; 6)$, từ đó ta có $a = -4$ và $b = 6$, nên $T = (-4) + 6 = 2$.

Chọn ý C.

Câu 63. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $M(1;1;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt chiều dương của các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C thỏa mãn $OA = 2OB$. Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện OABC.

- A. $\frac{64}{27}$ B. $\frac{10}{3}$ C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{81}{16}$

Lời giải

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$. Khi đó mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì (P) đi qua M nên $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Mặt khác $OA = 2OB$ nên $a = 2b$ nên $\frac{3}{2b} + \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow c = \frac{2b}{2b-3}$.

Thể tích khối tứ diện $OABC$ là 0.

Ta có $\frac{3}{2b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{4b} + \frac{3}{4b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{9}{16b^2c}} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{9}{16b^2c}} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{16b^2c}{9} \geq 27 \Rightarrow \frac{b^2c}{3} \geq \frac{81}{16}$.

$$V_{\min} = \frac{81}{16} \text{ khi } \frac{3}{4b} = \frac{1}{c} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{2} \\ b = \frac{9}{4} \\ c = 3 \end{cases}$$

Chọn ý **D**.

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và các điểm $A(1;0;2)$, $B(-1;2;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, B sao cho thiết diện của (P) với mặt cầu (S) có diện tích nhỏ nhất. Khi viết phương trình (P) dưới dạng $(P): ax + by + cz + 3 = 0$. Tính $T = a + b + c$.

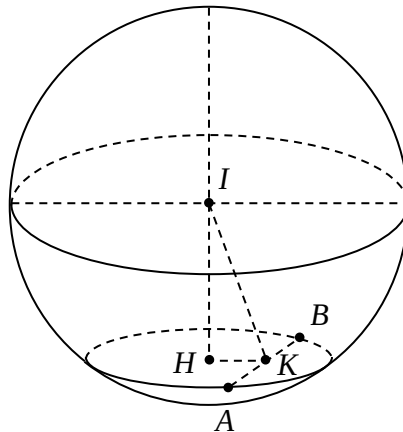
A. 3

B. -3

C. 0

D. -2

Lời giải



Mặt cầu có tâm $I(1;2;3)$ bán kính là $R = 4$.

Ta có A, B nằm trong mặt cầu. Gọi K là hình chiếu của I trên AB và H là hình chiếu của I lên thiết diện.

Ta có diện tích thiết diện bằng $S = \pi r^2 = \pi(R^2 - IH^2)$. Do đó diện tích thiết diện nhỏ nhất khi IH lớn nhất. Mà $IH \leq IK$ suy ra (P) qua A, B và vuông góc với IK .

Ta có $IA = IB = \sqrt{5}$ suy ra K là trung điểm của AB . Vậy $K(0;1;2)$ và $\overrightarrow{KI} = (1;1;1)$.

Vậy $(P): (x-1) + y + (z-2) = 0 \Leftrightarrow -x - y - z + 3 = 0$.

Vậy $T = -3$.

Chọn ý **B**.

Câu 65. Cho a, b, c, d, e, f là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} (d-1)^2 + (e-2)^2 + (f-3)^2 = 1 \\ (a+3)^2 + (b-2)^2 + c^2 = 9 \end{cases}$. Gọi giá

trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2}$ lần lượt là M, m

Khi đó, $M - m$ bằng

A. 10

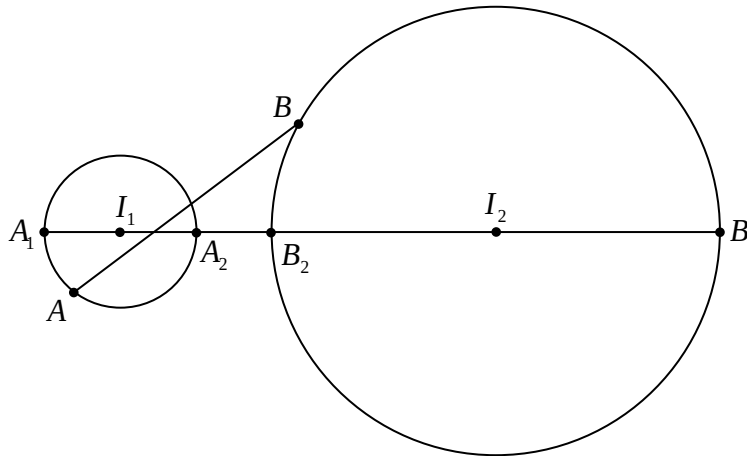
B. $\sqrt{10}$

C. 8

D. $2\sqrt{2}$

Lời giải

Gọi $A(d; e; f)$ thì A thuộc mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ có tâm $I_1(1; 2; 3)$, bán kính $R_1 = 1$, $B(a; b; c)$ thì B thuộc mặt cầu $(S_2): (x+3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ có tâm $I_2(-3; 2; 0)$, bán kính $R_2 = 3$. Ta có $I_1I_2 = 5 > R_1 + R_2 \Rightarrow (S_1)$ và (S_2) không cắt nhau và ở ngoài nhau.



Để thấy $F = AB$, AB max khi $A \equiv A_1, B \equiv B_1 \Rightarrow$ Giá trị lớn nhất bằng $I_1I_2 + R_1 + R_2 = 9$.

AB min khi $A \equiv A_2, B \equiv B_2 \Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất bằng $I_1I_2 - R_1 - R_2 = 1$.

Vậy $M - m = 8$

Chọn ý **C**.

Câu 66. Trong không gian (Oxyz), cho hai điểm $A(0; 8; 2)$, $B(9; -7; 23)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$. Mặt phẳng $(P): x + by + cz + d = 0$ đi qua điểm A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Giá trị của $b + c + d$ khi đó là

A. $b + c + d = 2$

B. $b + c + d = 4$

C. $b + c + d = 3$

D. $b + c + d = 1$

Lời giải

Vì $A \in (P)$ nên ta $8b + 2c + d = 0 \Leftrightarrow d = -8b - 2c \Rightarrow (P): x + by + cz - (8b + 2c) = 0$.

Do (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên $d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|5 - 11b + 5c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} = 6\sqrt{2}$.

Ta có: $d(B; (P)) = \frac{|9 - 7b + 23c - 8b - 2c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} = \frac{|(5 - 11b + 5c) + 4(1 - b + 4c)|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}}$

$\Rightarrow d(B; (P)) \leq \frac{|5 - 11b + 5c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} + 4 \frac{|1 - b + 4c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} \Leftrightarrow d(B; (P)) \leq 6\sqrt{2} + 4 \frac{|1 - b + 4c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}}$

$$\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\Leftrightarrow} d(B; (P)) \leq 6\sqrt{2} + 4 \frac{\sqrt{(1+1+16)(1+b^2+c^2)}}{\sqrt{1+b^2+c^2}} \Leftrightarrow d(B; (P)) \leq 18\sqrt{2}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} 1 = -b = \frac{c}{4} \\ \frac{|5-11b+5c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}} = 6\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = 4 \\ d = 0 \end{cases}.$$

Vậy $P_{\max} = 18\sqrt{2}$ khi $b + c + d = 3$.

Chọn ý C.

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 2; -2)$; $B(3; -3; 3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

- A. $6\sqrt{3}$ B. $12\sqrt{3}$ C. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ D. $5\sqrt{3}$

Lời giải

Gọi $M(x; y; z)$. Ta có $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3MA = 2MB \Leftrightarrow 9MA^2 = 4MB^2$

$$\Leftrightarrow 9[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2] = 4[(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 12y + 12z = 0 \Leftrightarrow (x+6)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 = 108.$$

Như vậy, điểm M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6; 6; -6)$ và bán kính $R = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

Do đó OM lớn nhất bằng $OI + R = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-6)^2} + 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

Chọn ý B.

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(3; 2; 1)$, $C(5; 3; 7)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $MA = MB$ và $MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + b + c$

- A. $P = 4$ B. $P = 0$ C. $P = 2$ D. $P = 5$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB , suy ra $I(1; 1; 1)$; $\overline{AB} = (4; 2; 0)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của AB : $(\alpha): 2x + y - 3 = 0$.

Vì $(2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 3) \cdot (2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 - 3) = 50 > 0$ nên B, C nằm về một phía so với (α) , suy ra A, C nằm về hai phía so với (α) .

Điểm M thỏa mãn $MA = MB$ khi $M \in (\alpha)$. Khi đó $MB + MC = MA + MC \geq AC$.

$MB + MC$ nhỏ nhất bằng AC khi $M = AC \cap (\alpha)$.

Phương trình đường thẳng AC : $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 1 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}. \text{ Do đó } M(1; 1; 3), a + b + c = 5.$$

Chọn ý **D**.

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm $A(2; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x + my + (2m + 1)z - m - 2 = 0$, m là tham số. Gọi $H(a; b; c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P) . Tính $a + b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất?

A. $a + b = -\frac{1}{2}$ **B.** $a + b = 2$ **C.** $a + b = 0$ **D.** $a + b = \frac{3}{2}$

Lời giải

Ta có $x + my + (2m + 1)z - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m(y + 2z - 1) + x + z - 2 = 0$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm với $\forall m \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z - 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$.

Suy ra (P) luôn đi qua đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$.

$$K \in d \Rightarrow K(2 - t; 1 - 2t; t), \overrightarrow{AK}(-t; -2t; t - 3)$$

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u} = (-1; -2; 1)$.

$$\overrightarrow{AK} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t + 4t + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow K\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$$

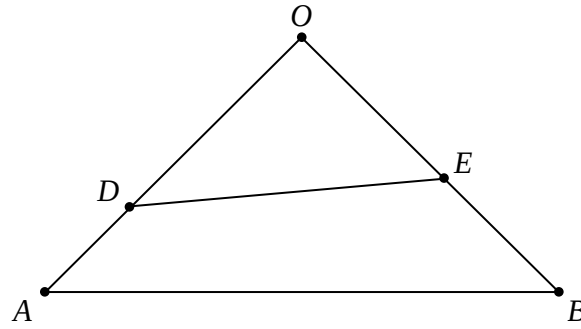
Ta có $AH \leq AK \Rightarrow AH_{\max} = AK \Leftrightarrow H \equiv K$. Vậy $a + b = \frac{3}{2}$.

Chọn ý **D**.

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1; 0; 1)$, $B(0; 1; -1)$. Hai điểm D , E thay đổi trên các đoạn OA , OB sao cho đường thẳng DE chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau. Khi DE ngắn nhất thì trung điểm của đoạn DE có tọa độ là

A. $I\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right)$ **B.** $I\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}; 0\right)$ **C.** $I\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$ **D.** $I\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 0\right)$

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{OA} = (1; 0; 1)$, $\overrightarrow{OB} = (0; 1; -1)$, $OA = OB = \sqrt{2}$, $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; -2)$, $AB = \sqrt{6}$.

Ta có $\frac{S_{ODE}}{S_{OAB}} = \frac{OD.OE}{OA.OB} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{OD.OE}{2} \Leftrightarrow OD.OE = 1$

$$\cos AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2.OA.OB} = \frac{2+2-6}{4} = \frac{-1}{2}.$$

Ta có $DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD.OE \cos AOB = OD^2 + OE^2 + OD.OE \geq 3OD.OE \Rightarrow DE \geq \sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $OD = OE = 1$.

Khi đó $\overrightarrow{OD} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\overrightarrow{OA} \Rightarrow D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{OE} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\overrightarrow{OB} \Rightarrow E\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Vậy trung điểm I của DE có tọa độ $I\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right)$.

Chú ý. Sau khi chứng minh được $OD = OE = 1$ thì ta có thể tìm trung điểm I của DE như sau:

Gọi $K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ là trung điểm của AB . Ta có

$$\frac{OI}{OK} = \frac{OD}{OA} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overrightarrow{OK} \Rightarrow I\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right).$$

Chọn ý **A**.

Câu 71. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3; 3; 0)$, $B(3; 0; 3)$, $C(0; 3; 3)$. Mặt phẳng (P) đi qua O , vuông góc với mặt phẳng (ABC) sao cho mặt phẳng (P) cắt các cạnh AB , AC tại các điểm M , N thỏa mãn thể tích tứ diện $OAMN$ nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) có phương trình:

- A.** $x + y - 2z = 0$ **B.** $x + y + 2z = 0$ **C.** $x - z = 0$ **D.** $y - z = 0$

Lời giải

Nhận thấy tam giác ABC đều có trọng tâm $G(2; 2; 2)$, và $OG \perp (ABC)$ nên hình chiếu của O lên (ABC) là điểm G .

Khi đó $V_{OAMN} = \frac{1}{3} \cdot S_{AMN} \cdot d(O, (ABC)) = \frac{1}{3} \cdot OG \cdot \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN \cdot \sin MAN$.

Vì OG và $\sin MAN = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cố định nên thể tích V_{OAMN} nhỏ nhất khi và chỉ khi $AM \cdot AN$ nhỏ nhất.

Vì M, N, G thẳng hàng nên $3 = \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} \geq 2\sqrt{\frac{AB}{AM} \cdot \frac{AC}{AN}}$, suy ra $AM \cdot AN \geq \frac{4}{9} AB \cdot AC$. Đẳng thức xảy ra khi $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ hay $MN \parallel BC$.

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua O và nhận $\vec{GA} = (1; 1; -2)$ là một vector pháp tuyến, do đó $(P): x + y - 2z = 0$.

Chọn ý A.

Câu 72. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua $E(-2; 1; -2)$, song song với (P) đồng thời tạo với d góc bé nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (m; n; 1)$. Tính $T = m^2 - n^2$.

- A. $T = -5$ B. $T = 4$ C. $T = 3$ D. $T = -4$

Lời giải

Mặt phẳng (P) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1; 2)$ và đường thẳng d có vec tơ chỉ phương $\vec{v} = (4; -4; 3)$

Vì Δ song song với mặt phẳng (P) nên $\vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow 2m - n + 2 = 0 \Leftrightarrow n = 2m + 2$.

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác ta có } \cos(\Delta; d) &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|4m - 4n + 3|}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1} \cdot \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 3^2}} = \frac{|4m + 5|}{\sqrt{41(5m^2 + 8m + 5)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \sqrt{\frac{(4m + 5)^2}{5m^2 + 8m + 5}} = \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \sqrt{\frac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5}}. \end{aligned}$$

Vì $0^\circ \leq (\Delta; d) \leq 90^\circ$ nên $(\Delta; d)$ bé nhất khi và chỉ khi $\cos(\Delta; d)$ lớn nhất

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{16t^2 + 40t + 25}{5t^2 + 8t + 5} \Rightarrow f'(t) = \frac{-72t^2 - 90t}{(5t^2 + 8t + 5)^2}.$$

Lập bảng biến thiên ta có $\max f(t) = f(0) = 5$ suy ra $(\Delta; d)$ bé nhất khi $m = 0 \Rightarrow n = 2$. Do đó $T = m^2 - n^2 = -4$.

Làm theo cách này thì không cần đến dữ kiện đường thẳng Δ đi qua $E(-2; 1; -2)$.

Chọn ý D.

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ và hai điểm $A(2; 0; 3)$, $B(2; -2; -3)$. Biết điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc d thỏa mãn $MA^4 + MB^4$ nhỏ nhất. Tìm x_0 .

- A. $x_0 = 1$ B. $x_0 = 3$ C. $x_0 = 0$ D. $x_0 = 2$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB . Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
 MA^4 + MB^4 &= (MA^2 + MB^2)^2 - 2MA^2 \cdot MB^2 = \left(2MI^2 + \frac{AB^2}{2}\right)^2 - 2\left(MI^2 - \frac{AB^2}{4}\right)^2 \\
 &= 4MI^4 + 2MI^2 AB^2 + \frac{AB^4}{4} - 2MI^4 + MI^2 AB^2 - \frac{AB^4}{8} \\
 &= 2MI^4 + 3MI^2 AB^2 + \frac{AB^4}{4} = 2\left(MI^2 + \frac{3AB^2}{4}\right)^2 - \frac{7}{10}AB^4
 \end{aligned}$$

Do đó, $MA^4 + MB^4$ đạt GTNN khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên d .

Điểm $I(2; -1; 0)$. Lấy $M(2+t; -1+2t; 3t) \in d$. $\overrightarrow{IM} = (t; 2t; 3t)$

$$\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t + 4t + 9t = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Suy ra $M \equiv I$.

Vậy $x_0 = 2$

Chọn ý **D**.

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(0; 0; 2)$, $B(3; 4; 1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AX + BY$ với X, Y là hai điểm thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $XY = 1$.

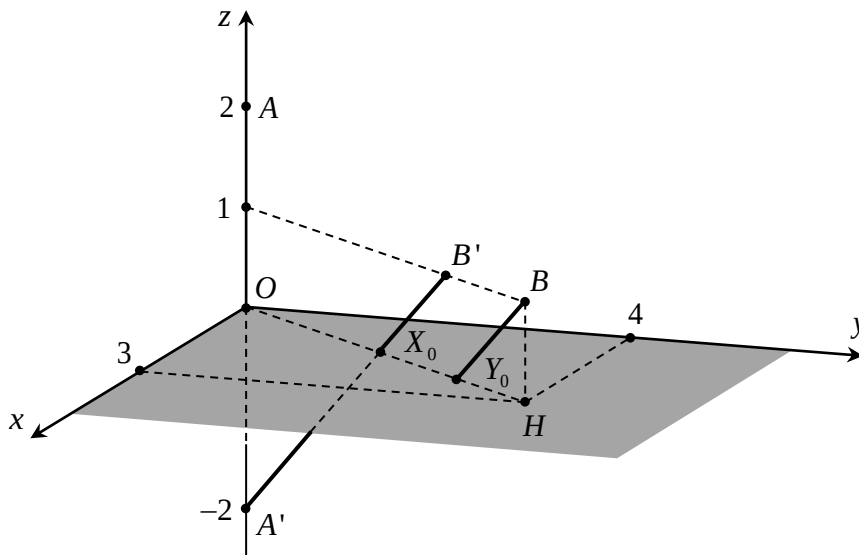
A. 3

B. 5.

C. $2 + \sqrt{17}$

D. $1 + 2\sqrt{5}$

Lời giải



Lấy $A'(0; 0; -2)$ đối xứng với A qua mặt phẳng Oxy . Khi đó với mọi $X \in Oxy$ thì $AX = A'X$.

Gọi $B'\left(\frac{12}{5}; \frac{16}{5}; 1\right)$ thuộc mặt phẳng (OAB) và $BB' = 1$. Gọi H là hình chiếu của B trên mp Oxy .

Kẻ $B'A'$ cắt OH tại X_0 , dựng hình bình hành $BB'X_0Y_0$ thì $X_0Y_0 = 1$.

Dễ dàng chứng minh được với X_0, Y_0 dựng được như vậy thì với mọi $X, Y \in Oxy$ ta luôn có

$$AX + BY = A'X + BY \geq A'X_0 + BY_0 = A'X_0 + B'X_0 = A'B' = 5.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AX + BY$ bằng 5.

Chọn ý **B**.

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d đi qua A và có vector chỉ phương $\vec{u} = (3; 4; -4)$ cắt (P)

tại B . Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90° . Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

- A.** $H(-2; -1; 3)$ **B.** $I(-1; -2; 3)$ **C.** $K(3; 0; 15)$ **D.** $J(-3; 2; 7)$

Lời giải

+ Đường thẳng d đi qua $A(1; 2; -3)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (3; 4; -4)$ có phương trình là

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 - 4t \end{cases}.$$

+ Ta có: $MB^2 = AB^2 - MA^2$. Do đó $(MB)_{\max}$ khi và chỉ khi $(MA)_{\min}$.

+ Gọi E là hình chiếu của A lên (P) . Ta có: $AM \geq AE$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv E$.

Khi đó $(AM)_{\min} = AE$ và MB qua B nhận $\overrightarrow{BE}$ làm vector chỉ phương.

+ Ta có: $B \in d$ nên $B(1+3t; 2+4t; -3-4t)$ mà $B \in (P)$ suy ra:

$$2(1+3t) + 2(2+4t) - (-3-4t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow B(-2; -2; 1).$$

+ Đường thẳng AE qua $A(1; 2; -3)$, nhận $\vec{n}_p = (2; 2; -1)$ làm vector chỉ phương có phương trình là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}.$$

Suy ra $E(1+2t; 2+2t; -3-t)$.

Mặt khác, $E \in (P)$ nên $2(1+2t) + 2(2+2t) - (-3-t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow E(-3; -2; -1)$.

+ Do đó đường thẳng MB qua $B(-2; -2; 1)$, có vector chỉ phương $\overrightarrow{BE} = (-1; 0; -2)$ nên có phương

$$\text{trình là } \begin{cases} x = -2 - t \\ y = -2 \\ z = 1 - 2t \end{cases}.$$

Thử các đáp án thấy điểm $I(-1; -2; 3)$ thỏa.

Chọn ý **B**.

Câu 76. Trong không gian tọa độ Oxyz cho các điểm $A(1; 5; 0)$, $B(3; 3; 6)$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Gọi $M(a; b; c) \in \Delta$ sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $T = a + b + c$?

- A.** $T = 2$ **B.** $T = 3$ **C.** $T = 4$ **D.** $T = 5$

Lời giải

Ta có $M \in \Delta \Rightarrow M = (-1+2t; 1-t; 2t)$.

$$\overrightarrow{MA} = (2-2t; 4+t; -2t), \quad \overrightarrow{MB} = (4-2t; 2+t; 6-2t).$$

Khi đó chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $MA + MB$ nhỏ nhất.

Xét hàm số $f(t) = MA + MB = \sqrt{9t^2 + 20} + \sqrt{9t^2 - 36t + 56}$

$$= \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(6-3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} \geq \sqrt{6^2 + (4\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{29}.$$

Dấu bằng đạt được khi và chỉ khi bộ số $(3t; 6-3t)$ và bộ số $(2\sqrt{5}; 2\sqrt{5})$ tỉ lệ.

Suy ra $3t = 6-3t \Leftrightarrow t=1$. Suy ra $M = (1; 0; 2)$.

Chú ý ở đây có dùng bất đẳng thức Mincopski (Hệ quả của bất đẳng thức Cauchy)

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}, \text{ đúng với mọi } a_i, b_i.$$

Dấu bằng xảy ra khi hai bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ tỉ lệ.

Chọn ý **B**.

Câu 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $B(2; -1; -3)$, $C(-6; -1; 3)$. Trong các tam giác ABC thỏa mãn các đường trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau, điểm $A(a; b; 0)$, $b > 0$ sao cho góc A lớn nhất. Tính giá trị $\frac{a+b}{\cos A}$.

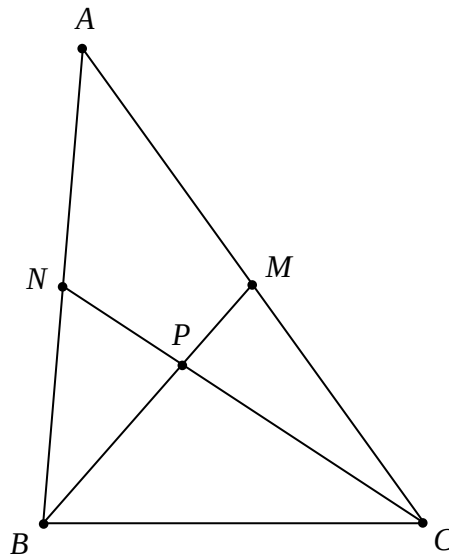
A. 10

B. -20

C. 15

D. $-\frac{\sqrt{31}}{3}$

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AC, AB .

Gọi $P = BM \cap CN$, ta có $BM \perp CN$ nên $BC^2 = BP^2 + CP^2$.

Theo công thức tính đường trung tuyến, ta có

$$BP^2 = \left(\frac{2}{3}BM\right)^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2(BA^2 + BC^2) - AC^2}{4}, \quad CP^2 = \left(\frac{2}{3}CN\right)^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2(CA^2 + CB^2) - AB^2}{4}$$

$$\Rightarrow BC^2 = \frac{AB^2 + AC^2 + 4BC^2}{9} \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 5BC^2.$$

Góc A lớn nhất $\Leftrightarrow \cos A$ nhỏ nhất.

$$\text{Ta có } \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{5(AB^2 + AC^2) - (AB^2 + AC^2)}{10AB \cdot AC}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{AB^2 + AC^2}{AB \cdot AC} \geq \frac{2}{5} \cdot \frac{2AB \cdot AC}{AB \cdot AC} = \frac{4}{5}, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow AB = AC.$$

Ta có $A(a; b; 0)$, $b > 0$ và $B(2; -1; -3)$, $C(-6; -1; 3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2-a; -1-b; -3) \Rightarrow AB^2 = (2-a)^2 + (b+1)^2 + 9 \\ \overrightarrow{AC} = (-6-a; -1-b; 3) \Rightarrow AC^2 = (a+6)^2 + (b+1)^2 + 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2-a)^2 + (b+1)^2 + 9 = (a+6)^2 + (b+1)^2 + 9 \Rightarrow 4 - 4a = 12a + 36 \Rightarrow a = -2.$$

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-8; 0; 6) \Rightarrow BC^2 = 8^2 + 6^2 = 100.$

Khi đó từ $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$ và $AB = AC$

$$\Rightarrow 2[(2-a)^2 + (b+1)^2 + 9] = 5.100 \Rightarrow 4^2 + (b+1)^2 + 9 = 250.$$

Kết hợp với $b > 0$ ta được $b = 14$ thỏa mãn.

Như vậy $\frac{a+b}{\cos A} = \frac{-2+14}{\frac{4}{5}} = 15.$

Chọn ý C.

Câu 78. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, xét tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối diện bằng nhau và D khác phía với O so với (ABC); đồng thời A, B, C lần lượt là giao điểm của các trục Ox, Oy, Oz và $(\alpha): \frac{x}{m} + \frac{y}{m+2} + \frac{z}{m-5} = 1$ (với $m \neq -2, m \neq 0, m \neq 5$). Tìm khoảng cách ngắn nhất từ tâm mặt cầu ngoại tiếp I của tứ diện ABCD đến O.

A. $\sqrt{30}$

B. $\frac{\sqrt{13}}{2}$

C. $\sqrt{26}$

D. $\frac{\sqrt{26}}{2}$

Lời giải

Dựng hình hộp chữ nhật OAQB.CMDP. Gọi I là giao điểm các đường chéo của hình hộp, dễ thấy I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

Ta có $A(m; 0; 0), B(0; m+2; 0), C(0; 0; m-5)$ suy ra $D(m; m+2; m-5).$

Bán kính $R = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2}\sqrt{3m^2 - 6m + 29} \geq \frac{\sqrt{26}}{2}.$

Chọn ý D.

Câu 79. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x + y + z - 1 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-15}{1} = \frac{y-22}{2} = \frac{z-37}{2}$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z + 4 = 0$. Một đường thẳng (Δ) thay đổi cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$. Gọi A', B' là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với d. Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA' + BB'$ là

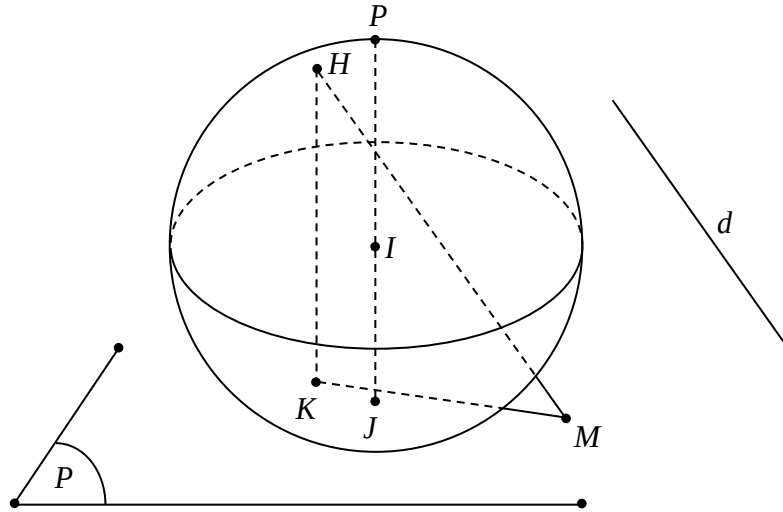
A. $\frac{8+30\sqrt{3}}{9}$

B. $\frac{24+18\sqrt{3}}{5}$

C. $\frac{12+9\sqrt{3}}{5}$

D. $\frac{16+60\sqrt{3}}{9}$

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(4;3;-2)$ và bán kính $R=5$.

Gọi H là trung điểm của AB thì $IH \perp AB$ và $IH=3$ nên H thuộc mặt cầu (S') tâm I bán kính $R'=3$. Gọi M là trung điểm của $A'B'$ thì $AA'+BB'=2HM$, M nằm trên mặt phẳng (P) .

Mặt khác ta có $d(I;(P)) = \frac{4}{\sqrt{3}} < R$ nên (P) cắt mặt cầu (S) và $\sin(d;(P)) = \sin \alpha = \frac{5}{3\sqrt{3}}$. Gọi K là hình chiếu của H lên (P) thì $HK = HM \cdot \sin \alpha$.

Vậy để $AA'+BB'$ lớn nhất thì HK lớn nhất $\Leftrightarrow HK$ đi qua I nên

$$HK_{\max} = R' + d(I;(P)) = 3 + \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy } AA'+BB' \text{ lớn nhất bằng } 2 \left(\frac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{5} = \frac{24+18\sqrt{3}}{5}.$$

Chọn ý **B**.

Câu 80. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;1)$ có bán kính bằng 4 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(2;1;5)$ có bán kính bằng 2. (P) là mặt phẳng thay đổi tiếp xúc với hai mặt cầu (S_1) , (S_2) . Đặt M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm O đến (P) . Giá trị $M+m$ bằng

A. $\sqrt{15}$

B. $8\sqrt{3}$

C. 9

D. 8

Lời giải

Giả sử (P) tiếp xúc với (S_1) , (S_2) lần lượt tại A và B .

Gọi $IJ \cap (P) = M$. Do $\frac{IA}{JB} = \frac{MI}{MJ} = 2$ nên J là trung điểm của IM . Suy ra $M(2;1;9)$.

Gọi $\vec{n} = (a;b;c)$ với $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Ta có: $(P): a(x-2) + b(y-1) + c(z-9) = 0$.

$$\text{Và: } \begin{cases} d(I,(P)) = R_1 \\ d(J,(P)) = R_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 3c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 3 \quad (1).$$

$$\text{Ta có: } d(O,(P)) = \frac{|2a+b+9c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2a+b+9c|}{2|c|} = \frac{1}{2} \left| \frac{2a}{c} + \frac{b}{c} + 9 \right|.$$

Đặt $t = \frac{2a}{c} + \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{b}{c} = t - \frac{2a}{c}$. Ta có: $d(O, (P)) = \frac{1}{2}|t+9|$.

Thay $\frac{b}{c} = t - \frac{2a}{c}$ vào (1), ta được $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(t - \frac{2a}{c}\right)^2 = 3 \Leftrightarrow 5\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 4\frac{a}{c} \cdot t + t^2 - 3 = 0$.

Để phương trình có nghiệm với ẩn $\frac{a}{c}$ thì $4t^2 - 5t^2 + 15 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{15} \leq t \leq \sqrt{15}$

$$\Leftrightarrow 0 < 9 - \sqrt{15} \leq t + 9 \leq 9 + \sqrt{15} \Rightarrow \frac{9 - \sqrt{15}}{2} \leq d(O, (P)) \leq \frac{9 + \sqrt{15}}{2}$$

$$\Rightarrow M = \frac{9 + \sqrt{15}}{2} \text{ và } m = \frac{9 - \sqrt{15}}{2}. \text{ Vậy } M + m = 9.$$

Cách 2: Do $IJ = 4 > R_1 + R_2$ nên 2 mặt cầu cắt nhau.

Giả sử IJ cắt (P) tại M ta có $\frac{MJ}{MI} = \frac{R_2}{R_1} = 2 \Rightarrow J$ là trung điểm của MI

Suy ra $M(2;1;9)$. Khi đó $(P): a(x-2) + b(y-1) + c(z-9) = 0 (a^2 + b^2 + c^2 > 0)$

$$\text{Mặt khác } d(I(P)) = 4 \Leftrightarrow \frac{|8c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{|2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 1$$

Do đó $c \neq 0$ chọn $c = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 3$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{3} \sin t; b = \sqrt{3} \cos t \Rightarrow d(O, (P)) = \frac{|2a + b + 9|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2a + b + 9|}{2} = \frac{|2\sqrt{3} \sin t + \sqrt{3} \cos t + 9|}{2}$$

$$\text{Mặt khác } -\sqrt{12+3} \leq 2\sqrt{3} \sin t + \sqrt{3} \cos t \leq \sqrt{12+3} \Rightarrow \frac{9 - \sqrt{15}}{2} \leq d_o \leq \frac{\sqrt{15} + 9}{2} \Rightarrow M + m = 9$$

Chọn ý C.

Câu 81. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $A(2;0;0)$, $M(1;1;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua AM cắt các tia Oy , Oz lần lượt tại B , C . Khi mặt phẳng (P) thay đổi thì diện tích tam giác ABC đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. $5\sqrt{6}$

B. $3\sqrt{6}$

C. $4\sqrt{6}$

D. $2\sqrt{6}$

Lời giải

Gọi $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, khi đó $b, c > 0$.

Phương trình mặt phẳng $(P) \equiv (ABC): \frac{x}{2} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

$$\text{Mà } M \in (P) \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow bc = 2(b+c).$$

$$\text{Do } bc = 2(b+c) \leq \frac{(b+c)^2}{4} \Rightarrow (b+c)^2 \geq 8(b+c) \Rightarrow b+c \geq 8 \text{ (do } b, c > 0).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (-2; b; 0), \overrightarrow{AC} = (-2; 0; c) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (bc; 2c; 2b).$$

$$\text{Do đó } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 + 4b^2 + 4c^2}$$

$$= \sqrt{b^2 + c^2 + (b+c)^2} \geq \sqrt{\frac{1}{2}(b+c)^2 + (b+c)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}(b+c).$$

Vậy $S_{\Delta ABC} \geq 4\sqrt{6}$.

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} b, c > 0 \\ b + c = 8 \Leftrightarrow b = c = 4. \\ b = c \end{cases}$

Chọn ý C.

Câu 82. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z = 0$ và điểm $M(1; 2; -1)$. Một đường thẳng thay đổi qua M và cắt (S) tại hai điểm A, B . Tìm giá trị lớn nhất của tổng $MA + MB$.

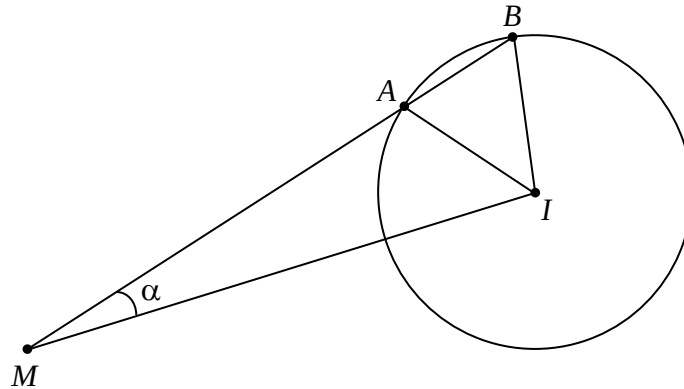
A. 8

B. 10

C. $2\sqrt{17}$

D. $8 + 2\sqrt{5}$

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -2)$, bán kính $R = 3$.

Vì $IM = \sqrt{17} < 3$ nên M nằm ngoài đường tròn,

Gọi α là góc tạo bởi MB và MI . Áp dụng định lí Côsin cho tam giác MIA và MIB ta có

$$R^2 = MA^2 + MI^2 - 2MA \cdot MI \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

$$R^2 = MB^2 + MI^2 - 2MB \cdot MI \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

Lấy (1) trừ cho (2) về theo về ta được

$$0 = MA^2 - MB^2 - 2\sqrt{17} \cdot (MA - MB) \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow MA + MB = 2\sqrt{17} \cos \alpha$$

Do đó $MA + MB$ lớn nhất bằng $2\sqrt{17}$ khi $\cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

Chọn ý C.

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4$, và mặt cầu

$(S_2): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 1$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3t \\ z = -2 - t \end{cases}$. Gọi A, B là hai điểm tùy ý

thuộc (S_1) , (S_2) và M thuộc đường thẳng d . Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + MB$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2211}}{11}$

B. $\frac{\sqrt{3707}}{11} - 3$

C. $\frac{\sqrt{1771} + 2\sqrt{110}}{11}$

D. $\frac{\sqrt{3707}}{11}$

Lời giải

Mặt cầu (S_1) có tâm $I(1; 0; 0)$, bán kính $R_1 = 2$.

Mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với (R) nên có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = [\vec{n}_{(R)}, \vec{u}_1] = (12; 18; -6)$.

Đường thẳng Δ chứa trong mặt phẳng (P) và song song với mặt phẳng (Q) nên có véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (66; -42; 6) = 6(11; -7; 1)$.

Suy ra, $a = 11; b = -7$. Vậy $a + 2b = -3$.

Chọn ý A.

Câu 85. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(2; 2; -3)$ và $N(-4; 2; 1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M , nhận vectơ $\vec{u} = (a; b; c)$ làm vectơ chỉ phương và song song với mặt phẳng $(P): 2x + y + z = 0$ sao cho khoảng cách từ N đến Δ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết $|a|, |b|$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Khi đó $|a| + |b| + |c|$ bằng:

A. 15

B. 13

C. 16

D. 14

Lời giải

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua $M(2; 2; -3)$ và song song với mặt phẳng (P) .

Suy ra $(Q): 2x + y + z - 3 = 0$.

Do $\Delta // (P)$ nên $\Delta \subset (Q)$.

$d(N, \Delta)$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \Delta$ đi qua N' , với N' là hình chiếu của N lên (Q) .

Gọi d là đường thẳng đi qua N và vuông góc (P) , $d: \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Ta có $N' \in d \Rightarrow N'(-4 + 2t; 2 + t; 1 + t); N' \in (Q) \Rightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow N'\left(-\frac{4}{3}; \frac{10}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

$\vec{u} = (a; b; c)$ cùng phương $\overrightarrow{MN'} = \left(-\frac{10}{3}; \frac{4}{3}; \frac{16}{3}\right)$.

Do $|a|, |b|$ nguyên tố cùng nhau nên chọn $\vec{u} = (-5; 2; 8)$.

Vậy $|a| + |b| + |c| = 15$.

Chọn ý A.

Câu 86. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -1; 2)$, $B(1; 1; 2)$, $C(1; -1; 4)$, đường tròn (C) là giao của mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6z + 10 = 0$. Hỏi có bao nhiêu điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho $T = MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất?

A. 3

B. 2

C. 4

D. 1

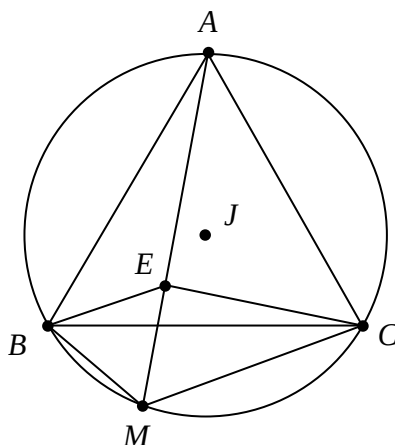
Lời giải

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(2; 0; 3)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P) ta có $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

Tâm J của đường tròn giao tuyến (C) chính là giao điểm của Δ và $(P) \Rightarrow J\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right).$

Thấy $A, B, C \in (P), JA = JB = JC = \frac{2\sqrt{6}}{3}, AB = BC = CA = 2\sqrt{2}$ nên $A, B, C \in (C)$ và tam giác ABC đều.



Trường hợp 1. Xét M thuộc cung nhỏ BC . Lấy điểm E thuộc đoạn AM sao cho $MB = ME$ mà $BME = BCA = 60^\circ$ (do góc nội tiếp cùng chắn cung AB) suy ra tam giác BME đều.

Ta có $\angle ABE = \angle CBM$ (vì cùng cộng với góc EBC bằng 60°) $\Rightarrow \triangle ABE = \triangle CBM \Rightarrow MC = AE$.

$\Rightarrow MB + MC = ME + EA = MA$

$\Rightarrow MA + MB + MC = 2MA$ nên $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MA đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MA là đường kính tức M là điểm chính giữa cung nhỏ BC . Vậy trong trường hợp này có một điểm M thỏa mãn.

Trường hợp 2 và Trường hợp 3. Xét M thuộc cung nhỏ AC ; AB do vai trò bình đẳng các đỉnh của tam giác đều hoàn toàn tương tự mỗi trường hợp cũng có một điểm M thỏa mãn.

Vậy có ba điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Chọn ý **A**.

Chương

6

Phương pháp tọa độ hóa
hình học cổ điển

Tóm tắt nội dung

Đôi khi trong giải toán hình học không gian cổ điển ta sẽ gặp khá nhiều bài toán tính toán phức tạp, tuy nhiên trong phòng thi ta lại không có nhiều thời gian, vì thế trong chương này chúng ta sẽ tìm hiểu một phương pháp giải quyết nhanh các bài toán tính toán phức tạp và khó trong hình không gian cổ điển, liên quan tới cực trị, góc, khoảng cách.



A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

Trên Internet có một vài tài liệu nói về phương pháp này và chia thành rất nhiều dạng, điều đó làm chúng ta khi áp dụng có phần khó nhớ và máy móc, tuy nhiên chúng ta chỉ cần nắm được dấu hiệu và phương pháp sau

- **Bước 1.** Chọn hệ trục tọa độ. Trong bước này ta sẽ xác định 3 đường vuông góc có trong bài toán và gọi đó là 3 đường cơ sở. Thông thường thì ta sẽ quy ước trục Ox hướng vào mình, trục Oz nằm ngang, còn lại là trục Oy
- **Bước 2.** Xác định tọa độ các điểm liên trên hình liên quan tới bài toán. Với những bạn chưa quen thì chúng ta xác định tọa độ hình chiếu của điểm cần tìm lên các trục, từ đó sẽ suy ra được tọa độ điểm cần tính.
- **Bước 3.** Áp dụng công thức.

Sau đây chúng ta sẽ nhắc lại một số công thức cần nhớ trong phần này.

Diện tích và thể tích

$$\text{Diện tích tam giác } ABC: S = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$$

$$\text{Thể tích tứ diện } ABCD: V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}|$$

$$\text{Thể tích hình hộp } ABCD.A'B'C'D': V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AA'}|$$

$$\text{Thể tích hình lăng trụ } ABC.A'B'C': V = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AA'}|$$

Góc giữa 2 mặt phẳng: Mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}$ và mặt phẳng (Q) có vecto pháp tuyến $\vec{n}'$ thì $\cos((P), (Q)) = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')|$

Góc giữa 2 đường thẳng: Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}$ và d' có VTCP $\vec{v}$ thì $\cos(d, d') = |\cos(\vec{u}, \vec{v})|$

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng: Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}$ và (P) có VTPT $\vec{n}$ thì $\sin(d, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})|$

Khoảng cách từ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng:

- (Oxy) là $|z_0|$; (Oyz) là $|x_0|$; (Ozx) là $|y_0|$
- $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ là $d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Khoảng cách từ một điểm đến 1 đường thẳng:

Cho $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và đường thẳng d qua A và có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ thì $d(M_0, d) = \frac{|\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: Đường thẳng d_1 qua M_1 và có VTCP $\vec{u}_1$; d_2 qua

M_2 và có VTCP thì $d(d_1, d_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot [\vec{u}_1, \vec{u}_2]|}{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2]|}$

Chú ý. Thông thường các bài mà không có 3 đường vuông góc thì ta sẽ phải tự dựng thêm để gắn tọa độ và những bài liên quan tới hình lập phương, hình hộp chữ nhật, chóp có 3 đường vuông góc, lăng trụ đứng thì khi áp dụng phương pháp này sẽ giải rất nhanh !

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Câu 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tính bán kính R của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$.

Lời giải

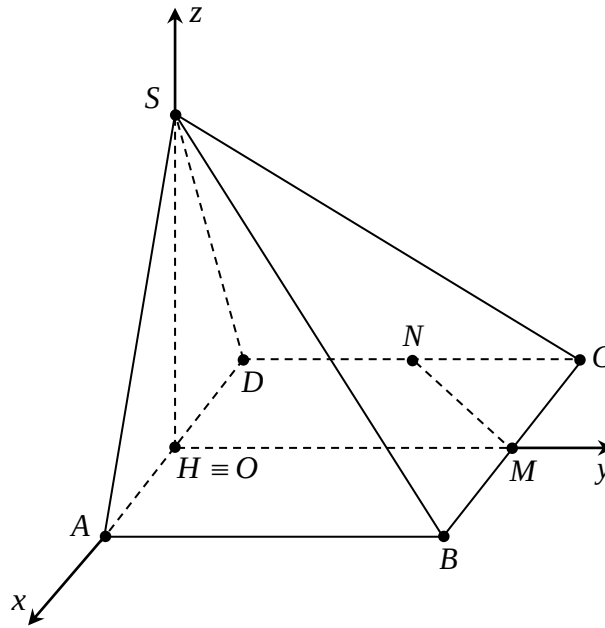
Chọn hệ trục Oxyz như hình vẽ và xét $a = 1$.

Khi đó $H \equiv O, M(0; 1; 0), C(-\frac{1}{2}; 1; 0), N(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0), S(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Phương trình mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.CMN$ có dạng

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0).$$

$S, C, M, N \in (S)$ nên ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} -2b + d = -1; a - 2b + d = -\frac{5}{4} \\ a - b + d = -\frac{1}{2}; -\sqrt{3}c + d = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4}; b = \frac{3}{4} \\ c = \frac{5\sqrt{3}}{12}; d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

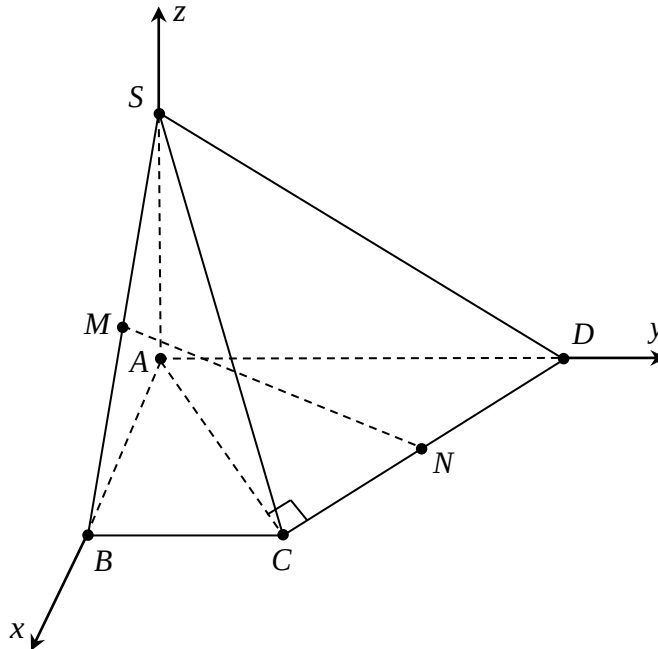


Ta có $a^2 + b^2 + c^2 - d = \frac{31}{48}$ hay $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \frac{\sqrt{93}}{12}$. Vậy $R = \frac{a\sqrt{93}}{12}$.

Câu 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , thỏa mãn điều kiện $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của SB , CD . Tính cosin của góc giữa MN và (SAC) .

Lời giải



Chọn hệ trục như hình vẽ, chọn đơn vị là a .

Có $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;2;0)$, $S(0;0;1)$; $M\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$; $N\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};0\right)$.

Vec tơ chỉ phương của MN là $2\overline{MN} = 2\left(0;\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right) = (0;3;-1)$.

Vec tơ pháp tuyến của (SAC) là $\vec{n} = [\overline{AC}; \overline{AS}] = (1;-1;0)$.

$$\text{Vậy } \sin(MN; (SAC)) = \frac{|3|}{\sqrt{9+1}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

$$\text{Suy ra } \cos(MN; (SAC)) = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{10}$$

Câu 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Tính cosin góc giữa MN và (SAC) , biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

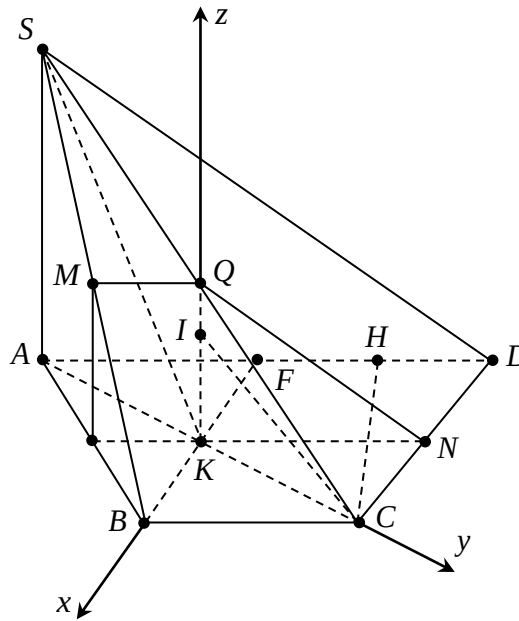
Lời giải

Vì $ABCD$ là hình thang cân có $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$

$$\Rightarrow AD = 2a; AB = BC = CD = a \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; S_{ABCD} = \frac{a+2a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$$

$$\text{Nên } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SA = a$$

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ như hình vẽ



$$\text{Ta có } K(0;0;0), B\left(\frac{a}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), A\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),$$

$$N\left(\frac{-a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), S\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};a\right), M\left(\frac{a}{4};-\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{2}\right)$$

$$\bullet \quad \overrightarrow{MN} = \left(\frac{-3a}{4}; \frac{3a\sqrt{3}}{4}; -\frac{a}{2}\right). \text{ Chọn } \vec{u}_1 = (-3; 3\sqrt{3}; -2) \text{ cùng phương với } \overrightarrow{MN}$$

$$\text{Nhận xét } \begin{cases} BK \perp SA \\ BK \perp AC \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAC)$$

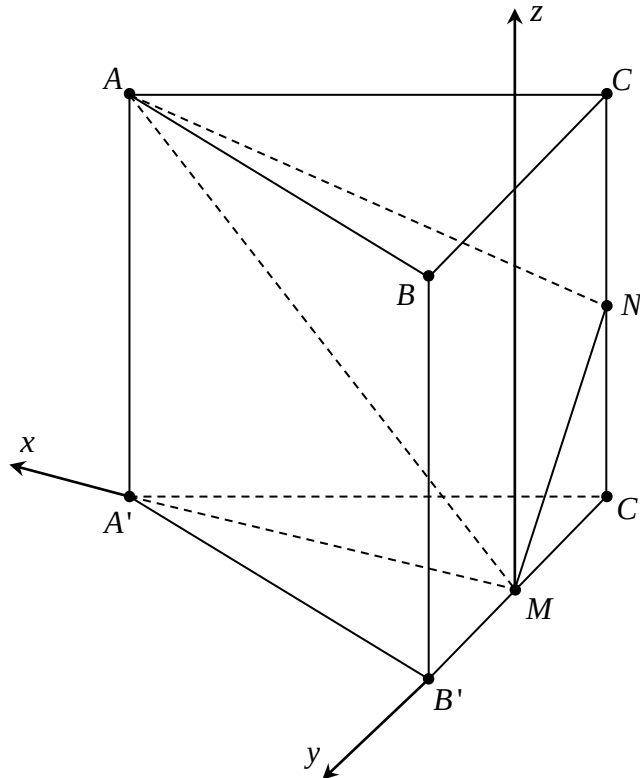
$$\bullet \quad \overrightarrow{BK} = \left(\frac{a}{2}; 0; 0\right) \text{ là vtpt của } (SAC). \text{ Chọn } \vec{n}_1 = (1; 0; 0) \text{ cùng phương với } \overrightarrow{BK}$$

Gọi α là góc giữa MN và (SAC) . Ta có $\sin \alpha = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} = \frac{3\sqrt{10}}{20} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{310}}{20}$.

Câu 4

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $BAC = 120^\circ$, $AA' = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC' . Số đo góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) bằng

Lời giải



Thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ trong không gian như hình vẽ, gốc tọa độ O trùng M .

Dễ dàng tính được $MB' = MC' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $MA' = \frac{a}{2}$.

+ $M(0;0;0), N \in (Oyz) \Rightarrow N\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$

+ $A \in (Oxz) \Rightarrow A\left(\frac{a}{2}; 0; a\right)$. $Mp(ABC) // (A'B'C'); (A'B'C') \equiv (Oxy)$

$\Rightarrow (ABC)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$

Ta có $\vec{MA}\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$ cùng phương $\vec{u}_1(1;0;2)$

$\vec{MN}\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$ cùng phương $\vec{u}_2(0;-\sqrt{3};1)$

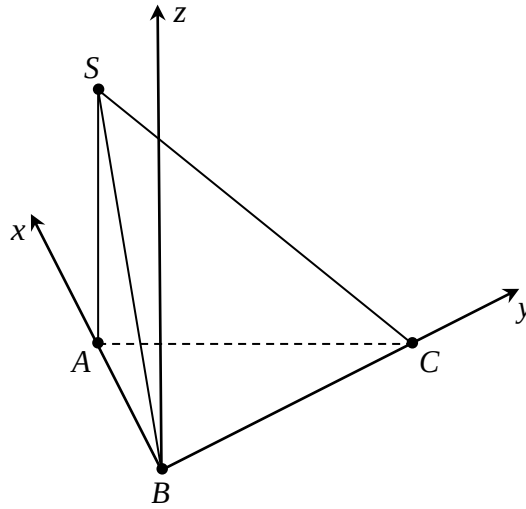
$\Rightarrow (AMN)$ có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2\sqrt{3}; -1; -\sqrt{3})$

$\Rightarrow \cos((AMN), (ABC)) = |\cos(\vec{k}, \vec{n})| = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Câu 5

Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông cân tại B , $BC = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$, M là trung điểm AC , tính góc cotang của (SBM) và (SAB)

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có $B(0;0;0)$; $A(a;0;0)$; $C(0;a;0)$; $S(a;0,a\sqrt{3})$; $M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$

$$\vec{n}_{(SAB)} = (0;1;0) ; \vec{n}_{(SBM)} = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{MB}] = (a(1;0;\sqrt{3})) \wedge \left(\frac{a}{2}(1;1;0)\right) = \frac{a^2}{2}(-\sqrt{3};\sqrt{3};1)$$

Đặt góc (SBM) và (SAB) là α , ta có

$$\left. \begin{aligned} |\cos \alpha| &= \frac{|\vec{n}_{(SAB)} \cdot \vec{n}_{(SMB)}|}{|\vec{n}_{(SAB)}| |\vec{n}_{(SMB)}|} = \frac{\sqrt{21}}{7} \\ \sin \alpha &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

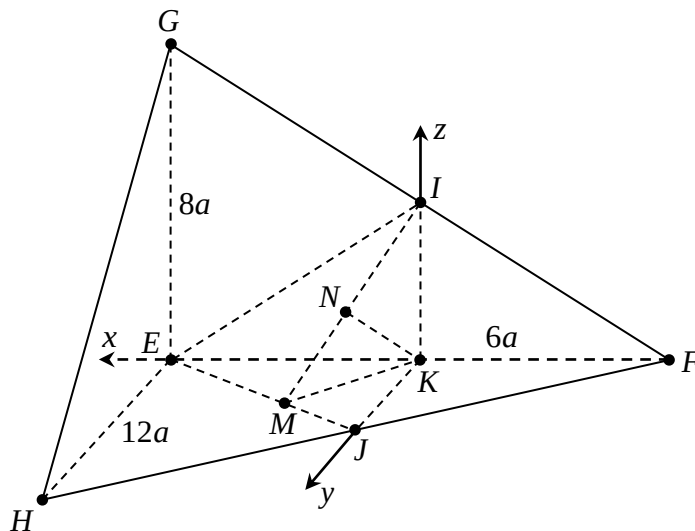
Câu 6

Cho hình tứ diện $EFGH$ có EF vuông góc với EG , EG vuông góc với EH , EH vuông góc với EF ; biết $EF = 6a$, $EG = 8a$, $EH = 12a$, với $a > 0, a \in \mathbb{R}$. Gọi I , J tương ứng là trung điểm của hai cạnh FG , FH . Tính khoảng cách d từ điểm F đến mặt phẳng (EIJ) theo a .

Lời giải

Vì EF vuông góc với EG , EG vuông góc với EH nên $EG \perp (EFH)$. Gọi K là trung điểm của EF suy ra $IK \perp (EFH)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ ta có:

$$K(0;0;0), I(0;0;4a), E(3a;0;0), J(0;6a;0).$$



Phương trình mặt phẳng (EIJ): $\frac{x}{3a} + \frac{y}{6a} + \frac{z}{4a} = 1 \Leftrightarrow 4x + 2y + 3z - 12a = 0.$

$$d = (F, (EIJ)) = 2d(K, (EIJ)) = 2 \frac{12a}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{24a}{\sqrt{29}} = \frac{24\sqrt{29}a}{29}.$$

Câu 7

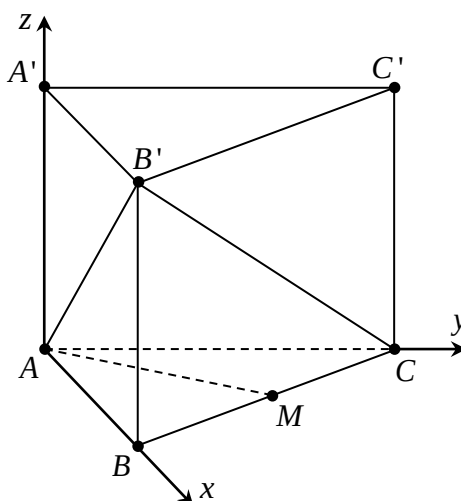
Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$?

Lời giải

Gọi chiều cao của hình lăng trụ là h .

Đặt hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ. Khi đó $A(0;0;0)$, $B(a\sqrt{3};0;0)$, $C(0;a\sqrt{3};0)$, $B'(a\sqrt{3};0;h)$

$$\Rightarrow M\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right) \text{ là trung điểm của } BC.$$



Vì $AM \perp (BCC'B')$ và $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0 \right)$ nên $\vec{n} = (1; 1; 0)$ là VTPT của $(BCC'B')$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}\right] = (ah\sqrt{3}; 0; -3a^2) \Rightarrow \vec{n}_1 = (h; 0; -\sqrt{3}a)$ là VTPT của $(AB'C)$.

Theo giả thiết góc giữa $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60°

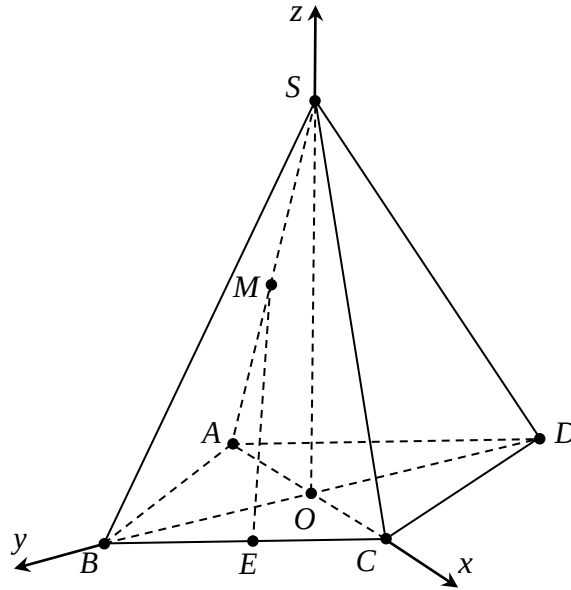
$$\Rightarrow \cos 60^\circ = \left| \cos(\vec{n}, \vec{n}_1) \right| \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|h|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{h^2 + 3a^2}} \Rightarrow h = \sqrt{3}a$$

Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E, M lần lượt là trung điểm các cạnh BC, SA , α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD) . Tính $\tan \alpha$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $Ox \equiv OC$, $Oy \equiv OB$, $Oz \equiv OS$. Chọn $OA = 1$

Ta có $C(1;0;0)$, $A(-1;0;0) \Rightarrow (SBD)$ nhận $\vec{AC} = (2;0;0)$ là một vector pháp tuyến.

Từ $SA = AB = OA\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} S(0;0;1) \\ A(-1;0;0) \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$$

Ta có $\begin{cases} C(1;0;0) \\ B(0;1;0) \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right) \Rightarrow EM$ nhận $\vec{ME} = \left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ là một vectơ chỉ phương.

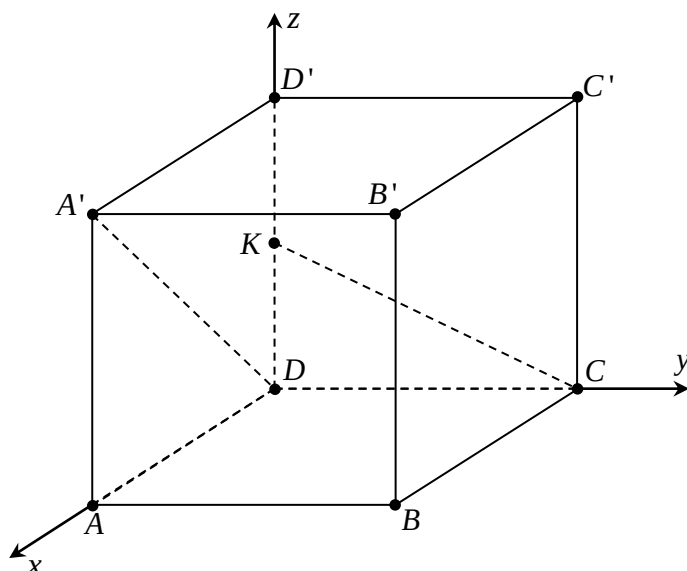
$$\Rightarrow \sin(EM; (SBD)) = \sin \alpha = \frac{|\vec{ME} \cdot \vec{AC}|}{ME \cdot AC} = \frac{2}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{2}$$

Câu 9

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm của DD' . Khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ bằng

Lời giải



Chọn $a = 1$ ta có hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $D(0;0;0)$, $A'(1;0;1)$, $K\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$ và $C(0;1;0)$

Ta có $\overrightarrow{DA'} = (1;0;1)$; $\overrightarrow{CK} = \left(0;-1;\frac{1}{2}\right)$ và $\overrightarrow{DK} = \left(0;0;\frac{1}{2}\right)$

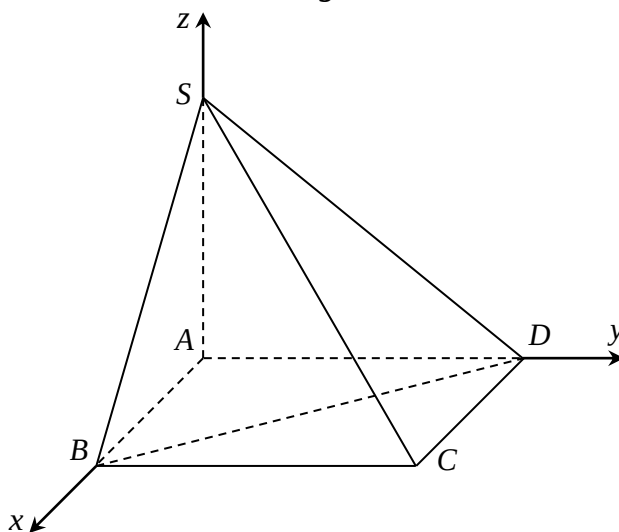
Ta có $[\overrightarrow{DA'}; \overrightarrow{CK}] = \left(1; -\frac{1}{2}; -1\right)$, $[\overrightarrow{DA'}; \overrightarrow{CK}] \cdot \overrightarrow{DK} = -\frac{1}{2}$

$$\text{Do đó } d_{(A'D;CK)} = \frac{\left| -\frac{1}{2} \right|}{\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| -\frac{1}{2} \right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } d_{(A'D;CK)} = \frac{a}{3}.$$

Câu 10

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin \alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) .

Lời giải



Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó, ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;a\sqrt{3};0)$, $S(0;0;a)$.

Ta có $\overrightarrow{BD} = (-a; a\sqrt{3}; 0) = a(-1; \sqrt{3}; 0)$, nên đường thẳng BD có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1; \sqrt{3}; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{SB} = (a; 0; -a)$, $\overrightarrow{BC} = (0; a\sqrt{3}; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BC}] = (a^2\sqrt{3}; 0; a^2\sqrt{3}) = a^2\sqrt{3}(1; 0; 1)$.

Như vậy, mặt phẳng (SBC) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 0; 1)$.

Do đó, α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) thì

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|(-1) \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 0 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

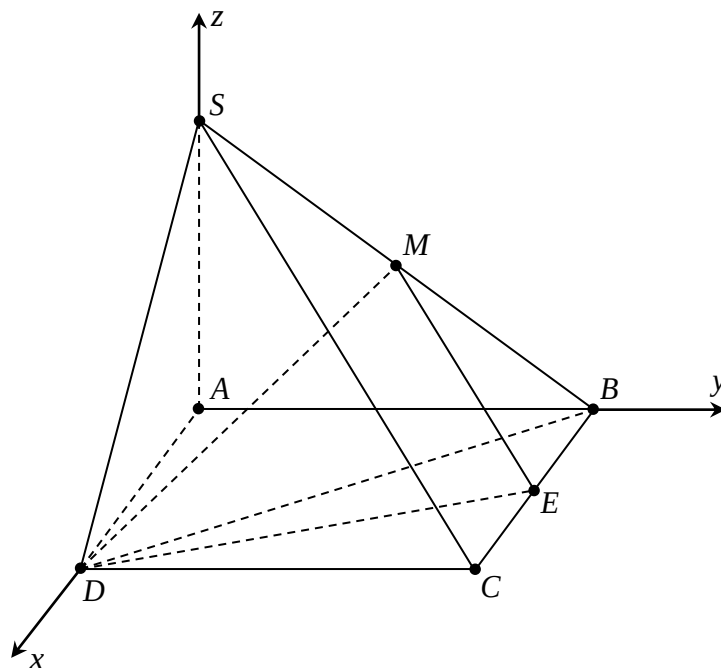
Câu 11

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 45° . Gọi E là trung điểm BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC .

Lời giải

Ta có thể đưa ra các cách giải như sau:

Do SAC là tam giác vuông có góc $SCA = 45^\circ$ nên $SA = AC = a\sqrt{2}$, $SC = 2a$, $SB = SD = a\sqrt{3}$.



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho tia Ox , Oy , Oz lần lượt trùng với các tia AB , AD , AS . Khi đó

toạ độ điểm các điểm là $D(0; a; 0)$, $E\left(a; \frac{a}{2}; 0\right)$, $C(a; a; 0)$, $S(0; 0; a\sqrt{2})$

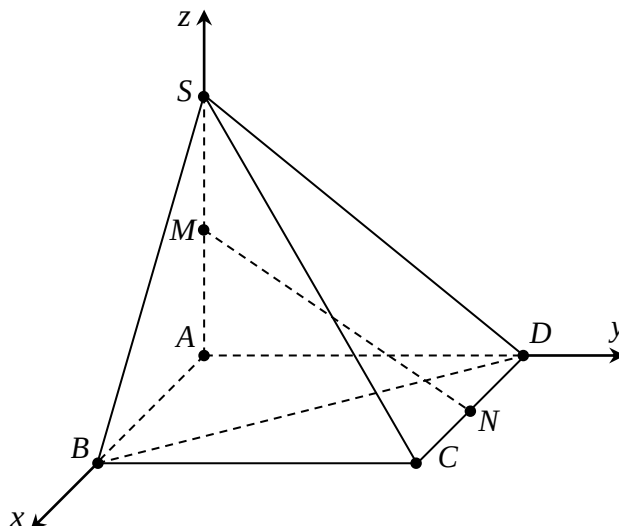
$$\overrightarrow{DE} = \left(a; -\frac{a}{2}; 0\right), \overrightarrow{SC} = (-a; -a; a\sqrt{2}), \overrightarrow{DC} = (a; 0; 0)$$

$$\text{Suy ra } [\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{SC}] = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; -a^2\sqrt{2}; -\frac{3a^2}{2}\right) \Rightarrow d(DE; SC) = \frac{|[\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{SC}] \cdot \overrightarrow{DC}|}{|[\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{SC}]|} = \frac{a\sqrt{38}}{19}$$

Câu 12

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Tính khoảng cách d giữa BD và MN .

Lời giải



Xét tam giác vuông SAC có : $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{500 - 200} = 10\sqrt{3}$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Ta có $A(0;0;0)$, $M(0;0;5\sqrt{3})$, $B(10;0;0)$, $D(0;10;0)$, $C(10;0;0)$, $N(5;10;0)$

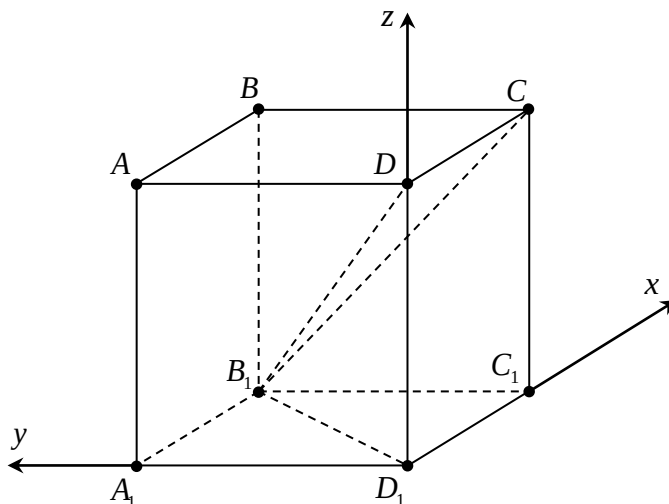
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = (5;10;-5\sqrt{3}) \Rightarrow \vec{u}_1 = (1;2;-\sqrt{3}) \\ \overrightarrow{BD} = (-10;10;0) \Rightarrow \vec{u}_2 = (-1;1;0) \end{cases} \Rightarrow d(MN, BD) = \frac{|\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2 \right] \overrightarrow{ND}|}{\left| \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2 \right] \right|} = \sqrt{5}$$

$$\left[\vec{u}_1; \vec{u}_2 \right] = (\sqrt{3}; \sqrt{3}; 3), \overrightarrow{ND} = (-5;0;0)$$

Câu 13

Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh đáy bằng 1 và chiều cao bằng x . Tìm x để góc tạo bởi đường thẳng B_1D và (B_1D_1C) đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv D_1$, C_1 thuộc tia Ox , A_1 thuộc tia Oy , D thuộc tia Oz (như hình vẽ).

Khi đó $D_1(0; 0; 0)$, $B_1(1; 1; 0)$, $D(0; 0; x)$, $C(1; 0; x)$.

Mặt phẳng (B_1D_1C) nhận vectơ $\vec{n} = [\overrightarrow{D_1B_1}, \overrightarrow{D_1C}] = (x; -x; -1)$ là vectơ pháp tuyến

Đường thẳng B_1D nhận vectơ $\vec{u} = (1; 1; -x)$ là vectơ chỉ phương.

Gọi φ là góc giữa B_1D và (B_1D_1C) , suy ra:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{|x - x + x|}{\sqrt{x^2 + (-x)^2 + 1} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{(2x^2 + 1)(x^2 + 2)}} \quad (\text{Do } x > 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{2}{x}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5}} \leq \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} + 5}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$. Góc φ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin \varphi$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = 1$.

Vậy góc tạo bởi đường thẳng B_1D và (B_1D_1C) đạt giá trị lớn nhất khi $x = 1$.

Câu 14

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm của DD' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

Lời giải

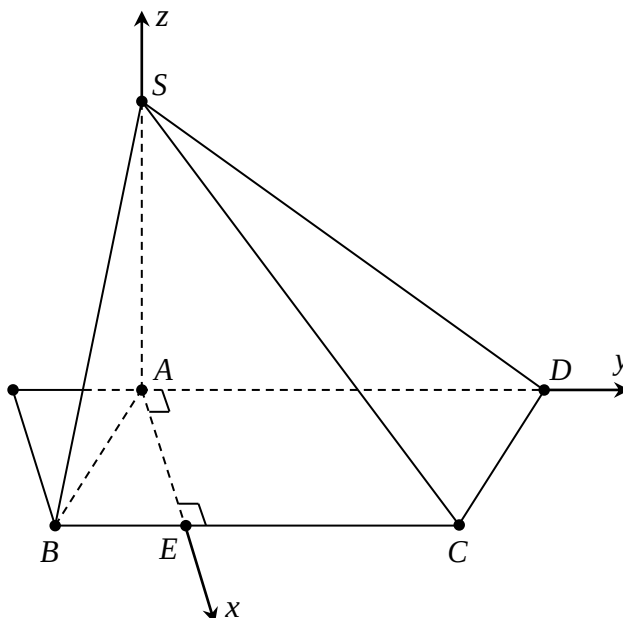
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A'(0; 0; 0)$; $D'(a; 0; 0)$; $A(0; 0; a) \Rightarrow C(a; a; a)$; $K\left(a; 0; \frac{a}{2}\right)$

Khi đó: $\overrightarrow{A'D}(a; 0; a)$ $\overrightarrow{CK}\left(0; -a; -\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{A'C}(a; a; a)$. Ta có $d(CK, A'D) = \frac{|\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{CK}| \cdot |\overrightarrow{A'C}|}{|\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{CK}|} = \frac{a}{3}$.

Câu 15

Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB = 3a$, $AD = 4a$, $BAD = 120^\circ$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD)

Lời giải



Chọn hệ tọa độ Oxyz như sau: $Oz \equiv \overrightarrow{AS}; Oy \equiv \overrightarrow{AD}; Ox \equiv \overrightarrow{AE}$ (E là hình chiếu của A lên cạnh BC)

Khi đó: $A(0;0;0); B\left(\frac{3\sqrt{3}a}{2}; -\frac{3a}{2}; 0\right); C\left(\frac{3\sqrt{3}a}{2}; \frac{5a}{2}; 0\right); D(0; 4a; 0); S(0; 0; 2\sqrt{3}a)$

Do đó: $\overrightarrow{SB}\left(\frac{3\sqrt{3}a}{2}; -\frac{3a}{2}; -2\sqrt{3}a\right); \overrightarrow{SC}\left(\frac{3\sqrt{3}a}{2}; \frac{5a}{2}; -2\sqrt{3}a\right); \overrightarrow{SD}(0; 4a; -2\sqrt{3}a); S(0; 0; 2\sqrt{3}a)$

Ta tính được 1 vectơ pháp tuyến của (SBC) là $\vec{n} = (4; 0; 3)$ và (SCD) là $\vec{n}' = (1; \sqrt{3}; 2)$

Vậy $\cos(\vec{n}; \vec{n}') = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy góc giữa (SBC) và (SCD) là 45° .

Câu 16

Trong không gian Oxyz, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D có A trùng với gốc O, $B(a; 0; 0), D(0; a; 0), A'(0; 0; b), (a > 0, b > 0)$. Gọi M là trung điểm cạnh CC'

a) Tính thể tích khối tứ diện BDA'M

b) Xác định tỷ số $\frac{a}{b}$ để mặt phẳng $(A'BD) \perp (MBD)$

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $C(a; a; 0), C'(a; a; b) \Rightarrow M\left(a; a; \frac{b}{2}\right)$

Nên $\overrightarrow{BD} = (-a; a; 0), \overrightarrow{BM} = \left(0; a; \frac{b}{2}\right), \overrightarrow{BA'} = (-a; 0; b) \Rightarrow [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right)$

Do đó $V_{BDA'M} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] \cdot \overrightarrow{BA'}| = \frac{a^2b}{4}$

Mặt phẳng (BDM) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right)$

Mặt phẳng (A'BD) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] = (ab; ab; a^2)$

Do đó $(BDM) \perp (A'BD) \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} - a^4 = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$

Câu 17

Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua G và một đỉnh của tứ diện cũng đi qua trọng tâm của mặt đối diện với đỉnh đó. Gọi A' là trọng tâm tam giác BCD. Chứng

minh rằng $\frac{GA}{GA'} = 3$

Lời giải

Ta giải bằng phương pháp tọa độ. Trong không gian tọa độ Oxyz.

Giả sử $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2), C(x_3; y_3; z_3), D(x_4; y_4; z_4)$ thì trọng tâm A' của tam giác BCD, trọng

tâm tứ diện G có tọa độ
$$\begin{cases} A'\left(\frac{x_2 + x_3 + x_4}{3}; \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}; \frac{z_2 + z_3 + z_4}{3}\right) \\ G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}; \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}; \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}\right) \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} \overrightarrow{GA} = \left(\frac{3x_1 - x_2 - x_3 - x_4}{4}, \frac{3y_1 - y_2 - y_3 - y_4}{4}, \frac{3z_1 - z_2 - z_3 - z_4}{4} \right) \\ \overrightarrow{GA} = \left(\frac{-3x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{12}, \frac{3y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{12}, \frac{3z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{12} \right) \end{cases}$$

Suy ra: $\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{GA'} \Rightarrow G, A, A'$ thẳng hàng và $\frac{GA}{GA'} = 3$

Tương tự thì có đpcm

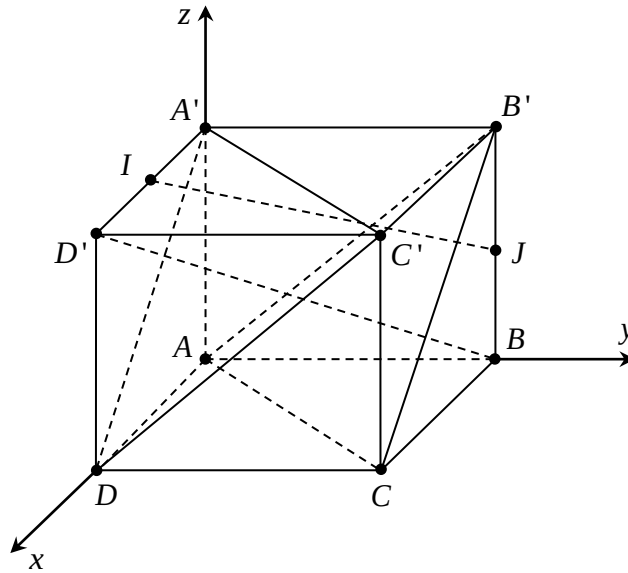
Câu 18

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $B'B$.

a) Chứng minh rằng $IJ \perp AC'$. Tính độ dài đoạn IJ

b) Chứng minh rằng $D'B \perp mp(A'C'D), mp(ACB')$. Tính góc giữa hai đường thẳng $IJ, A'D$

Lời giải



a) Chọn hệ tọa độ Oxyz sao cho $A(0;0;0), D(a;0;0), B(0;a;0), A'(0;0;a)$

Ta có $C'(a;a;a), B'(0;a;0), D'(a;0;a)$ nên $I\left(\frac{a}{2};0;a\right); J\left(0;a;\frac{a}{2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{IJ} = \left(0 - \frac{a}{2}; a - 0; \frac{a}{2} - a\right) = \left(-\frac{a}{2}; a; -\frac{a}{2}\right), \overrightarrow{AC'} = (a - 0; a - 0; a - 0) = (a; a; a)$.

Nên $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AC'} = -\frac{a}{2} \cdot a + a \cdot a - \frac{a}{2} \cdot a = -a^2 + a^2 = 0$

Vậy $IJ \perp AC'$. Đoạn $IJ = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + \left(-\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

b) Để chứng minh $D'B \perp mp(A'C'D)$, ta chứng minh

$$\overrightarrow{D'B} \perp \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{D'B} \perp \overrightarrow{A'D} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'B} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 0, \overrightarrow{D'B} \cdot \overrightarrow{A'D} = 0$$

Ta có $\overrightarrow{D'B} = (-a; a; -a), \overrightarrow{A'C'} = (a; a; 0), \overrightarrow{A'D} = (a; 0; -a)$

Do đó $\overrightarrow{D'B} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 0, \overrightarrow{D'B} \cdot \overrightarrow{A'D} = 0$. Tương tự $\overrightarrow{D'B} \perp mp(ACB')$

$\overrightarrow{A'D} = (a; 0; -a)$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng IJ và $A'D$ thì:

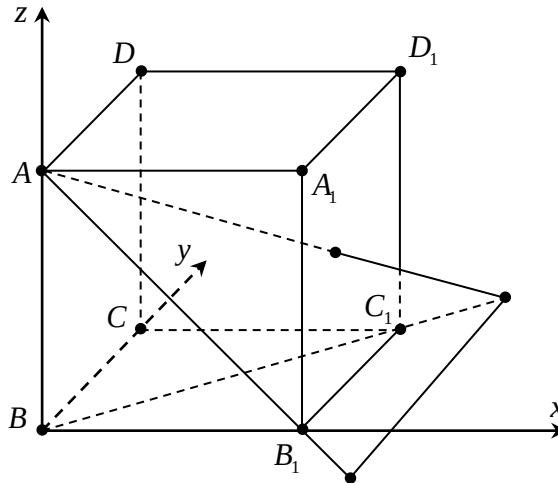
$$\cos \varphi = \left| \cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{A'D}) \right| = \frac{|\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{A'D}|}{|\overrightarrow{IJ}| \cdot |\overrightarrow{A'D}|} = \frac{-\frac{a}{2} \cdot a + a \cdot 0 - \frac{a}{2}(-a)}{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a\sqrt{2}} = 0$$

Vậy $\varphi = 90^\circ$

Câu 19

Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a , trên BC_1 lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{D_1M}, \overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{AB_1}$ đồng phẳng. Tính diện tích S của $\triangle MAB_1$

Lời giải



Chọn hệ $Oxyz$ sao cho

$$B = 0, B_1(a; 0; 0), C_1(a; a; 0), C(0; a; 0), A(0; 0; a), A_1(a; 0; a), D_1(a; a; a), D(0; a; a)$$

Vì $M \in BC_1$ nên gọi $M(x; x; 0)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{D_1M} = (x-a; x-a; -a), \overrightarrow{DA_1} = (-a; a; 0), \overrightarrow{AB_1} = (a; 0; -a)$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{D_1M}, \overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{AB_1} \text{ đồng phẳng nên } [\overrightarrow{D_1M}, \overrightarrow{DA_1}] \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \Rightarrow x = \frac{3a}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3a}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right)$$

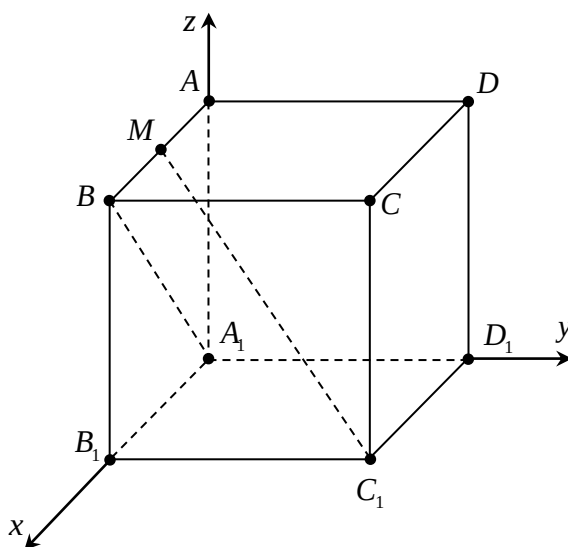
$$\text{Nên } \overrightarrow{MA} = \left(-\frac{3a}{2}; -\frac{3a}{2}; a\right); \overrightarrow{MB_1} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{3a}{2}; 0\right)$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB_1}] \right| = \frac{a^2 \sqrt{19}}{4}$$

Câu 20

Lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có chiều cao bằng nửa cạnh đáy. Điểm M thay đổi trên cạnh AB . Tìm giá trị lớn nhất của góc A_1MC_1

Lời giải



Chọn hệ trục như hình vẽ (A_1xyz)

Đặt $AM = x, 0 \leq x \leq 2$

Ta có: $M(x; 0; a), A_1(0; 0; 0), C_1(2; 2; 2)$

Nên $\overrightarrow{MA_1} = (-x; 0; -1), \overrightarrow{MC_1} = (2-x; 2; -1)$

$$\text{Đặt } \alpha = \angle A_1MC_1 \text{ thì } \cos \alpha = \cos(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC_1}) = \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{(2-x)^2 + 5}} = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{(2-x)^2 + 5}} \geq 0$$

Do đó $\alpha \leq 90^\circ$. Vậy góc $\alpha = \angle A_1MC_1$ lớn nhất khi $x = 1$ tức M trung điểm AB

Câu 20

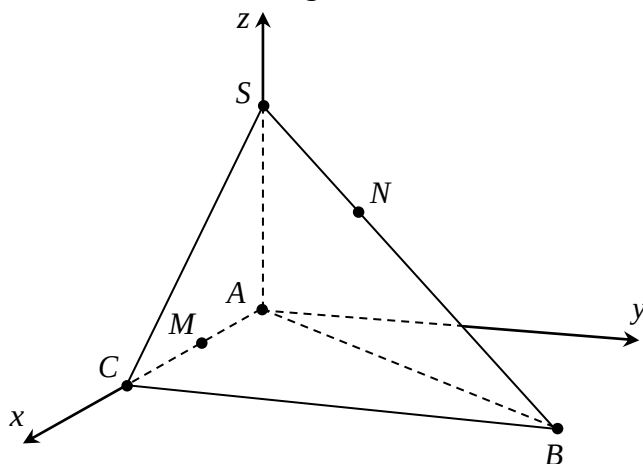
Cho hình chóp S.ABC có đường cao $SA = h$, đáy là tam giác ABC vuông tại C. $AC = b, BC = a$.

Gọi M là trung điểm của AC và N là điểm sao cho $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN

b) Tìm sự liên hệ giữa a, b, h để MN vuông góc với SB

Lời giải



Ta chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, tia Ox trùng với tia AC, tia Oz trùng với tia AS sao cho điểm B nằm trong góc xOy.

Khi đó $A(0; 0; 0), C(b; 0; 0), B(b; a; 0), S(0; 0; h), M\left(\frac{b}{2}; 0; 0\right), \overrightarrow{SB} = (b; a; -h)$

Gọi $N(x; y; z)$ thì $\overrightarrow{SN} = (x; y; z - h)$

Từ điều kiện $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$ nên $x = \frac{b}{3}; y = \frac{a}{3}; z - h = \frac{-h}{3} \Rightarrow z = \frac{2h}{3} \Rightarrow N\left(\frac{b}{3}; \frac{a}{3}; \frac{2h}{3}\right)$

a) Ta có $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{b}{3} - \frac{b}{2}; \frac{a}{3}; \frac{2h}{3}\right) = \left(-\frac{b}{6}; \frac{a}{3}; \frac{2h}{3}\right)$

Nên $MN = \sqrt{\frac{b^2}{36} + \frac{a^2}{9} + \frac{4h^2}{9}} = \frac{1}{6}\sqrt{b^2 + 4a^2 + 16h^2}$

b) MN vuông góc với SB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 \Leftrightarrow \frac{-b^2}{6} + \frac{a^2}{3} + \frac{-2h^2}{3} = 0 \Leftrightarrow 4h^2 = 2a^2 - b^2$

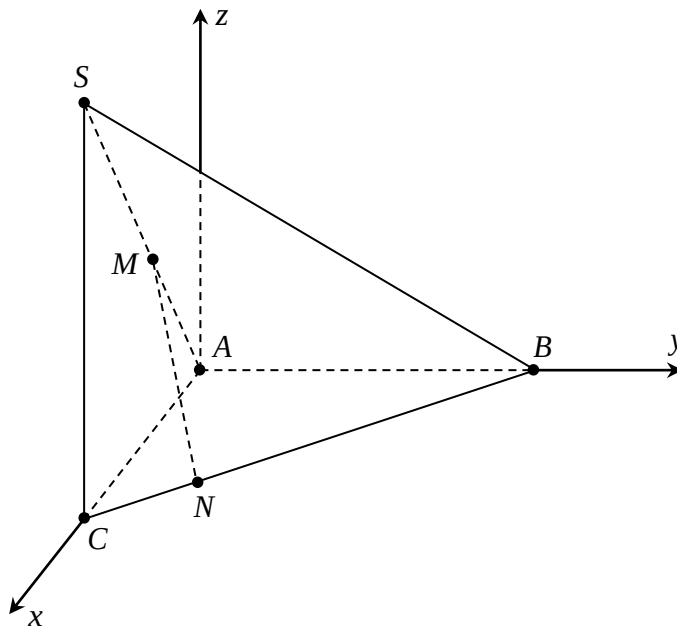
Câu 22

Cho tứ diện S.ABC có $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$, $SC \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A. Các điểm $M \in SA, N \in BC$ sao cho $AM = CN = t$ ($0 < t < 2a$)

a) Tính độ dài đoạn MN. Tìm giá trị t để MN ngắn nhất

b) Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của BC và SA

Lời giải



Ta chọn hệ trục Oxyz sao cho gốc tọa độ $O \equiv A$. Trục Ox chứa AC, trục Oy chứa AB và trục $Oz \perp (ABC)$. Khi đó cạnh SC song song với trục Oz và ta có:

$$A(0; 0; 0), B(0; a\sqrt{2}; 0), C(a\sqrt{2}; 0; 0), S(a\sqrt{2}; 0; a\sqrt{2})$$

Ta có $M\left(\frac{t\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{t\sqrt{2}}{2}\right); N\left(a\sqrt{2} - \frac{t\sqrt{2}}{2}; \frac{t\sqrt{2}}{2}; 0\right)$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{2(a^2 - 2at + t^2) + \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}} = \sqrt{3t^2 - 4at + 2a^2} = \sqrt{3\left(t - \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{2a^2}{3}} \geq \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy MN ngắn nhất bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ khi $t = \frac{2a}{3}$

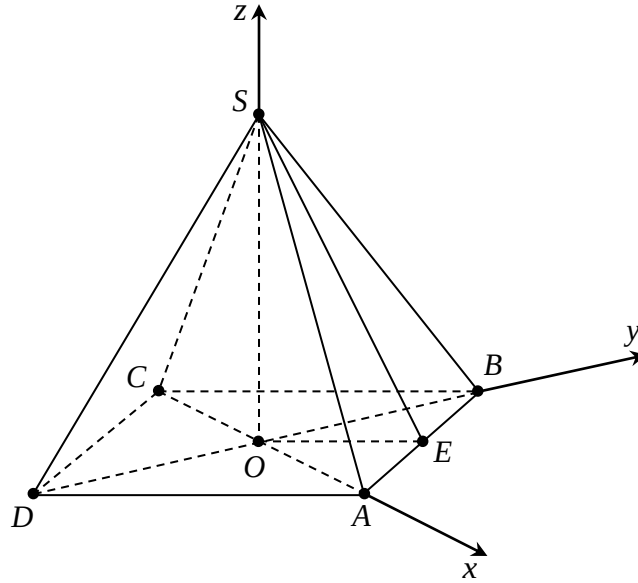
b) Khi MN ngắn nhất thì: $M\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}; 0; \frac{a\sqrt{2}}{3}\right), N\left(\frac{2a\sqrt{2}}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; -\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{SA} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$ - điều phải chứng minh!

Câu 22

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy a, mặt bên tạo với đáy góc α . Tìm $\tan \alpha$ để SA vuông góc SC

Lời giải



Chọn hệ trục Oxyz có O là tâm đáy ABCD, tia Ox chứa A, tia Oy chứa B, tia Oz chứa S. Ta có:

$$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), D\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), S\left(0; 0; \frac{a}{2} \tan \alpha\right)$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{SA} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{a}{2} \tan \alpha\right), \overrightarrow{SB} = \left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; -\frac{a}{2} \tan \alpha\right)$$

$$\overrightarrow{SC} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{a}{2} \tan \alpha\right), \overrightarrow{SD} = \left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; -\frac{a}{2} \tan \alpha\right)$$

Ta có $SA \perp SC$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} \tan^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \tan^2 \alpha - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = 2 \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{2}$$

Câu 23

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm chia đoạn thẳng AB, D'D và B'C' theo cùng tỉ số $k \neq 0, 1$. Chứng minh rằng $mp(MNP)$ luôn luôn song song với $mp(AB'D')$

Lời giải

Đặt $A'B' = a, A'D' = b, AA' = c$. Ta dùng phương pháp tọa độ bằng cách chọn hệ trục tọa độ với gốc là $A'(0; 0; 0)$ sao cho $B'(a; 0; 0), D'(0; b; 0), A(0; 0; c)$

Ta có $C'(a; b; 0), B(a; 0; c), D(0; b; c), C(a; b; c)$. Các điểm M, N, P chia các đoạn thẳng AB, D'D, B'C' theo cùng tỉ số k nên

$$M\left(-\frac{ka}{1-k}; 0; c\right), N\left(0; b; \frac{-kc}{1-k}\right), P\left(a; \frac{-kb}{1-k}; 0\right)$$

Do đó $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{ka}{1-k}; b; -\frac{1}{c-k}c \right), \overrightarrow{NP} = \left(a; \frac{-1}{a-k}b; \frac{kc}{1-k} \right)$

Ta có $[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}] = \left(\frac{-k^2+k-1}{(1-k)^2}bc; \frac{k^2+k-1}{(1-k)^2}ca; \frac{-k^2+k-1}{(1-k)^2}ab \right)$

Nên $mp(MNP)$ có vecto pháp tuyến là $\vec{n} = (bc; ca; ab)$

Mặt phẳng $(AB'D')$ có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ có vecto pháp tuyến là $\vec{n} = \left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c} \right)$

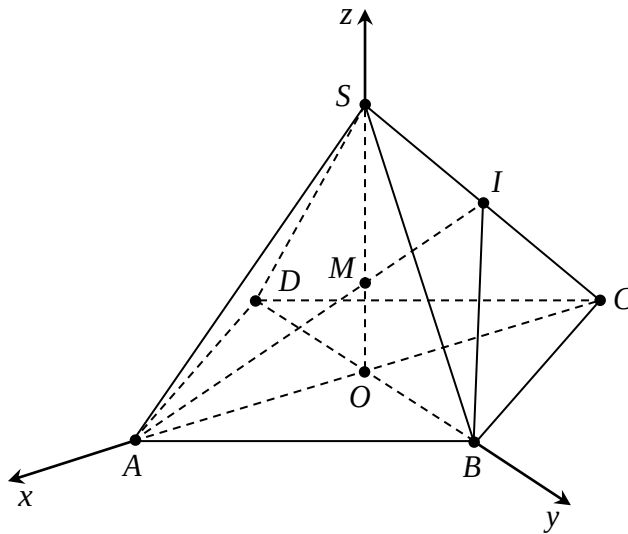
Vì $\frac{bc}{\frac{1}{a}} = \frac{ca}{\frac{1}{b}} = \frac{ab}{\frac{1}{c}} = abc$ và $M, N, P \in (AB'D')$ do $k \neq$ nên: $mp(MNP) \parallel mp(AB'D')$

Câu 24

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h . Gọi I là trung điểm cạnh bên SC . Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (AIB)

Lời giải

Ta chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho gốc tọa độ là tâm O của đáy, trục Ox chứa OA , trục Oy chứa OB , trục Oz chứa SO . Khi đó $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), S(0; 0; h)$



Ta có giao điểm M của SO và AI là trọng tâm tam giác SAC nên $M\left(0; 0; \frac{h}{3}\right)$. Mặt phẳng đi qua A ,

B , MI cũng chính là mặt phẳng (ABM) nên có phương trình là: $\frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \frac{y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \frac{z}{\frac{h}{2}} = 1$

Do đó khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABM) là: $d = \frac{2}{\sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{9}{h^2}}} = \frac{2ah}{\sqrt{4h^2 + 9a^2}}$

Câu 25

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$, SA vuông góc $(ABCD)$. Gọi M, N là trung điểm AD, SC , gọi I là giao điểm BM và AC . Chứng minh $(SAC) \perp (SBM)$ và tính thể tích khối $ANIB$.

$$\text{Thi } D(0; a\sqrt{2}; 0), M\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), N\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}\right)$$

Mặt phẳng (SMB) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = [\vec{BM}, \vec{BA}] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; a^2; \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \right)$

Vì $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ nên 2 mặt phẳng (SAC), (SMB) vuông góc

Câu 25

Cho tứ diện đều (T) có các đỉnh có tọa độ $(x_i; y_i; z_i)$ với $1 \leq i \leq 4$, nội tiếp trong một mặt cầu đơn vị. Chứng minh: $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = \sum_{i=1}^4 y_i^2 = \sum_{i=1}^4 z_i^2 = \frac{4}{3}$ và $\sum_{i=1}^4 x_i y_i = \sum_{i=1}^4 y_i z_i = \sum_{i=1}^4 z_i x_i = 0$

Lời giải

$$A_0(0;0;1), B_0\left(\frac{2\sqrt{2}}{3};0;-\frac{1}{3}\right), C_0\left(-\frac{\sqrt{2}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3};-\frac{1}{3}\right), D_0\left(-\frac{\sqrt{2}}{3};-\frac{\sqrt{6}}{3};-\frac{1}{3}\right)$$

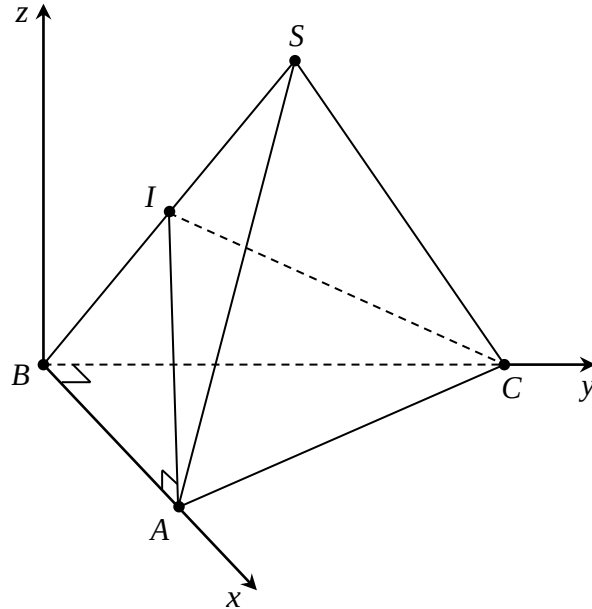
Trang | 371

quay nó quanh trục Ox cho đến khi đỉnh này trùng với điểm $A_0(0;0;1)$. Sau đó, lại quay quanh trục Oz cho đến khi (T) trùng với tứ diện $A_0B_0C_0D_0$ đã nói ở trên có điều phải chứng minh!

Câu 26

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$; $BC = 2a$. SA vuông góc với AB , SC vuông góc với BC và góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

$B(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $C(0;2a;0)$, $S(x;y;z)$, với $x, y, z \geq 0$. $(ABC) \equiv (Oxy): z = 0$

Ta có $\overrightarrow{SA} = (a-x; -y; -z)$, $\overrightarrow{AB} = (-a; 0; 0)$.

$$\overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow -a(a-x) = 0 \Leftrightarrow x = a.$$

Ta có $\overrightarrow{SC} = (-x; 2a-y; -z)$, $\overrightarrow{BC} = (0; 2a; 0)$

$$\overrightarrow{SC} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 2a(2a-y) = 0 \Leftrightarrow y = 2a.$$

Suy ra $S(a; 2a; z)$.

Đường thẳng SC có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{CS} = (a; 0; z)$.

Mặt phẳng (ABC) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Theo đề bài, góc giữa SC và mp (ABC) là 60° nên

$$\sin 60 = \frac{|\overrightarrow{SC} \cdot \vec{k}|}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\vec{k}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|z|}{\sqrt{a^2 + z^2}} \Leftrightarrow z^2 = 3a^2 \Rightarrow z = \sqrt{3}a \Rightarrow S(a; 2a; \sqrt{3}a)$$

Gọi I là trung điểm SB . Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

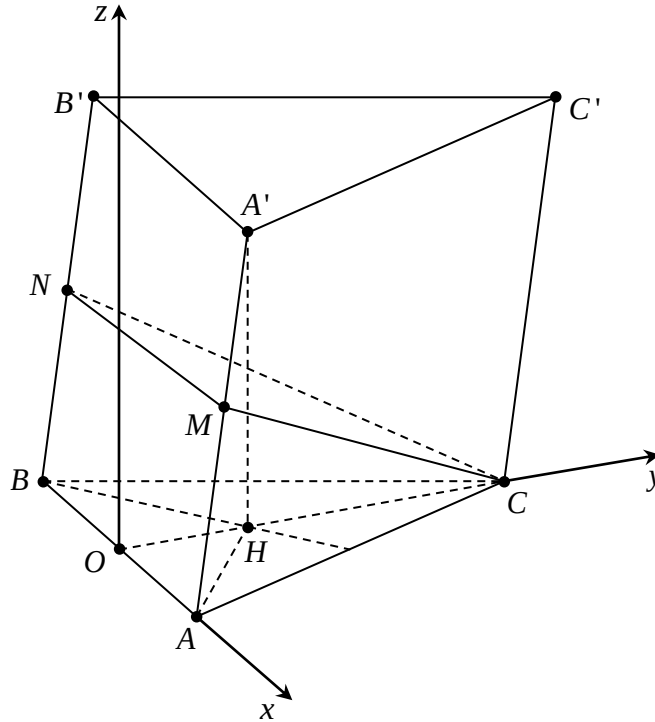
$$\text{Ta có } R = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4a^2 + 3a^2} = \sqrt{2}a.$$

$$\text{Vậy thể tích khối cầu là } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}.$$

Câu 27

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB' . Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN) .

Lời giải



Gọi O là trung điểm của AB . Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $O(0;0;0)$,

$$A\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right), C\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), H\left(0; \frac{\sqrt{3}}{6}; 0\right), A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow A'\left(0; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow B'\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. Dễ thấy (ABC) có vtpt $\vec{n}_1 = (0; 0; 1)$.

Ta có M là trung điểm $AA' \Rightarrow M\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, N là trung điểm $BB' \Rightarrow N\left(-\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

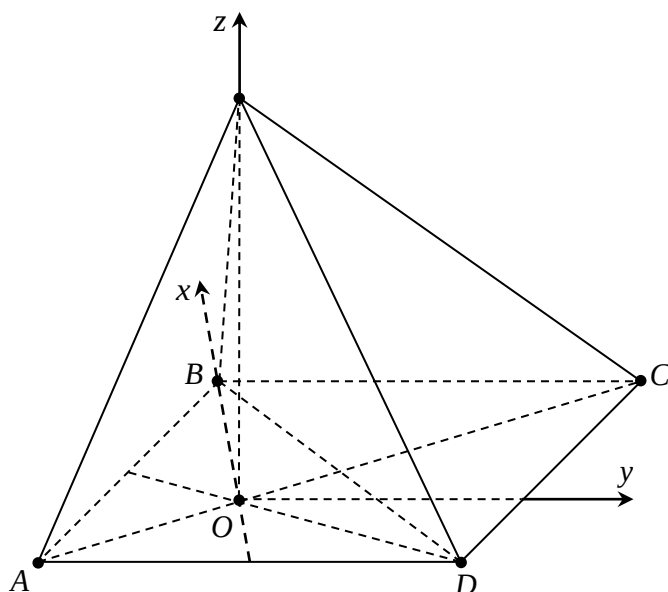
$$\overrightarrow{MN} = (-1; 0; 0), \overrightarrow{CM} = \left(\frac{1}{4}; -\frac{5\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \Rightarrow (CMN) \text{ có vtpt } \vec{n}_2 = \left(0; \frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{5\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}(0; 2\sqrt{2}; 5)$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{33}} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Câu 28

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh a , góc $BAD = 60^\circ$, $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) . Tính $\sin \alpha$

Lời giải



Tam giác ABD đều do $AB = AD$ và $BAD = 60^\circ$.

Do $SA = SB = SD$ nên S nằm trên trục của $\triangle ABD$

Gọi O là tâm của tam giác đều ABD , khi đó $SO \perp (ABD)$.

$$\text{Ta có } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

$$\text{Gắn hệ tọa độ sao cho } O(0;0;0), B\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right), S\left(0;0; \frac{\sqrt{15}}{6}\right).$$

$$\text{Suy ra } D\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{6}; 0\right), C\left(1; \frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right).$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{BC} = (1;0;0), \overrightarrow{BS} = \left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{15}}{6}\right).$$

$$\text{Vector pháp tuyến của } (SBC): \vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BS}] = \left(0; -\frac{\sqrt{15}}{6}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

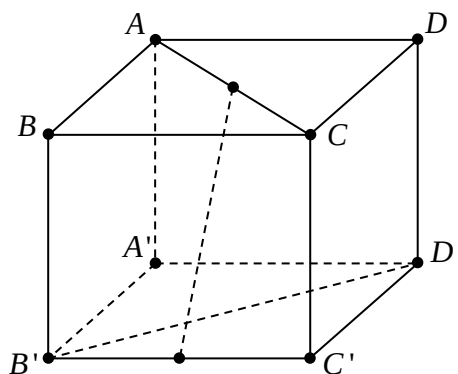
$$\text{Chọn vector pháp tuyến } \vec{n}_2 = (0; -\sqrt{15}; 2\sqrt{3}), \overrightarrow{SD} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{\sqrt{15}}{6}\right) = \frac{1}{6}(3; -\sqrt{3}; -\sqrt{15}).$$

$$\Rightarrow \sin(SD, (SBC)) = \frac{|-3\sqrt{5} - 6\sqrt{5}|}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{27}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 29

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$ bằng bao nhiêu ?

Lời giải



Đưa hình lập phương vào hệ trục tọa độ Oxyz sao cho

$$B'(0;0;0), C'(a;0;0), A'(0;a;0), D'(a;a;0), B(0;0;a), A(0;a;a), C(a;0;a).$$

Ta có

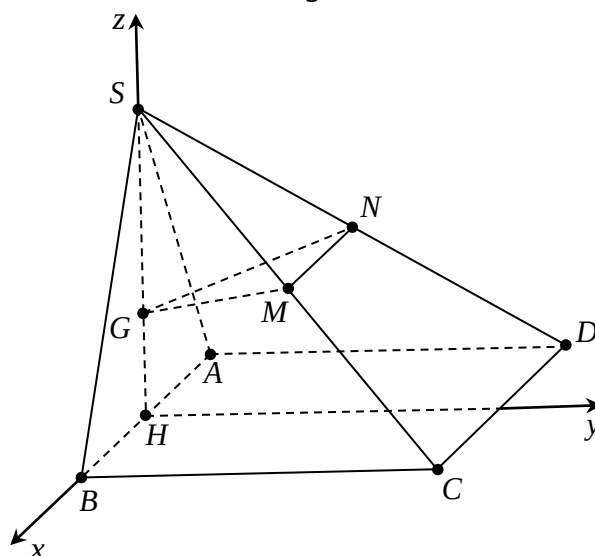
- $M\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; a\right), N\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(0; \frac{-a}{2}; -a\right) = \frac{-a}{2}(0; 1; 2) \Rightarrow \vec{u}_1(0; 1; 2)$ là VTCP của MN .
- $\overrightarrow{B'D'}(a; a; 0) = a(1; 1; 0) \Rightarrow \vec{u}_2$ là VTCP của $B'D'$.

$$\Rightarrow d(MN; B'D') = \frac{\left| \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{bmatrix} \overrightarrow{B'N} \right|}{\left| \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{bmatrix} \right|} = \frac{a}{3}.$$

Câu 30

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.

Lời giải



Gắn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, xem a là 1 đơn vị.

$$\text{Ta có: } S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right); G\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{6}\right); C\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right); D\left(-\frac{1}{2}; 1; 0\right) \Rightarrow M\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right); N\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

$$\text{Và } \overrightarrow{GM} = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{12}\right); \overrightarrow{NM} = \left(\frac{1}{2}; 0; 0\right) \Rightarrow [\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{NM}] = \left(0; \frac{\sqrt{3}}{24}; -\frac{1}{4}\right).$$

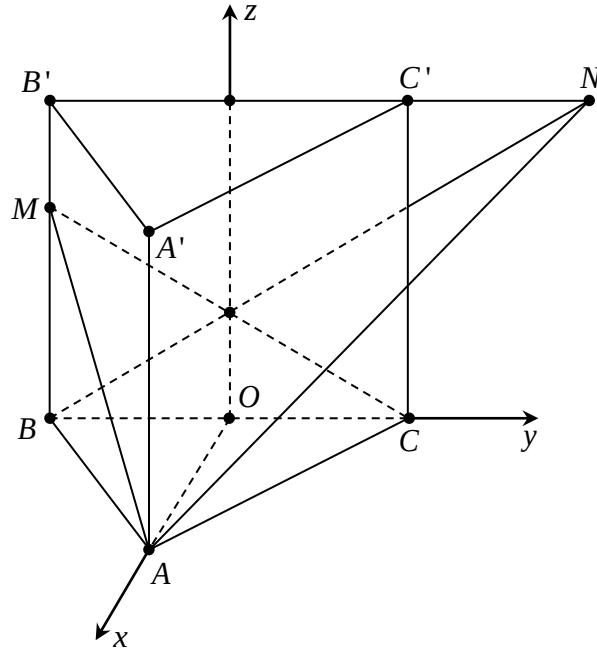
Khi đó: $\vec{n}_{(GMN)} = (0; \sqrt{3}; -6)$ và $\vec{n}_{(ABCD)} = \vec{k} = (0; 0; 1)$.

$$\text{Ta có: } \cos((GMN), (ABCD)) = \frac{|\vec{n}_{(GMN)} \cdot \vec{n}_{(ABCD)}|}{|\vec{n}_{(GMN)}| \cdot |\vec{n}_{(ABCD)}|} = \frac{|-6|}{\sqrt{39} \cdot 1} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

Câu 31

Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . M, N là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB'} = \vec{0}$; $\overrightarrow{NB'} = 3\overrightarrow{NC'}$. Biết rằng hai mặt phẳng (MCA) và (NAB) vuông góc với nhau. Tính thể tích hình lăng trụ.

Lời giải



Gọi O là trung điểm của BC và $BB' = m$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ đơn vị a

$$\text{Ta có: } A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right); B\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right); C\left(0; \frac{1}{2}; 0\right); M\left(0; -\frac{1}{2}; \frac{2m}{3}\right); N(0; 1; m)$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{CA} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{2}; 0\right); \overrightarrow{MA} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{2m}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{MA} = \left(\frac{m}{3}; \frac{\sqrt{3}m}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ là VTPT của } (MCA)$$

$$\text{Và } \overrightarrow{BA} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right); \overrightarrow{NA} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -1; -m\right) \Rightarrow \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{NA} = \left(\frac{-m}{2}; \frac{\sqrt{3}m}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \text{ là VTPT của } (NAB)$$

$$\text{Theo bài ra: } (MCA) \perp (NAB) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(MCA)}} \cdot \overrightarrow{n_{(NAB)}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{m^2}{6} + \frac{m^2}{2} - \frac{9}{8} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{Vậy } BB' = \frac{3\sqrt{6}}{4}a \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{3\sqrt{6}}{4}a = \frac{9\sqrt{2}}{16}a^3$$

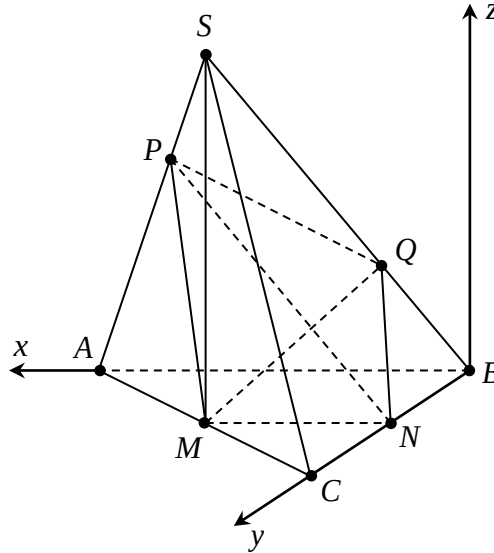
Câu 32

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 3$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên hai cạnh SA, SB lấy các điểm P, Q tương ứng sao cho $SP = 1, SQ = 2$. Tính thể tích V của tứ diện $MNPQ$.

Lời giải

Ta có $AB = BC = 2; SM = \sqrt{7}$.

Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ.



Ta có $B(0;0;0), A(2;0;0), C(0;2;0), N(0;1;0), M(1;1;0), S(1;1;\sqrt{7})$

$$\overrightarrow{SP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} \Rightarrow P\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2\sqrt{7}}{3}\right); \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$

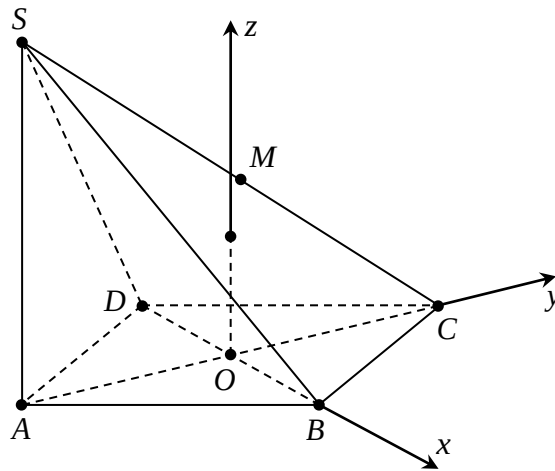
$$\text{Ta có } \overrightarrow{NM} = (1;0;0), \overrightarrow{NQ} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{7}}{3}\right), \overrightarrow{NP} = \left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{7}}{3}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{NM}; \overrightarrow{NQ}] = \left(0; -\frac{\sqrt{7}}{3}; -\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Suy ra } V_{MNPQ} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{NM}; \overrightarrow{NQ}] \cdot \overrightarrow{NP}| = \frac{1}{6} \cdot \left| \frac{\sqrt{7}}{9} - \frac{4\sqrt{7}}{9} \right| = \frac{\sqrt{7}}{18}$$

Câu 33

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với đáy. Tính độ dài cạnh SA để góc tạo bởi (SBC) và (SCD) bằng 60° .

Lời giải



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, M là trung điểm của SC, đặt $SA = 2m$ ($m > 0$)

Khi đó $B\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; 0; 0\right)$, $D\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}; 0; 0\right)$, $C\left(0; \frac{a}{\sqrt{2}}; 0\right)$, $M\left(0; 0; m\right)$

Ta có $(SBC): \frac{x}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{z}{m} = 1 \Rightarrow \vec{n}_{SBC} = \left(1; 1; \frac{a}{m\sqrt{2}}\right)$

Phương trình mặt phẳng $(SDC): \frac{x}{-\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{z}{m} = 1 \Rightarrow \vec{n}_{SDC} = \left(-1; 1; \frac{a}{m\sqrt{2}}\right)$

Yêu cầu bài toán tương đương với $((SBC), (SDC)) = 60^\circ \Leftrightarrow \left| \cos(\vec{n}_{SBC}, \vec{n}_{SDC}) \right| = \frac{1}{2}$

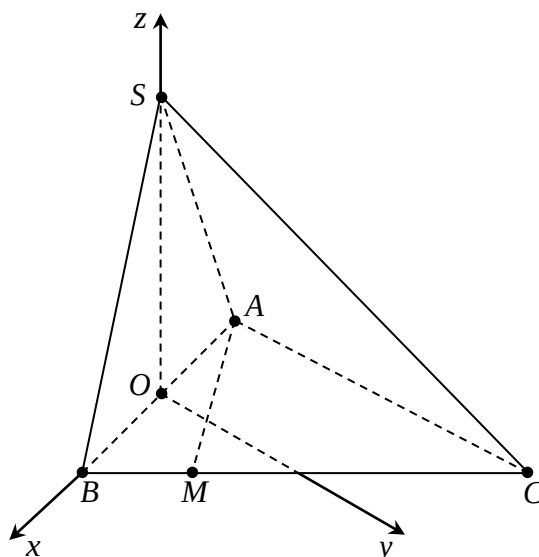
$$\Leftrightarrow \frac{\left| \left(\frac{a}{m\sqrt{2}} \right)^2 \right|}{1 + 1 + \left(\frac{a}{m\sqrt{2}} \right)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{m\sqrt{2}} \right)^2 = 2 \Leftrightarrow 2m = a.$$

Câu 34

Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 2a$, $AC = 2a\sqrt{3}$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Gọi M là điểm trên đoạn $BC: BM = \frac{1}{4}BC$. Cosin góc tạo bởi $(SAC) \& (SAM)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ; không mất tính tổng quát, giả sử $a = 1$.



Khi đó $S(0;0;\sqrt{3}), A(-1;0;0), B(1;0;0), C(-1;2\sqrt{3};0), M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{SA}(-1;0;-\sqrt{3}); \overrightarrow{SM}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-\sqrt{3}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] = \left(\frac{3}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

Chọn VTPT của (SAM) là $\vec{n}_1(\sqrt{3}; -3; -1)$.

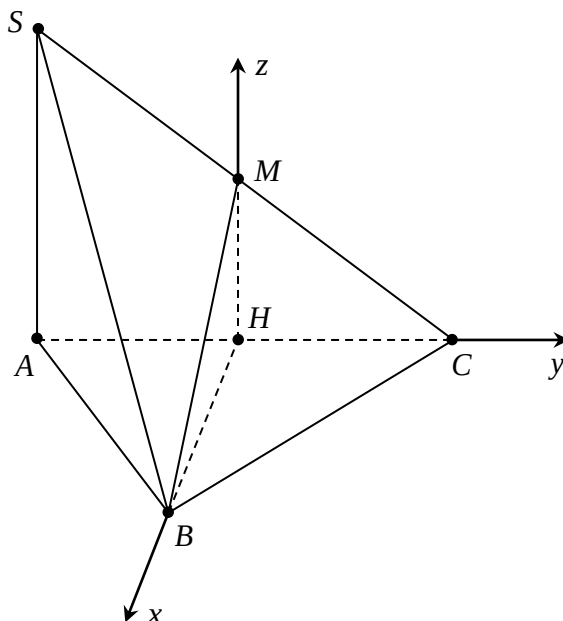
Ta có $\overrightarrow{SC}(-1;2\sqrt{3};-\sqrt{3}) \Rightarrow [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}] = (6;0;-2\sqrt{3})$, chọn VTPT của (SAC) là $\vec{n}_2(\sqrt{3};0;-1)$.

Vậy cosin góc φ giữa hai mp là $\cos \varphi = \frac{|3+0+1|}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Câu 35

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SC . Tính cosin của góc φ giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AC khi đó $MH \parallel SA \Rightarrow MH \perp (ABC)$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó $H(0;0;0), M(0;0;a), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; a\right), \overrightarrow{HM} = (0;0;a)$$

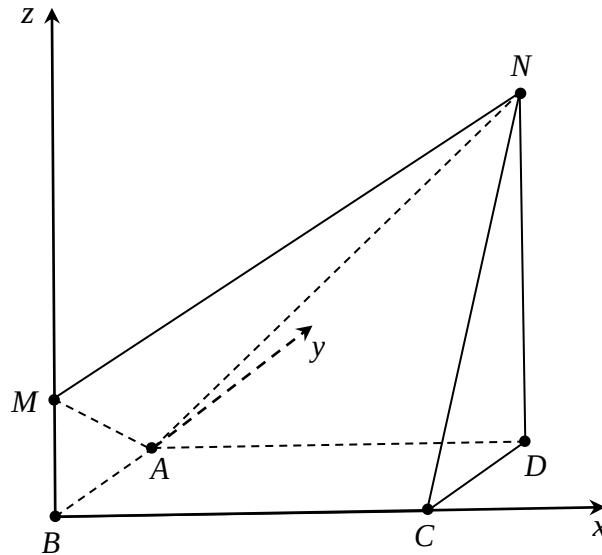
Giả sử góc giữa BM và mặt phẳng (ABC) là φ thì ta có: $\sin \varphi = \frac{|\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{HM}|}{|\overrightarrow{BM}| \cdot |\overrightarrow{HM}|} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 36

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên hai tia Bx, Dy vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và cùng chiều lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $BM = \frac{a}{4}; DN = 2a$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (AMN) và (CMN) .

Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Ta có: $B(0;0;0), A(a;0;0), C(a;a;0), M\left(0;0;\frac{a}{4}\right), N(a;a;2a)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \left(0; -a; \frac{a}{4}\right), \overrightarrow{AN} = (0;0;2a)$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = \left(-2a^2; \frac{a^2}{4}; a^2\right) \text{ là vectơ pháp tuyến của mp}(AMN).$$

$$\overrightarrow{CM} = \left(-a; 0; \frac{a}{4}\right), \overrightarrow{CN} = (0; a; 2a)$$

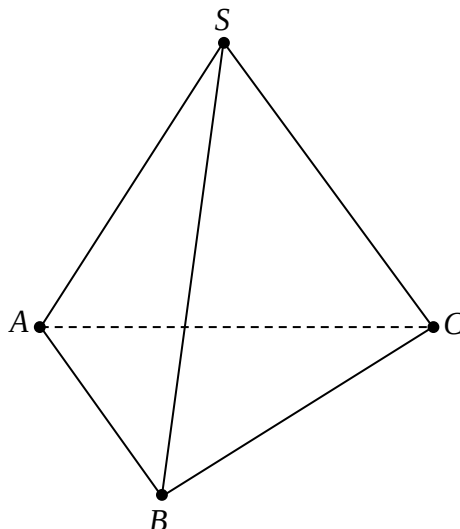
$$\Rightarrow [\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}] = \left(\frac{-a^2}{4}; 2a^2; -a^2\right) \text{ là vectơ pháp tuyến của mp}(CMN).$$

$$\text{Do đó } \cos \varphi = \frac{\left|\frac{a^4}{2} + \frac{a^4}{2} - a^4\right|}{\sqrt{4a^4 + \frac{a^4}{16} + a^4} \cdot \sqrt{4a^4 + \frac{a^4}{16} + a^4}} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ.$$

Câu 37

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = 2a$, tam giác SAB và tam giác SCB lần lượt vuông tại A, C . Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng $2a$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) bằng bao nhiêu?

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ sao cho $B(0;0;0)$, $A(a\sqrt{2};0;0)$, $C(0;a\sqrt{2};0)$, $S(x;y;z)$.

Ta có $(ABC): z = 0$, $\overrightarrow{AS} = (x - a\sqrt{2}; y; z)$, $\overrightarrow{CS} = (x; y - a\sqrt{2}; z)$

Do $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow (x - a\sqrt{2})a\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = a\sqrt{2}$, $d(S, (ABC)) = 2a \Rightarrow z = 2a$ ($z > 0$)

$\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow (y - a\sqrt{2})a\sqrt{2} = 0 \Rightarrow y = a\sqrt{2} \Rightarrow S(a\sqrt{2}; a\sqrt{2}; 2a)$

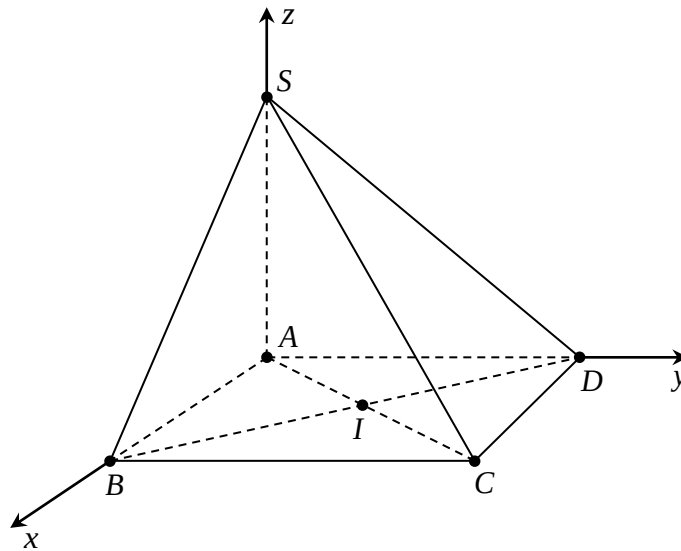
Ta có $\overrightarrow{AS} = (0; a\sqrt{2}; 2a)$, $\overrightarrow{CS} = (a\sqrt{2}; 0; 2a)$, $\overrightarrow{BS} = (a\sqrt{2}; a\sqrt{2}; 2a)$.

(SBC) có 1 vtpt $\vec{n} = (-\sqrt{2}; 0; 1)$, (SAB) có 1 vtpt $\vec{m} = (0; \sqrt{2}; -1) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$.

Câu 38

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi $I = AC \cap BD$.

Hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ suy ra hình vuông đó có cạnh bằng a .

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SI \perp BD \\ AI \perp BD \end{cases} \Rightarrow ((SBD); (ABCD)) = (SI; AI) = SIA.$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \tan SIA = \frac{SA}{AI} \Leftrightarrow SA = a.$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $S(0;0;a)$.

Khi đó $\overrightarrow{SA} = (0;0;-a)$; $\overrightarrow{SC} = (a;a;-a)$; $\overrightarrow{SB} = (a;0;-a)$.

Mặt phẳng (SAC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (-1;1;0)$.

Mặt phẳng (SBC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (1;0;1)$.

$$\text{Suy ra } \cos((SAC); (SBC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow ((SAC); (SBC)) = 60^\circ.$$

Câu 39

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đường thẳng OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó $\sin$ của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng bao nhiêu?

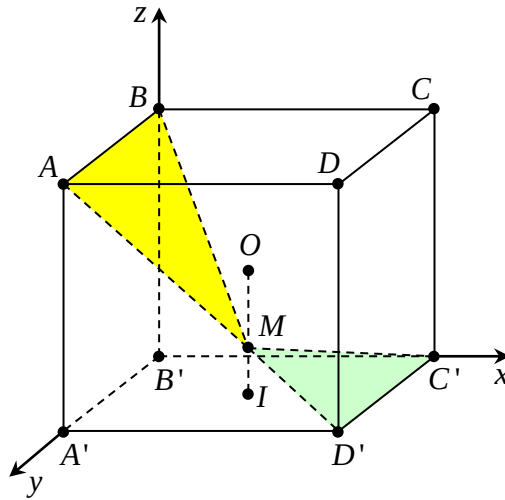
Lời giải

Không giảm tính tổng quát, ta giả sử cạnh hình lập phương bằng 6.

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ, sao cho gốc tọa độ trùng với điểm B' .

Khi đó, $C'(6;0;0)$, $D'(6;6;0)$, $M(3;3;1)$, $A(0;6;6)$, $B(0;0;6)$.

$$\overrightarrow{MC'}(3;-3;-1), \overrightarrow{MD'}(3;3;-1)$$



Suy ra vectơ pháp tuyến của $(MC'D')$ là $\vec{n}_1 = [\vec{MC'}, \vec{MD'}] = (6; 0; 18) = 6(1; 0; 3)$.

$$\vec{MA}(-3; 3; 5), \vec{MB}(-3; -3; 5)$$

Suy ra vectơ pháp tuyến của (MAB) là $\vec{n}_2 = [\vec{MA}, \vec{MB}] = (30; 0; 18) = 6(5; 0; 3)$.

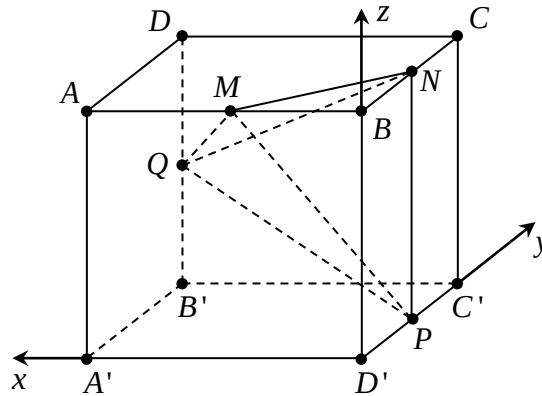
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) , ta có

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{14}{\sqrt{340}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{6\sqrt{85}}{85}.$$

Câu 40

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD' . Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho:
$$\begin{cases} D' \equiv O \\ Ox \equiv D'A' \\ Oy \equiv D'C' \\ Oz \equiv D'D \end{cases}$$

Khi đó $A(1; 0; 1), B(1; 1; 1), C(0; 1; 1), D(0; 0; 1), A'(1; 0; 0), B'(1; 1; 0), C'(0; 1; 0)$

$$M\left(1; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right), P\left(0; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(0; 0; \frac{1}{2}\right).$$

Ta có: $\vec{MN}\left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), \vec{MP}\left(-1; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right), \vec{MQ}\left(-1; \frac{-1}{2}; \frac{-1}{2}\right)$

$$\left| \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP} \right] \cdot \overrightarrow{MQ} \right| = \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \right| = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{MNPQ} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP} \right] \cdot \overrightarrow{MQ} \right| = \frac{1}{24}.$$

Câu 41

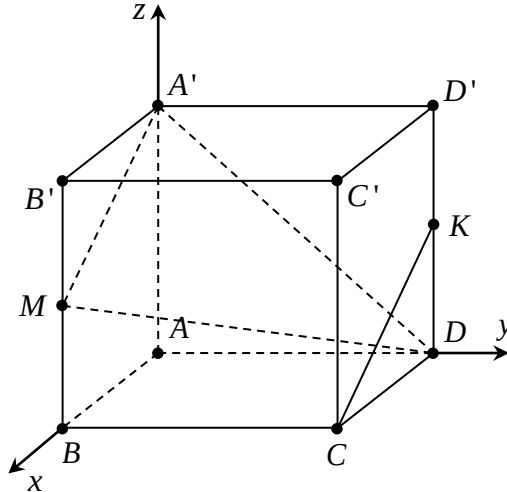
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm DD' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm BB' . Ta có: $CK \parallel A'M \Rightarrow CK \parallel (A'MD)$.

Khi đó $d(CK, A'D) = d(CK, (A'MD)) = d(C, (A'MD))$.

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Ta có: $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;a), B'(a;0;a), C(a;a;0), M\left(a;0;\frac{a}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{A'M} = \left(a;0;-\frac{a}{2}\right), \overrightarrow{A'D} = (0;a;-a), \left[\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'D}\right] = \left(\frac{a^2}{2}; a^2; a^2\right).$$

Vậy mặt phẳng $(A'MD)$ nhận $\vec{n} = (1;2;2)$ làm vector pháp tuyến.

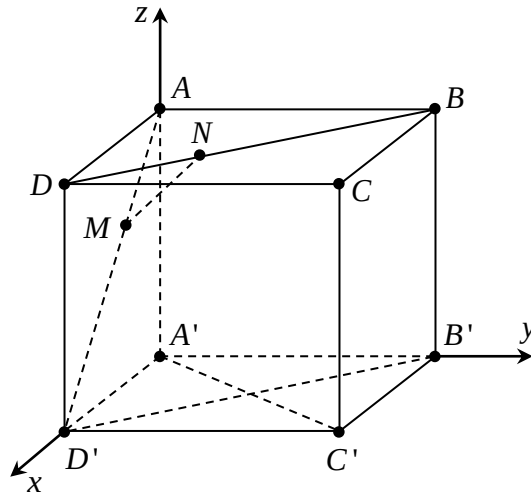
Phương trình $(A'MD)$ là $x + 2y + 2z - 2a = 0$.

$$\text{Do đó: } d(C, (A'DM)) = \frac{|a + 2a - 2a|}{3} = \frac{a}{3}.$$

Câu 42

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Lấy điểm M thuộc đoạn AD' , điểm N thuộc đoạn BD sao cho $AM = DN = x$, $\left(0 < x < \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. Tìm x theo a để đoạn MN ngắn nhất.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho $O \equiv A'$, $A'D' \equiv Ox$, $A'B' \equiv Oy$, $AA' \equiv Oz$.

$A'(0;0;0)$, $D'(a;0;0)$, $B'(0;a;0)$, $A(0;0;a)$, $D(a;0;a)$, $B(0;a;a)$, $C'(a;a;0)$, $C(a;a;a)$.

$$M\left(\frac{x}{\sqrt{2}}; 0; \frac{a\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}\right), N\left(\frac{a\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}; \frac{x}{\sqrt{2}}; a\right).$$

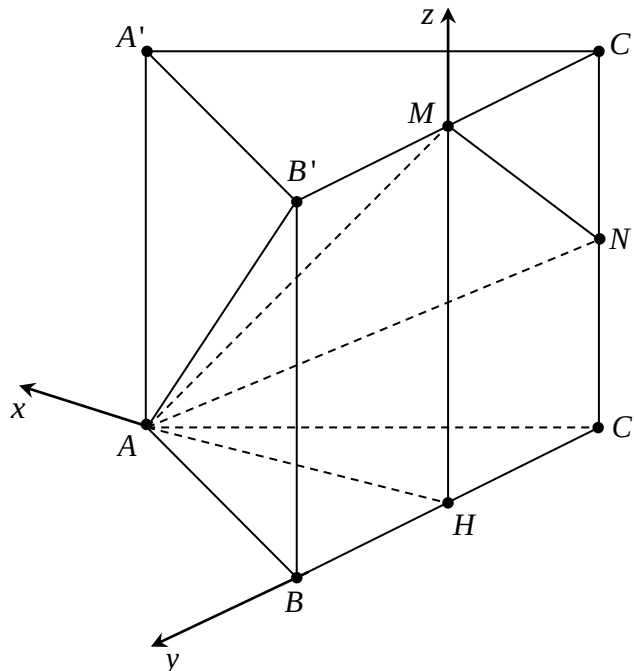
$$\Rightarrow MN^2 = (\sqrt{2}x - a)^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = 3x^2 - 2\sqrt{2}ax + a^2 = 3\left(x^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{3}ax + \frac{2a^2}{9}\right) + \frac{a^2}{3}.$$

$$\Rightarrow MN^2 = 3\left(x - \frac{\sqrt{2}a}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3}. \text{ Vậy } MN \text{ ngắn nhất} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 43

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, góc $BAC = 120^\circ$, $AA' = a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC' . Số đo góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi H là trung điểm BC , $BC = a\sqrt{3}$, $AH = \frac{a}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $H(0;0;0)$, $A\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $C\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$,

$M(0;0;a)$, $N\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2}\right)$. Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) .

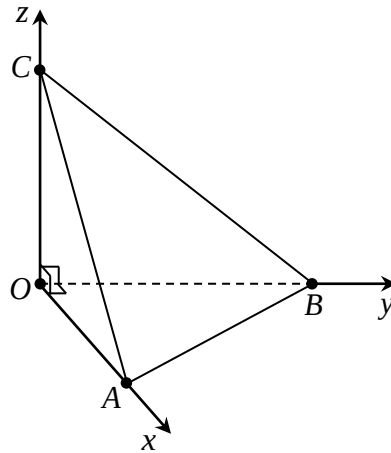
(AMN) có một vtpt $\vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{-1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

(ABC) có một vtpt $\overrightarrow{HM} = (0;0;1)$, từ đó $\cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{HM}|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 44

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm A, B, C (không trùng O) lần lượt thay đổi trên các trục Ox, Oy, Oz và luôn thỏa mãn điều kiện: tỉ số giữa diện tích của tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{3}{2}$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định, bán kính của mặt cầu đó bằng bao nhiêu?

Lời giải



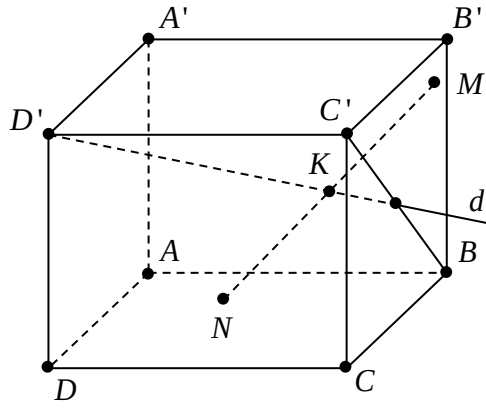
$$\text{Ta có } \frac{S_{ABC}}{V_{OABC}} = \frac{S_{ABC}}{\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot d(O, (ABC))} = \frac{3}{d(O, (ABC))}$$

$$\text{Mà } \frac{S_{ABC}}{V_{OABC}} = \frac{3}{2} \text{ nên } d(O, (ABC)) = 2.$$

Vậy mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc mặt cầu tâm O , bán kính $R = 2$.

Câu 45

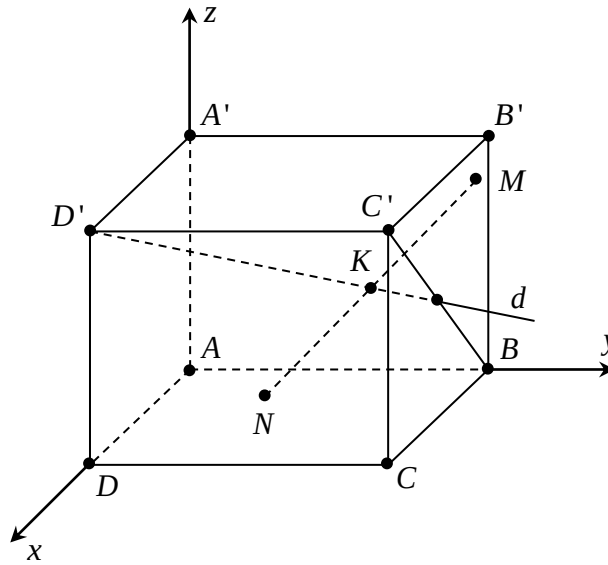
Cho hình lập phương $a = 1$ có cạnh bằng $a = 1$. Một đường thẳng d đi qua đỉnh D' và tâm I của mặt bên $BCC'B'$. Hai điểm M, N thay đổi lần lượt thuộc các mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ABCD)$ sao cho trung điểm K của MN thuộc đường thẳng d (tham khảo hình vẽ). Giá trị bé nhất của độ dài đoạn thẳng MN là?



Lời giải

Cho $a = 1$.

Chọn hệ trục Oxyz như hình vẽ.



$$A(0;0;0), D'(1;0;1), B(0;1;0), C'(1;1;1)$$

$$I \text{ là trung điểm } BC' \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{D'I} = \left(-\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}(1; -2; 1).$$

$$\text{Đường thẳng } D'I \text{ đi qua } D'(1;0;1), \text{ có một VTCP là } \vec{u} = (1; -2; 1) \text{ là: } \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2t \\ z = 1+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$\text{Mặt phẳng } (ABCD): z = 0$$

$$\text{Mặt phẳng } (BCC'B'): y = 1$$

$$\text{Ta có } M \in (BCC'B') \Rightarrow M(m; 1; n), K \in D'I \Rightarrow K(1+t; -2t; 1+t)$$

$$K \text{ là trung điểm } MN \Rightarrow N(2t-m+2; -4t-1; 2t-n+2).$$

$$N \in (ABCD) \Leftrightarrow z_N = 0 \Leftrightarrow 2t-n+2=0 \Leftrightarrow t = \frac{n-2}{2} \Rightarrow N(n-m; 3-2n; 0).$$

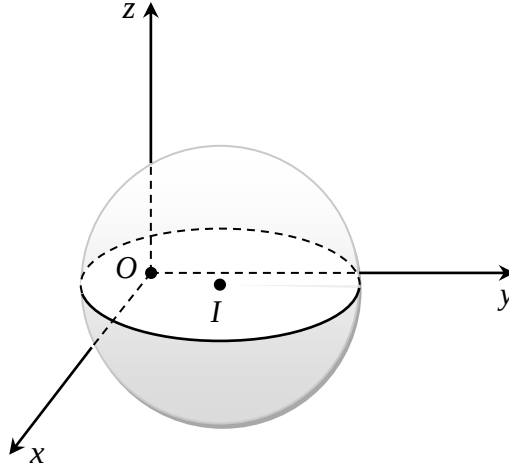
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= (n-2m; 2-2n; -n) \Rightarrow MN^2 = (n-2m)^2 + (2-2n)^2 + n^2 = (n-2m)^2 + 5n^2 - 8n + 4 \\ &= (n-2m)^2 + 5\left(n-\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5} \Rightarrow MN \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $b = \frac{4}{5}$ và $a = \frac{2}{5}$.

Câu 46

Hai quả bóng hình cầu có kích thước khác nhau được đặt ở hai góc của một căn nhà hình hộp chữ nhật sao cho mỗi quả bóng đều tiếp xúc với hai bức tường và nền của nhà đó. Biết rằng trên bề mặt của quả bóng đều tồn tại một điểm có khoảng cách đến hai bức tường và nền nhà mà nó tiếp xúc bằng 1; 2; 4. Tổng độ dài đường kính của hai quả bóng đó bằng bao nhiêu?

Lời giải



Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ. Mỗi quả bóng xem là mặt cầu tâm $I(a;b;c)$.

Vì mỗi quả bóng đều tiếp xúc với hai bức tường và nền của nhà nên chúng tiếp xúc với ba mặt phẳng tọa độ $\Leftrightarrow d(I, (xOy)) = d(I, (yOz)) = d(I, (zOx)) = R \Leftrightarrow a = b = c > 0 \Rightarrow I(a; a; a)$.

Gọi $M(x; y; z)$ là điểm nằm trên quả bóng có khoảng cách đến hai bức tường và nền nhà mà nó tiếp xúc bằng 1; 2; 4 $\Rightarrow M(1; 2; 4)$.

M nằm trên quả bóng khi $IM = d(I, (xOy)) = a$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (a-2)^2 + (a-4)^2 = a^2 \Leftrightarrow 2a^2 - 14a + 21 = 0 \quad (*)$$

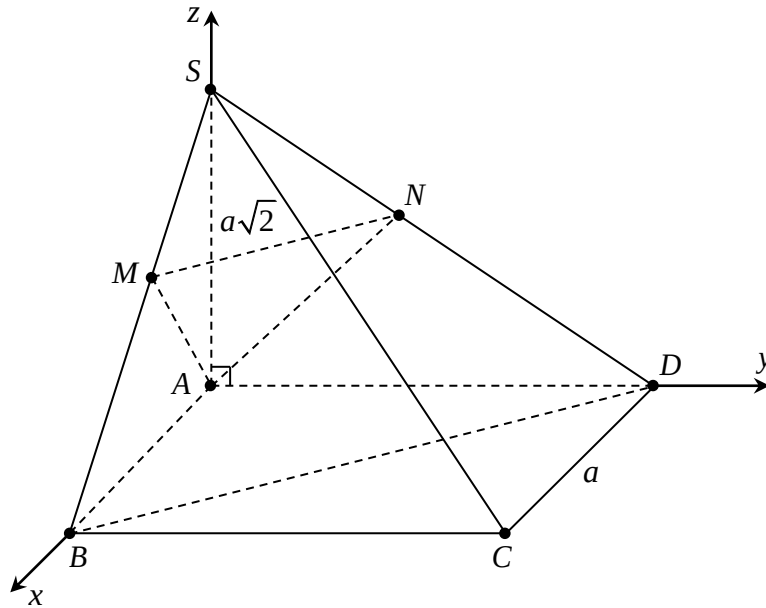
Vì $(*)$ có biệt thức $\Delta' = 7 > 0$ nên nó có hai nghiệm phân biệt a_1, a_2 và $a_1 + a_2 = 7$.

Khi đó tổng đường kính của hai quả bóng là $2(a_1 + a_2) = 14$.

Câu 47

Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SD . Góc giữa mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SB bằng bao nhiêu?

Lời giải



Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$. Tương tự ta cũng có $AN \perp SC \Rightarrow (AMN) \perp SC$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và (AMN) .

Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $D(1;0;0)$, $S(0;0;\sqrt{2})$, $C(1;1;0)$, $\overrightarrow{SC} = (1;1;-\sqrt{2})$, $\overrightarrow{SB} = (0;1;-\sqrt{2})$. Do $(AMN) \perp SC$ nên (AMN) có vtpt $\overrightarrow{SC}$

$$\sin \varphi = \frac{|3|}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Câu 48

Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . M là một điểm thỏa mãn $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. Cô sin của góc giữa hai mặt phẳng $(A'MB)$ và (ABC) bằng bao nhiêu?

Lời giải

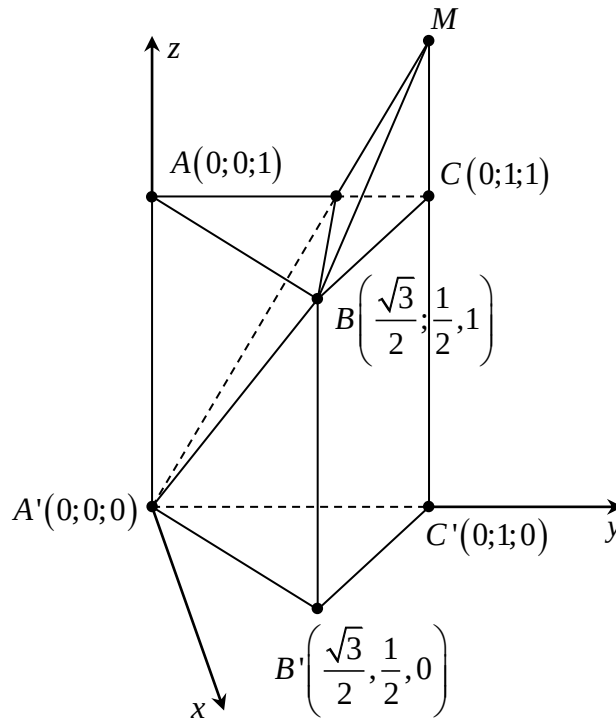
Xét hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gắn hệ trục như hình vẽ quy ước $a=1$ (đơn vị). Gọi D là giao điểm của $A'M$ và AC . Vì tam giác $A'B'C'$ là tam giác cân cạnh bằng a nên ta suy ra độ dài các đường trung tuyến là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra tọa độ các điểm như hình vẽ.

Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ vậy $\Rightarrow \triangle ADA' \sim \triangle CDM \Rightarrow \frac{AD}{CD} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{DC}$.

Vậy tọa độ của điểm D là: $D\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$

Ta có mặt phẳng ABC có phương trình $z=1 \Rightarrow \vec{n}_{(ABC)} = (0;0;1)$

Mặt khác mặt phẳng $(A'MB)$ là mặt phẳng đi qua ba điểm A', D và B .



Ta có: $\overrightarrow{A'D} = \left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$ và $\overrightarrow{A'B} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1\right) \Rightarrow \vec{n}_{(A'BM)} = [\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{A'B}] = \left(\frac{1}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Vậy cosin góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'MB)$ và (ABC) là:

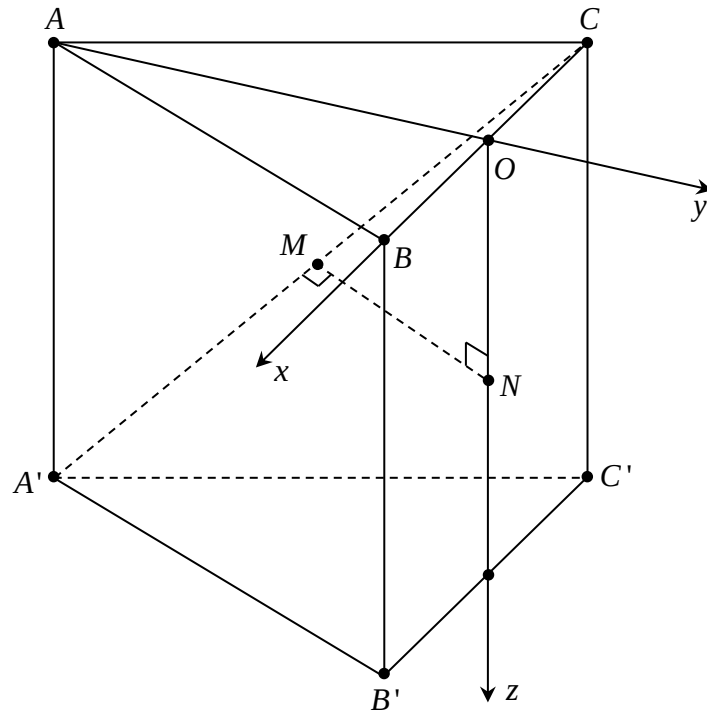
$$\cos((A'BM), (ABC)) = \left| \cos(\vec{n}_{(A'BM)}, \vec{n}_{(ABC)}) \right| = \frac{\left| \frac{-\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3}} \cdot \sqrt{1}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Câu 49

Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng cạnh đáy. Đường thẳng MN ($M \in A'C$; $N \in BC'$) là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC' . Tỷ số $\frac{NB}{NC'}$ bằng

Lời giải

Kết quả bài toán sẽ không thay đổi nếu ta xét lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng cạnh đáy bằng 2.



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ (O là trung điểm của BC). Ta có: $A'(0; -\sqrt{3}; 2)$, $B(1; 0; 0)$, $C(-1; 0; 0)$, $C'(-1; 0; 2)$, $\overrightarrow{CA'} = (1; -\sqrt{3}; 2)$, $\overrightarrow{BC'} = (-2; 0; 2)$.

$$\text{Do } \begin{cases} \overrightarrow{CM} = m\overrightarrow{CA'} \\ \overrightarrow{BN} = n\overrightarrow{BC'} \end{cases} \text{ nên ta có } M(-1+m; -\sqrt{3}m; 2m), N(1-2n; 0; 2n)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-m-2n+2; \sqrt{3}m; 2n-2m).$$

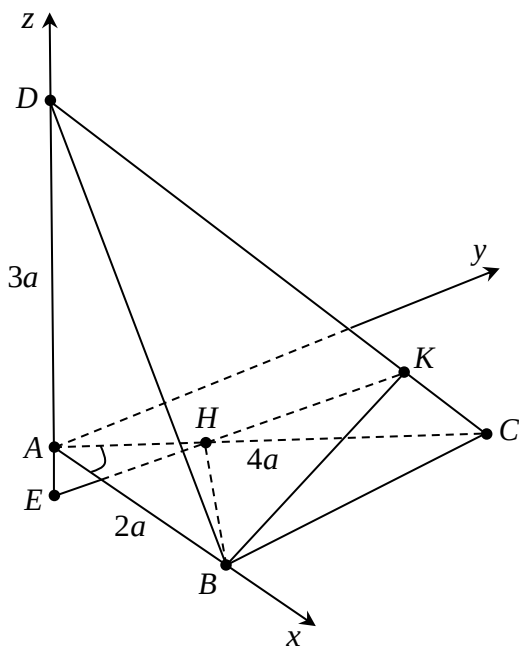
Đường thẳng MN là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC' nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CA'} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m+2n=-1 \\ -m+4n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{2}{5} \\ n=\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{BN}{BC'} = n = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{NB}{NC'} = \frac{3}{2}.$$

Câu 50

Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $AD = 3a$, $AB = 2a$, $AC = 4a$, $BAC = 60^\circ$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên AC và CD . Đường thẳng HK cắt đường thẳng AD tại E . Chứng minh rằng BE vuông góc với CD và tính thể tích khối tứ diện $BCDE$ theo a .

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ với A trùng gốc tọa độ O.

$$A(0;0;0), B(2a;0;0), C(2a;2a\sqrt{3};0), D(0;0;3a), AH = AB.\cos 60^\circ = a.$$

Suy ra tọa độ của $H\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

$\overrightarrow{DC}(2a; 2a\sqrt{3}; -3a)$ suy ra $\vec{u}(2; 2\sqrt{3}; -3)$ là một vectơ chỉ phương của DC nên phương trình đường

thẳng DC là:
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2\sqrt{3}t \\ z = 3a - 3t \end{cases}$$
. Vì K thuộc DC nên $K(2t; 2\sqrt{3}t; 3a - 3t)$

Ta có $\overrightarrow{BK}(2t-2a; 2\sqrt{3}t; 3a-3t), \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{13a}{25}$. Vậy $K\left(\frac{26a}{25}; \frac{26a\sqrt{3}}{25}; \frac{36a}{25}\right)$

Vì E thuộc trục Az nên $E(0;0;z) \cdot \overline{EH}\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; -z\right); \overline{HK}\left(\frac{27a}{50}; \frac{27a\sqrt{3}}{50}; \frac{36a}{25}\right)$

Vì E, H, K thẳng hàng nên $\overrightarrow{EH}, \overrightarrow{HK}$ cùng phương, do đó suy ra $z = -\frac{4a}{3}$. Vậy $E\left(0; 0; -\frac{4a}{3}\right)$

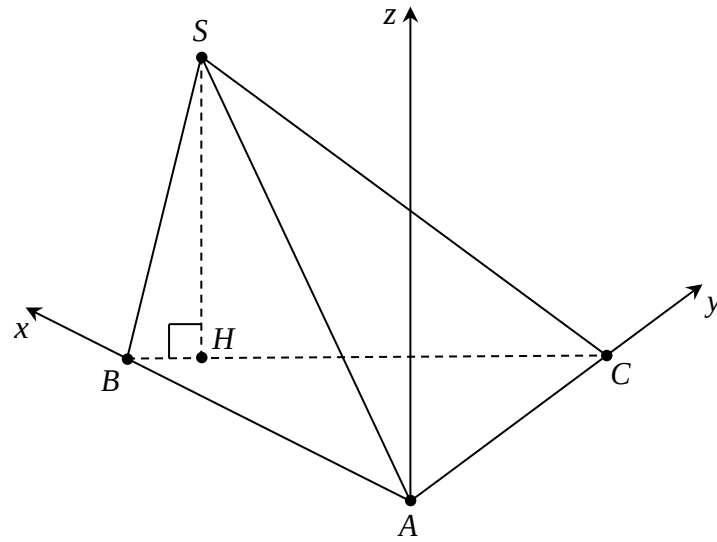
Ta có $\overrightarrow{EB} = \left(2a; 0; \frac{4a}{3} \right)$ và $\overrightarrow{DC} = \left(2a; 2a\sqrt{3}; -3a \right)$ nên $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{DC} = 2a \cdot 2a + 0 \cdot 2a\sqrt{3} + \frac{4a}{3}(-3a) = 0$

Vậy BE vuông góc với CD

Câu 51

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $BC = a$ và $\angle ABC = 30^\circ$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với đáy một góc 60° . Biết rằng hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) thuộc cạnh BC . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ với A trùng gốc tọa độ O.

$A(0;0;0), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{a}{2};0\right), S(x;y;z)$ với $x > 0; y > 0; z > 0, H(x;y;0)$ với H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC)

$\vec{n}_1 = (0;0;1)$ là vecto pháp tuyến của (ABC) và $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}] = \left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}z; \frac{a\sqrt{3}}{2}y\right)$ là vecto pháp

tuyến của (SAB). $\vec{n}_3 = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}] = \left(\frac{a}{2}x; 0; -\frac{a}{2}z\right)$ là vecto pháp tuyến của (SAC)

$$\cos((SAB), (ABC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2}} \Leftrightarrow z^2 = 3y^2 \quad (1)$$

$$\cos((SAC), (ABC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_3|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{\sqrt{z^2 + x^2}} \Leftrightarrow z^2 = 3x^2 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có $x = y$. Nên $H(x; x; 0)$, vì H thuộc BC nên $\overrightarrow{BC} \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right), \overrightarrow{CH} \left(x; x - \frac{a}{2}; 0\right)$

cùng phương, suy ra $\frac{x}{-\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{x - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}$ thay vào (1), ta được $z = \frac{3a}{2(1+\sqrt{3})}$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \frac{3a}{2(1+\sqrt{3})} \frac{a^2 \sqrt{3}}{8} = \frac{(3-\sqrt{3})a^3}{32}$$

Câu 52

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC. có độ dài cạnh $AB = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC. Tính theo a diện tích của tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Lời giải

Gọi O là trung điểm BC, G là trọng tâm tam giác ABC, ta có

$$OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}, OB + OC = \frac{a}{2}, OG = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Đặt $SG = z > 0$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho tia Ox chứa A, tia Oy chứa B và tia Oz nằm trên đường thẳng qua O và song song với SG (xem hình vẽ), khi đó:

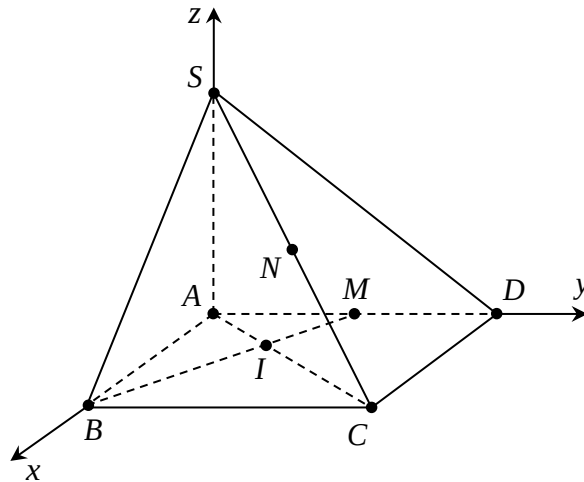
$$A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), C\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right), S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; z\right), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{12}; \frac{a}{4}; z\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{12}; -\frac{a}{4}; z\right).$$

Tính được $z = \frac{a\sqrt{15}}{6}$. Suy ra $S_{AMN} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$

Câu 53

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC, I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích khối tứ diện ANIB.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho $O \equiv A$, Ox chứa B, tia Oy chứa D và tia Oz chứa S. Khi đó:

$$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a\sqrt{2};0), D(0;a\sqrt{2};0), S(0;0;a), M\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), N\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{AS}(0;0;a), \overrightarrow{AC}(a;a\sqrt{2};0), \overrightarrow{SM}\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; -a\right), \overrightarrow{SB}(a;0;-a)$$

Vecto pháp tuyến của (SAC) là $[\overrightarrow{AS}; \overrightarrow{AC}] = (-a^2\sqrt{2}; a^2; 0)$

Vecto pháp tuyến của (SMB) là $[\overrightarrow{SM}; \overrightarrow{SB}] = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; -a^2; 0\right)$

Vì $[\overrightarrow{AS}; \overrightarrow{AC}][\overrightarrow{SM}; \overrightarrow{SB}] = a^4 - a^4 = 0$ nên $(SAC) \perp (SMB)$

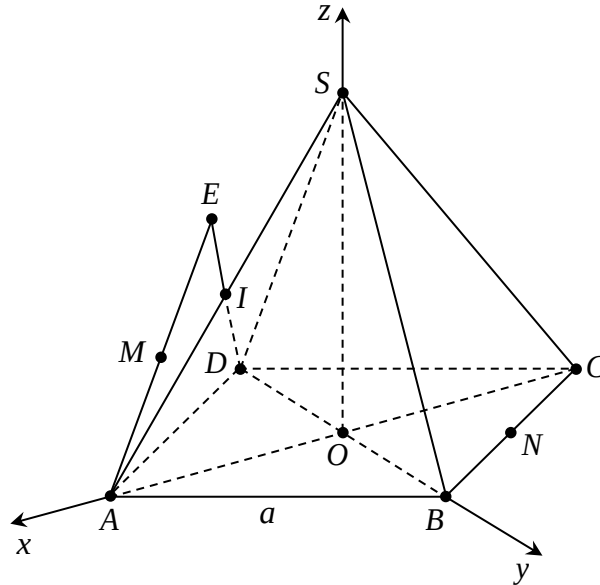
Ta có $\frac{IC}{IA} = \frac{BC}{AM} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{IA}$. Từ đây tìm được $I\left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0\right)$

thể tích khối tứ diện ANIB là $V_{ANIB} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{AI}] \cdot \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{6} \frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$

Câu 54

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA , M là trung điểm của AE , N là trung điểm của BC . Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC .

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD , Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho tia Ox chứa A , tia Oy chứa B và tia Oz chứa S (xem hình vẽ). Đặt $SO = z$, khi đó

$$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), D\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), S(0; 0; z),$$

$$N\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right), M\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{z}{2}\right), I\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{z}{2}\right), E\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; z\right)$$

$$\text{Có } \overrightarrow{MN} = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{z}{4}\right), \overrightarrow{BD} = \left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right)$$

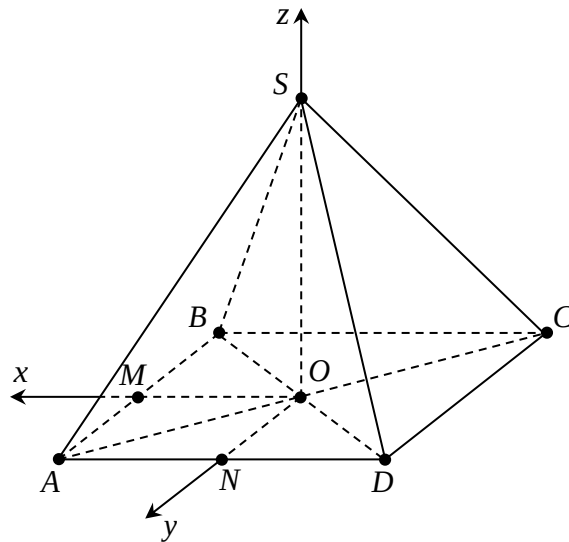
Ta thấy $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow MN \perp BD$

Góc giữa hai đường thẳng MN và AC là $d(MN, AC) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 55

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình hành, $AD = 4a$, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $6a$. Tìm cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) khi thể tích của khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD , M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD , từ giả thiết suy ra $\left. \begin{matrix} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{matrix} \right\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$ và $OA = OB = OC = OD = \sqrt{6a^2 - SO^2}$ nên $ABCD$ là hình chữ nhật

Đặt $ON = x > 0$. Khi đó $\begin{cases} OA = \sqrt{x^2 + 4a^2} \\ SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{2a^2 - x^2} \end{cases}$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} AB \cdot AD \cdot SO = \frac{8}{3} ax\sqrt{2a^2 - x^2}$ với $x \in (0; a\sqrt{2})$ hoặc áp dụng

bất đẳng thức Cauchy ta suy ra $V_{S.ABCD}$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = a$. Suy ra $SO = a$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

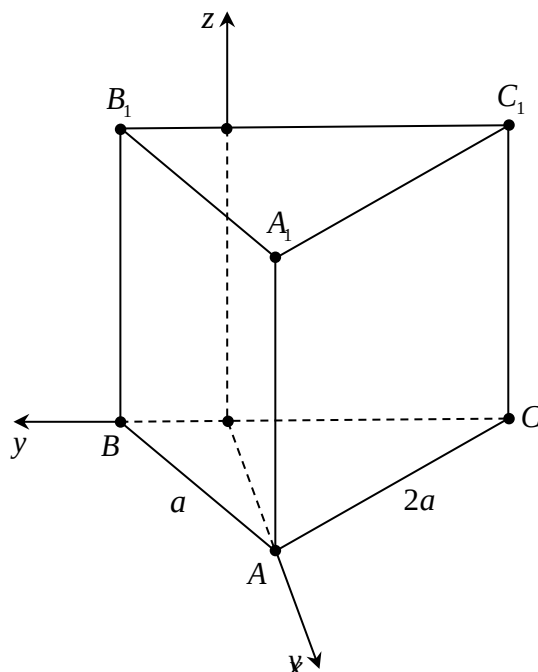
$$B\left(2a; -\frac{a}{2}; 0\right), C\left(-2a; -\frac{a}{2}; 0\right), D\left(-2a; \frac{a}{2}; 0\right), S(0; 0; a).$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) thì $\cos \varphi = \frac{2}{5}$

Câu 56

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a, AC = 2a, AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và $BAC = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC_1 . Chứng minh $MB \perp MA_1$ và tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (A_1BM)

Lời giải



Kẻ $AO \perp BC$. Ta có

$$BC = \sqrt{a^2 + 4a^2 - 2a \cdot 2a \cdot \cos 120^\circ} = a\sqrt{7}$$

$$AO \cdot BC = AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ \Rightarrow AO = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ}{BC} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

$$OB = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{21a^2}{49}} = \frac{2\sqrt{7}a}{7}$$

$$OC = BC - OB = \frac{5\sqrt{7}a}{7}$$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Khi đó:

$$A\left(\frac{a\sqrt{21}}{7}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{2\sqrt{7}}{7}; 0\right), M\left(0; -\frac{5\sqrt{7}}{7}; a\sqrt{5}\right), A_1\left(\frac{a\sqrt{21}}{7}; 0; 2a\sqrt{5}\right)$$

Ta có $\overrightarrow{MA_1} = \left(\frac{a\sqrt{21}}{7}; \frac{5a\sqrt{7}}{7}; a\sqrt{5}\right), \overrightarrow{MB} = (0; -a\sqrt{7}; a\sqrt{5})$

$$\overrightarrow{MA_1} \cdot \overrightarrow{MB} = 5a^2 - 5a^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA_1} \perp \overrightarrow{MB} \Rightarrow MA_1 \perp MB$$

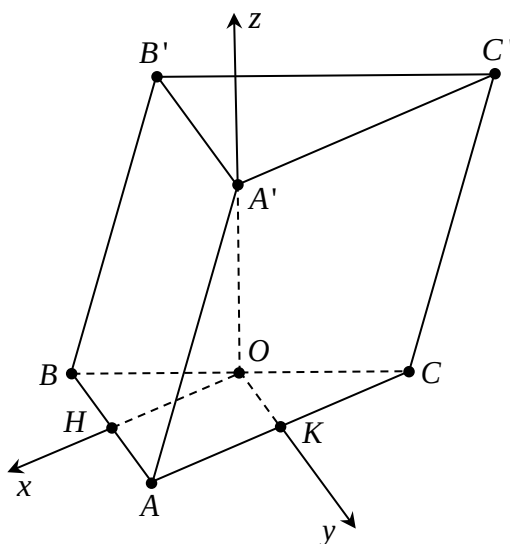
Phương trình mặt phẳng (A_1BM) là: $12\sqrt{5}x - \sqrt{15}\left(y - \frac{2a\sqrt{7}}{7}\right) - \sqrt{21}z = 0$

Khoảng cách từ A đến (A_1BM) là: $d(A; (A_1MB)) = \frac{a\sqrt{5}}{3}$

Câu 57

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$ đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$ và cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$.

Lời giải



Gọi O là trung điểm của BC , H là trung điểm của AB , K là trung điểm AC thì $OHAK$ là hình chữ nhật. Ta có

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a, OA = \frac{BC}{2} = a,$$

$$OA' = \sqrt{AA'^2 - OA^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho tia Ox chứa H , tia Oy chứa K và tia Oz chứa A' (xem hình vẽ).

Khi đó $A'(0;0;a\sqrt{3}), A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; 0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$.

Thể tích khối chóp $A'.ABC$ là $V_{A'.ABC} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{A'A}; \overrightarrow{A'B}] \cdot \overrightarrow{A'C}| = \frac{1}{6} \left| -\frac{3a^3}{2} - \frac{3a^3}{2} \right| = \frac{a^3}{2}$

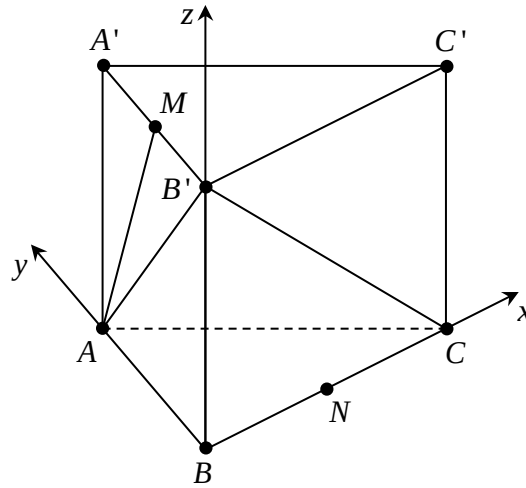
$\overrightarrow{BC} = (-a\sqrt{3}; a; 0)$. Gọi φ là góc giữa AA' và $B'C'$. Khi đó:

$$\cos \varphi = \left| \cos(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AA'}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{1}{4}.$$

Câu 58

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BC = 2AB, AB \perp BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng $\frac{2a}{\sqrt{7}}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C)$ và $(BCC'B')$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $MABC$ và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $B'ANC$ theo a

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ với gốc tọa độ O trùng điểm B

Đặt $AB = x (x > 0)$ thì $BC = 2x$

Ta có $B(0;0;0), C(2x;0;0), A(0;x;0), N(x;0;0)$

$$A'(0;x;y) (y > 0), B'(0;0;y), C'(2x;0;y), M\left(0; \frac{x}{2}; y\right).$$

$$\overrightarrow{AM} = \left(0; -\frac{x}{2}; y\right), \overrightarrow{B'C} = (2x; 0; -y) \Rightarrow [\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{B'C}] = \left(\frac{xy}{2}; 2xy; x^2\right)$$

Ta có $\overrightarrow{AC} = (2x; -x; 0)$

$$d(AM, B'C) = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot [\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{B'C}]|}{|[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{B'C}]|} \Leftrightarrow \frac{|-x^2y|}{\sqrt{\frac{x^2y^2}{4} + 4x^2y^2 + x^4}} = \frac{2a}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \frac{xy}{\sqrt{4x^2 + 17y^2}} = \frac{a}{\sqrt{7}} \quad (1)$$

$\overrightarrow{AB'} = (0; -x; y)$ và $\overrightarrow{AC} = (2x; -x; 0)$ nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB'} = (xy; 2xy; 2x^2)$ nên $(AB'C)$ có vecto pháp tuyến là $\vec{n} = (y; 2y; 2x)$ (vì $\vec{n}$ cùng phương với $[\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB'}]$) và $(BCC'B')$ có vecto pháp tuyến là $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

$$\cos((AB'C), (BCC'B')) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{j}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{j}|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2y}{\sqrt{5y^2 + 4x^2}} \Leftrightarrow 5y^2 + 4x^2 = 16y^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{11}}{2}y \quad (2)$$

Thế (2) vào (1), giải phương trình ta được kết quả $y = \frac{4a}{\sqrt{11}}$ và $x = 2a$

$$\text{Vậy } V_{MABC} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4a \right) \cdot \frac{4a}{\sqrt{11}} = \frac{16\sqrt{11}a^3}{33}$$

Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $B'ANC$ theo a

Phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp khối chóp $B'ANC$ có dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2a_1x + 2by + 2cz + d = 0 \text{ với tâm } T(-a_1; -b; -c), R = \sqrt{a_1^2 + b^2 + c^2 - d}$$

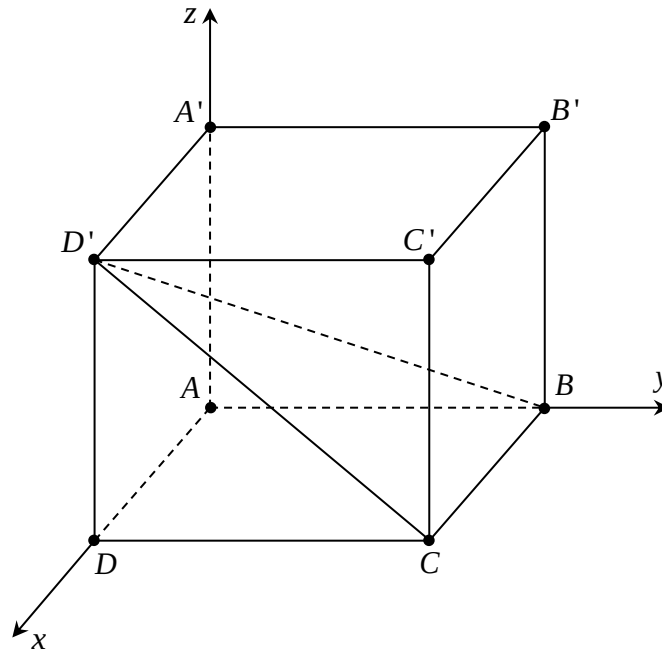
Vì B', A, N, C thuộc mặt cầu (S) nên tọa độ chúng thỏa mãn phương trình mặt cầu, ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{16}{11}a^2 + \frac{8\sqrt{11}}{11}ac + d = 0 \\ 4a^2 + 4ab + d = 0 \\ 4a^2 + 4a_1a + d = 0 \\ 16a^2 + 8a_1a + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -3a \\ b = -3a \\ c = -\frac{13a}{\sqrt{11}} \\ d = 8a^2 \end{cases} \Rightarrow R = 3a\sqrt{\frac{31}{11}}$$

Câu 59

Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = a$. Tính thể tích của khối tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a .

Lời giải



Từ giả thiết ta tính được $AC = AA' = \frac{a}{\sqrt{2}}$ và $AB = \frac{a}{2}$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ với gốc tọa độ O trùng điểm A

Ta có: $A(0;0;0), B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), C\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right), D\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$

- $A'\left(0;0; \frac{a}{\sqrt{2}}\right), B'\left(0; \frac{a}{2}; \frac{a}{\sqrt{2}}\right), C'\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{\sqrt{2}}\right), D'\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

- $\overrightarrow{AB} = \left(0; \frac{a}{2}; 0\right), \overrightarrow{AB'} = \left(0; \frac{a}{2}; \frac{a}{\sqrt{2}}\right), \overrightarrow{AC'} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{\sqrt{2}}\right).$

- $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}] = \left(\frac{a^2}{2\sqrt{2}}; 0; 0\right) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}] \cdot \overrightarrow{AC'} = \frac{a^3}{4\sqrt{2}} \Rightarrow V_{ABB'C'} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}] \cdot \overrightarrow{AC'}| = \frac{\sqrt{2}a^3}{48}.$

- $\overrightarrow{CB} = \left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right), \overrightarrow{CD'} = \left(0; -\frac{a}{2}; \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD'}] = \left(0; \frac{a^2}{2\sqrt{2}}; \frac{a^2}{4}\right)$

$\Rightarrow \vec{n} = (0; \sqrt{2}; 1)$ là VTPT của mặt phẳng (BCD') nên

$$(BCD') : \sqrt{2}y + z - \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow d(A, (BCD')) = \frac{\left| \sqrt{2} \cdot 0 + 0 - \frac{a\sqrt{2}}{2} \right|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

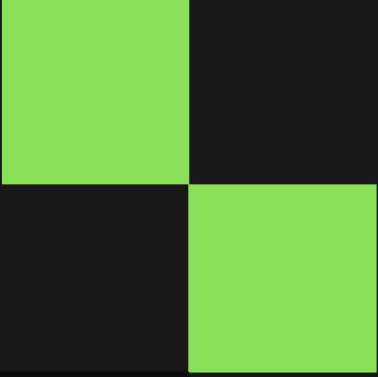
TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Thầy Nguyễn Đăng Ái.

[2]. Đề thi thử các trường trên cả nước.

[3]. Các chuyên đề về hình học tọa độ không gian Oxyz trên trang toanmath.com.

[4]. Nhóm Strong Team Toán VD – VDC.



TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

THAM KHẢO THÊM

- Khai thác một số chủ đề số học hay và khó
- Tại sao tích phân lại khó?
- Thay đổi tư duy giải toán phương trình

CHI TIẾT LIÊN HỆ QUA FANPAGE

www.facebook.com/OlympiadMathematical/

GIÁ. 170000 ĐỒNG