

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT CÓ CHỨA THAM SỐ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

Thường sử dụng các phương pháp sau:

1. Phương pháp đưa về cùng cơ số.
2. Phương pháp đặt ẩn phụ.
3. Phương pháp hàm số.

KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

♦ $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ với $b, c > 0; 0 < a \neq 1$.

♦ $\log_{a^\alpha} x^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \log_a |x|$ với $\alpha \neq 0; 0 < a \neq 1$.

♦ Nếu $a > 1$ thì với $\forall x_1, x_2 > 0 : x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$

Nếu $0 < a < 1$ thì với $\forall x_1, x_2 > 0 : x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

♦ $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} (0 < a \neq 1)$

♦ $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b (0 < a \neq 1)$

♦ Phương trình bậc hai có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

♦ Phương trình bậc hai có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

♦ Phương trình bậc hai có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$.

BÀI TẬP MẪU

Cho phương trình $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 2]$ là

A. $(1; 2)$ B. $[1; 2]$ C. $[1; 2)$ D. $[2; +\infty)$

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm điều kiện của tham số để phương trình logarit có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Viết lại phương trình logarit về dạng phương trình bậc hai đối với 1 biểu thức logarit.

B2: Đặt ẩn phụ là biểu thức logarit và tìm điều kiện cho ẩn phụ.

B2: Tìm điều kiện cho phương trình ẩn phụ.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Điều kiện : $x > 0$

$$\text{Ta có : } \log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_2 x$, với $x \in [1; 2]$ thì $t \in [0; 1]$, khi đó ta có phương trình:

$$(1+t)^2 - (m+2)t + m - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - mt + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = m - 1 \end{cases} \quad (2)$$

Nhận thấy với mỗi số thực $t \in [0; 1]$ cho ta một số thực $x \in [1; 2]$, do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (2)$ có 2

$$\text{nghiệm phân biệt thuộc } [0; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 1 \\ m - 1 \in [0; 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ 0 \leq m - 1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m < 2.$$

Vậy $1 \leq m < 2$.

Chú ý: Đối với phương trình bậc hai chứa tham số, nếu Δ có dạng chính phương thì nên tìm cụ thể hai nghiệm của phương trình.

Bài tập tương tự và phát triển:

Câu 43.1: Cho phương trình $\log_3^2 x + 3m \log_3(3x) + 2m^2 - 2m - 1 = 0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các số thực m mà phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 3]$. Số phần tử của tập S là

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 0$

$$\text{Phương trình: } \log_3^2 x + 3m \log_3(3x) + 2m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x + 3m \log_3 x + 2m^2 + m - 1 = 0$$

Đặt $t = \log_3 x$, với $x \in [1; 3]$ thì $t \in [0; 1]$, khi đó ta có phương trình

$$t^2 + 3mt + 2m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -m - 1 \\ t = -2m + 1 \end{cases}$$

Khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq -m - 1 \leq 1 \\ 0 \leq -2m + 1 \leq 1 \\ -m - 1 \neq -2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq -1 \\ 0 \leq m \leq \frac{1}{2} \\ m \neq 2 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).}$$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 43.2: Cho phương trình $\log_3^2(9x) - (m+5)\log_3 x + 3m - 10 = 0$ (với m là tham số thực). Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1; 81]$ là

A. 2 .

B. 3 .

C. 4 .

D. 5 .

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3^2(9x) - (m+5)\log_3 x + 3m - 10 = 0$.

Đặt $t = \log_3 x$ vì $x \in [1; 81] \Rightarrow t \in [0; 4]$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2 - (m+1)t + 3m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = m - 2 \end{cases}$.

ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m - 2 \leq 4 \\ m - 2 \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq m \leq 6 \\ m \neq 5 \end{cases}$. Vậy có 4 số nguyên m thỏa ycbt.

Câu 43.3: Cho phương trình $4\log_3^2 \sqrt{x} + (m-3)\log_3 x + 2 - m = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[1; 9]$?

A. 0 .

B. 2 .

C. 1 .

D. 3 .

Lời giải

Chọn B

Ta có $4\log_3^2 \sqrt{x} + (m-3)\log_3 x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)^2 + (m-3)\log_3 x + 2 - m = 0$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x + (m-3)\log_3 x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 2 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \log_3 x = 2 - m \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[1; 9]$ khi và chỉ khi (1) có một

nghiệm thuộc đoạn $[1; 9] \setminus \{3\}$ tức $\begin{cases} 0 \leq 2 - m \leq 2 \\ 2 - m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq 2 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 43.4: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 3x + \log_3 x + m - 1 = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 3x + \log_3 x + m - 1 = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$

- A. $m > \frac{9}{4}$. B. $0 < m < \frac{9}{4}$. C. $0 < m < \frac{1}{4}$. D. $m > -\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_3^2 3x + \log_3 x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x + 3\log_3 x + m = 0$ (1)

Đặt $t = \log_3 x$ với $x \in (0;1)$ thì $t < 0$, khi đó ta có phương trình $t^2 + 3t + m = 0$ (2)

Nhận thấy với mỗi số thực $t < 0$ cho ta một số thực $x \in (0;1)$, do đó yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \text{Phương trình (2) có hai nghiệm âm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2 - 4m > 0 \\ \frac{-3}{2} < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{4}.$$

Câu 43.5: Cho phương trình $(\log_3 x)^2 + 3m \log_3(3x) + 2m^2 - 2m - 1 = 0$. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên m mà phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 \geq \frac{10}{3}$. Tính tổng các phần tử của S .

- A. 6. B. 1. C. 0. D. 10.

Lời giải

Chọn B

Với $m \in \mathbb{N}$

$$PT \Leftrightarrow (\log_3 x)^2 + 3m(1 + \log_3 x) + 2m^2 - 2m - 1 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \log_3 x \Leftrightarrow x = 3^t$$

$$\text{Ta được phương trình: } t^2 + 3mt + 2m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 - m \\ t = 1 - 2m \end{cases}.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $1 - 2m \neq -1 - m \Leftrightarrow m \neq 2$.

$$\text{Khi đó } x_1 + x_2 \geq \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3^{1-2m} + 3^{-1-m} \geq \frac{10}{3} \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{-2m} + 3^{-m} - 10 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3^{-m} \geq 1 \Leftrightarrow -m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Câu 43.6: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $0 < m < \frac{1}{4}$.

B. $0 \leq m < \frac{1}{4}$.

C. $m \leq \frac{1}{4}$.

D. $-\frac{1}{4} < m < 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4\left(\log_2 \sqrt{x}\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + \log_2 x = -m \quad (1)$

Đặt $t = \log_2 x$ với $x \in (0;1)$ thì $t < 0$, khi đó ta có phương trình $t^2 + t = -m \quad (*)$.

Xét $f(t) = t^2 + t \quad (t \in (-\infty; 0))$. Có $f'(t) = 2t + 1; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	0

Nhận thấy với mỗi số thực $t < 0$ cho ta một số thực $x \in (0;1)$, do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt. Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{4}$

Câu 43.7: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_2^2(2x) - 2\log_2 x^2 - m - 1 = 0$ có nghiệm, trong đó có đúng một nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; 16\right]$?

A. 10.

B. 8.

C. 7.

D. 6.

Lời giải

Chọn DĐiều kiện: $x > 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$(1 + \log_2 x)^2 - 4\log_2 x - m - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x = m.$$

Đặt $t = \log_2 x$, với mỗi $x \in \left[\frac{1}{2}; 16\right]$ thì cho một giá trị $t \in [-1; 4]$.Khi đó ta được phương trình $t^2 - 2t = m$.Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t$ trên đoạn $[-1; 4]$.

Ta có $f'(t) = 2t - 2, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên của $f(t)$

t	-1	1	4
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	3	-1	8

Từ bảng biến thiên suy ra $m \in \{-1\} \cup (3; 8]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy có tất cả 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 43.8: Tìm m để phương trình: $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m-4 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{5}{2}, 4\right]$.

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $-3 \leq m \leq \frac{7}{3}$.

C. $m \in \emptyset$.

D. $-3 < m \leq \frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 2$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow (m-1)[-2\log_2(x-2)]^2 + 4(m-5)\log_2(x-2) + 4m-4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(m-1)\log_2^2(x-2) + 4(m-5)\log_2(x-2) + 4m-4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)\log_2^2(x-2) + (m-5)\log_2(x-2) + m-1 = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = \log_2(x-2)$. Vì $x \in \left[\frac{5}{2}, 4\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Phương trình (1) trở thành $(m-1)t^2 + (m-5)t + m-1 = 0$.

$$\Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1} \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1}, t \in [-1; 1]$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{-4t^2 + 4}{(t^2 + t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

t	-1						1
$f'(t)$				+			
$f(t)$	-3	↗					$\frac{7}{3}$

Phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left[\frac{5}{2}, 4\right] \Leftrightarrow$ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [-1; 1]$.

Từ bảng biến thiên suy ra $-3 \leq m \leq \frac{7}{3}$.

Câu 43.9: Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3(mx) = 2\log_3(x+1)$ có hai nghiệm phân biệt là

A. $m \geq 4$.

B. $m > 4$.

C. $m < 0$ và $m \geq 4$.

D. $m < 0$ và $m > 4$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \log_3(mx) = 2\log_3(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ mx = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ mx = x^2 + 2x + 1 \end{cases} (*).$$

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của (*).

$$\text{Với } x \neq 0: (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ m = x + 2 + \frac{1}{x} \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$ với $x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (do } x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\} \text{)}.$$

Bảng biến thiên:

x	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	
$f(x)$	0	$+\infty$	$-\infty$	4 $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m > 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 43.10: Cho phương trình $\ln^2(x^2+1) - 8\ln(x^2+1) - m = 0$ (với m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

A. 0.

B. 15.

C. 16.

D. 17.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \ln(x^2+1)$ (vì $x^2+1 \geq 1$ nên $t \geq 0$), khi đó ta có phương trình $t^2 - 8t = m$ (*)

Nhận thấy: nếu $t=0$ thì ta có một giá trị $x=0$. Nếu $t>0$ thì $x = \pm\sqrt{e^t - 1}$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 8t$ với $t \geq 0$. Ta có bảng biến thiên:

t	0	4	$+\infty$
$f(t)$	0	$-\infty$	$+\infty$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow -16 < m < 0$

Vậy có 15 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 43.11: Cho phương trình $\sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} = m(\log_2 x - 3)$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm thuộc $[16; +\infty)$.

- A. $1 < m \leq 2$. B. $1 < m \leq \sqrt{5}$. C. $\frac{3}{4} \leq m \leq \sqrt{5}$. D. $1 \leq m \leq \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \log_2 x$ với $x \in [16; +\infty)$ thì $t \geq 4$, khi đó ta có phương trình $\sqrt{t^2 - 2t - 3} = m(t - 3) (*)$

- Với $m \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm, do $\begin{cases} \sqrt{t^2 - 2t - 3} > 0 \\ t - 3 > 0 \end{cases}, \forall t \geq 4$.

- Với $m > 0$ thì $(*) \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = m^2(t - 3)^2 \Leftrightarrow (1 - m^2)t^2 + 2(3m^2 - 1)t - 3(1 + 3m^2) = 0 (1)$

+ Nếu $m = 1 \Rightarrow t = 3$: không thỏa mãn.

+ Nếu $m \neq 1$ thì $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ (loại)} \\ t = \frac{-3m^2 - 1}{1 - m^2} \end{cases}$

Do đó để phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{-3m^2 - 1}{1 - m^2} \geq 4 \Leftrightarrow 1 < m \leq \sqrt{5}$ (thỏa).

Câu 43.12: Cho phương trình $\sqrt{\log_3^2 x - 4\log_3 x - 5} = m(\log_3 x + 1)$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm thuộc $[27; +\infty)$.

- A. $0 < m < 2$. B. $0 < m \leq 2$. C. $0 \leq m \leq 1$. D. $0 \leq m < 1$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_3 x$ với $x \in [27; +\infty)$ thì $t \geq 3$, khi đó ta có phương trình $\sqrt{t^2 - 4t - 5} = m(t + 1) (*)$

Điều kiện xác định: $\begin{cases} t \leq -1 \\ t \geq 5 \end{cases}$.

- Với $m < 0$ thì phương trình vô nghiệm, do $\begin{cases} \sqrt{t^2 - 4t - 5} \geq 0 \\ t + 1 > 0 \end{cases}, \forall t \geq 5$.

- Với $m = 0$ thì $(*) \Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 4t - 5} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 5 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$.

- Với $m > 0$ thì $(*) \Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = m^2(t + 1)^2 \Leftrightarrow (1 - m^2)t^2 - (2m^2 + 4)t - 5 - m^2 = 0 (**)$

+ Nếu $m = 1 \Rightarrow t = -1$: không thỏa mãn.

+ Nếu $m \neq 1$ thì $(**) \Leftrightarrow (t + 1)[(1 - m^2)t - m^2 - 5] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = \frac{m^2 + 5}{1 - m^2} \end{cases}$

Do đó để phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{m^2+5}{1-m^2} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{6m^2}{1-m^2} \geq 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$, kết hợp $m > 0$ suy ra $0 < m < 1$.

Vậy với $0 \leq m < 1$ thì phương trình đã cho có nghiệm thuộc $[27; +\infty)$.

Câu 43.13: Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\log^2 |\cos x| - m \log \cos^2 x - m^2 + 4 = 0$ vô nghiệm.

- A. $m \in (\sqrt{2}; 2)$. B. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. C. $m \in (-\sqrt{2}; 2)$. D. $m \in (-2; \sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log^2 |\cos x| - m \log \cos^2 x - m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \log^2 |\cos x| - 2m \log |\cos x| - m^2 + 4 = 0$ (*)

Đặt $\log |\cos x| = t$. Do $|\cos x| \leq 1 \Rightarrow t \leq 0$

Khi đó phương trình (*) trở thành: $t^2 - 2mt - m^2 + 4 = 0$. (1)

Phương trình (*) vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) vô nghiệm hoặc có các nghiệm đều dương. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' < 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \cdot (-m^2 + 4) < 0 \\ m^2 - 1 \cdot (-m^2 + 4) \geq 0 \\ \frac{2m}{1} > 0 \\ \frac{-m^2 + 4}{1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 4 < 0 \\ 2m^2 - 4 \geq 0 \\ 2m > 0 \\ -m^2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \\ m \geq \sqrt{2} \\ -2 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < 2$$

Câu 43.14: Cho hàm số $3 \log_{27} [2x^2 - (m+3)x + 1 - m] + \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - x + 1 - 3m) = 0$. Số các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| < 15$ là:

- A. 14 B. 11 C. 12 D. 13

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3 \log_{27} [2x^2 - (m+3)x + 1 - m] + \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - x + 1 - 3m) = 0$

$$\Leftrightarrow \log_3 [2x^2 - (m+3)x + 1 - m] = \log_3 (x^2 - x + 1 - 3m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 - 3m > 0 \\ 2x^2 - (m+3)x + 1 - m = x^2 - x + 1 - 3m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 - 3m > 0 (*) \\ x^2 - (m+2)x + 2m = 0 (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 - 3m > 0 (*) \\ \begin{cases} x = m \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm

$$\text{phân biệt thỏa mãn } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m + 1 - 3m > 0 \\ 2^2 - 1 + 1 - 3m > 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 1 > 0 \\ 4 - 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 2 - \sqrt{3}.$$

Theo giả thiết $|x_1 - x_2| < 15 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 < 225 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 221 < 0 \Leftrightarrow -13 < m < 17$

Do đó $-13 < m < 2 - \sqrt{3}$. Vậy số các giá trị nguyên của m thỏa mãn là 13.

Câu 43.15: Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3 (5x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 4.

B. 6.

C. Vô số.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình } \log_9 x^2 - \log_3 (5x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ \log_3 \frac{5x-1}{x} = \log_3 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ 5 - \frac{1}{x} = m \end{cases} \quad (2)$$

Cách 1..

Xét $f(x) = 5 - \frac{1}{x}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

Có $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{1}{x}\right) = 5$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	5

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $x > \frac{1}{5}$.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow 0 < m < 5$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m > 0$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.

Cách 2.

$$(2) \Leftrightarrow (5-m)x = 1 \quad (3)$$

Với $m = 5$, phương trình (3) thành $0 \cdot x = 1$ (vô nghiệm).

Với $m \neq 5$, $(3) \Leftrightarrow x = \frac{1}{5-m}$.

$$\text{Xét } x > \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5-m} > \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{m}{5(5-m)} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 5.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m > 0$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm

Câu 43.16: Cho phương trình $(x-2)\log_5^2(x-m) + (x-3)\log_5(x-m) = 1$ với m là tham số. Tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng $(3; +\infty)$ là tập $S = (a; +\infty)$. Đánh giá nào sau đây đúng?

- A.** $-3 < a < -1$. **B.** $-1 < a < 1$. **C.** $1 < a < 2$. **D.** $2 < a < 5$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \log_5(x-m)$. Phương trình đã cho trở thành

$$(x-2)t^2 + (x-3)t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{x-2} \end{cases} (x > 3)$$

$$+) \text{ Với } t = -1 \Rightarrow x = m + \frac{1}{5} > 3 \Leftrightarrow m > \frac{14}{5}.$$

$$+) \text{ Với } t = \frac{1}{x-2} \Rightarrow x - m = 5^{\frac{1}{x-2}} \Leftrightarrow m = x - 5^{\frac{1}{x-2}}$$

Mà hàm số $f(x) = x - 5^{\frac{1}{x-2}}$ đồng biến trên $(3; +\infty) \Rightarrow m > f(3) = -2$.

Kết hợp hai trường hợp trên ta được $m \in (-2; +\infty) \Rightarrow a = -2$.

Câu 43.17: Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

- A.** 2. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2((x-1)^2 + 2) = 2^{2|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2) (*)$$

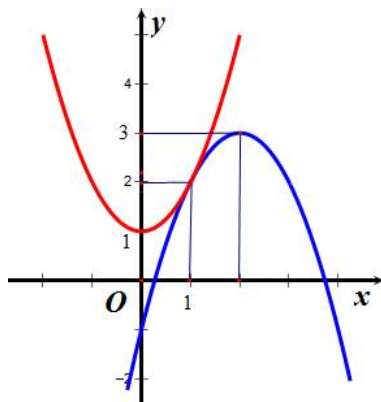
$$\text{Đặt } f(t) = 2^t \log_2(t+2), t \geq 0; f'(t) = 2^t \ln 2 \cdot \log_2(t+2) + 2^t \frac{1}{(t+2) \ln 2} > 0, \forall t \geq 0.$$

$\Rightarrow$ hàm số $f(t) = 2^t \log_2(t+2)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow f[(x-1)^2] = f[2|x-m|] \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-m) = (x-1)^2 \\ 2(x-m) = -(x-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 = 2m \\ x^2 + 1 = 2m \end{cases} (I)$$

Vẽ đồ thị của hai hàm số $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ và $g(x) = x^2 + 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ.



Từ đồ thị suy ra (I) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 3 \\ 2m = 2 \\ 2m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = 1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy tổng các giá trị của m là $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3$.

Câu 43.18: Cho phương trình $3^x + m = \log_3(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-15; 15)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 15

B. 16

C. 9

D. 14

Lời giải

Chọn D

Đặt $\log_3(x - m) = a \Leftrightarrow x - m = 3^a$

Ta có: $3^x + m = \log_3(x - m) \Leftrightarrow 3^x + x = \log_3(x - m) + x - m \Leftrightarrow 3^x + x = 3^a + a \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$, với $t \in \mathbb{R}$. Có $f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên tập xác định. Do đó $(*) \Leftrightarrow f(x) = f(a) \Leftrightarrow x = a \Leftrightarrow x = \log_3(x - m) \Leftrightarrow 3^x = x - m \Leftrightarrow 3^x - x = -m$

Xét hàm số $g(x) = 3^x - x$, với $x \in \mathbb{R}$. Có $g'(x) = 3^x \ln 3 - 1, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)$	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	$+\infty$	$g\left(\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)\right)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy các giá trị của tham số để phương trình có nghiệm là

$m \in \left(-\infty; -g\left(\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)\right) \right]$. Vậy số giá trị nguyên của $m \in (-15; 15)$ để phương trình đã cho có nghiệm là 14.

Câu 43.19: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\ln(m + \ln(m + \sin x)) = \sin x$ có nghiệm.

- A. $\frac{1}{e} + 1 \leq m \leq e - 1$. B. $1 \leq m \leq e - 1$. C. $1 \leq m \leq \frac{1}{e} + 1$. D. $1 \leq m < e - 1$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u = \ln(m + \sin x)$ ta được hệ phương trình:
$$\begin{cases} u = \ln(m + \sin x) \\ \ln(m + u) = \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^u = m + \sin x \\ e^{\sin x} = m + u \end{cases}$$

Từ hệ phương trình ta suy ra: $e^u + u = e^{\sin x} + \sin x$ (*)

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ có $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow f(u) = f(\sin x) \Leftrightarrow u = \sin x$

Khi đó ta được: $\ln(m + \sin x) = \sin x \Leftrightarrow e^{\sin x} - \sin x = m$ (**)

Đặt $a = \sin x, a \in [-1; 1]$. Phương trình (**) trở thành: $e^a - a = m$ (**)

Xét hàm số $g(a) = e^a - a$ trên $[-1; 1]$.

Hàm số $g(a) = e^a - a$ liên tục trên $[-1; 1]$ và có $\max_{[-1; 1]} g(a) = g(1) = e - 1, \min_{[-1; 1]} g(a) = g(0) = 1$

Hệ phương trình ban đầu có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (**) có nghiệm $\Leftrightarrow 1 \leq m \leq e - 1$.

Câu 43.20: Cho phương trình $m \ln^2(x+1) - (x+2-m) \ln(x+1) - x - 2 = 0$ (1). Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó a thuộc khoảng

- A. $(3, 7; 3, 8)$. B. $(3, 6; 3, 7)$. C. $(3, 8; 3, 9)$. D. $(3, 5; 3, 6)$.

Lời giải

Chọn A

Theo đề ra ta chọn điều kiện của x là $x > 0 \Rightarrow \ln(x+1) > 0$.

TH1: $m = 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \ln(x+1) = -1$ (L)

TH2: $m \neq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x+1) = -1 \text{ (L)} \\ \ln(x+1) = \frac{x+2}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{x+2} = \frac{1}{m}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+2}$ với $x > 0$.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1} - \ln(x+1) = 0$.

Xét hàm số $g(x) = \frac{x+2}{x+1} - \ln(x+1)$ có $g'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} < 0, \forall x > 0$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty) \Rightarrow g(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(0; +\infty)$ (2)

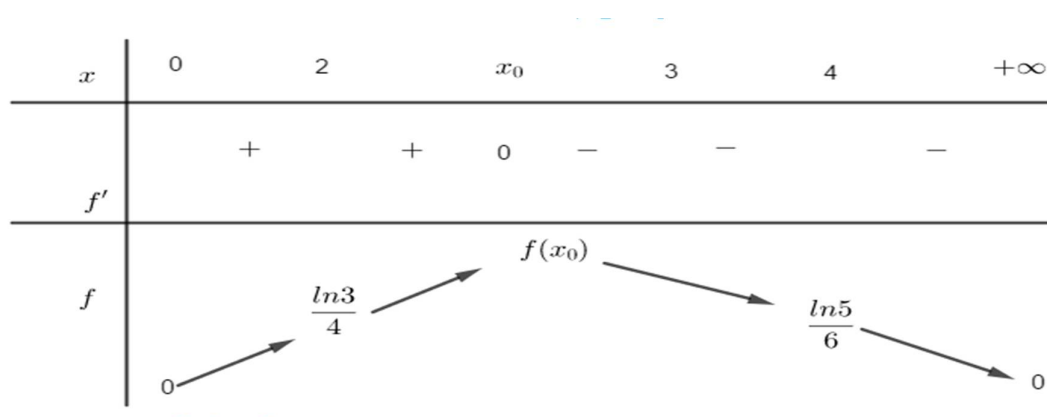
Mặt khác: $g(2)g(3) = \left(\frac{4}{3} - \ln 3\right)\left(\frac{5}{4} - \ln 4\right) < 0$ và hàm số $y = g(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$

Suy ra $g(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (2; 3)$ (3).

Từ (2); (3) suy ra $g(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất $x_0 \in (2; 3)$

$\Rightarrow f'(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất $x_0 \in (2; 3)$.

Bảng biến thiên



Để (1) có 2 nghiệm thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ thì $0 < \frac{1}{m} < \frac{\ln 5}{6} \Leftrightarrow m > \frac{6}{\ln 5}$

$\Rightarrow a = \frac{6}{\ln 5} \approx 3,728$.

Câu 43.21: Giá trị thực của tham số m để phương trình $4\log_3^2(3x) + (2m-3)\log_3 x - 2m-1 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 12$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x > 0$.

Ta có $pt \Leftrightarrow (1 + \log_3 x)^2 + (2m-3)\log_3 x - 2m-1 = 0$.

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x + (2m-1)\log_3 x - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 3^{2m} \end{cases}.$$

Theo đề, ta có: $x_1 + x_2 = 12 \Leftrightarrow 3 + 3^{2m} = 12 \Rightarrow m = 1$.

Câu 43.22: Phương trình $3^{2x^2-3x+m} + 9 = 3^{x^2-x+2} + 3^{x^2-2x+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt?

A. 2019.

B. 2018.

C. 2020.

D. 2021.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3^{2x^2-3x+m} + 9 = 3^{x^2-x+2} + 3^{x^2-2x+m} \Leftrightarrow 3^{2x^2-3x+m} - 3^{x^2-x+2} = 3^{x^2-2x+m} - 9$.

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-x}(3^{x^2-2x+m} - 9) = 3^{x^2-2x+m} - 9 \Leftrightarrow (3^{x^2-x} - 1)(3^{x^2-2x+m} - 9) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2-x} = 1 \\ 3^{x^2-2x+m} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 - 2x + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x^2 - 2x + m - 2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để phương trình đầu có 4 nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1, x \neq 0$.

$$\text{Khi } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ m \neq 2 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m > 0 \\ m \neq 2 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq 2 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \neq m < 3.$$

Vì $m \in [-2018; 2018]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2020 giá trị m cần tìm.

Câu 43.23: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4(\log_3 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{3}} x + m = 0$ có

hai nghiệm thuộc $(0; 1)$.

A. $0 < m < \frac{1}{5}$.

B. $\frac{1}{6} < m < \frac{1}{4}$.

C. $-1 < m < \frac{1}{4}$.

D. $0 < m < \frac{1}{4}$.

Lời giải

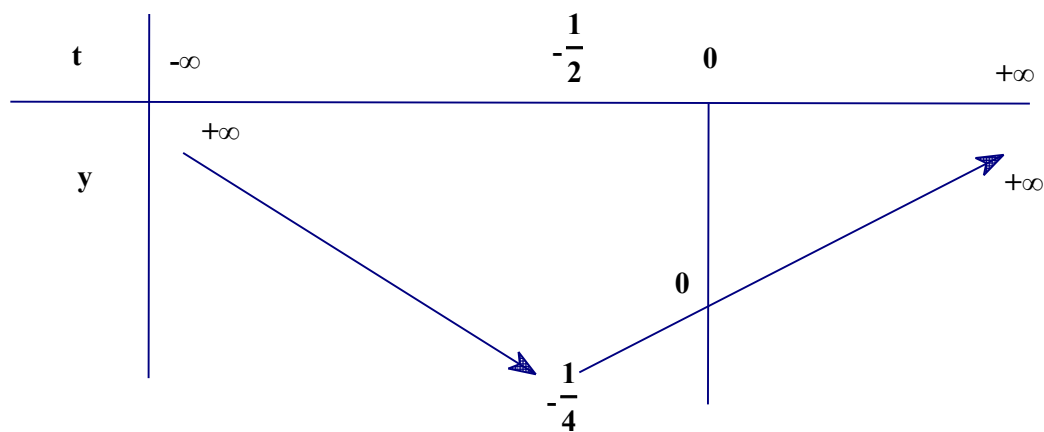
Chọn D

$$\text{Pt: } 4(\log_3 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{3}} x + m = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x + \log_3 x = -m \quad (1)$$

Đặt $t = \log_3 x$, ta được phương trình $t^2 + t = -m$ với $t \in (-\infty; 0)$ khi $x \in (0; 1)$.

Để phương trình (1) có hai nghiệm $x \in (0; 1)$ khi phương trình $t^2 + t = -m$ có hai nghiệm $t \in (-\infty; 0)$.

Xét hàm số $y = t^2 + t$ trên $(-\infty; 0)$.



$$\Rightarrow -\frac{1}{4} < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{4}.$$

Câu 43.24: Điều kiện cần và đủ của tham số m để phương trình $\log_5^2 x - (m-1)\log_5 x + 4 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1; 25]$ là

A. $3 < m \leq 4$.

B. $3 \leq m \leq \frac{10}{3}$.

C. $\frac{10}{3} < m \leq 4$.

D. $3 < m \leq \frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Pt: $\log_5^2 x - (m-1)\log_5 x + 4 - m = 0$ (1)

Đặt $t = \log_5 x$, với $t \in [0; 2]$ khi $x \in [1; 25]$.

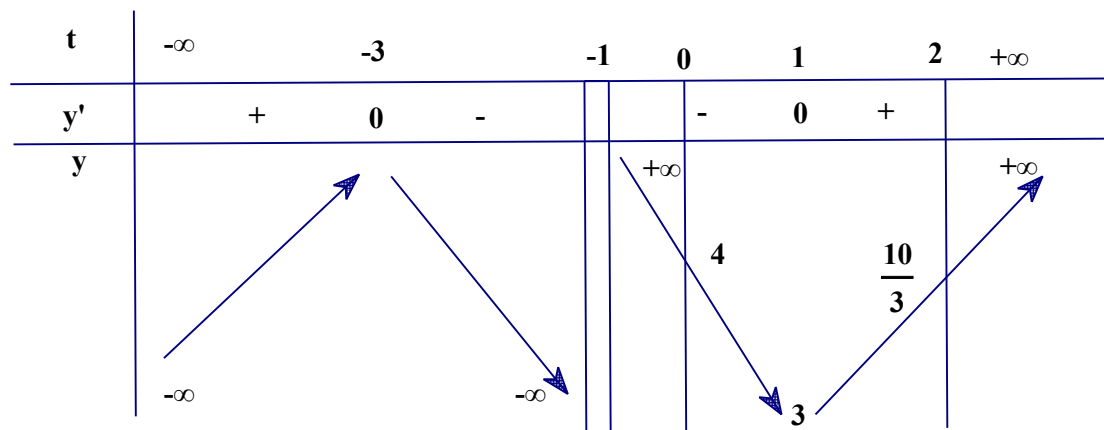
Ta được phương trình $t^2 - (m-1)t + 4 - m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + t + 4}{t+1}$ (*)

Để phương trình (1) có hai nghiệm $x \in [1; 25]$ khi phương trình (*) có hai nghiệm $t \in [0; 2]$.

Xét hàm số $y = \frac{t^2 + t + 4}{t+1}$ trên $[0; 2]$.

Ta có $y' = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \end{cases}$

BBT.



$$\Rightarrow 3 < m \leq \frac{10}{3}.$$

Câu 43.25: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - (m+2)\log_3 x + 3m-1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 27$.

A. $m = -2$.B. $m = -1$.C. $m = 1$.D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn CĐiều kiện $x > 0$.Đặt $t = \log_3 x$, ta có phương trình $t^2 - (m+2)t + 3m-1 = 0$.GS: $t_1 = \log_3 x_1, t_2 = \log_3 x_2 \Rightarrow t_1 + t_2 = \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = \log_3 x_1 x_2 = 3$.

Vậy để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn yêu cầu đề bài khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 8 > 0 \\ m + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 43.26: Tổng tất cả các giá trị m để phương trình $3^{x^2-2x+1} \log_3(x^2+3-2x) = 9^{|x-m|} \log_3(2|x+m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. 4

B. 2

C. 0

D. 3

Lời giải

Chọn DTa có $3^{x^2-2x+1} \log_3(x^2+3-2x) = 9^{|x-m|} \log_3(2|x+m|+2)$ (1)

$$\Leftrightarrow 3^{(x-1)^2} \cdot \log_3[(x-1)^2+2] = 3^{2|x-m|} \cdot \log_3(2|x-m|+2) \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t \cdot \log_3(t+2), t \geq 0$.Vì $f'(t) > 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.Khi đó (2) $\Leftrightarrow f[(x-1)^2] = f(2|x-m|) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m|$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 + 2m = 0 & (3) \\ x^2 = 2m - 1 & (4) \end{cases}$$

Phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt nếu xảy ra các trường hợp sau:

+) PT (3) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT(4)

$$\Rightarrow m = \frac{3}{2}, \text{ thay vào PT (4) thỏa mãn.}$$

+) PT (4) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT(3)

$$\Rightarrow m = \frac{1}{2}, \text{ thay vào PT (3) thỏa mãn.}$$

+) PT (4) có hai nghiệm phân biệt và PT (3) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm của hai PT trùng nhau

$$(4) \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2m-1}, \text{ với } \frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}. \text{ Thay vào PT (3) tìm được } m = 1.$$

$$\text{KL: } m \in \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \right\}.$$

Cách 2:

Xem phương trình (3) và (4) là hai đường cong. Ta sẽ tìm điểm chung của hai đường cong đó.

Ta giải hệ: $\begin{cases} x^2 - 4x + 1 + 2m = 0 \\ x^2 = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ m = 1 \end{cases}.$

Như vậy với $m = 1$ thì (3) và (4) có nghiệm chung là $x = 1$.

Thay $m = 1$ vào lần lượt vào 2 phương trình ta được 3 nghiệm $\{\pm 1; 3\}$. Vậy ta nhận $m = 1$.

Xét $m \neq 1$, phương trình có 3 nghiệm khi (3) có 2 nghiệm phân biệt và (4) có nghiệm kép hoặc ngược lại. Như vậy ta có:

$$\begin{cases} \Delta' = 3 - 2m > 0 \\ 2m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Từ đó ta có 3 giá trị của tham số m là $\left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$.

Câu 43.27: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x - \frac{3}{\log_2(x+1)} = m$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $-1 < m \neq 0$.

B. $m > -1$.

C. Không tồn tại m .

D. $-1 < m < 0$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Xét hàm số

$$f(x) = x - \frac{3}{\log_2(x+1)}; f'(x) = 1 + \frac{3}{(x+1) \cdot \ln 2 \cdot \log_2^2(x+1)} > 0, \forall x \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$$

Bảng biến thiên

x	-1	0	$+\infty$
y'		+	+
y	-1	$+\infty$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $x - \frac{3}{\log_2(x+1)} = m$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > -1$.

Câu 43.28: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $m \cdot 5^{x^2-3x+2} + 5^{4-x^2} = 5^{6-3x} + m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

A. 3

B. 2

C. 1

D. 4

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} 5^{x^2-3x+2} = u \\ 5^{4-x^2} = v \end{cases} \Rightarrow u \cdot v = 5^{6-3x}$. Khi đó phương trình trở thành

$$mu + v = uv + m \Leftrightarrow m(u-1) - v(u-1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (u-1)(m-v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{x^2-3x+2} = 1 \\ 5^{2-x^2} = m \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ 4 - x^2 = \log_5 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x^2 = 4 - \log_5 m \end{cases}.$$

Để phương trình có ba nghiệm thì:

+) TH1: $x^2 = 4 - \log_5 m$ có nghiệm kép

Tức $4 - \log_5 m = 0 \Leftrightarrow m = 525$.

+) TH2: $x^2 = 4 - \log_5 m$ có một nghiệm bằng 1.

Tức $4 - \log_5 m = 1 \Leftrightarrow m = 75$.

+) TH3: $x^2 = 4 - \log_5 m$ có một nghiệm bằng 2.

Tức $4 - \log_5 m = 4 \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy có 3 giá trị của m cần tìm.

Câu 43.29: Với giá trị của tham số m thì phương trình $(m+1)9^x - 2(2m-3)3^x + 6m+5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

- A.** $-4 < m < -1$. **B.** Không tồn tại m . **C.** $-1 < m < \frac{3}{2}$. **D.** $-1 < m < -\frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $3^x = t > 0$. Phương trình đã cho trở thành: $\underbrace{(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5}_{f(t)} = 0$. (*)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ (m+1)f(1) < 0 \\ (m+1)(6m+5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ (m+1)(3m+12) < 0 \\ (m+1)(6m+5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < -1.$$

Câu 43.30: Cho phương trình $(\sqrt{2}+1)^{x^2+2mx+2} - (\sqrt{2}+1)^{2x^2+4mx+2+m} - x^2 - 2mx - m = 0$. Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $(\frac{1}{2}; 2)$.

- A.** $-\frac{1}{8} < m < 0$ **B.** $-\frac{4}{5} < m < 0$ **C.** $-\frac{1}{8} < m < 1$ **D.** $\Rightarrow -\frac{1}{8} < m < 2$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $(\sqrt{2}+1)^{x^2+2mx+2} - (\sqrt{2}+1)^{2x^2+4mx+2+m} - x^2 - 2mx - m = 0$.

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^{x^2+2mx+2} = (\sqrt{2}+1)^{2x^2+4mx+2+m} + x^2 + 2mx + m.$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^{x^2+2mx+2} + x^2 + 2mx + 2 = (\sqrt{2}+1)^{2x^2+4mx+2+m} + 2x^2 + 4mx + 2 + m.$$

Xét hàm số: $f(t) = (\sqrt{2}+1)^t + t$.

Ta có hàm số $f(t) = (\sqrt{2}+1)^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình có dạng $f(x^2 + 2mx + 2) = f(2x^2 + 4mx + 2 + m)$.

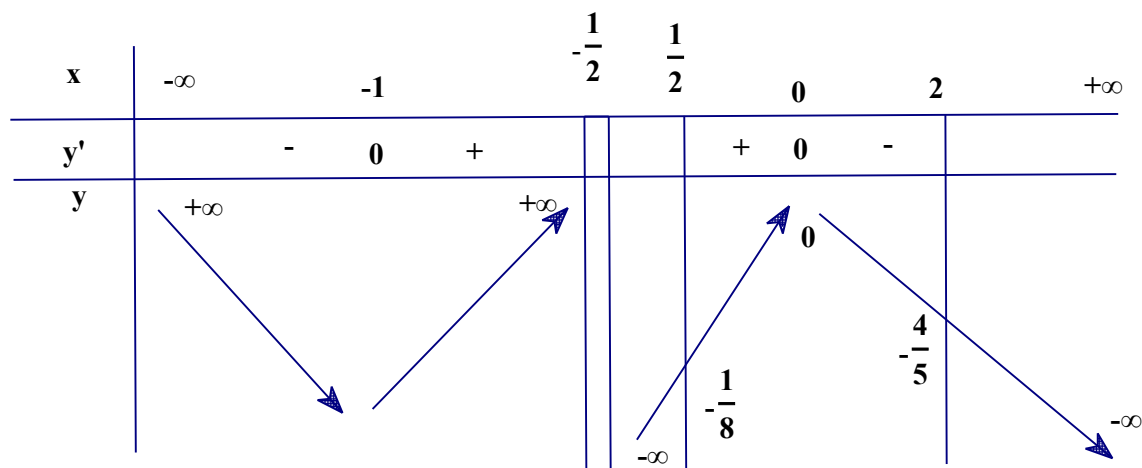
$$\Rightarrow x^2 + 2mx + 2 = 2x^2 + 4mx + 2 + m \Leftrightarrow x^2 + 2mx + m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{x^2}{2x+1}.$$

Để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(\frac{1}{2}; 2)$ khi và chỉ khi phương trình

$$m = -\frac{x^2}{2x+1} \text{ có hai nghiệm thuộc } (\frac{1}{2}; 2).$$

Xét hàm số $y = -\frac{x^2}{2x+1}$ trên khoảng $(\frac{1}{2}; 2)$.

$$\text{Ta có } y' = -\frac{2x^2+2x}{(2x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow -\frac{1}{8} < m < 0.$$

Câu 43.31: Với những giá trị nào của m thì phương trình : $3^{x^2-2x+2} + 2^{2(x^2-2x+2)} + x^2 - 2x = m - 2$ có nghiệm.

A. $m \geq 8$

B. $m \geq 7$

C. $m \geq 6$

D. $m \geq 5$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 3^{x^2-2x+2} + 2^{2(x^2-2x+2)} + x^2 - 2x = m - 2.$$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+2} + 4^{x^2-2x+2} + x^2 - 2x + 2 = m$$

$$\text{Đặt : } t = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow t \geq 1$$

$$\text{Khi đó phương trình trở thành } 3^t + 4^t + t = m$$

Ta có hàm số $f(t) = 3^t + 4^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\text{Để phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow m \geq \min_{[1; +\infty)} (3^t + 4^t + t) \Leftrightarrow m \geq 8.$$

Câu 43.32: Với những giá trị nào của m thì phương trình :

$$(\sqrt{5}-2)^{2x^3+mx^2} - (\sqrt{5}-2)^{x^3+4mx^2-m} = 2x^3 - 6mx^2 + 2m \text{ có nghiệm duy nhất.}$$

A. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}, m \neq 0$

B. $m < -\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$

D. $m > -\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } (\sqrt{5}-2)^{2x^3+mx^2} - (\sqrt{5}-2)^{x^3+4mx^2-m} = 2x^3 - 6mx^2 + 2m.$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5}-2)^{2x^3+mx^2} - (\sqrt{5}-2)^{x^3+4mx^2-m} = 2x^3 - 6mx^2 + 2m$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5}-2)^{2x^3+mx^2} - 2(2x^3 + mx^2) = (\sqrt{5}-2)^{x^3+4mx^2-m} - 2(x^3 + 4mx^2 - m)$$

Xét hàm số : $f(t) = (\sqrt{5}-2)^t - t$

Ta có hàm số $f(t) = (\sqrt{5}-2)^t - t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó phương trình có dạng $f(2x^3 + mx^2) = f(x^3 + 4mx^2 - m)$

$$\Rightarrow 2x^3 + mx^2 = x^3 + 4mx^2 - m \Leftrightarrow x^3 - 3mx^2 + m = 0$$

Xét hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + m \Rightarrow y' = 3x^2 - 6mx$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$$

+) TH1 : $m = 0 \Rightarrow y' = 3x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi đó hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy khi đó phương trình có một nghiệm duy nhất.

+) TH1 : $m \neq 0 \Rightarrow y(0) = m, y(2m) = -4m^3 + m$. Khi đó để phương trình có một nghiệm duy

nhất khi $y(0).y(2m) > 0 \Leftrightarrow m(-4m^3 + m) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$.

Câu 43.33: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thì phương trình sau có nghiệm

$$(2+\sqrt{3})^{\sin x+m} - (7+4\sqrt{3})^{\cos^2 x - \frac{1}{2}} + m = \cos 2x - \sin x$$

A. 2

B. 1

C. 3

D. 4

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } (2+\sqrt{3})^{\sin x+m} - (7+4\sqrt{3})^{\cos^2 x - \frac{1}{2}} + m = \cos 2x - \sin x.$$

$$\Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{\sin x+m} - (2+\sqrt{3})^{2\cos^2 x - 1} + m = \cos 2x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{\sin x+m} + \sin x + m = (2+\sqrt{3})^{\cos 2x} + \cos 2x$$

Xét hàm số : $f(t) = (2+\sqrt{3})^t + t$

Ta có hàm số $f(t) = (2+\sqrt{3})^t + t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó phương trình có dạng $f(\sin x + m) = f(\cos 2x)$

$$\Rightarrow \sin x + m = \cos 2x \Leftrightarrow -2\sin^2 x - \sin x + 1 = m$$

Đặt : $t = \sin x \Rightarrow t \in [-1; 1]$

Khi đó phương trình trở thành $-2t^2 - t + 1 = m$

Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \underset{[-1;1]}{\text{Min}}(-2t^2 - t + 1) \leq m \leq \underset{[-1;1]}{\text{Max}}(-2t^2 - t + 1) \Leftrightarrow -2 \leq m \leq \frac{9}{8}$

Câu 43.34: Giá trị thực của tham số m để phương trình $25^x - 4(m+1).5^x + 5(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 4)(x_2 + 4) = 30$ thuộc khoảng nào sau đây ?

A. (6; 7).

B. (4; 5).

C. (3; 4).

D. (2; 3).

Lời giải.

Chọn AĐặt $t = 5^x$, ta có phương trình $t^2 - 4(m+1)t + 5(4m-1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 4m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 5 \\ 5^x = 4m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 5^x = 4m-1(1) \end{cases}$$

Ta có $(x_1+4)(x_2+4) = 30 \Leftrightarrow 5.(x_2+4) = 30 \Leftrightarrow x_2 = 2$ Thay vào (1) ta được $5^2 = 4m-1 \Leftrightarrow m = \frac{26}{4}$

Câu 43.35: Giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2(2m+1).3^x + 243 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3) = 30$ thuộc khoảng nào sau đây ?

A. (6;7).**B.** (8;9).**C.** (7;8).**D.** (2;3).

Lời giải

Chọn BĐặt $t = 3^x$, ta có phương trình $t^2 - 2(2m+1)t + 243 = 0$ GS: phương trình có nghiệm $t_1 = 3^{x_1}, t_2 = 3^{x_2} \Rightarrow t_1.t_2 = 3^{x_1+x_2} = 243 = 3^5 \Leftrightarrow x_1+x_2 = 5$ Ta có $(x_1+3)(x_2+3) = 30 \Leftrightarrow x_1x_2 + 3(x_1+x_2) + 9 = 30 \Leftrightarrow x_1x_2 = 6$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1+x_2 = 5 \\ x_1.x_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 9 \\ t_2 = 27 \end{cases} \Rightarrow t_1+t_2 = 36$$

Mà theo đề bài $t_1+t_2 = 4m+2 = 36 \Leftrightarrow m = \frac{34}{4}$

Câu 43.36: Giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_2^2 x - 3.\log_2 x + 4 - m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+4)(x_2+4) = 48$ thuộc khoảng nào sau đây ?

A. (1;2).**B.** (1;3).**C.** (0;1).**D.** (0;2).

Lời giải

Chọn BĐặt $t = \log_2 x$, ta có phương trình $t^2 - 3t + 4 - m = 0$ GS: phương trình có nghiệm $t_1 = \log_2 x_1, t_2 = \log_2 x_2 \Rightarrow t_1+t_2 = \log_2 x_1x_2 = 3 \Leftrightarrow x_1x_2 = 8$ Ta có $(x_1+4)(x_2+4) = 48 \Leftrightarrow x_1x_2 + 4(x_1+x_2) + 16 = 48 \Leftrightarrow x_1+x_2 = 6$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1+x_2 = 6 \\ x_1.x_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow t_1.t_2 = 2$$

Mà theo đề bài $t_1.t_2 = 4-m = 2 \Leftrightarrow m = 2$

Câu 43.37: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\log_{x^2+y^2+3}(2x-6y+5) = 1$ và $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} - m = 0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 3.**B.** 4.**C.** 5.**D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\log_{x^2+y^2+3}(2x-6y+5)=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+3=2x-6y+5$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+6y-2=0$$

Ta thấy phương trình $x^2+y^2-2x+6y-2=0$ là phương trình đường tròn tâm $I(1;-3)$ bán

$$\text{kinh } R=\sqrt{12}$$

Để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán khi đường thẳng

$$\Delta: \sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0 \text{ tiếp xúc với đường tròn } (C): x^2+y^2-2x+6y-2=0$$

$$\text{Khi và chỉ khi } d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|\sqrt{3}+3-m-\sqrt{3}|}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=3+4\sqrt{3} \\ m=3-4\sqrt{3} \end{cases}$$

Câu 43.38: Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_5(\sqrt{mx}) = \log_5(x+1)$ có hai nghiệm phân biệt là

A. $m \geq 4$.

B. $m > 4$.

C. $m < 0$ và $m \geq 4$.

D. $m < 0$ và $m > 4$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \log(\sqrt{mx}) = \log(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ \sqrt{mx} = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ mx = x^2 + 2x + 1 \end{cases} (*)$$

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của (*).

$$\text{Với } x \neq 0: (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ m = x + 2 + \frac{1}{x} \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$ với $x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (do } x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\} \text{)}.$$

Bảng biến thiên:

x	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	
$f(x)$	0	$+\infty$	4	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m > 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 43.39: Cho bất phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 \geq 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{5}{2}, 4\right]$ là

- A. $[-3; +\infty)$. B. $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$. C. $\left[-3; \frac{7}{3}\right]$. D. $\left(-\infty; \frac{7}{3}\right]$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 2$.

$$\text{Ta có: } (m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4(m-1)\log_2(x-2) + 4(m-5)\log_2(x-2) + 4m - 4 \geq 0$$

Đặt $t = \log_2(x-2)$, ta có phương trình trở thành: $(m-1)t^2 + (m-5)t + m - 1 \geq 0$ (*)

Với $x \in \left[\frac{5}{2}; 4\right]$, ta có: $t \in [-1; 1]$.

$$(*) \Leftrightarrow m \geq \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1}, \quad t \in [-1; 1].$$

Để bất phương trình có nghiệm $t \in [-1; 1]$

$$\text{Khi và chỉ khi } m \geq \min_{t \in [-1; 1]} \left(\frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1} \right).$$

$$f(t) = \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1}. \text{ Ta có: } f'(t) = \frac{-4t^2 + 4}{(t^2 + t + 1)^2} \geq 0, \forall t \in [-1; 1].$$

$$\text{Suy ra: } f(-1) \leq f(t) \leq f(1), \forall t \in [-1; 1] \text{ hay } -3 \leq f(t) \leq \frac{7}{3}, \forall t \in [-1; 1].$$

Vậy $m \geq -3$.

Câu 43.40: Cho bất phương trình $\log_2^2(2x) - (m+1)\log_2 x + m - 3 \leq 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[4; 4\sqrt{2}]$ là

- A. $m \leq \frac{7}{2}$. B. $m \geq \frac{9}{2}$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m \geq \frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_2^2(2x) - (m+1)\log_2 x + m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 - (m+1)\log_2 x + m - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x + (1-m)\log_2 x + m - 2 \leq 0$$

Với $x \in [4; 4\sqrt{2}] \Rightarrow t \in \left[1; \frac{5}{2}\right]$, ta có bất phương trình bậc hai $t^2 + (1-m)t + m - 2 \leq 0$.

Bài toán trở thành tìm m để bất phương trình: $t^2 + (1-m)t + m - 2 \leq 0, \forall t \in \left[2; \frac{5}{2}\right]$.

$$t^2 + (1-m)t + m - 2 \leq 0, \forall t \in \left[2; \frac{5}{2}\right] \Leftrightarrow (t-1)(t+2-m) \leq 0, \forall t \in \left[2; \frac{5}{2}\right] (*)$$

Vì $t-1 > 0, \forall t \in \left[2; \frac{5}{2}\right]$, nên $(*) \Leftrightarrow t+2-m \leq 0, \forall t \in \left[2; \frac{5}{2}\right] \Leftrightarrow \frac{5}{2} + 2 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{9}{2}$.