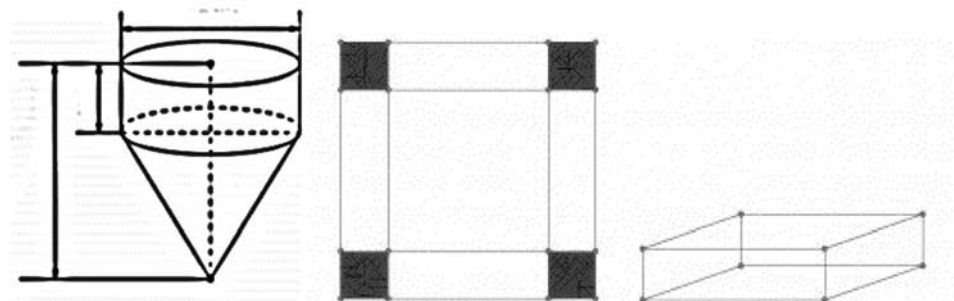


NGUYỄN MINH ĐỨC



40 BÀI TOÁN TỐI ƯU THỰC TẾ

- TÀI LIỆU LUYỆN THI TRẮC NGHIỆM MÔN TOÁN
- BÀI TẬP GIẢI CHI TIẾT



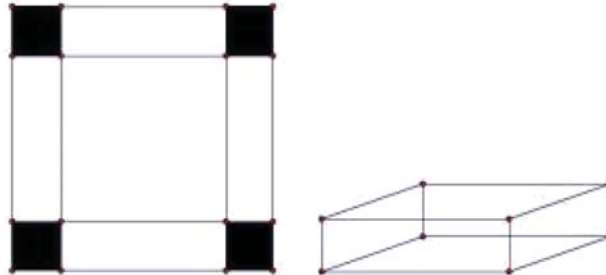
<https://web.facebook.com/mdcs1602>

Gmail: minhduck2pi@gmail.com – **SĐT:** 01277798889

PHẦN I: ĐỀ BÀI.

Câu 1: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

Đề Minh Họa Môn Toán – THPT QG 2017



A. $x = 6$

B. $x = 3$

C. $x = 2$

D. $x = 4$

Câu 2: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng 1dm^3 và diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy của hình trụ phải bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\text{dm}$

B. $\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\text{dm}$

C. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{dm}$

D. $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\text{dm}$

Câu 3: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, các nhà sinh học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ có cân nặng $P = 960 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

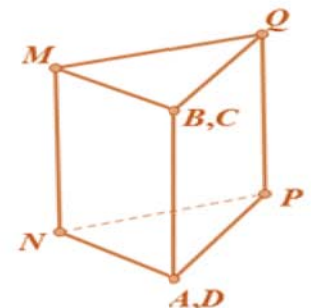
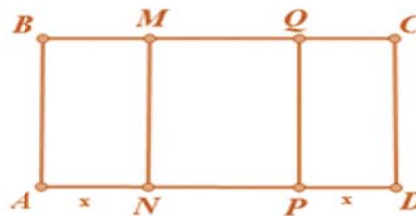
A. 23

B. 24

C. 25

D. 26

Câu 4: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật ABCD có $AD = 60\text{cm}$ và AB có độ dài không đổi. Ta gấp tấm nhôm theo 2 cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết 2 đáy.



Tìm x để thể tích khối lăng trụ tạo thành lớn nhất?

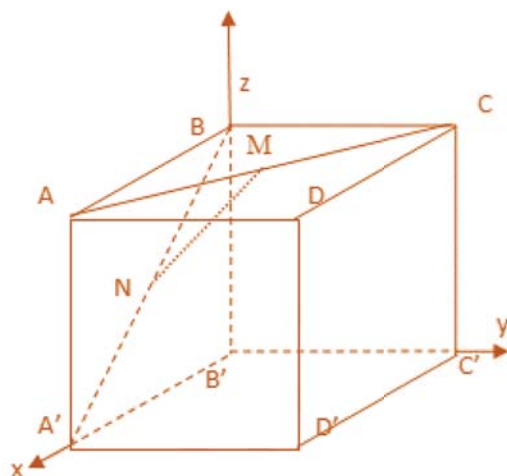
A. $x = 20$

B. $x = 25$

C. $x = 10$

D. $x = 30$

Câu 5: Bên trong một căn phòng hình lập phương, được ký hiệu như sau $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng $4(\text{cm})$. Người ta tiến hành trang trí ngôi nhà bằng cách gắn các dây lụa tại điểm M và N theo thứ tự trên AC và $A'B$ sao cho $AM = A'N = t (0 \leq t \leq 4\sqrt{2} \text{ cm})$. Biết rằng dây lụa được nhập khẩu từ nước ngoài nên rất đắt. Gia chủ muốn chiều dài của dây là ngắn nhất. Hỏi độ dài ngắn nhất của sợi dây mà gia chủ có thể dùng là bao nhiêu?



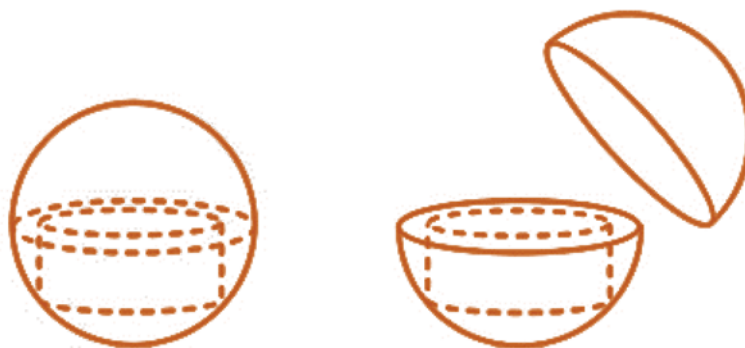
A. $x = 2\sqrt{3}$

B. $x = \sqrt{2}$

C. $x = 2\sqrt{2}$

D. $x = 3$

Câu 6: Công ty mỹ phẩm cho ra một mẫu sản phẩm dưỡng trắng da chống lão hóa mới mang tên Sakura với thiết kế là một khối cầu như một viên bi khổng lồ, bên trong là một khối trụ nằm phần nửa để đựng kem dưỡng da (như hình vẽ). Theo dự kiến nhà sản xuất dự định để khối cầu có bán kính $R = 2\sqrt{6}(\text{cm})$. Tìm thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem để thể tích thực ghi trên bìa hộp là lớn nhất (nhằm thu hút khách hàng).



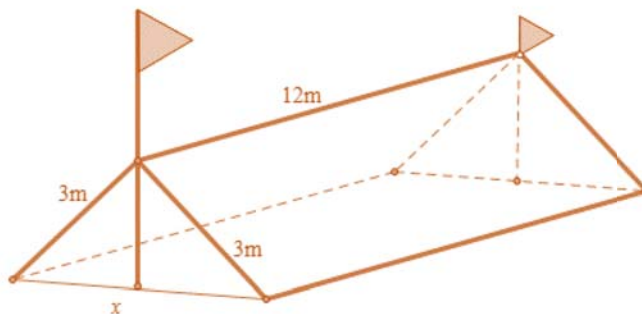
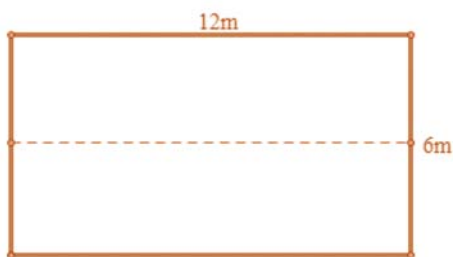
A. $16\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$

B. $48\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$

C. $32\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$

D. $24\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$

Câu 7: Trong đợt chào mừng ngày 26/03/2016, trường THPT Lê Quảng Chí có tổ chức cho học sinh các lớp tham quan dã ngoại ngoài trời, trong số đó có lớp 12A. Để có thể có chỗ nghỉ ngơi trong quá trình tham quan dã ngoại, lớp 12A đã dựng trên mặt đất bằng phẳng 1 chiếc lều bằng bạt từ một tấm bạt hình chữ nhật có chiều dài là 12m và chiều rộng là 6m bằng cách: Gập đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm hai cạnh là chiều rộng của tấm bạt sao cho hai mép chiều dài còn lại của tấm bạt sát đất và cách nhau x m (xem hình vẽ). Tìm x để khoảng không gian phía trong lều là lớn nhất?



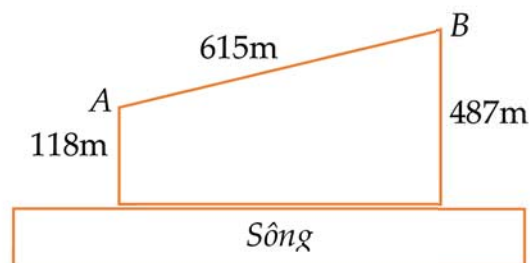
A. $x = 4$

B. $x = 3\sqrt{3}$

C. $x = 3$

D. $x = 3\sqrt{2}$

Câu 8: Cho hai vị trí **A**, **B** cách nhau 615m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ **A** và từ **B** đến bờ sông lần lượt là 118m và 487m. Một người đi từ **A** đến bờ sông để lấy nước mang về **B**. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là:



A. 569,5 m

B. 671,4 m

C. 779,8 m

D. 741,2 m

Câu 9: Trong bài thực hành của môn huấn luyện quân sự có tình huống chiến sĩ phải bơi qua một con sông để tấn công một mục tiêu ở phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một nửa vận tốc chạy trên bộ. Hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất, nếu như dòng sông là thẳng, mục tiêu ở cách chiến sĩ 1 km theo đường chim bay và chiến sĩ cách bờ bên kia sông 100m.

A. $\frac{200}{\sqrt{3}}$.

B. 100.

C. $100\sqrt{101}$.

D. $\frac{200}{\sqrt{2}}$.

Câu 10: Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} \text{ m}^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500.000 đồng/m². Hãy xác định kích thước của hồ nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất. Chi phí đó là?

A. 74 triệu đồng

B. 75 triệu đồng

C. 76 triệu đồng

D. 77 triệu đồng

Câu 11: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng thì sẽ có 2 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng.

- A. 2.225.000. B. 2.100.000 C. 2.200.000 D. 2.250.000

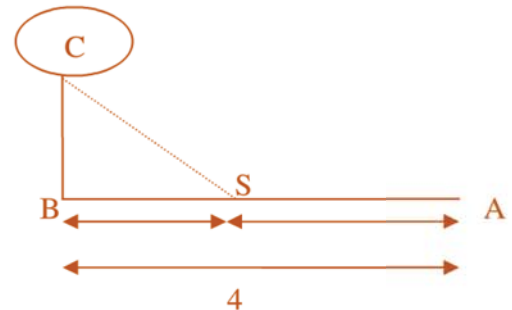
Câu 12: Cho một hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều. Thể tích của hình lăng trụ là V . Để diện tích toàn phần của hình lăng trụ nhỏ nhất thì cạnh đáy của lăng trụ là:

- A. $\sqrt[3]{4V}$ B. $\sqrt[3]{V}$ C. $\sqrt[3]{2V}$ D. $\sqrt[3]{6V}$

Câu 13: Cần phải xây dựng một hố ga, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $3(m^3)$. Tỉ số giữa chiều cao của hố (h) và chiều rộng của đáy (y) bằng 4. Biết rằng hố ga chỉ có các mặt bên và mặt đáy (tức không có mặt trên). Chiều dài của đáy (x) gần nhất với giá trị nào ở dưới để người thợ tốn ít nguyên vật liệu để xây hố ga.

- A. 1 B. 1,5 C. 2 D. 2,5

Câu 14: Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C. khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 1 km. Khoảng cách từ B đến A là 4. Mỗi km dây điện đặt dưới nước là mất 5000 USD, còn đặt dưới đất mất 3000 USD. Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất.



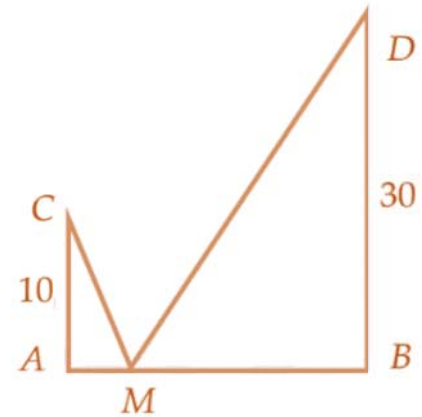
- A. $\frac{15}{4}$ km B. $\frac{13}{4}$ km C. $\frac{10}{4}$ D. $\frac{19}{4}$

Câu 15: Khi một kim loại được làm nóng đến 600°C , độ bền kéo của nó giảm đi 50%. Sau khi kim loại vượt qua ngưỡng 600°C , nếu nhiệt độ kim loại tăng thêm 5°C thì độ bền kéo của nó giảm đi 35% hiện có. Biết kim loại này có độ bền kéo là 280MPa dưới 600°C và được sử dụng trong việc xây dựng các lò công nghiệp. Nếu mức an toàn tối thiểu độ bền kéo của vật liệu này là 38MPa, thì nhiệt độ an toàn tối đa của lò công nghiệp bằng bao nhiêu, tính theo độ Celsius?

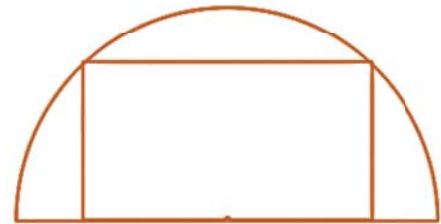
- A.620. B.615. C.605. D.610.

Câu 16: Có hai chiếc cọc cao 10m và 30m lần lượt đặt tại hai vị trí A, B . Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng 24m. Người ta chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân cột để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của cọc (như hình vẽ). Hỏi ta phải đặt chốt ở vị trí nào trên mặt đất để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất.

- A. $AM = 6m, BM = 18m$ B. $AM = 7m, BM = 17m$
C. $AM = 4m, BM = 20m$ D. $AM = 12m, BM = 12m$

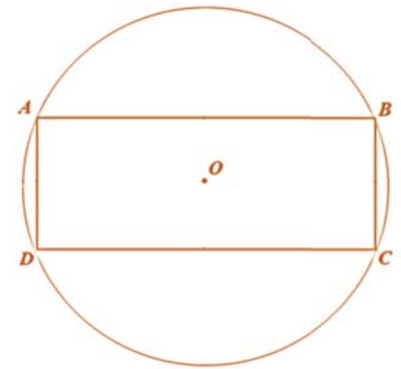


Câu 17: Một học sinh vẽ hình chữ nhật nội tiếp nửa đường tròn đường kính d , có một cạnh trùng với đường kính hình tròn (như hình vẽ). Gọi x là độ dài cạnh hình chữ nhật không trùng với đường kính. Tính diện tích nửa hình tròn theo x , biết diện tích hình chữ nhật đã cho là lớn nhất.



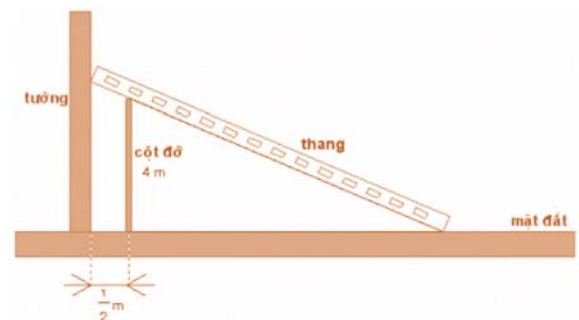
- A. $\frac{1}{4}\pi x^2$ B. πx^2 C. $\frac{1}{2}\pi x^2$ D. $2\pi x^2$

Câu 18: Một kĩ sư thiết kế sân tập thể thao dạng hình chữ nhật ABCD diện tích bằng $961m^2$ và được mở rộng thêm 4 phần đất sao cho tạo thành đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD có tâm O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Tính diện tích nhỏ nhất (có thể đạt được) của 4 phần đất được mở rộng. (Xem hình vẽ bên)



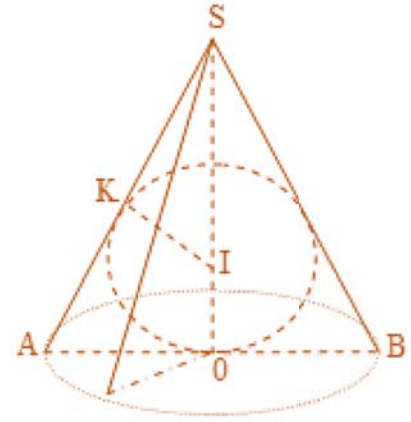
- A. $961\pi - 961 m^2$ C. $1922\pi - 961 m^2$
B. $1892\pi - 946 m^2$ D. $480,5\pi - 961 m^2$

Câu 19: Tính chiều dài bé nhất của cái thang đơn vị m , để nó có thể tựa vào tường và mặt đất, ngang qua cột đỡ cao 4m, song song và cách tường 0,5m kể từ tâm của cột đỡ (xem hình vẽ, kết quả lấy đến 2 chữ số thập phân).



- A. 5,49m C. 5,59m
B. 5,69m D. 5,79m

Câu 20: Một hạt ngọc trai hình cầu (S) bán kính R không đổi, được bọc trong một hộp trang sức dạng hình nón (N) ngoại tiếp mặt cầu (S). Khi đó thì chiều cao h và bán kính đáy r của hình nón (N) lần lượt bằng bao nhiêu để hộp trang sức có thể tích nhỏ nhất ?



A. $\begin{cases} h = 4R \\ r = R\sqrt{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} h = 3R \\ r = R\sqrt{3} \end{cases}$

C. $\begin{cases} h = R\sqrt{2} \\ r = 4R \end{cases}$

D. $\begin{cases} h = R\sqrt{3} \\ r = 4R \end{cases}$

Câu 21: Trong một cuộc thi, thử thách đặt ra là: BTC sẽ cấp cho bạn một chiếc xe máy, có một đoạn dốc được tạo nên từ một mặt phẳng có thể thay đổi được độ nghiêng từ gốc. Một cảm biến quang học được đặt sẵn ở độ cao nhất định so với mặt đất sẽ hoạt động nếu xe máy của bạn đạt đến độ cao này. Biết rằng nếu chiếc xe máy này đi lên con dốc có độ nghiêng là 30° thì đạt vận tốc 20 km/h và cứ nâng độ nghiêng thêm 4° thì vận tốc xe máy giảm 5 km/h. Hỏi để đạt đến độ cao đề ra sớm nhất ta nên đặt mặt phẳng ban đầu có độ nghiêng là bao nhiêu?

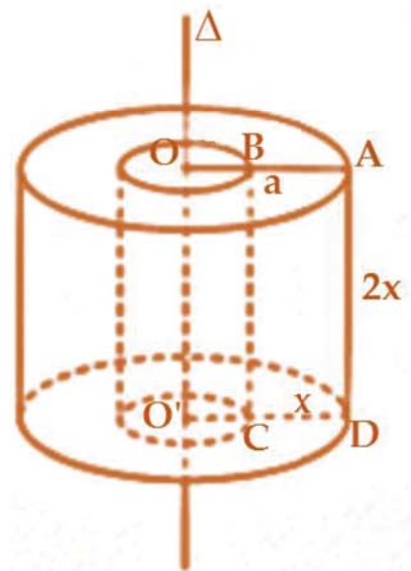
A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°

Câu 22: Một miếng giấy hình chữ nhật ABCD với $AB = x, BC = 2x$ và đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (ABCD), Δ song song với AD và cách AD một khoảng bằng a, Δ không có điểm chung với hình chữ nhật ABCD và khoảng cách từ A đến Δ lớn hơn khoảng cách từ B đến Δ . Tìm thể tích lớn nhất có thể có của khối tròn xoay tạo nên khi quay hình chữ nhật ABCD quanh Δ .



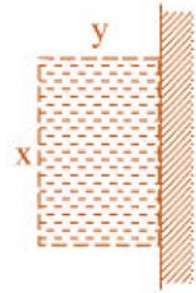
A. $\frac{64\pi a^3}{27}$

B. $64\pi a^3$

C. $\frac{63\pi a^3}{27}$

D. $\frac{64\pi}{27}$

Câu 23: Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 8(m) thẳng hàng rào. Ở đó người ta vận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào. Diện tích lớn nhất của mảnh đất có thể rào là bao nhiêu?

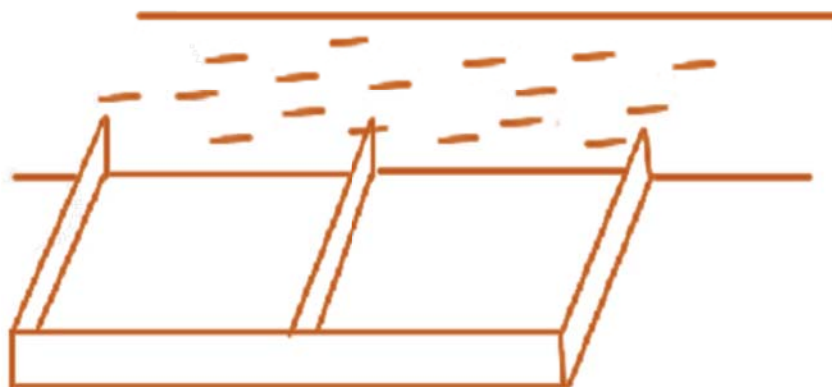


- A. 16 B. 12 C. 8 D. 6

Câu 24: Một lọ nước hoa thương hiệu **BOURJOIS** được thiết kế vỏ dạng nón có thể tích V không đổi, phần chứa dung dịch nước hoa là hình trụ nội tiếp hình nón trên. Hỏi để chứa được nhiều nước hoa nhất thì tỷ số khoảng cách từ đỉnh hình nón đến mặt trên của hình trụ chứa nước hoa với chiều cao của hình nón bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

Câu 25: Một bác nông dân có 60 000 000 đồng để làm một cái rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần bằng nhau để trồng cà chua. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song với nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 40 000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất có thể rào được?



- A. 120000m^2 B. 150000m^2 C. 100000m^2 D. 90000m^2

Câu 26: Một học sinh được giao thiết kế một cái hộp thỏa mãn: Tổng của chiều dài và chiều rộng bằng 12cm; tổng của chiều rộng và chiều cao là 24cm. Giáo viên yêu cầu học sinh ấy phải thiết kế sao cho thể tích cái hộp lớn nhất, giá trị thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu ?

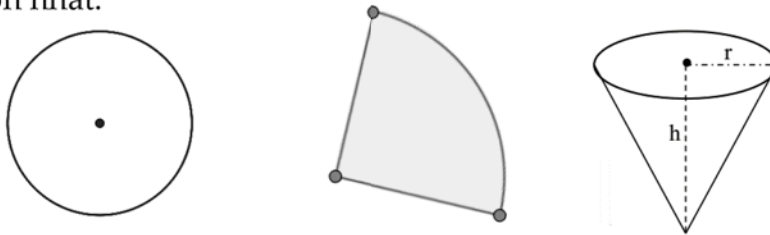
- A. 600 B. $843\sqrt{3}$ C. $384\sqrt{3}$ D. $348\sqrt{3}$



Câu 27: Một công ty mỹ phẩm ở Pháp vừa cho ra mắt sản phẩm mới là chiếc thỏi son mang tên **BOURJOIS** có dạng hình trụ có chiều cao h (cm), bán kính đáy r (cm), thể tích yêu cầu của mỗi thỏi là $20,25\pi$ (cm³). Biết rằng chi phí sản xuất cho mỗi thỏi son như vậy được xác định theo công thức: $T = 60000r^2 + 20000rh$ (đồng). Để chi phí sản xuất là thấp nhất thì tổng $(r + h)$ bằng bao nhiêu cm?

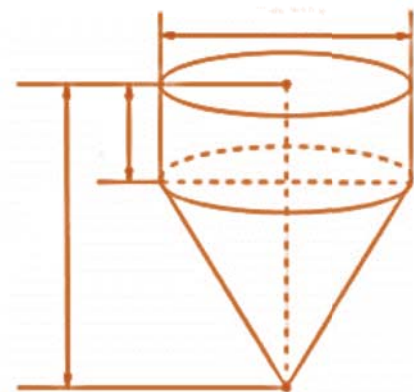
- A. 9,5 B. 10,5 C. 11,4 D. 10,2

Câu 28: Một bạn học sinh cắt lấy tờ giấy hình tròn (có bán kính R) rồi cắt một phần giấy có dạng hình quạt. Sau đó bạn ấy lấy phần giấy đó làm thành cái nón chú hề (như hình vẽ). Gọi x là chiều dài dây cung tròn của phần giấy được xết thành cái nón chú hề, h và r lần lượt là chiều cao và bán kính của của cái nón. Nếu $x = k.R$ thì giá trị của k **xấp xỉ** bằng bao nhiêu để thể tích của hình nón là lớn nhất.



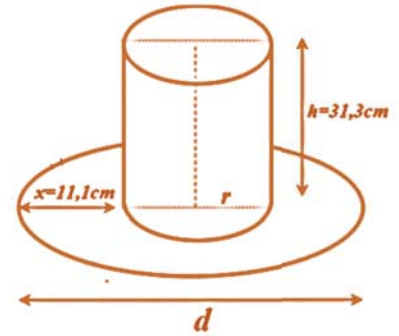
- A. 3,15 B. 4,67 C. 5,13 D. 6,35

Câu 29: Một cái nắp của bình chứa rượu gồm một phần dạng hình trụ, phần còn lại có dạng nón (như hình vẽ). Phần hình nón có bán kính đáy r , chiều cao h , đường sinh bằng 1,25m. Phần hình trụ có bán kính đáy bằng bán kính hình nón, chiều cao bằng $\frac{1}{3}h$. Kết quả $(r + h)$ **xấp xỉ** bằng bao nhiêu cm để diện tích toàn phần của cái nắp là lớn nhất.



- A. 427 B. 381 C. 166 D. 289

Câu 30: Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật gia gồm phần dạng hình trụ (có tổng diện tích vải là S_1) và phần dạng hình vành khăn (có tổng diện tích vải là S_2) với các kích thước như hình vẽ. Tính tổng $(r+d)$ sao cho biểu thức $P = 3S_2 - S_1$ đạt giá trị lớn nhất (không kể viền, mép, phần thừa).



A. 28,2

B. 26,2

C. 30,8

D. 28,2

Câu 31: Một người lấy tấm kim loại hình chữ nhật rồi làm thành một cái máng có tiết diện là hình thang cân (như hình vẽ dưới). Hỏi góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy nhỏ của máng bằng bao nhiêu để tiết diện của máng có diện tích cực đại.



A. 150°

B. 135°

C. 120°

D. 145°

Câu 32: Một kiến trúc sư muốn thiết kế một cái mương dẫn nước dạng “Thủy động học”. Diện tích tiết diện ngang của mương dạng hình chữ nhật bằng $40,5\text{m}^2$. Gọi a là độ dài đường biên giới hạn của tiết diện này. Hỏi người kiến trúc sư phải thiết kế cái mương dẫn nước có kích thước như thế nào để a nhỏ nhất?



A. Chiều rộng 9m, chiều cao 4,5m

B. Chiều rộng 10m, chiều cao 4,05m

C. Chiều rộng 8,1m, chiều cao 5m

D. Chiều rộng 10,8m, chiều cao 3,75m

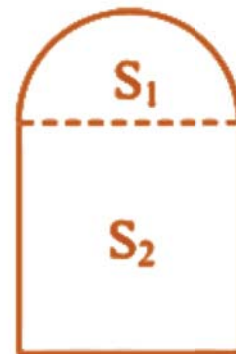
Câu 33: Một người thợ mộc cần làm một cái cổng nhà mà phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật. Biết cái cổng có chu vi bằng $1,9\pi + 8,8$ (m). Bán kính của hình bán nguyệt bằng bao nhiêu để diện tích cái cổng là lớn nhất.

A. $\frac{2,5\pi + 5,6}{\pi + 4}$ (m)

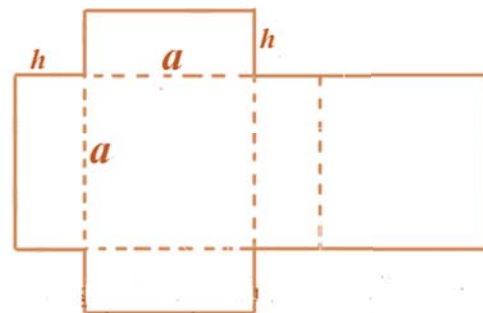
B. $\frac{1,9\pi + 8,8}{\pi + 4}$ (m)

C. $\frac{1,5\pi + 9,2}{\pi + 4}$ (m)

D. $\frac{2,1\pi + 5,1}{\pi + 4}$ (m)



Câu 34: Một bạn đã cắt tấm bìa carton phẳng và cứng và đặt kích thước như hình vẽ. Sau đó bạn ấy gấp theo đường nét đứt thành cái hộp hình hộp chữ nhật. Hình hộp có đáy là hình vuông cạnh a (cm), chiều cao là h (cm) và diện tích tấm bìa bằng $3m^2$. Tổng $a + h$ bằng bao nhiêu để thể tích hộp là lớn nhất.



A. $2\sqrt{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. 46,3

D. $\sqrt{2}$

Câu 35: Trong một cuộc thi làm đồ dùng học tập do trường phát động, bạn An đã nhờ bố làm một hình chóp tứ giác đều bằng cách lấy một mảnh tôn hình vuông ABCD có cạnh bằng 5cm, cắt mảnh tôn theo các tam giác cân AEB; BFC; CGD và DHA; sau đó gò các tam giác AEH; BEF; CFG; DGH sao cho 4 đỉnh A;B;C;D trùng nhau tạo thành khối tứ diện đều.

Thể tích lớn nhất của khối tứ diện đều tạo thành là:

A. $\frac{4\sqrt{10}}{3}$

B. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

C. $\frac{8\sqrt{10}}{3}$

D. $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

Câu 36: Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 400 km tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$. Trong đó c là hằng số cho trước; E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng

A. 9 km/h

B. 8 km/h

C. 10 km/h

D. 12 km/h

Câu 37: Người ta muốn làm một cánh điều hình quạt sao cho với chu vi 8(dm) để diện tích của hình quạt là cực đại thì bán kính hình quạt bằng bao nhiêu dm ?

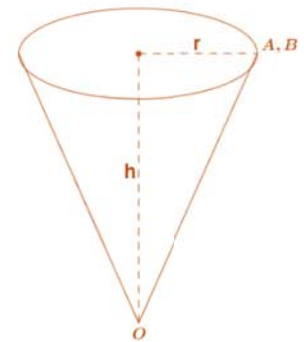
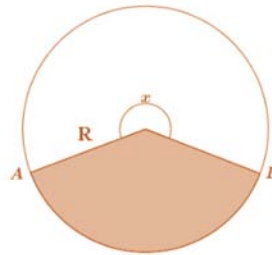
A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Câu 38: Cắt bỏ hình quạt tròn AOB từ một mảnh các tông hình tròn bán kính R rồi dán hai bán kính OA và OB của hình quạt tròn còn lại với nhau để được một cái phễu có dạng của một hình nón. Gọi x là góc ở tâm của quạt tròn dùng làm phễu $0 < x < 2\pi$. Tìm x để hình nón có thể tích lớn nhất



A. $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi$

B. $x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi$

C. $x = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi$

D. $x = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi$

Câu 39: Cần phải đặt một ngọn đèn ở phía trên và chính giữa một cái bàn hình tròn có bán kính 2(m). Hỏi phải treo ở độ cao h bằng bao nhiêu m để mép bàn được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C được biểu thị bởi công thức $C = k \frac{\sin \alpha}{r^2}$ (α là góc nghiêng giữa tia sáng và mép bàn; r là khoảng cách từ đèn đến mép bàn và k là hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng).

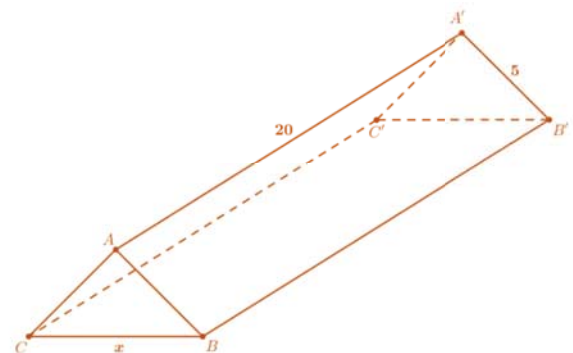
A. 2

B. 3

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{2}$

Câu 40: Một hành lang giữa hai nhà có hình dạng của một lăng trụ đứng. Hai mặt bên $ABB'A'$ và $ACC'A'$ là hai tấm kính hình chữ nhật dài 20m rộng 5m. Gọi x (m) là độ dài cạnh BC . Tìm x sao cho hình lăng trụ có thể tích lớn nhất.



A. $x = \sqrt{2}$

B. $x = 2\sqrt{2}$

C. $x = 3\sqrt{2}$

D. $x = 5\sqrt{2}$

PHẦN II: LỜI GIẢI CHI TIẾT.

Câu 1:

+ Gọi x ($0 < x < 6$) là độ dài cạnh hình vuông bị cắt

+ Thể tích khối hộp tạo thành bằng $V = x(12 - 2x)^2$ (cm^3)

+ Áp dụng BĐT AM-GM (Cauchy) cho 3 số dương ta có:

$$x(12 - 2x)^2 = 2.2x.(6 - x)(6 - x) \leq 2. \frac{(2x + 6 - x + 6 - x)^3}{27} = 128 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Dấu bằng xảy ra khi $2x = 6 - x \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn C.

Câu 2:

+ Đặt bán kính đáy, chiều cao của lon sữa bò hình trụ lần lượt là r, h (đơn vị dm)

+ Theo đề ra ta có: $h\pi r^2 = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$ (dm)

+ Diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất khi: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ nhỏ nhất.

+ Ta có: $S = 2\pi r^2 + \frac{2}{r} = 2\pi r^2 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \geq 2\sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{1}{r^2}} = 3\sqrt[3]{2\pi}$.

Dấu "=" xảy ra khi: $2\pi r^2 = \frac{1}{r} \Leftrightarrow r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ (dm)

Chọn B.

Câu 3:

+ Cân nặng của cả bầy cá sau một vụ thu hoạch là: $N = P.n = (960 - 20n)n$ (gam)

+ Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất $\Leftrightarrow$ Ta cần tìm giá trị của n sao cho N đạt giá trị lớn nhất

+ Áp dụng BĐT AM - GM (Cauchy) cho 2 số dương ta có:

$$N = (960 - 20n)n = 20n(48 - n) \leq 20. \frac{(n + 48 - n)^2}{4} = 11520 \text{ (g)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $n = 48 - n \Leftrightarrow n = 24$

Chọn B.

Câu 4:

+ Ta có: $AN = PD = x$ (cm, $0 < x < 30$) $\Rightarrow NP = 60 - 2x$ (cm)

+ Thể tích hình lăng trụ tạo thành bằng:

$$V = AB.S_{NPA} = AB.\frac{1}{2}.\sqrt{PA^2 - \left(\frac{NP}{2}\right)^2} \cdot NP$$

$$= \frac{AB}{2}.\sqrt{x^2 - \left(\frac{60-2x}{2}\right)^2} \cdot (60-2x) = 2\sqrt{15}.AB.(30-x)\sqrt{x-15} \quad (\text{cm}^3)$$

+ Trong đó AB không đổi nên ta chỉ cần tìm x sao cho $f(x) = (30-x)\sqrt{x-15}$ đạt giá trị lớn nhất.

+ Xét hàm số $f(x)$ trên $(15;30)$ ta được $\max_{(15;30)} f(x) = f(20) = 10\sqrt{5} \Rightarrow x = 20$

(Hoặc có thể thay trực tiếp các đáp án A,B,C,D rồi chọn giá trị nào của x làm cho $f(x)$ lớn nhất)

Chọn A.

Câu 5:

+ Ta sẽ đưa căn phòng vào hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxyz sao cho O trùng B', trục

Ox chứa A', trục Oy chứa C' trục Oz chứa B.

+ Khi đó, ta có: $A(4;0;4)$; $C(0;4;4)$; $A'(4;0;0)$; $B(0;0;4)$

$$M\left(4 - \frac{t}{\sqrt{2}}; \frac{t}{\sqrt{2}}; 4\right); N\left(4 - \frac{t}{\sqrt{2}}; 0; \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

+ Ta có: $MN^2 = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}} - 4\right)^2 = t^2 - 4\sqrt{2}t + 16$

+ Xét hàm số $f(t) = t^2 - 4\sqrt{2}t + 16$ trên $[0; 4\sqrt{2}]$;

Ta có: $f'(t) = 2t - 4\sqrt{2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2\sqrt{2} \in [0; 4\sqrt{2}]$

+ Tính được: $f(0) = 16$; $f(2\sqrt{2}) = 8$; $f(4\sqrt{2}) = 16 \Rightarrow \min_{[0; 4\sqrt{2}]} f(t) = 8$

Vậy độ dài nhỏ nhất của MN bằng $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Chọn C.

Câu 6:

+ Các ký hiệu như hình vẽ bên

+ Ta có: $r^2 = R^2 - h^2 = 24 - h^2$

+ Thể tích khối trụ bằng: $V = \pi r^2 h = \pi(24 - h^2)h$

+ Để thể tích V lớn nhất $\Leftrightarrow f(h) = (24 - h^2)h$ lớn nhất.

+ Ta có:

$$f(h) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (24 - h^2)(24 - h^2)2h^2} \leq \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{(24 - h^2 + 24 - h^2 + 2h^2)^3}{27}} = 32\sqrt{2} \quad (\text{Áp dụng BĐT Cauchy})$$

Dấu "=" xảy ra khi $24 - h^2 = 2h^2 \Leftrightarrow h = 2\sqrt{2}$

+ Từ đó suy ra: $V \geq 32\sqrt{2}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

Chọn C.

Câu 7:

+ Xem khoảng không gian là một hình lăng trụ đứng.

+ Khi đó thể tích hình lăng trụ được tính bởi:

$$V = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{3^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = 3x\sqrt{36 - x^2} \leq 3 \cdot \frac{x^2 + 36 - x^2}{2} = 54$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{36 - x^2} \Leftrightarrow 3\sqrt{2}$

Chọn D.

Câu 8:

+ Gọi S là điểm trên bờ sông DC.

+ Tính được: $DC = \sqrt{615^2 - (487 - 118)^2} = 492 \text{ (m)}$

+ Đặt $SD = x \text{ (m)} \Rightarrow SC = 492 - x \text{ (m)}$ với $0 < x < 492 \text{ (m)}$

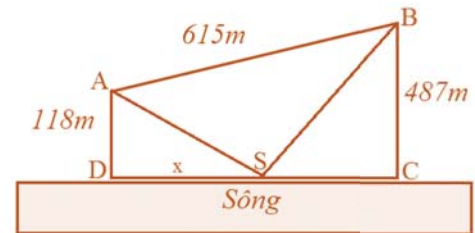
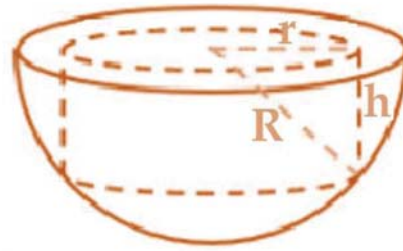
+ Đoạn đường người đó cần đi để hoàn thành công việc là:

$$f(x) = \sqrt{118^2 + x^2} + \sqrt{487^2 + (492 - x)^2}$$

+ Áp dụng đánh giá $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$ với $a, b, c, d \geq 0$. Dấu "=" xảy ra

khi và chỉ khi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (quy ước mẫu bằng 0 thì tử bằng 0)

+ Khi đó: $f(x) \geq \sqrt{(118 + 487)^2 + (x + 492 - x)^2} \approx 779,8 \text{ m.}$



Dấu “=” xảy ra khi $\frac{118}{487} = \frac{x}{492-x} \Leftrightarrow x \approx 95,96(m)$

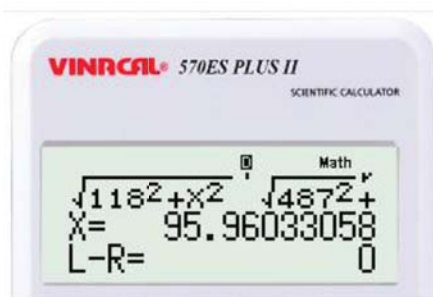
+ Vậy đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là 779,8m

Chọn C.

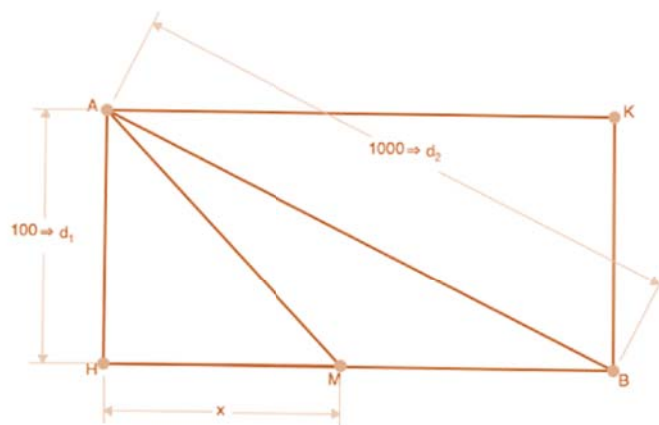
Bình luận: Có thể xét hàm số $f(x)$ để tìm ra GTNN của $f(x)$ với sự kết hợp của máy tính cầm tay:

Cụ thể: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{118^2 + x^2}} + \frac{-(492-x)}{\sqrt{487^2 + (492-x)^2}}$, bằng chức năng **SOLVE** có thể

nhập được: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 95,96 \Rightarrow f(95,96) \approx 779,8(m)$



Câu 9:



+ Ký hiệu như hình vẽ A,B lần lượt là vị trí người chiến sĩ (CS) và mục tiêu tấn công; H,K nằm trên hai bờ sao cho AHBK là hình chữ nhật; M trên bờ HB để người CS cần bơi đến để bắt đầu chạy bộ.

+ Ta có: $HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{1000^2 - 100^2} = 300\sqrt{11} (m)$

+ Đặt $HM = x (m) (x \in (0; 300\sqrt{11}))$; Gọi $v (m/s)$ là vận tốc chạy bộ của người CS.

+ Khi đó: - Người CS phải bơi một đoạn bằng $AM = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{100^2 + x^2}$ (m)

$$\Rightarrow \text{Thời gian người CS bơi là: } t_b = \frac{AM}{v_b} = \frac{2\sqrt{100^2 + x^2}}{v} \text{ (s)}$$

- Sau khi bơi, người CS cần chạy bộ một đoạn $MB = HB - HM = 300\sqrt{11} - x$ (m)

$$\Rightarrow \text{Thời gian người CS chạy bộ là: } t_c = \frac{MB}{v_c} = \frac{300\sqrt{11} - x}{v} \text{ (s)}$$

+ Tổng thời gian người CS tấn công mục tiêu là: $T = t_1 + t_2 = \frac{1}{v} \left(2\sqrt{100^2 + x^2} - x \right) + \frac{300\sqrt{11}}{v}$

+ Đặt $f(x) = 2\sqrt{100^2 + x^2} - x$ với $x \in (0; 300\sqrt{11}) \Rightarrow$ Để T nhỏ nhất thì $f(x)$ phải nhỏ nhất.

$$\text{+ Ta có: } f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{100^2 + x^2}} - 1; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{100^2 + x^2} = 2x \Leftrightarrow x = \frac{100}{\sqrt{3}} \text{ (m)}$$

$$\text{Từ đây suy ra được: } f(x) \geq f\left(\frac{100}{\sqrt{3}}\right).$$

+ Vậy người CS phải bơi một đoạn bằng $AM = \sqrt{100^2 + x^2} = \frac{200}{\sqrt{3}}$ (m) để đến mục tiêu nhanh nhất.

Chọn A.

Câu 10:

+ Đặt chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hình hộp chữ nhật lần lượt là $2x; x; h$ (đơn vị m)

$$\text{+ Theo đề ra ta có: } 2x^2h = \frac{500}{3} \Leftrightarrow h = \frac{250}{3x^2} \text{ (m)}$$

+ Để chi phí nhỏ nhất thì diện tích xung quanh (khối hộp chữ nhật không nắp) phải nhỏ nhất, hay $S = 2x^2 + 6xh$ nhỏ nhất.

+ Ta có:

$$S = 2x^2 + \frac{500}{x} = 2x^2 + \frac{250}{x} + \frac{250}{x} \geq 3\sqrt{2x^2 \cdot \left(\frac{250}{x}\right)^2} = 150 \text{ (m}^2\text{)}$$

+ Vậy chi phí thuê nhân công thấp nhất bằng $150.500000 = 75000000$ đồng = 75 triệu đồng

Chọn B.

Câu 11:

+ Gọi x (đồng) là số tiền tăng thêm $\Rightarrow$ Số căn hộ bị bỏ trống là $\frac{2x}{100000}$ (căn)

+ Số thu nhập trong một tháng là:

Gmail: minhduck2pi@gmail.com – SĐT: 01277798889

$$T = \left(50 - \frac{2x}{100000} \right) (2000000 + x) = \frac{1}{50000} (2500000 - x) (2000000 + x) \leq \frac{1}{50000} \frac{(2500000 + 2000000)^2}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $2500000 - x = 2000000 + x \Leftrightarrow x = 250000$

+ Vậy muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá 2250000 (đồng)

Chọn D.

Câu 12:

+ Gọi a, h lần lượt là cạnh đáy, chiều cao của lăng trụ

$$+ \text{Ta có: } V = h \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow h = \frac{4V}{a^2 \sqrt{3}}$$

$$+ \text{Diện tích toàn phần của hình lăng trụ bằng } S = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 3ha = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{3}V}{a}$$

$$+ \text{Áp dụng BĐT AM-GM (Cô-si) ta có: } S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{3}V}{a} = \sqrt{3} \left(\frac{a^2}{2} + \frac{2V}{a} + \frac{2V}{a} \right) \geq \sqrt{3} \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{4V^2}{2}}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \frac{a^2}{2} = \frac{2V}{a} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{4V}$$

Chọn A.

Câu 13:

$$+ \text{Theo đề ra ta có: } \begin{cases} h = 4y \\ xyh = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 4 \cdot \frac{3}{xh} \Leftrightarrow h^2 = \frac{12}{x} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{x}} \\ y = \frac{1}{4} h = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} \end{cases} (*)$$

+ Người thợ sử dụng ít nguyên liệu nhất khi tổng diện tích các mặt bên và đáy là nhỏ nhất, hay $S = 2xh + 2hy + xy$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$+ \text{Từ } (*), \text{ ta có: } S = 2\sqrt{12}\sqrt{x} + 2 \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{x} = \frac{6}{x} + \frac{9\sqrt{3}}{2} \sqrt{x}$$

+ Áp dụng BĐT AM-GM (Cô-si), ta được:

$$S = \frac{6}{x} + \frac{9\sqrt{3}}{4} \sqrt{x} + \frac{9\sqrt{3}}{4} \sqrt{x} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{6}{x} \left(\frac{9\sqrt{3}}{4} \right)^2 x} = 3 \sqrt[3]{6 \left(\frac{9\sqrt{3}}{4} \right)^2} = \frac{27}{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \frac{6}{x} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \sqrt{x} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ (Gần nhất với giá trị B.1,5)}$$

Chọn B.

Câu 14:

Gmail: minhduck2pi@gmail.com – **SĐT:** 01277798889

+ Đặt $BS = x$ ($0 < x < 4$).

+ Khi đó: $\begin{cases} CS = \sqrt{1+x^2} \\ SA = 4-x \end{cases}$

+ Chi phí bỏ ra là:

$$f(x) = 5000\sqrt{1+x^2} + 3000(4-x) \quad (\text{USD})$$

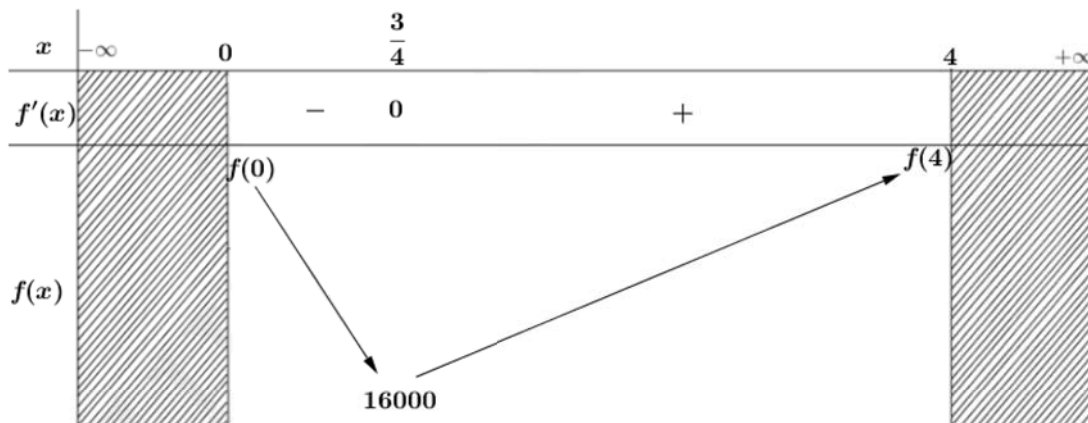
+ Ta cần tìm $x \in (0;4)$ sao cho $f(x)$ nhỏ nhất.

+ Xét hàm số $f(x)$ trên $(0;4)$, ta có:

$$f'(x) = \frac{5000x}{\sqrt{1+x^2}} - 3000$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1000(5x - 3\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{1+x^2} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9(1+x^2) = 25x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

+ Ta có bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên $(0;4)$:



+ Từ bảng biến thiên ta có $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 16000 tại $x = \frac{3}{4}$.

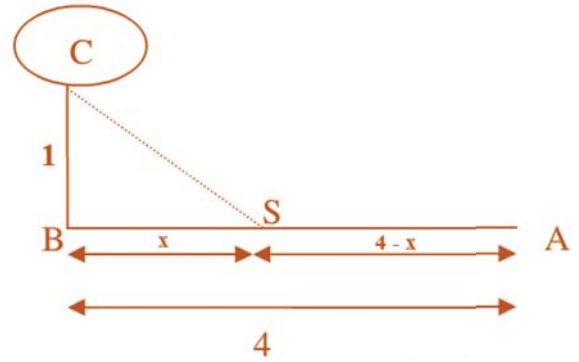
+ Vậy điểm S trên bờ cần tìm cách A một khoảng $4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$ (km).

Chọn B.

Câu 15:

+ Ở 600°C độ bền kéo của kim loại là $\frac{280}{2} \text{ MPa} = 140 \text{ MPa}$

+ Theo đề ra, sau n lần tăng 5°C thì độ bền kéo còn lại là $140 \cdot (65\%)^n$



+ Khi đó: $140 \cdot (65\%)^n \geq 38 \Leftrightarrow (65\%)^n \geq \frac{19}{70} \Leftrightarrow n \leq \log_{65\%} \frac{19}{70} \approx 3$

+ Vậy nhiệt độ tối đa bằng: $600^\circ\text{C} + 3.5^\circ\text{C} = 615^\circ\text{C}$

Chọn B.

Câu 16:

+ Đặt $AM = x \Rightarrow x \in (0; 24)$

Suy ra: $BM = 24 - x$

+ Tổng độ dài sợi dây cần dùng bằng:

$$L = \sqrt{10^2 + x^2} + \sqrt{30^2 + (24 - x)^2}$$

+ Ta có BĐT $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$ với $a, b, c, d \geq 0$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (quy ước mẫu bằng 0 thì tử bằng 0)

+ Khi đó: $L \geq \sqrt{(10+30)^2 + (x+24-x)^2} = 8\sqrt{34}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{10}{30} = \frac{x}{24-x} \Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow AM = 6; BM = 18$

Chọn A.

Câu 17:

+ x là độ dài cạnh hình chữ nhật không trùng với đường kính hình tròn $\Rightarrow$ độ dài cạnh còn

lại của hình chữ nhật là $2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2}$

+ Diện tích hình chữ nhật bằng $S_1 = 2x\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2} \leq 2 \cdot \frac{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2}{2} = \frac{d^2}{4}$ (Áp dụng BĐT

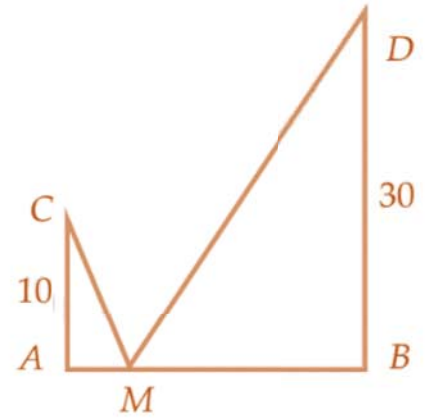
Cauchy)

Dấu "=" xảy ra khi $x = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2} \Leftrightarrow d = 2x\sqrt{2}$

+ Diện tích nửa hình tròn bằng $S_2 = \frac{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi(x\sqrt{2})^2}{2} = \pi x^2$

Chọn B.

Câu 18:



+ Đặt $\begin{cases} AB = x \\ BC = y \end{cases}$ và R là bán kính đường tròn H có tâm O ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD.

+ Khi đó, theo đề ra ta có: $R^2 = \frac{x^2 + y^2}{4}$ và $xy = 961$.

+ Tổng diện tích 4 phần đất mở rộng là:

$$S = S_H - S_{ABCD} = \pi R^2 - xy = \pi \cdot \frac{x^2 + y^2}{4} - xy \stackrel{\text{BDT Cauchy}}{\geq} \pi \cdot \frac{2xy}{4} - xy = 480,5\pi - 961 \text{ m}^2$$

Vậy diện tích nhỏ nhất (có thể đạt được) của 4 phần đất được mở rộng là $480,5\pi - 961 \text{ m}^2$

Chọn D.

Câu 19:

+ Đặt AB là chiều dài của cái thang, HC = 4m là cột đỡ, C là giao điểm của cột đỡ và thang; x là góc hợp bởi mặt đất và thang.

+ Ta có: $AB = AC + BC = \frac{4}{\sin x} + \frac{1}{2 \cos x}$

+ Xét hàm $f(x) = \frac{4}{\sin x} + \frac{1}{2 \cos x}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có:

$$f'(x) = \frac{-4 \cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{2 \cos^2 x}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 2 \Leftrightarrow x = \arctan 2$$

+ Từ đó suy ra: $f(x) \geq f(\arctan 2) \approx 5,59 \Rightarrow \min_{\left(0; \frac{\pi}{2}\right)} f(x) = 5,59$

+ Vậy chiều dài bé nhất của cái thang thỏa mãn là 5,59 cm

Chọn C.

Câu 20:

+ Đặt SI = x, x > R. Khi đó, ta có SO = x + R.

+ Ta có: $SK = \sqrt{x^2 - R^2}$; $\Delta SIK \sim \Delta SAO \Rightarrow \frac{SK}{SO} = \frac{IK}{AO} \Leftrightarrow AO = \frac{IK \cdot SO}{SK} = \frac{R(x+R)}{\sqrt{x^2 - R^2}}$

+ Suy ra, thể tích V của hình nón (N) bằng:

$$V(x) = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot SO = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2 (x+R)^2}{x^2 - R^2} \cdot (x+R) = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{(x+R)^2}{x-R}$$

+ Đặt $f(x) = \frac{(x+R)^2}{x-R}$, x > R. Ta có: $f'(x) = \frac{x^2 - 2Rx - 3R^2}{(x-R)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3R \text{ (t/m)} \\ x = -R \text{ (loại)} \end{cases}$

+ Bảng biến thiên của $f(x)$ trên khoảng $(R; +\infty)$:

x	R	$3R$	$+\infty$
$f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
$f(x)$	$+\infty$	$8R$	$+\infty$

+ Từ đó suy ra, $V(x)$ đạt GTNN bằng $\frac{8\pi R^3}{3}$ khi $\begin{cases} SO = x + R = 4R = h \\ AO = R\sqrt{2} = r \end{cases}$.

Chọn A.

Câu 21:

+ Gọi độ nghiêng khi thay đổi là $(30 + 4x)^\circ$ thì vận tốc lúc đó là: $20 - 5x$ ($\Rightarrow 0 \leq x < 4$)

+ Thời gian để đạt đến độ cao h cho trước bằng $t = \frac{h}{\sin(30 + 4x)} = \frac{h}{(20 - 5x)\sin(30 + 4x)}$

+ Theo đề ra ta cần tìm x sao cho thời gian nhỏ nhất $\Leftrightarrow t_{\min} \Leftrightarrow \left[\underbrace{(20 - 5x)\sin(30 + 4x)}_{f(x)} \right]_{\max}$

+ Ta có: $f'(x) = 4(20 - 5x)\cos(30 + 4x) - 5\sin(30 + 4x)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15}{4} \in [0; 4)$

Từ đó tìm được: $\max_{[0;4)} f(x) = f\left(\frac{15}{4}\right)$

+ Vậy độ nghiêng tốt nhất để đạt đến độ cao sớm nhất là 45° .

Chọn B.

Câu 22:

+ Gọi O, O' lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AB, CD với Δ và V là thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh Δ .

+ V_n là thể tích của khối tròn xoay tạo nên khi quay hình chữ nhật $OADO'$ quanh Δ .

+ V_l là thể tích của khối tròn xoay tạo nên khi quay hình chữ nhật $OBCO'$ quanh Δ .

+ Khi đó:

$$\begin{aligned}
 V &= V_n - V_t = \pi OA^2 \cdot AD - \pi OB^2 \cdot BC = 2x\pi \left[a^2 - (a-x)^2 \right] \\
 &= 2x^2\pi(2a-x) = 8\pi \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} (2a-x) \leq 8\pi \cdot \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 2a-x}{3} \right)^3 = \frac{64\pi}{27} a^3
 \end{aligned}$$

+ Vậy $\text{Max}_V = \frac{64\pi}{27} a^3$.

Chọn A.

Câu 23:

+ Gọi x là độ dài cạnh song song với bờ giậu và y là độ dài cạnh vuông góc với bờ giậu.

+ Theo bài ra ta có $x+2y=8$ và diện tích của miếng đất đã rào là $S=xy=y(8-2y)$

+ Áp dụng Bất đẳng thức **AM-GM (Cauchy)**, ta có:

$$2S = 2y(8-2y) \leq \frac{(2y+8-2y)^2}{4} = \frac{8^2}{4} = 16 \Rightarrow S \leq 8$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2y=8-2y \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow x=4$

+ Diện tích lớn nhất của mảnh đất có thể rào bằng 8.

Chọn C.

Câu 24:

+ Một mặt phẳng đi qua đỉnh và vuông góc với đáy của hình nón, các điểm và kích thước được ký hiệu như hình vẽ bên.

+ Đặt $BE=x$, $BD=h$, ta có: $\frac{ME}{AD} = \frac{BE}{BD} \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{x}{h} \Leftrightarrow r = \frac{Rx}{h}$

+ Thể tích hình trụ chứa nước hoa là:

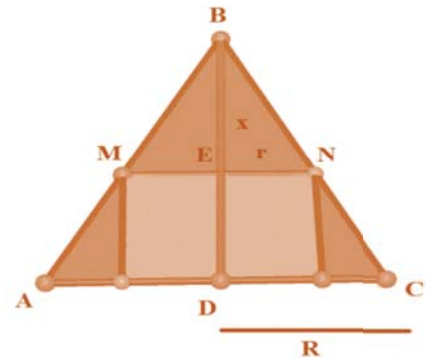
$$\begin{aligned}
 V &= \pi r^2(h-x) = \pi \frac{R^2 x^2}{h^2} (h-x) \\
 &= \frac{\pi R^2}{2h^2} x \cdot x \cdot (2h-2x) \stackrel{\text{BDT Cauchy}}{\leq} \frac{\pi R^2}{2h^2} \cdot \frac{(x+x+2h-2x)^3}{27} = \frac{4R^2 h}{27}
 \end{aligned}$$

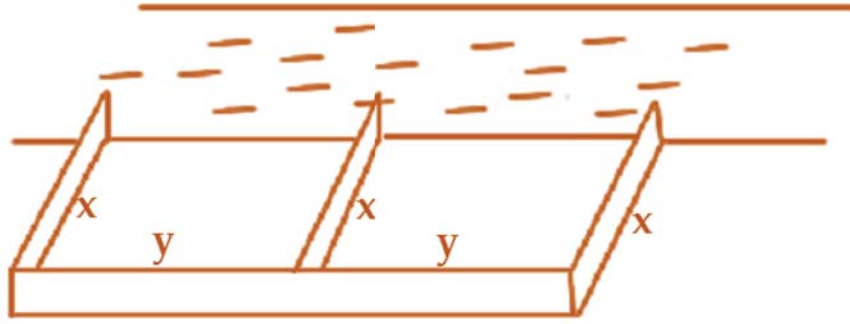
Dấu "=" xảy ra khi $x = 2h-2x \Leftrightarrow \frac{x}{h} = \frac{2}{3}$

Chọn A.

Câu 25:

+ Đặt các kích thước như hình vẽ dưới





+ Theo đề ra ta có: $3x.40000 + 2y.50000 = 60000000 \Leftrightarrow 6x + 5y = 3000 \Leftrightarrow y = 600 - \frac{6}{5}x$

+ Diện tích của khu đất rào được là: $S = 2xy = 2x\left(600 - \frac{6}{5}x\right) = 1200x - \frac{12}{5}x^2$

+ Xét hàm số $f(x) = 1200x - \frac{12}{5}x^2$ với $x \in (0; 500)$, ta có:

$$f'(x) = 1200 - \frac{24}{5}x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 250 \in (0; 500)$$

+ Lập bảng biến thiên ta tìm được $\max_{(0;500)} f(x) = f(250) = 150000 \text{ (m}^2\text{)}$

+ Vậy diện tích lớn nhất của đất có thể rào được là 150000 m^2

Chọn B.

Câu 26:

+ Gọi chiều rộng là x , $0 < x < 12$.

+ Thể tích hình hộp là: $V = x(12 - x)(24 - x) = x^3 - 36x^2 + 288x$

+ Xét hàm số $f(x) = x^3 - 36x^2 + 288x$ trên $(0; 12)$ ta có:

$$f'(x) = 3x^2 - 72x + 288; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 + 4\sqrt{2} \notin (0; 12) \\ x = 12 - 4\sqrt{3} \in (0; 12) \end{cases}$$

+ Lập bảng biến thiên ta tìm được: $\max_{(0;12)} f(x) = f(12 - 4\sqrt{3}) = 384\sqrt{3} \Rightarrow V_{\text{Max}} = 384\sqrt{3}$

Chọn C.

Câu 27:

+ Thể tích mỗi thỏi son: $V = \pi r^2 h = 20,25\pi \Rightarrow h = \frac{20,25}{r^2}$

+ Chi phí sản xuất mỗi thỏi son: $T = 60000r^2 + 20000rh = 60000r^2 + \frac{405000}{r}$

+ Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$T = 60000r^2 + \frac{202500}{r} + \frac{202500}{r} \geq 3\sqrt{60000r^2 \cdot \frac{202500}{r} \cdot \frac{202500}{r}} = 405000$$

Dấu “=” xảy ra khi $60000r^2 = \frac{202500}{r} \Leftrightarrow r = 1,5 \Rightarrow h = 9 \Rightarrow r + h = 10,5$

Chọn B.

Câu 28:

+ Chu vi hình tròn đáy của cái nón chú hề bằng $C = 2\pi r = x \Leftrightarrow r = \frac{x}{2\pi}$

+ Ta có bán kính R của hình tròn chính là đường sinh của khối nón và vòng tròn đáy của khối

nón có độ dài là x do đó: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$

+ Khi đó, thể tích cái nón là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{x^2}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$

+ Suy ra: $V^2 = \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{x^4}{16\pi^4} \left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) = \frac{4\pi^2}{9} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)$

+ Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$V^2 = \frac{4\pi^2}{9} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \leq \frac{4\pi^2}{9} \cdot \frac{\left(\frac{x^2}{8\pi^2} + \frac{x^2}{8\pi^2} + R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)^3}{27} = \frac{4\pi^2 R^6}{243} \Rightarrow V \leq \frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{x^2}{8\pi^2} = R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}\pi R}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{R} \approx 5,13$

Chọn C.

Câu 29:

+ NX: Chi phí vật liệu làm cái nắp là nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ diện tích xung quanh của nắp nhỏ nhất.

+ Đường sinh của hình nón là: $l = \sqrt{h^2 + r^2} \Rightarrow h = \sqrt{125^2 - r^2}$

+ Diện tích xung quanh hình trụ: $S_1 = 2\pi r \cdot \frac{h}{3} = \frac{2}{3}\pi r \sqrt{125^2 - r^2}$

+ Diện tích xung quanh hình nón: $S_2 = \pi r l = 125\pi r$

+ Vậy diện tích toàn phần của của cái nắp bằng: $S = S_1 + S_2 = \frac{2}{3}\pi r \sqrt{125^2 - r^2} + 125\pi r$

+ Xét hàm $f(r) = \frac{2}{3}\pi r \sqrt{125^2 - r^2} + 125\pi r$, $r \in (0; 125)$. Ta có:

$$f'(r) = \frac{31250\pi - 4\pi r^2 + 375\pi\sqrt{125^2 - r^2}}{3\sqrt{125^2 - r^2}}; f'(r) \stackrel{\text{BAM MAY}}{\Leftrightarrow} r \approx 113,12 \text{ cm}$$

+ Từ đó tìm được: $f(r) \leq f(113,12)$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow r \approx 113,12 \Rightarrow h \approx 53,187 \Rightarrow r+h \approx 166,307$

Chọn C.

Câu 30:

+ Ta có: $d = 2r + 22,2$

+ Diện tích vải để may phần dạng hình trụ là: $S_1 = 2\pi rh + \pi r^2$

+ Diện tích vải để may phần dạng hình vành khăn là: $S_2 = \frac{\pi d^2}{4} - \pi r^2$

+ Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} P &= 3S_2 - S_1 = \frac{3\pi d^2}{4} - 4\pi r^2 - 2\pi rh = \frac{3\pi(2r+22,2)^2}{4} - 4\pi r^2 - 2\pi r \cdot 31,3 \\ &= \frac{\pi(-4r^2 + 16r + 1478,52)}{4} = \frac{\pi[-4(r-2)^2 + 1494,52]}{4} \leq \frac{1494,52\pi}{4} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $r = 2 \Rightarrow d = 26,2 \Rightarrow r+h = 28,2$

Chọn D.

Câu 31:

+ Gọi m là chiều rộng của tấm kim loại, x là chiều rộng của mặt bên, y là chiều rộng của đáy nhỏ và z được ký hiệu như hình vẽ $\Rightarrow m = 2x + y$.



+ Diện tích của tiết diện bằng:

$$S = \frac{(y+2z)+y}{2} \cdot \sqrt{x^2 - z^2} = (y+z) \sqrt{(x^2 - z^2)} = \sqrt{(y+z)(y+z)(x-z)(x+z)}$$

+ Khi đó, ta có:

$$S^2 = \frac{1}{3}(y+z)(y+z)(x+z)(3x-3z) \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{(y+z+y+z+x+z+3x-3z)^4}{256} = \frac{1}{3} \cdot \frac{[2(2x+y)]^4}{256} = \frac{m^4}{48}$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{m^2 \sqrt{3}}{12}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} y+z=x+z \\ x+z=3x-3z \\ 2x+y=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\frac{m}{3} \\ z=\frac{m}{6} \end{cases}$$

+ Gọi α là góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy nhỏ của máng $\Rightarrow \alpha = 90^\circ + \arcsin\left(\frac{z}{x}\right) = 120^\circ$

Chọn C.

Câu 32:



+ Gọi $x, y > 0$ như hình vẽ trên.

+ Theo đề ra ta có: $\begin{cases} xy = 40,5 \\ a = 2y + x \end{cases} \Rightarrow a = \frac{81}{x} + x \stackrel{\text{BDT Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{\frac{81}{x} \cdot x} = 18.$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{81}{x} = x \Leftrightarrow x = 9 \Rightarrow y = 4,5$

Chọn A.

Câu 33:

+ Gọi r (m) là bán kính của hình bán nguyệt; d (m) là chiều dài của hình chữ nhật (m); S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hình bán nguyệt và hình chữ nhật.

+ Theo đề ra, ta có: $1,9\pi + 8,8 = \pi r + 2d + 2r \Leftrightarrow d = \frac{1,9\pi + 8,8 - (\pi + 2)r}{2}$

+ Diện tích cánh cổng bằng:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi r^2}{2} + 2rd = \frac{\pi r^2}{2} + r[1,9\pi + 8,8 - (\pi + 2)r] = \frac{-(\pi + 4)r^2 + (3,8\pi + 17,6)r}{2}$$

+ Theo tính chất tam thức bậc 2 $\Rightarrow S$ đạt Max $\Leftrightarrow r = \frac{-(3,8\pi + 17,6)}{-2(\pi + 4)} = \frac{1,9\pi + 8,8}{\pi + 4}$ (m)

Chọn B.

Câu 34:

+ Theo đề ra, diện tích mảnh bìa bằng: $S = 2a^2 + 4ah = 3 \Rightarrow h = \frac{3 - 2a^2}{4a} \left(\Rightarrow 0 < a < \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$

+ Thể tích hình hộp chữ nhật: $V = a^2h = \frac{3a - 2a^3}{4}$

+ Xét hàm số $f(a) = \frac{3a - 2a^3}{4}$ trên $\left(0; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, ta có: $f'(a) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}a^2$; $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

+ Từ đó tìm được $\max V = \max_{\left(0; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)} f(a) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $a = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a + h = \sqrt{2}$

Chọn D.

Câu 35:

+ Gọi cạnh của hình vuông EFGH là x $0 < x < 5\sqrt{2}$

$$\Rightarrow BI = \frac{5\sqrt{2} - x}{2}.$$

+ Đường cao của hình chóp tạo thành:

$$h = \sqrt{BI^2 - IO^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2} - x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25 - 5x\sqrt{2}}{2}}$$

+ Thể tích hình chóp là: $V = \frac{1}{3}x^2 \sqrt{\frac{25 - 5x\sqrt{2}}{2}}$

+ Xét hàm số $f(x) = x^2 \sqrt{\frac{25 - 5x\sqrt{2}}{2}}$ trên $0; 5\sqrt{2}$, ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$

+ Từ đó tìm được $V_{\max} = f(2\sqrt{2}) = \frac{1}{3}(2\sqrt{2})^2 \sqrt{\frac{25 - 5 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{10}}{3} (\text{cm}^3)$

Chọn A.

Câu 36:

+ Vận tốc của cá khi bơi ngược dòng là $v - 6$ km/h ($v > 6$)

+ Năng lượng cá tiêu hao cả quá trình tìm về nguồn là: $E(v) = cv^3t = cv^3 \cdot \frac{400}{v - 6}$.

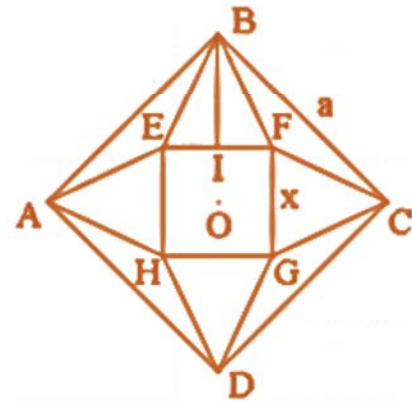
+ Ta có: $E'(v) = c \cdot 400 \cdot \frac{2v^3 - 18v^2}{(v - 6)^2} = 0 \Leftrightarrow v = 9 (\text{km/h})$

+ Từ đó tìm được $\min E_v = E_9 = 97200c$

Chọn A.

Câu 37:

+ Gọi x là bán kính hình quạt, y là độ dài cung tròn.



+ Ta có chu vi cánh điều là $8 = 2x + y$.

$$+ \text{Diện tích cánh điều bằng } S = \frac{xy}{2} = \frac{x(8-2x)}{2} = \frac{1}{4} 2x(8-2x) \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{(2x+8-2x)^2}{4} = 4.$$

Dấu “=” xảy ra khi $2x = 8 - 2x \Leftrightarrow x = 2$

Chọn B.

Câu 38:

$$+ \text{Thể tích cái phễu là: } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$+ \text{Ta có chu vi đáy bằng: } 2\pi r = Rx \Leftrightarrow r = \frac{Rx}{2\pi}$$

$$+ \text{Lại có: } h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2 x^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

$$+ \text{Khi đó: } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

+ Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số dương ta có:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sqrt{3}R^3}{48\pi^3} \cdot x^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \pi \sqrt{4\pi^2 - x^2} \leq \frac{\sqrt{3}R^3}{2 \cdot 48\pi^3} \cdot x^2 \cdot \left(\frac{4}{3} \pi^2 + 4\pi^2 - x^2 \right) = \frac{\sqrt{3}R^3}{2 \cdot 48\pi^3} \cdot x^2 \cdot \left(\frac{16}{3} \pi^2 - x^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}R^3}{48\pi^3} \cdot \left[x^2 + \left(\frac{16}{3} \pi^2 - x^2 \right) \right]^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}R^3}{48\pi^3} \cdot \frac{16^2}{9} \cdot \pi^4 = \frac{2\sqrt{3}}{27} \pi R^3 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \pi = \sqrt{4\pi^2 - x^2} \\ x^2 = \frac{16}{3} \pi^2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \pi$$

Chọn B.

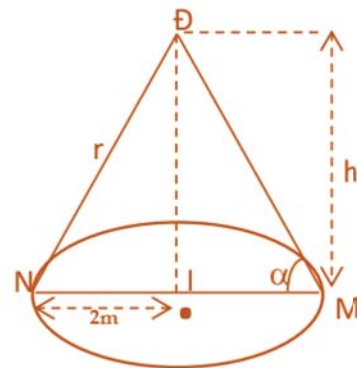
Câu 39:

+ Ký hiệu và kích thước như hình vẽ bên.

+ Ta có: $\sin \alpha = \frac{h}{r}$; $h^2 = r^2 - 2^2 = r^2 - 4 \Rightarrow h = \sqrt{r^2 - 4}$

+ Suy ra, cường độ $C = C(r) = k \frac{\sqrt{r^2 - 4}}{r^3}$, ($r > 2$).

+ Xét hàm $f(r) = k \frac{\sqrt{r^2 - 4}}{r}$ trên $(2; +\infty)$.



Ta tìm được: $\max_{(2; +\infty)} f(x) = f(\sqrt{6}) = \frac{k\sqrt{3}}{18} \Rightarrow C_{\max} = \frac{k\sqrt{3}}{18}$. Đạt được khi $r = \sqrt{6} \Rightarrow h = \sqrt{2}$.

Chọn D.

Câu 40:

+ Thể tích lăng trụ tạo thành bằng:

$$V = A' A \cdot S_{ABC} = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot x = 5x\sqrt{100 - x^2} \leq 5 \cdot \frac{x^2 + 100 - x^2}{2} = 250$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = \sqrt{100 - x^2} \Leftrightarrow 5\sqrt{2}$

Chọn D.

NGUYỄN MINH ĐỨC

- HẾT -