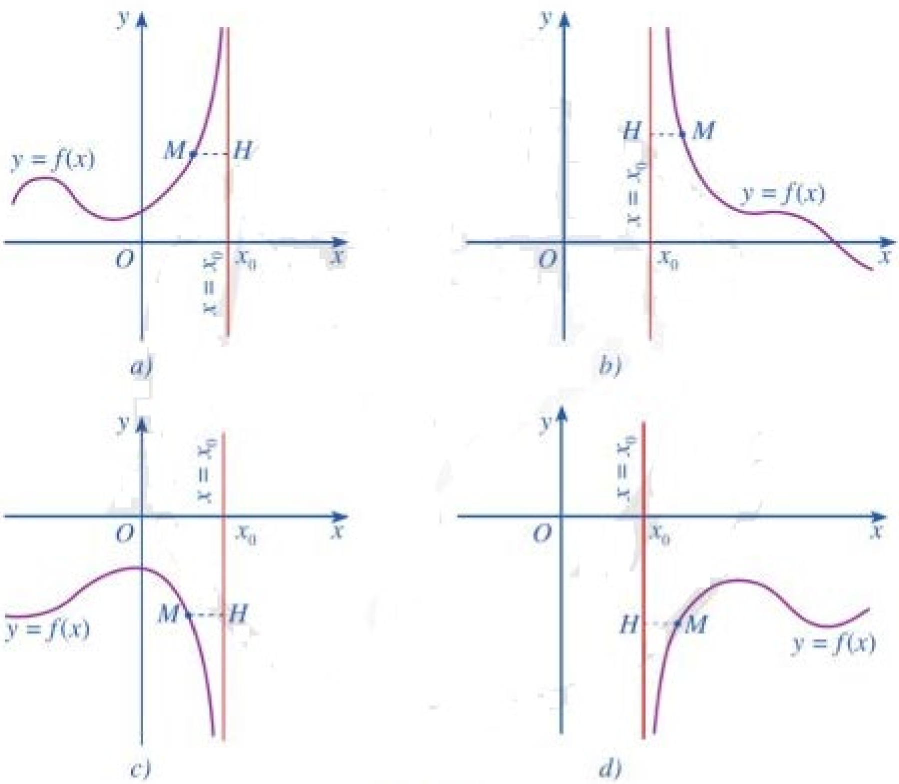
BÀI 3
ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

2 . Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty; \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty; \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty; \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

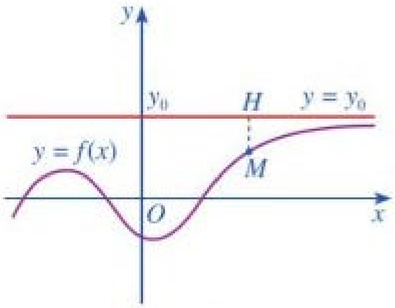
Nhận xét: Giả sử đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Lấy điểm $M(x; y)$ thuộc đồ thị hàm số. Gọi MH là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $x = x_0$. Khi đó, độ dài MH tiến tới 0 khi $x \to x_0^-$ (hình a,c) hay khi $x \to x_0^+$ (hình b,d)



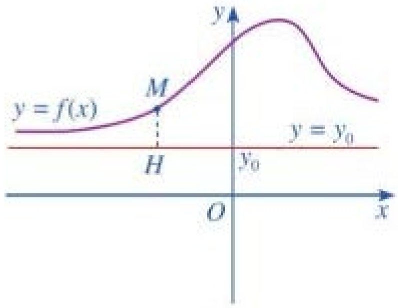
2 . Đường tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$.

Nhận xét: Giả sử đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Lấy điểm $M(x; y)$ thuộc đồ thị hàm số. Gọi MH là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $y = y_0$. Khi đó, độ dài MH tiến tới 0 khi $x \to +\infty$ (hình a) hay khi $x \to -\infty$ (hình b)



a)

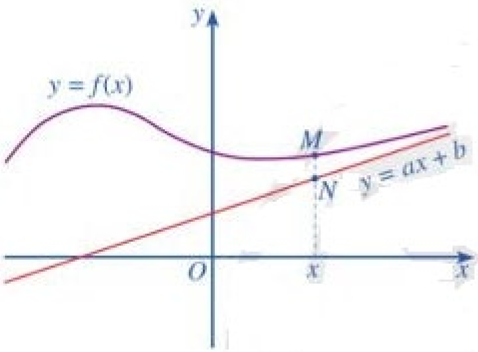


b)

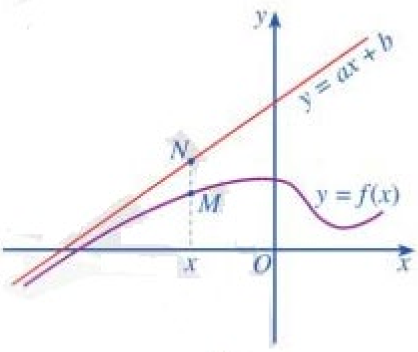
3 . Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y = ax + b\left(a \neq 0\right)$ được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ nếu: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f\left(x\right) - \left(ax + b\right)\right] = 0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[f\left(x\right) - \left(ax + b\right)\right] = 0$.

Nhận xét: Giả sử đường thẳng $y = ax + b\left(a \neq 0\right)$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$. Lấy điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ và điểm N thuộc đường thẳng $y = ax + b$ có cùng hoành độ x. Khi đó, độ dài MN tiến tới 0 khi $x \to +\infty$ (hình a) hay khi $x \to -\infty$ (hình b)



a)



b)

CHỦ ĐỀ 1

TÌM TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y=f(x)$ KHI BIẾT HÀM SỐ, ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$

I . Tiệm cận của đồ thị hàm số

1. Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty\end{array}\right\rangle \Rightarrow$ **tiệm cận đứng** $x=x_0$.

2. Đường thẳng $y=y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất 1 trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn: $\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0\end{array}\right\rangle \Rightarrow$ **tiệm cận ngang** $y=y_0$.

3. Đường thẳng $y=ax+b\,(a\neq 0)$ được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất 1 trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn: $\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0\end{array}\right\rangle \Rightarrow$ **tiệm cận xiên** $y=ax+b$.

II. Quy tắc tìm giới hạn vô cực

1. Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ (hoặc $-\infty$) thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

2. Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L>0$	0	+	$+\infty$
		−	$-\infty$
$L<0$		+	$-\infty$
		−	$+\infty$

(Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_0$)

Chú ý: Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \to x_0^+, x \to x_0^-, x \to +\infty$ và $x \to -\infty$.

III. Kỹ năng dùng Casio

Giả sử cần tính $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ta dùng chức năng CALC để tính giá trị của $f(x)$ tại các giá trị của x rất gần a.

1. Giới hạn của hàm số tại một điểm

- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=a+10^{-9}$.
- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=a-10^{-9}$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=a+10^{-9}$ hoặc $x=a-10^{-9}$.

2. Giới hạn của hàm số tại vô cực

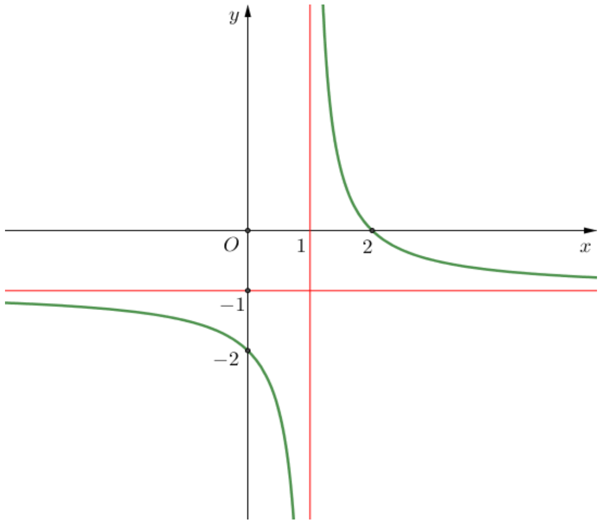
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=10^{10}$.
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=-10^{10}$.

DẠNG 1

BIẾT ĐỒ THỊ HOẶC BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

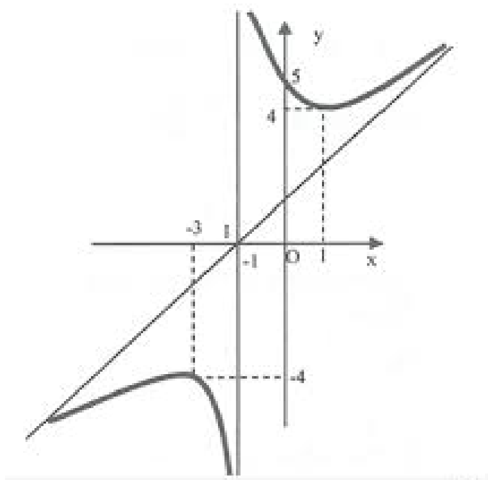
Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng bằng:

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=0$. **D.** $y=-1$.

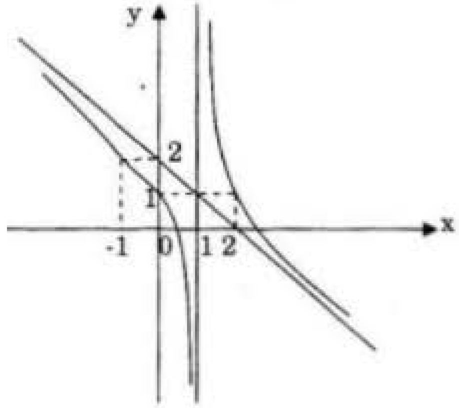
Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

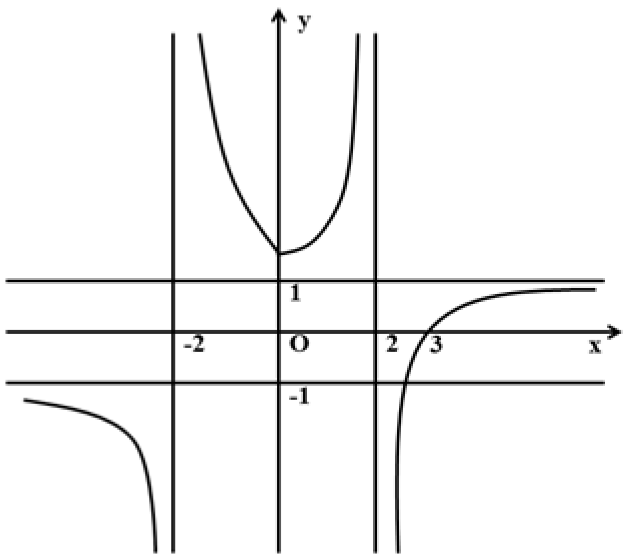
Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

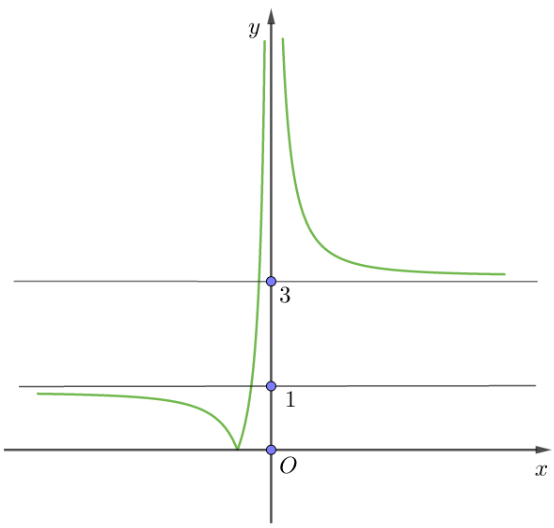
Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

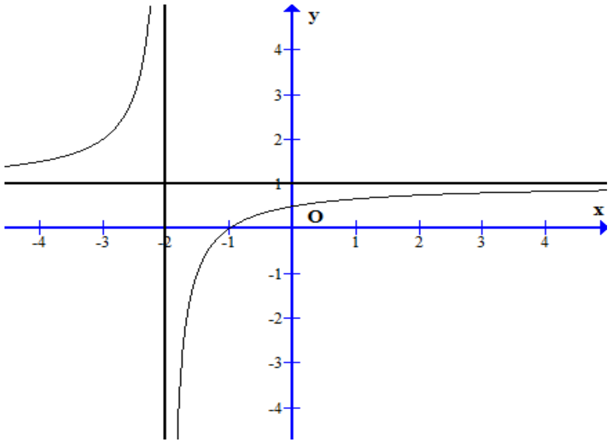
Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



A. Tiệm cận đứng $x=-2$, tiệm cận ngang $y=1$.
B. Tiệm cận đứng $x=2$, tiệm cận ngang $y=-1$.
C. Tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-2$.
D. Tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=2$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có báng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		−	‖	−	0	+	
y	1 ↘ $-\infty$		‖	2 ↘	-3	↗ 3	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		−	‖	−	0	+	
y	2 ↘ -4		‖	$+\infty$ ↘	-2	↗ $+\infty$	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 9. Cho hàm số có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$+$	
y	-4 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 10. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ 1	↗	3

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 11. Cho hàmsố $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	0	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ 3	↗	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 12. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	
y	1	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 13. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

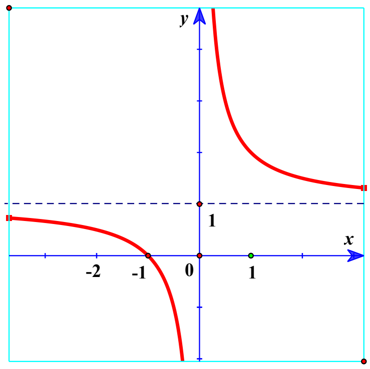
x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	||	$-$	
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$		||	$+\infty \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow -\infty$	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 14. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên.



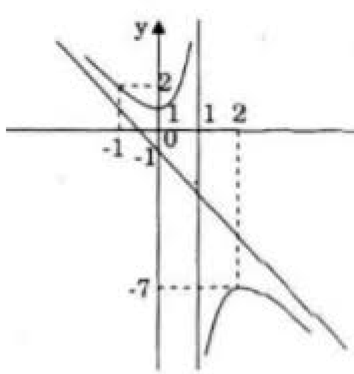
A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ chỉ có một đường tiệm cận.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x = 0$, đường tiệm cận ngang $y = 1$.

C. Hàm số $y = f(x)$ không có cực trị.

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Câu 15. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên.



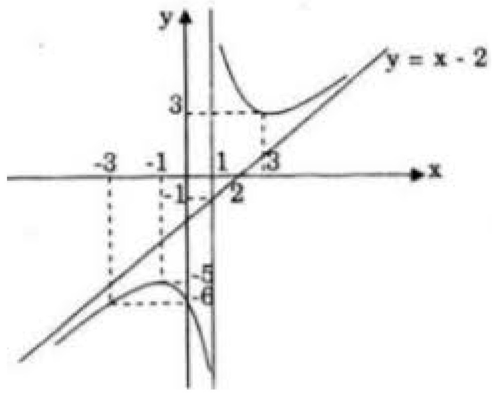
A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên.

C. Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $(2;-7)$ và điểm cực tiểu $(0;1)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(0;2)$

Câu 16. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên.



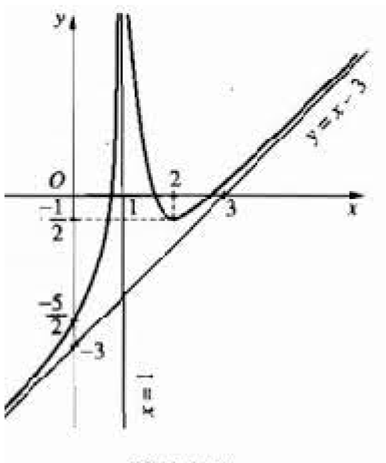
A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=1$

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận xiên $y=x-2$.

C. Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(3;3)$ và điểm cực tiểu $(-1;-5)$.

D. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;-3)$ và $(3;+\infty)$

Câu 17. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình bên.



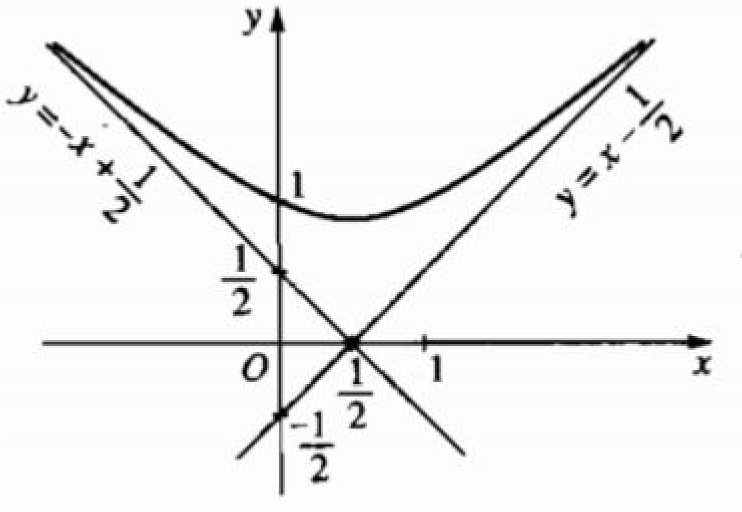
A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=1$

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận ngang $y=x-3$.

C. Hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực tiểu $\left(2;-\frac{1}{2}\right)$.

D. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$

Câu 18. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình bên.



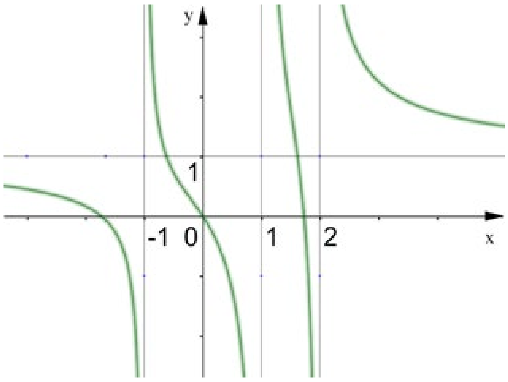
A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận đứng

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai tiệm cận xiên $y=x-\frac{1}{2}$ và . $y=-x+\frac{1}{2}$

C. Hàm số $y=f(x)$ không cực trị.

D. Hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là $\min_{\mathbb{R}} y=\frac{1}{2}$

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$. Có đồ thị như hình vẽ.



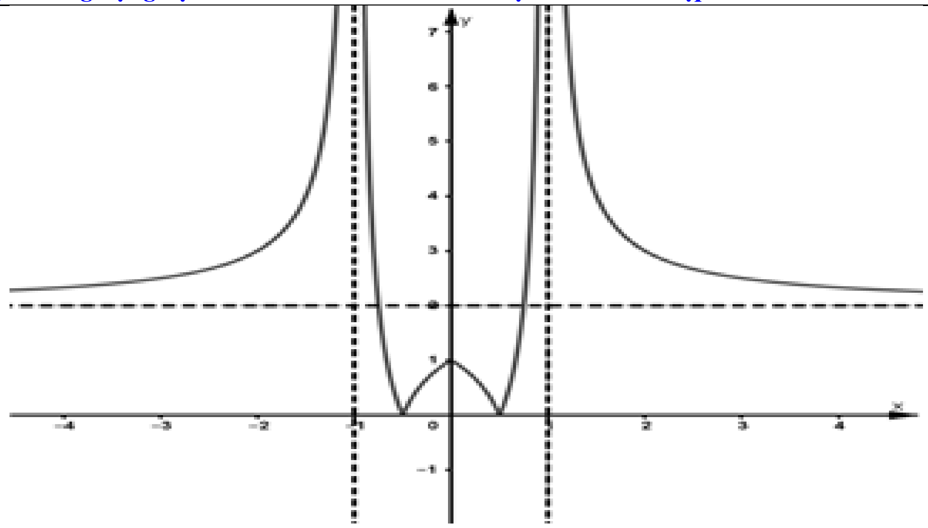
A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai đường tiệm cận đứng $x=-1$ và $x=1$

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một đường tiệm cận ngang là $y=1$.

C. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;1)$; $(-1;0)$; $(1;2)$ và $(2;+\infty)$

D. Hàm số $y=f(x)$ không có cực trị.

Câu 20. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hình vẽ dưới đây.



A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số bằng 3.

B. Hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\min\limits_{\mathbb{R}} y=0$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$

D. Hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-1

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x=-1$

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận ngang $y=-1$

C. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$

D. Hàm số $y=f(x)$ không có điểm cực trị.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	2	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ 1	‖	$+\infty$ ↗	2	↘	3

A. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 2

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba đường tiệm cận ngang $y=1; y=2; y=3$

C. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(1;+\infty)$

D. Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	2	↗	$+\infty$ || 3	↗	5

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Câu 24. Số tiệm cận đứng và số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau là

x	-2		-1		1		4		$+\infty$
y'	||	$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
y	0	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$0,325$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến như sau:

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	||	$+$	
y	0	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	0

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là bao nhiêu?

DẠNG 2

BIẾT HÀM SỐ $y = f(x)$

• Trường hợp $y = f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm số phân thức hữu tỷ.

+ Nếu $Q(x) = 0$ có nghiệm x_0 thì đồ thị có tiệm cận đứng $x = x_o$ (x_o là điểm tại đó hàm số không xác định $\Rightarrow x = x_o$ là tiệm cận đứng).

+ Nếu bậc $[P(x)] \le$ bậc $[Q(x)]$ thì đồ thị có tiệm cận ngang.

+ Nếu bậc $[P(x)] =$ bậc $[Q(x)] + 1$ thì đồ thị có tiệm cận xiên.

+ Số tiệm cận đứng của hàm số phân thức $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ là số nghiệm của hệ $\begin{cases} Q(x) = 0 \\ P(x) \ne 0 \end{cases}$

+ Đồ thị có tiệm cận ngang thì không có tiệm cận xiên và ngược lại.

• Để xác định các hệ số a, b trong phương trình của **đường tiệm cận xiên**, ta có thể áp dụng các công thức: $\left[\begin{array}{l} a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x};\ b = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] \\ a = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x};\ b = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - ax] \end{array}\right.$.

• Thông thường đối với hàm dạng: $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ thì ta tìm cận xiên bằng cách chia đa thức, lấy phần nguyên là tiệm cận xiên do $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ (phần dư) = 0.

• Hàm số bậc ba và bậc bốn không có các đường tiệm cận.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 26. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+2}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $x = 2$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = -2$.

Câu 27. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $x = -1$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 1$.

Câu 28. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ là

A. $y = -2$. **B.** $y = 1$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 2$.

Câu 29. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x-3}$ là

A. $x = -3$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 3$.

Câu 30. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

Câu 31. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ **B.** $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ **C.** $y=\sqrt{x^2-1}$ **D.** $y=\dfrac{x}{x+1}$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x}{x+1}=+\infty, \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{x+1}=-\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 32. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 33. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận.

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Câu 34. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Câu 35. Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 37. Gọi n,d lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $n=0,d=2$. **B.** $n=d=1$. **C.** $n=1,d=2$. **D.** $n=0,d=1$.

Câu 38. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 39. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang phân biệt.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $x=2$.

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

A. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C).

B. Đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của (C).

C. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận ngang của (C).

D. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của (C).

Câu 42. Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x+4}$ có đồ thị (C).

A. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C).

B. Đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của (C).

C. Hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x+4}$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;10)$ và $(10;+\infty)$.

D. Đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của (C).

Câu 43. Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ có đồ thị (C).

A. Đường thẳng $x=-1$ và $x=0$ là hai tiệm cận đứng của (C).

B. Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của (C).

C. Hàm số có ba đường tiệm cận.

D. Đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của (C).

Câu 44. Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có đồ thị (C).

A. Đường thẳng $y=\dfrac{1}{3}$ là tiệm cận ngang của (C).

B. Đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của (C).

C. Hàm số có ba đường tiệm cận.

D. Đường thẳng $x=-\dfrac{1}{3}$ là tiệm cận đứng của (C).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 45. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

Câu 46. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

Câu 47. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+4}{x}$.

Câu 48. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+5}{x+1}$.

Câu 49. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

A. $x=3$ và $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=-3$ và $x=-2$. **D.** $x=-3$.

Câu 50. Tìm đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$.

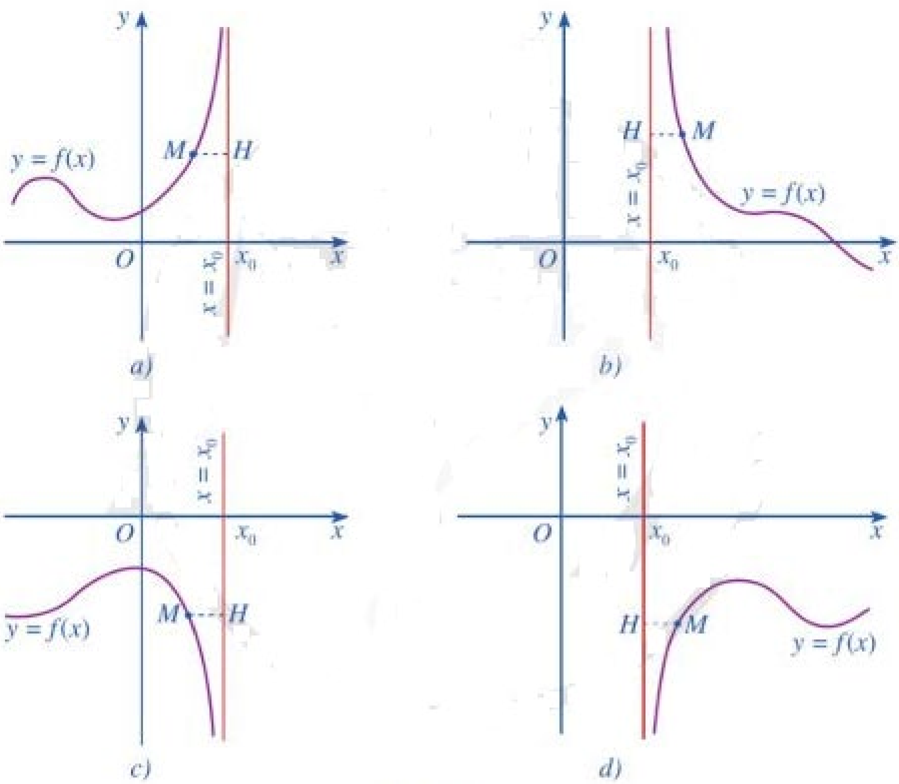
BÀI 3
ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

2 . Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty; \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

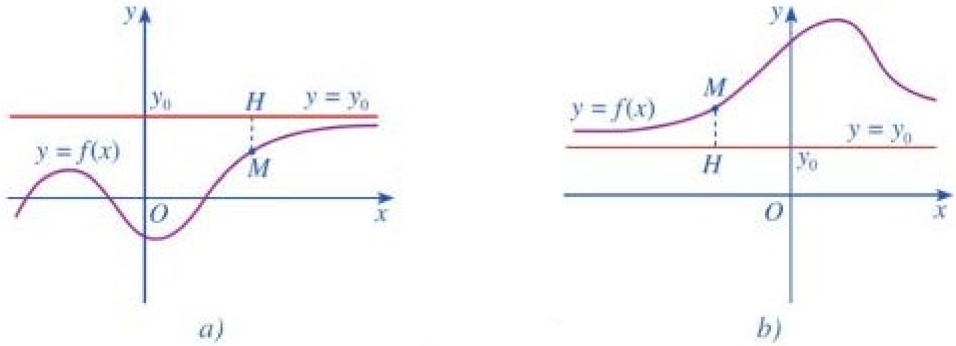
Nhận xét: Giả sử đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Lấy điểm $M(x; y)$ thuộc đồ thị hàm số. Gọi MH là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $x = x_0$. Khi đó, độ dài MH tiến tới 0 khi $x \to x_0^-$ (hình a, c) hay khi $x \to x_0^+$ (hình b, d)



2 . Đường tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$.

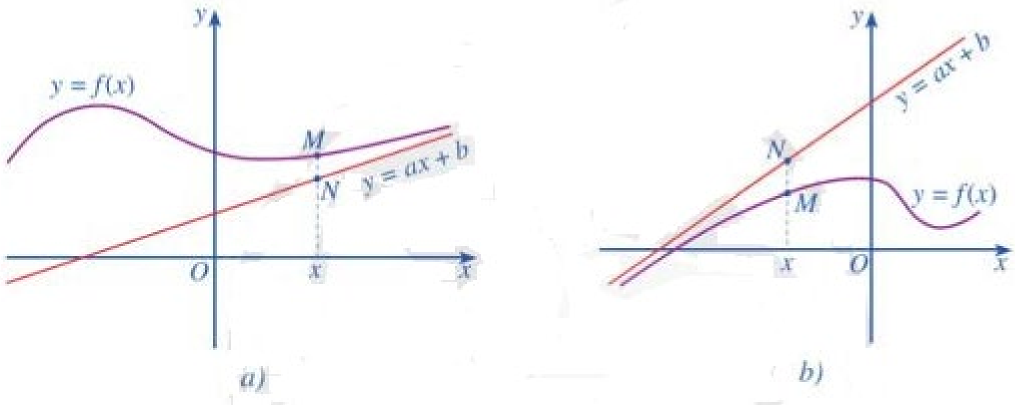
Nhận xét: Giả sử đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Lấy điểm $M(x; y)$ thuộc đồ thị hàm số. Gọi MH là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $y = y_0$. Khi đó, độ dài MH tiến tới 0 khi $x \to +\infty$ (hình a) hay khi $x \to -\infty$ (hình b)



3 . Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y = ax + b\left(a \neq 0\right)$ được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ nếu: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f\left(x\right) - \left(ax + b\right)\right] = 0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[f\left(x\right) - \left(ax + b\right)\right] = 0$.

Nhận xét: Giả sử đường thẳng $y = ax + b\left(a \neq 0\right)$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$. Lấy điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ và điểm N thuộc đường thẳng $y = ax + b$ có cùng hoành độ x. Khi đó, độ dài MN tiến tới 0 khi $x \to +\infty$ (hình a) hay khi $x \to -\infty$ (hình b)



CHỦ ĐỀ 1

TÌM TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y=f(x)$ KHI BIẾT HÀM SỐ, ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$

I . Tiệm cận của đồ thị hàm số

1. Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\left|\begin{matrix}\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty\end{matrix}\right\rangle \Rightarrow$ **tiệm cận đứng** $x=x_0$.

2. Đường thẳng $y=y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất 1 trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn: $\left|\begin{matrix}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0\end{matrix}\right\rangle \Rightarrow$ **tiệm cận ngang** $y=y_0$.

3. Đường thẳng $y=ax+b\,(a\neq 0)$ được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất 1 trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn: $\left|\begin{matrix}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0\end{matrix}\right\rangle \Rightarrow$ **tiệm cận xiên** $y=ax+b$.

II. Quy tắc tìm giới hạn vô cực

1. Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ (hoặc $-\infty$) thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

2. Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L>0$	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L<0$		$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

(Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_0$)

Chú ý: Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \to {x_0}^+, x \to {x_0}^-, x \to +\infty$ và $x \to -\infty$.

III. Kỹ năng dùng Casio

Giả sử cần tính $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ta dùng chức năng CALC để tính giá trị của $f(x)$ tại các giá trị của x rất gần a.

1. Giới hạn của hàm số tại một điểm

- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = a + 10^{-9}$.
- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = a - 10^{-9}$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = a + 10^{-9}$ hoặc $x = a - 10^{-9}$.

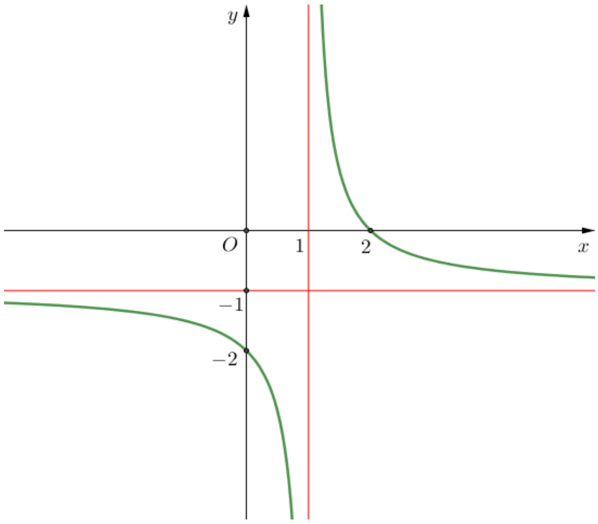
2. Giới hạn của hàm số tại vô cực

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = 10^{10}$.
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = -10^{10}$.

DẠNG 1
BIẾT ĐỒ THỊ HOẶC BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng bằng:

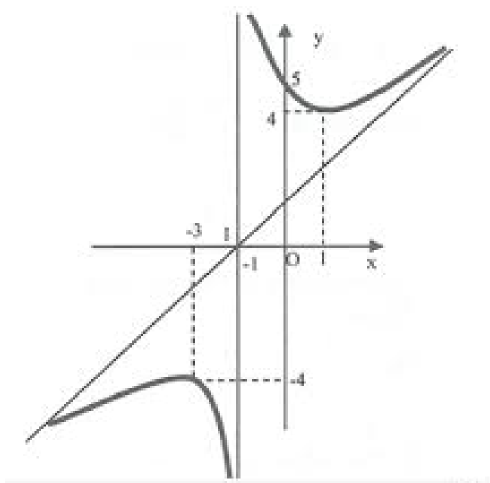
A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=0$. **D.** $y=-1$.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có một tiệm cận đứng $x=1$

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

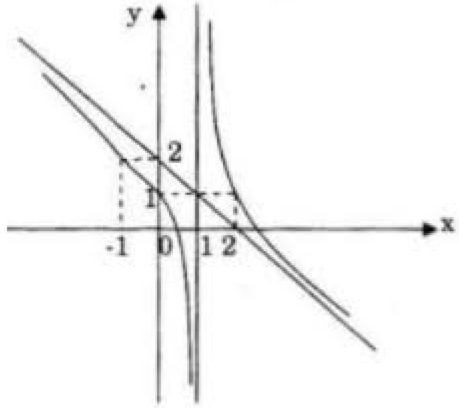
A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có một tiệm cận đứng và 1 tiệm cận xiên.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

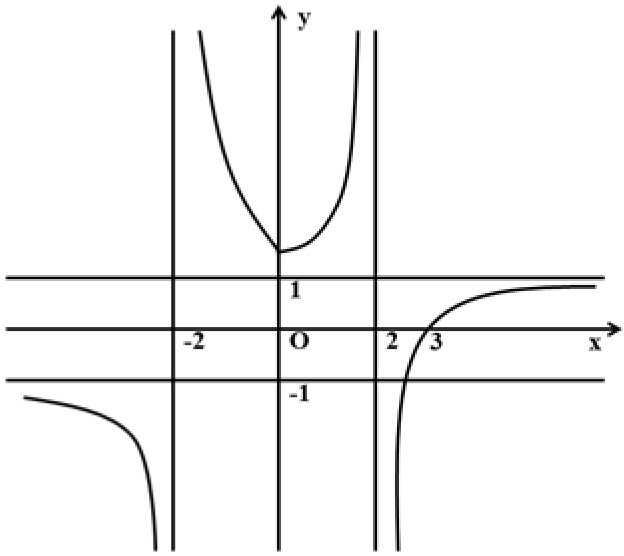
A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có một tiệm cận đứng và 1 tiệm cận xiên.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ nên đường thẳng $y = -1$ là một đường tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là một đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = \pm 1$.

Tương tự

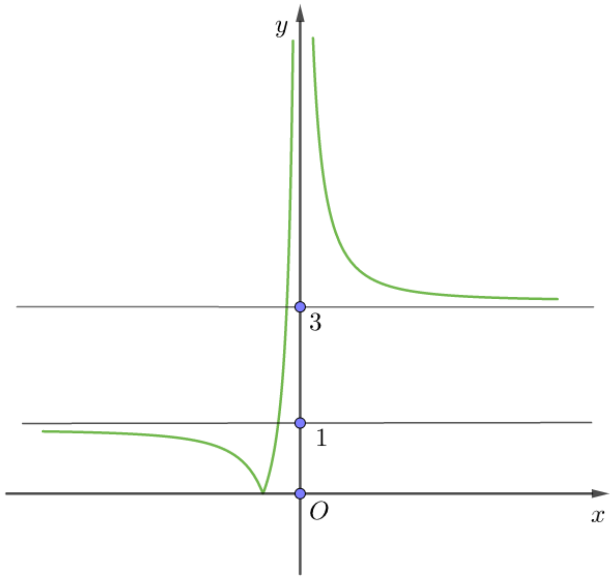
$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ và và $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là đường tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x = \pm 2$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có:

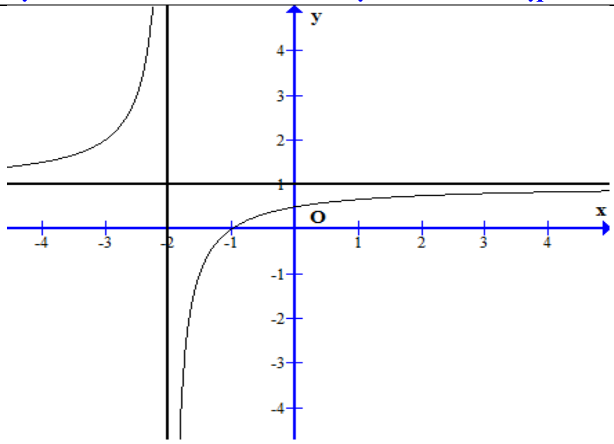
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ nên đường thẳng $y = 3$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ suy ra đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



A. Tiệm cận đứng $x=-2$, tiệm cận ngang $y=1$. **B.** Tiệm cận đứng $x=2$, tiệm cận ngang $y=-1$.

C. Tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-2$. **D.** Tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=2$.

Lời giải

Chọn A.

Dựa vào đồ thị ta có

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có báng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	0	$+$	
y	1 ↘		$-\infty$ || 2	↘	-3	↗	3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

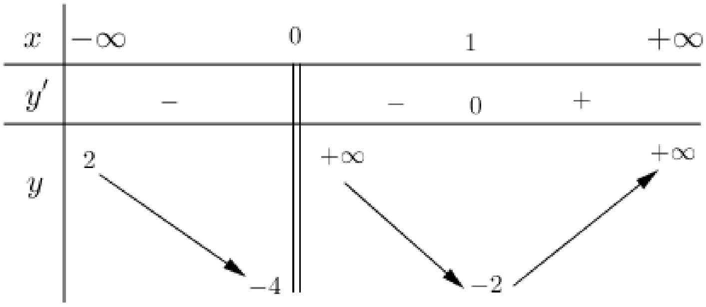
Nhìn bảng biến thiên ta thấy x=0 hàm số không xác định nên x=0 là TCĐ của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3 \Rightarrow y=3$ là TCN của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1 \Rightarrow y=1$ là TCN của đồ thị hàm số

Vậy hàm số có 3 tiệm cận

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$ Không tồn tại tiệm cận ngang khi $x\to+\infty$.

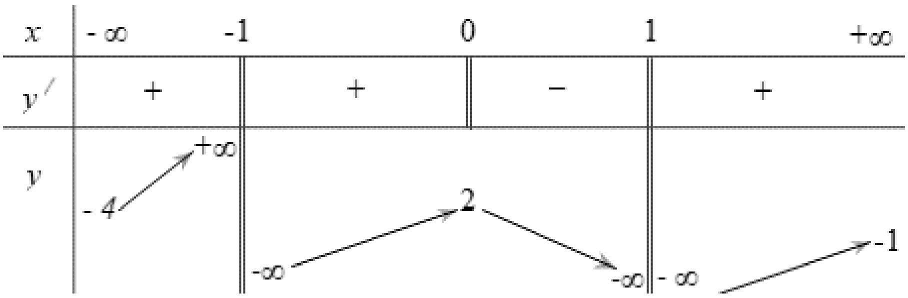
$\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=2$ vậy hàm số $y=f\left(x\right)$ có tiệm cận ngang $y=2$.

$\lim\limits_{x\to0^+}f\left(x\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-}f\left(x\right)=-4$.

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có tiệm cận đứng $x=0$.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và ngang là 2.

Câu 9. Cho hàm số có bảng biến thiên như hình sau



Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}y=4$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-1\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=-1$ và $y=4$.

$\lim\limits_{x\to-1^-}y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}y=-\infty\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to1^-}y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}y=+\infty\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

Nên đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 10. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$			$+\infty$ ‖		3
		↗	‖	↗	
	$-\infty$		‖ 1		

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=3$ ta được tiệm cận ngang $y=3$

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} f\left(x\right)=+\infty$ ta được tiệm cận đứng $x=-2$

Câu 11. Cho hàmsố $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y			2		‖		5
		↗		↘	‖	↗	
	0			$-\infty$	‖ 3		

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

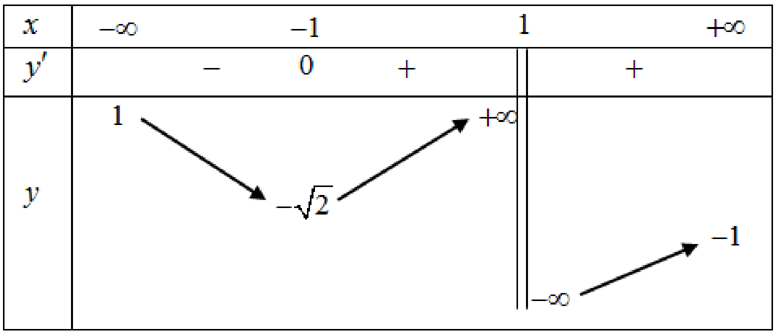
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ là một tiệm cận ngang

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5 \Rightarrow y=5$ là một tiệm cận ngang

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty \Rightarrow x=1$ là một tiệm cận đứng

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 3.

Câu 12. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$



A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

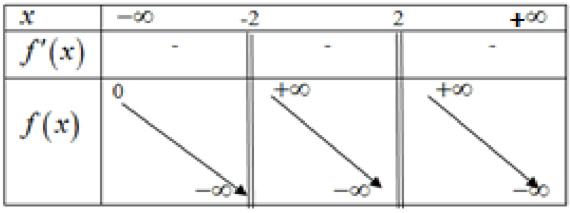
Chọn D.

Do $\lim\limits_{x\to 1^+} y=-\infty;\lim\limits_{x\to 1^-}=+\infty \Rightarrow$ TCĐ: $x=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=-1;\lim\limits_{x\to-\infty} y=1 \Rightarrow$ đồ thị có 2 tiệm cận ngang là $y=\pm 1$

Vậy, đồ thị hàm số đã cho có tổng số TCĐ và TCN là 3.

Câu 13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ không có tiệm cận ngang khi $x\to+\infty$.

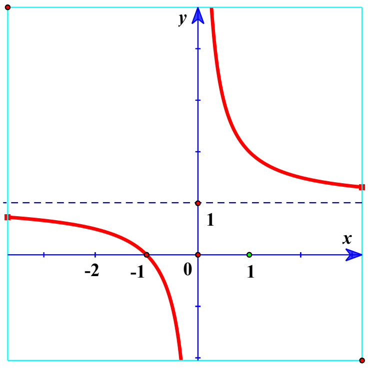
$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 3 tiệm cận.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 14. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên.



A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ chỉ có một đường tiệm cận.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x = 0$, đường tiệm cận ngang $y = 1$.

C. Hàm số $y = f(x)$ không có cực trị.

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Lời giải

Từ đồ thị ta có:

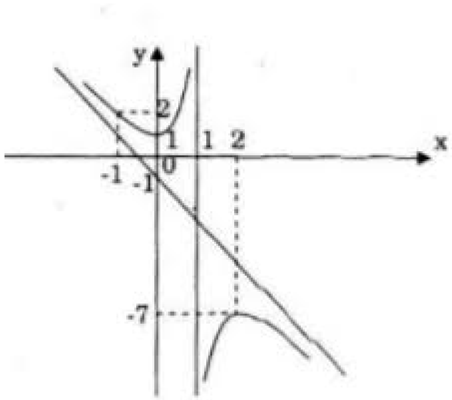
A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ chỉ có một đường tiệm cận. **SAI**

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x = 0$, đường tiệm cận ngang $y = 1$. **ĐÚNG**

C. Hàm số $y = f(x)$ không có cực trị. **ĐÚNG**

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$. **ĐÚNG**

Câu 15. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên.



A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên.

C. Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $(2;-7)$ và điểm cực tiểu $(0;1)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(0;2)$

Lời giải

Từ đồ thị ta có:

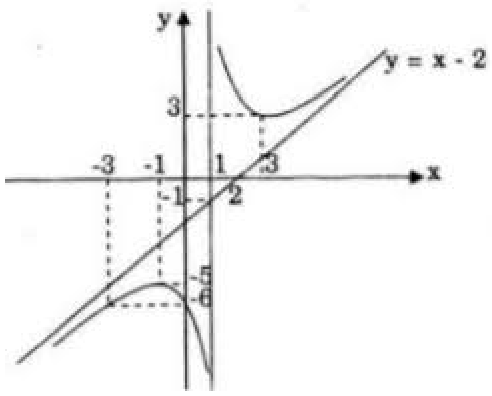
A. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$. **ĐÚNG**

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên. **ĐÚNG**

C. Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(2;-7)$ và điểm cực tiểu $(0;1)$. **ĐÚNG**

D. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(0;2)$ **SAI**

Câu 16. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình bên.



A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=1$

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận xiên $y=x-2$.

C. Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(3;3)$ và điểm cực tiểu $(-1;-5)$.

D. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;-3)$ và $(3;+\infty)$

Lời giải

Từ đồ thị ta có:

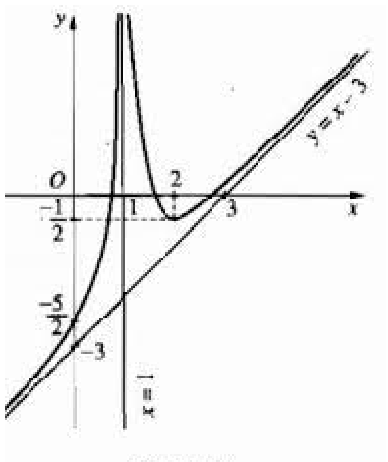
A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=1$ **ĐÚNG**

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận xiên $y=x-2$. **ĐÚNG**

C. Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(3;3)$ và điểm cực tiểu $(-1;-5)$. **SAI**

D. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;-3)$ và $(3;+\infty)$ **SAI**

Câu 17. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình bên.



A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=1$

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang $y = x - 3$.

C. Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu $\left(2; -\frac{1}{2}\right)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$

Lời giải

Từ đồ thị ta có:

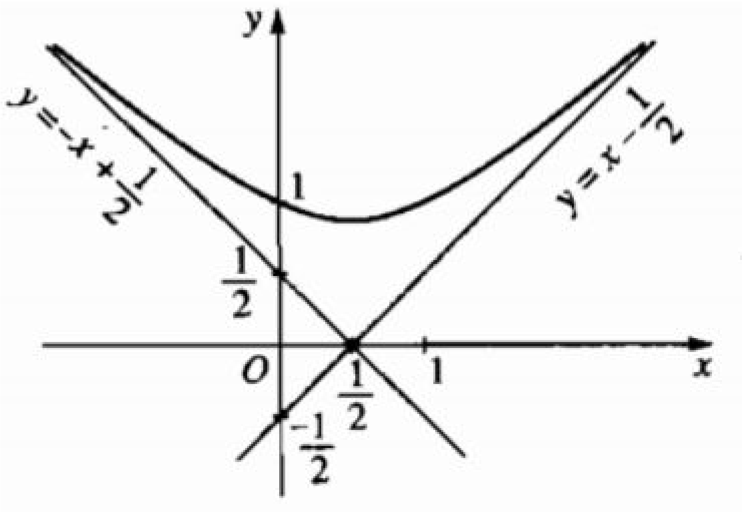
A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 1$ **ĐÚNG**

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang $y = x - 3$. **SAI**

C. Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu $\left(2; -\frac{1}{2}\right)$. **ĐÚNG**

D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$ **ĐÚNG**

Câu 18. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên.



A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận đứng

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai tiệm cận xiên $y = x - \frac{1}{2}$ và . $y = -x + \frac{1}{2}$

C. Hàm số $y = f(x)$ không cực trị.

D. Hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là $\min\limits_{\mathbb{R}} y = \frac{1}{2}$

Lời giải

Từ đồ thị ta có:

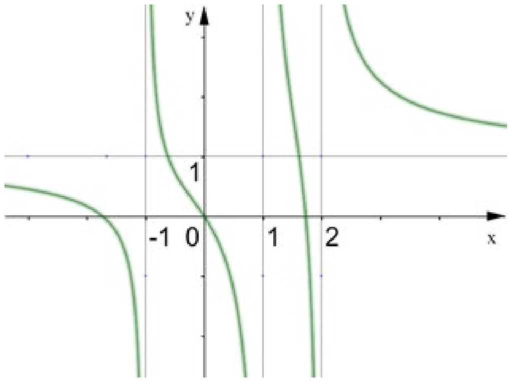
A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận đứng **ĐÚNG**

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai tiệm cận xiên $y = x - \frac{1}{2}$ và . $y = -x + \frac{1}{2}$ **ĐÚNG**

C. Hàm số $y = f(x)$ không cực trị. **SAI**

D. Hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là $\min\limits_{\mathbb{R}} y = \frac{1}{2}$ **SAI**

Câu 19. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Có đồ thị như hình vẽ.



A. Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai đường tiệm cận đứng $x=-1$ và $x=1$

B. Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có một đường tiệm cận ngang là $y=1$.

C. Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trong khoảng $\left(-\infty;1\right);\left(-1;0\right);\left(1;2\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$

D. Hàm số $y=f\left(x\right)$ không có cực trị.

Lời giải

A. Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai đường tiệm cận đứng $x=-1$ và $x=1$ **SAI**

B. Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có một đường tiệm cận ngang là $y=1$. **ĐÚNG**

C. Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trong khoảng $\left(-\infty;1\right);\left(-1;0\right);\left(1;2\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$ **ĐÚNG**

D. Hàm số $y=f\left(x\right)$ không có cực trị. **ĐÚNG**

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị của hàm số ta có

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f\left(x\right)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f\left(x\right)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to1^+} f\left(x\right)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-} f\left(x\right)=-\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to2^+} f\left(x\right)=+\infty$ và và $\lim\limits_{x\to2^-} f\left(x\right)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận đứng là $x=\pm1$ và $x=2$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

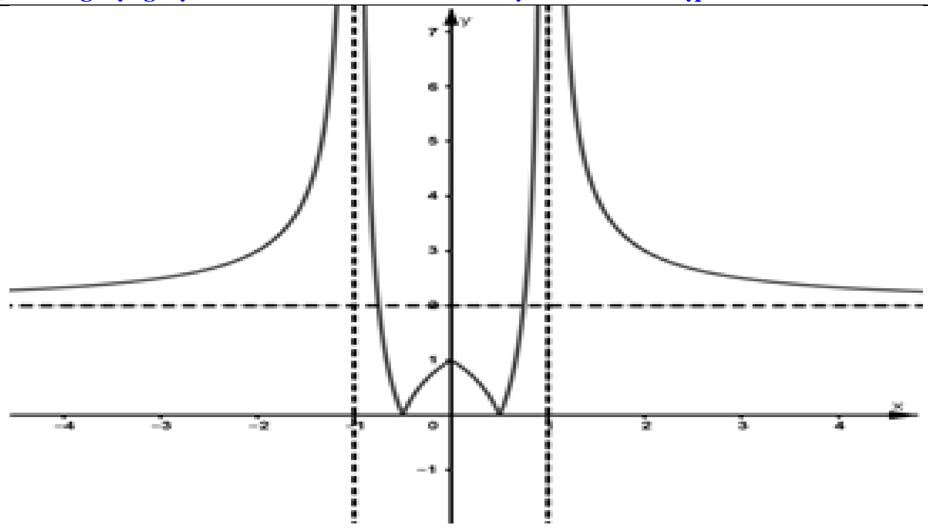
$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=1$ nên đường thẳng $y=1$ là một đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y=1$.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trong khoảng $\left(-\infty;1\right);\left(-1;0\right);\left(1;2\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$

Hàm số $y=f\left(x\right)$ không có cực trị.

Câu 20. Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có hình vẽ dưới đây.



A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số bằng 3.

B. Hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\min\limits_{\mathbb{R}} y=0$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$

D. Hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số bằng 3. **ĐÚNG**

B. Hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\min\limits_{\mathbb{R}} y=0$. **ĐÚNG**

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$ **SAI**

D. Hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị. **ĐÚNG**

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y=2$

Lại thấy: $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là

$x=-1; x=1$

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	-1

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x=-1$

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận ngang $y=-1$

C. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$

D. Hàm số $y = f(x)$ không có điểm cực trị.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy:

A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x = -1$ **SAI**

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận ngang $y = -1$ **SAI**

C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$ **ĐÚNG**

D. Hàm số $y = f(x)$ không có điểm cực trị. **ĐÚNG**

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	1 $\|\|$ $+\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	3

A. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 2

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba đường tiệm cận ngang $y = 1; y = 2; y = 3$

C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(1;+\infty)$

D. Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

A. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 2 **ĐÚNG**

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba đường tiệm cận ngang $y = 1; y = 2; y = 3$ **ĐÚNG**

C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(1;+\infty)$ **ĐÚNG**

D. Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị. **SAI**

$\lim\limits_{x \to -2^-} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -2^+} y = -\infty$ suy ra $x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty$ suy ra $x = 0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị của hàm số có 2 đường tiệm cận đứng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	2	$\nearrow$	$+\infty \;\Vert\; 3$	$\nearrow$	5

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Từ bảng biến thiên ta có:

$\lim\limits_{x\to 1^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to -\infty} y = 2$, $\lim\limits_{x\to +\infty} y = 5$ nên đường thẳng $y=2$ và $y=5$ là các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 24. Số tiệm cận đứng và số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau là

x	-2		-1		1		4		$+\infty$
y'	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty \;\Vert\; -\infty$	$\nearrow$	$0,325$	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	1

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: có 2 TCĐ

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)=1$ nên $y=1$ là TCN.

$\lim\limits_{x\to -1^+} f\left(x\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^-} f\left(x\right)=+\infty$ nên $x=-1$ là TCĐ.

$\lim\limits_{x\to 4^+} f\left(x\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 4^-} f\left(x\right)=-\infty$ nên $x=4$ là TCĐ.

Vậy có 2 TCĐ và 1 TCN .

Câu 25. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty \;\Vert\; -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \;\Vert\; -\infty$	$\nearrow$	0

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 3.

Từ bảng biến thiên của hàm số ta có:

+ $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang.

+ $\lim\limits_{x\to(-3)^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-3)^+} = -\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -3$ là tiệm cận đứng.

+ $\lim\limits_{x\to3^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to3^+} = -\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng.

Vậy số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 3.

DẠNG 2

BIẾT HÀM SỐ $y = f\left(x\right)$

• Trường hợp $y = f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm số phân thức hữu tỷ.

+ Nếu $Q(x) = 0$ có nghiệm x_0 thì đồ thị có tiệm cận đứng $x = x_o$ (x_o là điểm tại đó hàm số không xác định $\Rightarrow$ $x = x_o$ là tiệm cận đứng).

+ Nếu bậc $\left[P(x)\right] \leq$ bậc $\left[Q(x)\right]$ thì đồ thị có tiệm cận ngang.

+ Nếu bậc $\left[P(x)\right] =$bậc $\left[Q(x)\right] + 1$ thì đồ thị có tiệm cận xiên.

+ Số tiệm cận đứng của hàm số phân thức $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ là số nghiệm của hệ $\begin{cases} Q(x) = 0 \\ P(x) \neq 0 \end{cases}$

+ Đồ thị có tiệm cận ngang thì không có tiệm cận xiên và ngược lại.

• Để xác định các hệ số a, b trong phương trình của **đường tiệm cận xiên**, ta có thể áp dụng các công thức: $\left[\begin{array}{l} a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x};\ b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax\right] \\ a = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x};\ b = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - ax\right] \end{array}\right.$.

• Thông thường đối với hàm dạng: $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ thì ta tìm cận xiên bằng cách chia đa thức, lấy phần nguyên là tiệm cận xiên do $\lim\limits_{x \to \pm\infty}$ (phần dư) = 0.

• Hàm số bậc ba và bậc bốn không có các đường tiệm cận.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 26. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+2}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $x = 2$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = -2$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có:

$\lim\limits_{x \to 2^+} y = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x+2}{x-2} = +\infty, \lim\limits_{x \to 2^-} y = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x+2}{x-2} = -\infty.$

Do đó tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+2}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình $x - 2$.

Câu 27. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $x = -1$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^-} y = -\infty; \lim\limits_{x\to 2^+} y = +\infty$.

Vậy đường thẳng $x = 2$ là TCĐ của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 28. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ là

A. $y = -2$. **B.** $y = 1$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-2}{x+1} = 1$ và $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-2}{x+1} = 1$

Suy ra $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 29. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x-3}$ là

A. $x = -3$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn D.

$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x-1}{x-3} = -\infty$. Suy ta tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 3$.

Câu 30. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$ là

A. $x = -2$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^+} y = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x-2}{x+1} = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to -1^-} y = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x-2}{x+1} = +\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 31. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ **B.** $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ **C.** $y = \sqrt{x^2-1}$ **D.** $y = \dfrac{x}{x+1}$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x}{x+1} = +\infty, \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x}{x+1} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 32. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(5-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 5$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y=5$.

Tiệm cận đứng:

Cho $x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to1} y = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(5x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x+1}{x+1} = \dfrac{6}{2} = 3$ nên $x=1$ không là tiệm cận đứng.

$$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\dfrac{1}{x+1}.\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}\right) = -\infty$$

vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1} = -4 < 0 \end{cases}$.

Khi đó, đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x=-1$.

Tổng cộng đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 33. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận.

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn C.

Ta có $x^2-4=0 \Leftrightarrow x=\pm2$

$\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right) = \dfrac{1}{4}$ nên đường thẳng $x=2$ không phải là tiệm cân đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-2^+}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right) = \lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{1}{x+2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right) = \lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{1}{x+2} = -\infty$, nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cân đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right) = 0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy có đồ thị có hai đường tiệm cận.

Câu 34. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định của hàm số: $D=[-4;+\infty)\setminus\{0;-1\}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} y = \frac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = -\infty$

$\Rightarrow$ TCĐ: $x=-1$.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Câu 35. Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định của hàm số $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

TH1: $x<-1 \Rightarrow x+1<0$. Khi đó $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Suy ra hàm số TCN $y=-1$, không có TCĐ.

TH2: $x>1 \Rightarrow x+1>0$. Khi đó $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Suy ra hàm số TCN $y=1$, TCĐ $x=1$.

Vậy hàm số có 2 TCN và 1 TCN

Câu 36. Cho hàm số $y=\frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện: $x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup(-1;1)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^4}}} = 1 \Rightarrow y=1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Có $\lim\limits_{x\to 1^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{(x+1)\left(x+\sqrt{2}\right)(x-1)\left(x-\sqrt{2}\right)}} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{\sqrt{(x+1)}(x+2)}{\sqrt{\left(x+\sqrt{2}\right)(x-1)\left(x-\sqrt{2}\right)}} = 0$ nên đường thẳng $x=-1$ không là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^{+}} y=+\infty$ nên đường thẳng $x=\sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{2})^{-}} y=+\infty$ nên đường thẳng $x=-\sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận (1 tiệm cận ngang, 3 tiệm cận đứng).

Câu 37. Gọi n,d lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $n=0,d=2$. **B.** $n=d=1$. **C.** $n=1,d=2$. **D.** $n=0,d=1$.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định: $D=(0;1)$.

Từ tập xác định suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. $n=0$.

+) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} y=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}}=-\infty$

+) $\lim\limits_{x\to 1^{-}} y=\lim\limits_{x\to 1^{-}}\dfrac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 1^{-}}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}}=-\infty$

Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng, $d=2$.

Câu 38. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định: $D=\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)\backslash\{1\}$

+ Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^{+}}\dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}=\lim\limits_{x\to 1^{+}}\dfrac{(x-1)\left(4\sqrt{3x+1}+3x+5\right)}{-9(x-1)^{2}}=\lim\limits_{x\to 1^{+}}\dfrac{4\sqrt{3x+1}+3x+5}{-9(x-1)}=-\infty$

do đó đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{4\sqrt{\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^{2}}}-3-\dfrac{5}{x}}=-\dfrac{1}{3}$ do đó đường thẳng $y=-\dfrac{1}{3}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 39. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^{2}+2x-1}+x}{x+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases}4x^2+2x-1\ge 0\\ x+1\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}\\ x\ge \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.\\ x\ne -1\end{cases}$.

Tập xác định của hàm số đã cho là $D=(-\infty;-1)\cup\left(-1;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}\right]\cup\left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4};+\infty\right)$.

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}}=-1.$$

$\Rightarrow y=-1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}}=3.$$

$\Rightarrow y=3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-1} y=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{4x^2+2x-1-x^2}{(x+1)\left(\sqrt{4x^2+2x-1}-x\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)\left(\sqrt{4x^2+2x-1}-x\right)}=-2.$$

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có 2 đường tiệm cận.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang phân biệt.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $x=2$.

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang

Lời giải

A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang. **ĐÚNG**

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang phân biệt. **SAI**

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $x=2$. **SAI**

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang. **SAI**

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Rightarrow$ đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của $y=f(x)$.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

A. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C).

B. Đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của (C).

C. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận ngang của (C).

D. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của (C).

Lời giải

A. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C). **ĐÚNG**

B. Đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của (C). **SAI**

C. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận ngang của (C). **SAI**

D. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của (C). **SAI**

Ta có: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \end{cases} \Rightarrow$ đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C).

Câu 42. Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x+4}$ có đồ thị (C).

A. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C).

B. Đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của (C).

C. Hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x+4}$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;10)$ và $(10;+\infty)$.

D. Đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của (C).

Lời giải

A. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C). **SAI**

B. Đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của (C). **ĐÚNG**

C. Hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x+4}$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;10)$ và $(10;+\infty)$. **ĐÚNG**

D. Đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của (C). **ĐÚNG**

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2-\frac{1}{x}}{2+\frac{4}{x}}=\dfrac{2}{2}=1$

$\Rightarrow y=1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x+4}$.

Câu 43. Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ có đồ thị (C).

A. Đường thẳng $x=-1$ và $x=0$ là hai tiệm cận đứng của (C).

B. Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của (C).

C. Hàm số có ba đường tiệm cận.

D. Đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của (C).

Lời giải

A. Đường thẳng $x=-1$ và $x=0$ là hai tiệm cận đứng của (C). **SAI**

B. Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của (C). **ĐÚNG**

C. Hàm số có ba đường tiệm cận. **SAI**

D. Đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của (C). **ĐÚNG**

Tập xác định hàm số $D=[-16;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

Ta có

$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=\frac{1}{8}.$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} y=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=+\infty.$$

vì $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\sqrt{x+16}+4\right)=\sqrt{15}+4>0$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)=0$ và $x\to(-1)^+$ thì $x>-1\Rightarrow x+1>0$.

Tương tự $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=-\infty$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x=-1$.

Câu 44. Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có đồ thị (C).

A. Đường thẳng $y=\dfrac{1}{3}$ là tiệm cận ngang của (C).

B. Đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của (C).

C. Hàm số có ba đường tiệm cận.

D. Đường thẳng $x=-\dfrac{1}{3}$ là tiệm cận đứng của (C).

Lời giải

A. Đường thẳng $y=\frac{1}{3}$ là tiệm cận ngang của (C). **ĐÚNG**

B. Đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của (C). **ĐÚNG**

C. Hàm số có ba đường tiệm cận. **SAI**

D. Đường thẳng $x=-\frac{1}{3}$ là tiệm cận đứng của (C). **SAI**

Xét hàm số $y=\frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có tập xác định $D=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Ta có

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{3x^2+x}{(3x+1)\left(2x-\sqrt{x^2-x}\right)}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{x}{2x-\sqrt{x^2-x}}=\frac{1}{4};$$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=0$ và $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=\frac{1}{2}$ nên đồ thị không có tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{2x-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3x+1}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{2-\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3+\frac{1}{x}}=\frac{1}{3},$$

và $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{2x+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{2+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3+\frac{1}{x}}=1$ nên đồ thị có hai tiệm cận ngang là $y=\frac{1}{3}$ và $y=1$.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 45. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$.

Lời giải

Đáp án: $x=1$

Ta có:

$$\lim_{x\to1^+}y=\lim_{x\to1^+}\frac{2x-1}{x-1}=+\infty,\lim_{x\to1^-}y=\lim_{x\to1^-}\frac{2x-1}{x-1}=-\infty.$$

Do đó tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình $x=1$.

Câu 46. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$.

Lời giải

Đáp án: $y=2$

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=2$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=2$.

Câu 47. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+4}{x}$.

Lời giải

Đáp án: tiệm cận đứng $x=0$ và tiệm cận xiên $y=x$

Câu 48. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+5}{x+1}$.

Lời giải

Đáp án: tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận xiên $y=x+1$

Câu 49. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

A. $x=3$ và $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=-3$ và $x=-2$. **D.** $x=-3$.

Lời giải

Đáp án: $x=3$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{2;3\}$

$$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{(2x-1)^2-\left(x^2+x+3\right)}{\left(x^2-5x+6\right)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$$

$$=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{(2x-1)^2-\left(x^2+x+3\right)}{\left(x^2-5x+6\right)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$$

$$=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{(3x+1)}{(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}=-\dfrac{7}{6}$$

Tương tự $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=-\dfrac{7}{6}$. Suy ra đường thẳng $x=2$ **không** là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=-\infty$. Suy ra đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 50. Tìm đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$.

Lời giải

Đáp án: tiệm cận đứng $x=2$ và tiệm cận ngang $y=0$

Đkxđ: $\begin{cases} x-2\ge 0 \\ x^2-3x+2\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x\ne 2, x\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow x>2$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}\right)=+\infty$ nên đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}\right)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

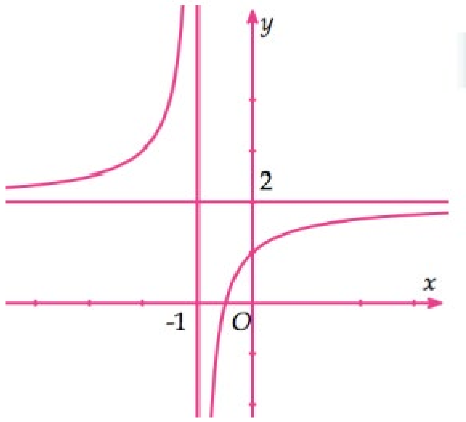
CHỦ ĐỀ 2

TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$ CÓ CHỨA THAM SỐ

DẠNG 1

BIẾT ĐỒ THỊ , BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$

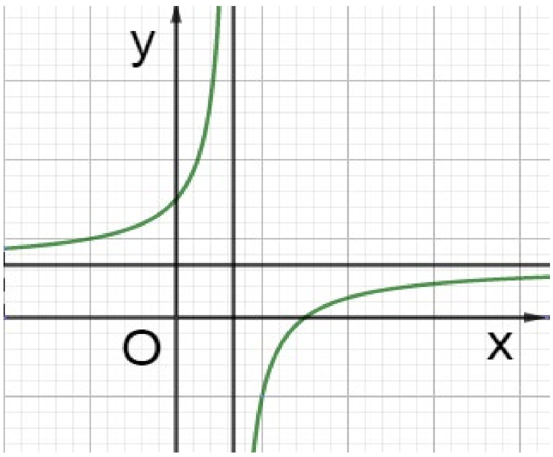
Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{nx+1}{x+m}$; $(mn\neq 1)$ xác định trên $R\setminus\{-1\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có đồ thị như hình vẽ bên:



Tính tổng $m+n$?

A. $m+n=1$. **B.** $m+n=-1$. **C.** $m+n=3$. **D.** $m+n=-3$.

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x-3}{x-m}$ có đồ thị như hình dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tâm đối xứng của đồ thị hàm số nằm trong đường tròn tâm gốc tọa độ O bán kính bằng $\sqrt{2019}$?

A. 40. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 38.

Câu 3. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên xác định như hình. Biết rằng đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=x_0$, tiệm cận ngang là $y=y_0$ và $x_0y_0=16$. Hỏi m bằng?

x	$-\infty$		m		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1 || $-\infty$	$\nearrow$	8

A. $m=8$. **B.** $m=-16$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Câu 4. Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	5 || $-\infty$	$\nearrow$	$m+2$

Tìm m để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang $y=y_o$ sao cho $x_o y_o<30$.

A. $m<1$. **B.** $m<10$. **C.** $m<8$. **D.** $m>8$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$ ||		$-$	||	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	1 || $+\infty$	$\searrow$	2 || $-\infty$	$\nearrow$	m^2

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-4;4]$ để hàm số có 4 tiệm cận?

A. 5 . **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

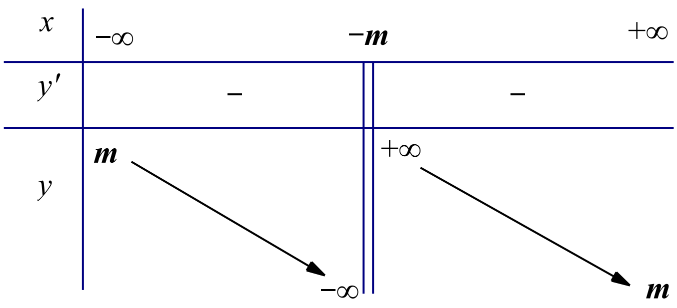
Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$(m-1)(2-m)$

Tìm tổng số các giá trị nguyên dương của tham số $m\in\left(-10;10\right)$ để đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 4.

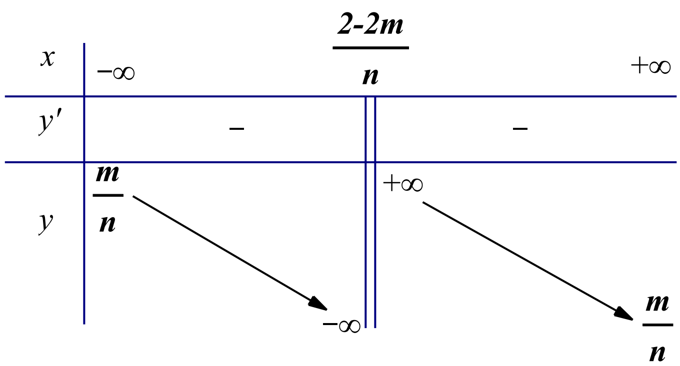
A. 42. **B.** 45. **C.** -3. **D.** 0.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Định tham số m để giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là điểm $I\left(-1;1\right)$.



A. Không có m. **B.** $m=0$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Định tham số m và n để đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=2$, $y=2$ lần lượt là TCĐ và TCN thì biểu thức $9m^2+6mn+36n^2$ có giá trị là



A. $\frac{28}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

DẠNG 2

BIẾT ĐỒ ĐẶC ĐIỂM CỦA HÀM SỐ $y=f\left(x\right)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 9. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a,b để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

A. $a=-1;b=2$. **B.** $a=4;b=4$. **C.** $a=1;b=2$. **D.** $a=-1;b=-2$.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

A. 14. **B.** 8. **C.** 15. **D.** 16.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $m=-1$ **B.** $m\in\{1;4\}$ **C.** $m=4$ **D.** $m\in\{-1;-4\}$

Câu 12. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=\dfrac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ (m,n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m+n$.

A. 0 **B.** -3 **C.** 3 **D.** 6

Câu 13. Với giá trị nào của hàm số m để đồ thị hàm số $y=x-\sqrt{mx^2-3x+7}$ có tiệm cận ngang.

A. $m=1$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=\pm1$ **D.** Không có m

Câu 14. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

A. 12. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.

Câu 15. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\left[x^2-(2m+1)x+2m\right]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

A. $\begin{cases}0<m<1\\ m\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}m<1\\ m\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$. **C.** $m>1$. **D.** $\begin{cases}0\le m\le1\\ m\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang

A. $m<0$ **B.** $m=0$

C. $m>0$ **D.** Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 12. **B.** 11. **C.** 0. **D.** 10.

Câu 18. Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2022;2022]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. 4044. **B.** 2022. **C.** 2009. **D.** 2011.

Câu 19. Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x+1}+ax+b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó hiệu $a-b$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{3}{4}$. **C.** $-\dfrac{5}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 20. Định m để hàm số có tiệm cận đứng đi qua $A(-1;\sqrt{2})$ với $y=\dfrac{mx-1}{2x+m}$

Câu 21. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{3}{4x^2+2(2m+3)x+m^2-1}$ có đúng hai tiệm cận đứng

Câu 22. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ bằng 3?

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận.

Câu 26. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+(3m+2)x+2m-1}{x+5}$ có tiệm cận xiên.

Câu 27. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2+(2m+1)x+m+3}{x+2}$ có tiệm cận xiên.

Câu 28. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{mx^2-mx+m-1}{x-1}$ có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho đến đường tiệm cận xiên của nó bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

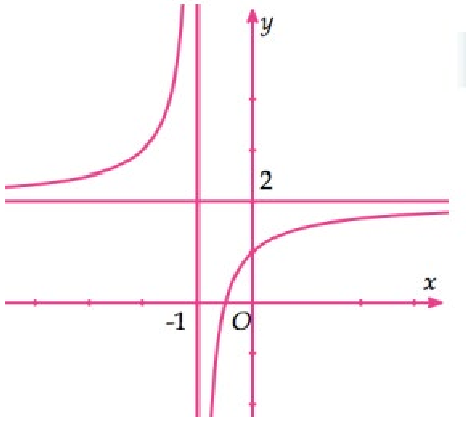
Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(m+2)x+m^2-4m+3}{mx+1}$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến tiệm cận xiên hoặc ngang là nhỏ nhất ?

Câu 30. Cho hàm số $y=\dfrac{(m-1)x^2+(m+1)x-2m+3}{x-2m}$ (C_m) ,$\forall m\in\mathbb{R}$. Tìm m để đồ thị (C_m) có tiệm cận xiên cắt hai trục tọa độ tại A, B sao cho ΔAOB có diện tích bằng 4 ?

CHỦ ĐỀ 2
TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$ CÓ CHỨA THAM SỐ

DẠNG 1
BIẾT ĐỒ THỊ , BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{nx+1}{x+m}$; $(mn\neq 1)$ xác định trên $R\setminus\{-1\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có đồ thị như hình vẽ bên:



Tính tổng $m+n$?

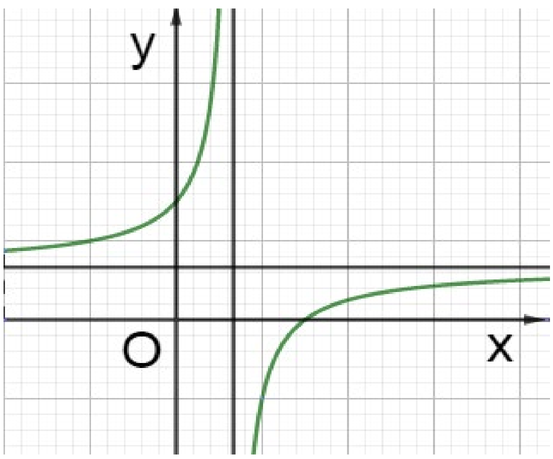
A. $m+n=1$. **B.** $m+n=-1$. **C.** $m+n=3$. **D.** $m+n=-3$.

Lời giải

Chọn C.

Đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{nx+1}{x+m}$; $(mn\neq 1)$ có hai đường tiệm cận $x=-m=-1$; $y=n=2\Rightarrow m=1$; $n=2\Rightarrow m+n=3$

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x-3}{x-m}$ có đồ thị như hình dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tâm đối xứng của đồ thị hàm số nằm trong đường tròn tâm gốc tọa độ O bán kính bằng $\sqrt{2019}$?

A. 40. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 38.

Lời giải

Chọn C.

Từ dạng đồ thị của hàm số ta suy ra $y' = \dfrac{-m(2m-1)+3}{(x-m)^2} > 0 \Rightarrow -m(2m-1)+3>0 \Leftrightarrow -1<m<\dfrac{3}{2}$.

Khi đó dễ thấy đồ thị có hai đường tiệm cận là $x = m$, $y = 2m-1$.

Vậy tâm đối xứng là điểm $I(m;2m-1)$.

Từ đồ thị và giả thiết kèm theo ta có :

$$\begin{cases} y = 2m-1>0 \\ x = m > 0 \\ OI < \sqrt{2019} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ m > 0 \\ -19 \le m \le 20 \ (m \in \mathbb{Z}) \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện trên ta suy ra $m=1$.

Câu 3. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên xác định như hình. Biết rằng đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = x_0$, tiệm cận ngang là $y = y_0$ và $x_0y_0 = 16$. Hỏi m bằng?

x	$-\infty$		m		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	1	‖	$-\infty$	8

A. $m=8$. **B.** $m=-16$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\lim\limits_{x \to m^+} y = -\infty$ nên $x = m$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = 8$ nên $y_o = 8$ là tiệm cận ngang.

Suy ra $8m = 16 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 4. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$ ↘	5	‖	$-\infty$ ↗	$m+2$

Tìm m để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang $y = y_o$ sao cho $x_o y_o < 30$.

A. $m < 1$. **B.** $m < 10$. **C.** $m < 8$. **D.** $m > 8$.

Lời giải

Chọn C.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m+2$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = m+2$. Ta có $y_o = m+2$.

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 3$. Ta có $x_o = 3$.

$x_o y_o < 30 \Leftrightarrow 3(m+2) < 30 \Leftrightarrow m < 8$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f '(x)		-	‖	-	‖	+	
f(x)	4 ↘	1	‖ $+\infty$ ↘	2	‖ $-\infty$ ↗		m^2

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-4;4]$ để hàm số có 4 tiệm cận?

A. 5 . **B.** 6 . **C.** 7 . **D.** 8 .

Lời giải

Chọn C.

+ Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ nên $x = -2$ là một tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ nên $x = 1$ là một tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$ nên $y = 4$ là một tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m^2$ nên $y = m^2$ là một tiệm cận ngang.

+ Để hàm số có 4 tiệm cận thì $m^2 \neq 4 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$ mà $m \in [-4;4]$ nên $m \in \{\pm 4; \pm 3; \pm 1; 0\}$

Vậy có 7 giá trị m cần tìm.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$(m-1)(2-m)$

Tìm tổng số các giá trị nguyên dương của tham số $m\in(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 4.

A. 42. **B.** 45. **C.** -3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A.

Từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=(m-1)(2-m)$. Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là $y=0$ và $y=(m-1)(2-m)$.

Lại có $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=+\infty$ suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là $x=-2$.

Và $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=-\infty$ suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là $x=2$.

Để đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 4 khi và chỉ khi $(m-1)(2-m)\neq0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq1\\m\neq2\end{cases}$.

Vì $m\in(-10;10)$ và m là số nguyên dương nên $m\in\{3;4;5;6;7;8;9\}$.

Vậy $3+4+5+6+7+8+9=42$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Định tham số m để giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là điểm $I(-1;1)$.

x	$-\infty$		$-m$		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	m	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	m

A. Không có m. **B.** $m=0$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn D.

Từ BBT suy ra TCĐ là $x=-m$, TCN là $y=m$; nên giao điểm TCĐ và TCN là $I(-m;m)$.

YCBT $I(-m;m)\equiv I(-1;1)\Leftrightarrow\begin{cases}-m=-1\\m=1\end{cases}\Leftrightarrow m=1$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Định tham số m và n để đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=2$, $y=2$ lần lượt là TCĐ và TCN thì biểu thức $9m^2+6mn+36n^2$ có giá trị là

x	$-\infty$		$\frac{2-2m}{n}$		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$\frac{m}{n}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{m}{n}$

A. $\frac{28}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Từ BBT suy ra TCĐ là $x=\frac{2-2m}{n}$, TCN là $y=\frac{m}{n}$;

YCBT: đường thẳng $x=2, y=2$ lần lượt là TCĐ và TCN nên

$$\begin{cases}\frac{2-2m}{n}=2\\ \frac{m}{n}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-2m=2n\\ m=2n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m+2n=2\\ m-2n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{2}{3}\\ n=\frac{1}{3}\end{cases}$$

KL: vậy $9m^2+6mn+36n^2=\frac{28}{3}$.

DẠNG 2
BIẾT ĐỒ ĐẶC ĐIỂM CỦA HÀM SỐ $y=f\left(x\right)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 9. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a,b để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

A. $a=-1;b=2$. **B.** $a=4;b=4$. **C.** $a=1;b=2$. **D.** $a=-1;b=-2$.

Lời giải

Chọn C.

+ $b=0\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{-2}$ không có tiệm cận.

+ $b\ne 0$, tập xác định của hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ là $D=R\backslash\left\{\dfrac{2}{b}\right\}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+1}{bx-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a+\frac{1}{x}}{b-\frac{2}{x}}=\frac{a}{b}.$$

$\Rightarrow$đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{b}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow b=2a$.

$$\lim_{x\to\frac{2}{b}^{+}} y=\lim_{x\to\frac{2}{b}^{+}}\frac{ax+1}{bx-2}=\left[\begin{array}{l}+\infty\\-\infty\end{array}\right..$$

$\Rightarrow$đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=\dfrac{2}{b}\Rightarrow\dfrac{2}{b}=1\Leftrightarrow b=2\Rightarrow a=1$.

Vậy $a=1;b=2$.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

A. 14. **B.** 8. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}=0$ nên hàm số có một tiện cận ngang $y=0$.

Hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi hàm số có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình

$x^2-8x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=16-m>0\\m-7\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<16\\m\ne 7\end{cases}$.

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta có $m \in \{1;2;3;...;6;8;...;15\}$. Vậy có 14 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $m=-1$ **B.** $m \in \{1;4\}$ **C.** $m=4$ **D.** $m \in \{-1;-4\}$

Lời giải

Chọn D.

$y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}=\dfrac{x^2+m}{(x-1)(x-2)}$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y=1 \Rightarrow y=1$ là đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ pt $x^2+m=0$ nhận nghiệm $x=1$ hoặc $x=2$.

Khi đó: $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-4 \end{array}\right.$.

Với $m=-1$ có một tiệm cận đứng $x=2$.

Với $m=-4$ có một tiệm cận đứng $x=1$.

Vậy $m \in \{-1;-4\}$.

Câu 12. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=\dfrac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ (m,n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m+n$.

A. 0 **B.** -3 **C.** 3 **D.** 6

Lời giải

Chọn A.

Theo công thức tìm nhanh tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ta có

Đồ thị hàm số nhận $x=-\dfrac{d}{c}=-m-3=0$ làm TCĐ $\Rightarrow m=-3$

Đồ thị hàm số nhận $y=\dfrac{a}{c}=n-3=0$ làm TCN $\Rightarrow n=3$.

Vậy $m+n=0$.

Câu 13. Với giá trị nào của hàm số m để đồ thị hàm số $y=x-\sqrt{mx^2-3x+7}$ có tiệm cận ngang.

A. $m=1$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=\pm 1$ **D.** Không có m

Lời giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow$ Hàm số xác định trên một trong các miền $(-\infty;a),(-\infty;a],(a,+\infty)$ hoặc $[a;+\infty)$

$m \geq 0$

TH1: $m=0 \Rightarrow y=x-\sqrt{-3x+7}, \lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$ đồ thị không có tiệm cận ngang

TH2: $m>0, y=x-\sqrt{mx^2-3x+7}$

Khi $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x\sqrt{m-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}\right)=\frac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m=1$.

Vậy $m=1$

Cách trắc nghiệm:

Thay $m=1 \Rightarrow y=x-\sqrt{x^2-3x+7} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x+7}\right)=\frac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x+7}\right)=-\infty$ không có tiệm cận ngang.

Thay $m=-1 \Rightarrow y=x-\sqrt{-x^2-3x+7} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{-x^2-3x+7}\right)$ không xác định.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{-x^2-3x+7}\right)$ không xác định.

Vậy $m=1$

Câu 14. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

A. 12. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

Do đó, đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x\neq 3$.

Xét phương trình $x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=0$ (*) ta có

$$x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=0 \Leftrightarrow (x-m)\left(x^2-2mx+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x^2-2mx+1=0 \end{array}\right..$$

Phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $x\neq 3$ khi và chỉ khi $m\neq 3$ và phương trình $x^2-2mx+1=0$ có hai nghiệm phân biệt $x\neq 3$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ m^2-1>0 \\ 3^2-2.3.m+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right. \\ m\neq \frac{5}{3} \end{cases}.$

Do m nguyên và $m\in[-6;6]$ nên $m\in\{-6;-5;-4;-3;-2;2;4;5;6\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 15. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\left[x^2-(2m+1)x+2m\right]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

A. $\begin{cases}0<m<1\\ m\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$.
B. $\begin{cases}m<1\\ m\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$.
C. $m>1$.
D. $\begin{cases}0\le m\le 1\\ m\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện $x>m$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Xét phương trình $\left[x^2-(2m+1)x+2m\right]\sqrt{x-m}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\ x^2-(2m+1)x+2m=0\,(*)\end{array}\right.$

Để hàm số có 4 đường tiệm cận thì phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $m<x_1<x_2$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2m-1)^2>0\\ (x_1-m)(x_2-m)>0\\ x_1+x_2>2m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq\dfrac{1}{2}\\ x_1x_2-m(x_1+x_2)-m^2>0\\ 2m+1>2m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq\dfrac{1}{2}\\ m-m^2>0\\ 1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq\dfrac{1}{2}\\ 0<m<1\end{cases}.$$

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang

A. $m<0$
B. $m=0$
C. $m>0$
D. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài

Lời giải

Chọn C.

Xét các trường hợp sau:

Với $m=0$: hàm số trở thành $y=x+1$ nên không có tiệm cận ngang.

Với $m<0$:

hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}=\dfrac{x+1}{\sqrt{1-|m|x^2}}$ có tập xác định là $D=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{|m|}};\dfrac{1}{\sqrt{|m|}}\right)$ suy ra không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y$ hay hàm số không có tiệm cận ngang.

Với $m>0$:

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{|x|\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{-x\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = -\dfrac{1}{\sqrt{m}}$.

và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{|x|\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$.

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang là : $y=\dfrac{1}{\sqrt{m}};y=-\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ khi $m>0$.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 12. **B.** 11. **C.** 0. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A.

Xét $g(x)=\sqrt{x(x-m)}-1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}=-1$. Nên đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang $y=1$ và $y=-1$.

Trường hợp 1: $m=0$ khi đó hàm số là $y=\dfrac{|x|-1}{x+2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$.

Vậy $m=0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $m>0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D=(-\infty;0]\cup[m;+\infty)$.

$x=-2\in D$. $g(-2)=\sqrt{2(m+2)}-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Vậy $m=1$, $m=2$,.$m=9$ thỏa mãn. Nên có 9 giá trị m.

Trường hợp 3: $m<0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $D=(-\infty;m]\cup[0;+\infty)$.

Để $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì trước hết $x=-2\in D$ hay $m\geq -2$. Nên chỉ có $m=-2$, $m=-1$ thỏa mãn

Với $m=-1$ ta có $g(x)=\sqrt{x(x+1)}-1$, $g(-2)=\sqrt{2}-1\neq 0$nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $m=-2$ ta có $g(x)=\sqrt{x(x+2)}-1$, $g(-2)=\sqrt{x(x+2)}-1=-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy 12 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 18. Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2022;2022]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. 4044. **B.** 2022. **C.** 2009. **D.** 2011.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-3\ge 0 \\ x^2+x\ne m \end{cases}$.

Dựa vào điều kiện xác định ta suy ra hàm số đã cho không có giới hạn khi $x\to -\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}=0,\forall m$.

$\Rightarrow y=0$ là pt đường tiệm cận ngang.

Xét hàm số $f(x)=x^2+x$.

$f'(x)=2x+1;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
f'(x)		-	0		+		
f(x)	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	12	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Khi $m<12$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Khi $m\ge 12$ thì đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Do đó để hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì $m\in[12;2022]$.

Vậy có 2011 giá trị nguyên của m.

Câu 19. Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x+1}+ax+b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó hiệu $a-b$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{3}{4}$. **C.** $-\dfrac{5}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Do hàm số không có tiệm cận đứng nên $f(x)=\sqrt{3x+1}+ax+b=(x-1)^2g(x)$.

Suy ra $\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a+b+2=0 \\ a+\dfrac{3}{4}=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=-\dfrac{3}{4} \\ b=-\dfrac{5}{4} \end{cases}\Rightarrow a-b=\dfrac{1}{2}\to$ đáp án **A.**

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 20. Định m để hàm số có tiệm cận đứng đi qua $A\left(-1;\sqrt{2}\right)$ với $y=\dfrac{mx-1}{2x+m}$

Câu 21. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{3}{4x^2+2(2m+3)x+m^2-1}$ có đúng hai tiệm cận đứng

Câu 22. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

Lời giải

Đáp án: $m\in\left\{0;\dfrac{1}{3};-1\right\}$

Nhận xét:

+ *$f(x)=mx^2-2x+3$ có bậc ≥ 1 nên đồ thị hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang.*

+ *Do đó: Yêu cầu bài toán 9 đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng.*

+ $m=0$, đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=\dfrac{3}{2}\Rightarrow m=0$ thỏa bài toán.

+ $m\neq 0$, đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $mx^2-2x+3=0$ có nghiệm kép hoặc nhận $x=1$ làm nghiệm $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta_f=0\\ f(1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{3}\\ m=-1\end{array}\right.$

+ KL: $m\in\left\{0;\dfrac{1}{3};-1\right\}$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận

Lời giải

Đáp án: $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2\end{array}\right.\\ m\neq-\dfrac{5}{2}\end{cases}$.

Để đồ thị có ba đường tiệm cận thì $x^2-2mx+4=0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq -1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ (-1)^2-2m(-1)+4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2\end{array}\right.\\ m\neq-\dfrac{5}{2}\end{cases}.$$

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ bằng 3?

Lời giải

Đáp án: có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài là $m=1; m=2$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có nhiều nhất một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Điều kiện để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có 3 tiệm cận là nó có đúng 1 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

* Xét điều kiện tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y$

Trường hợp 1: $g(x)=mx^2+3mx+4\ge 0$ với $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ \begin{cases} m>0 \\ \Delta=9m^2-16m\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0\le m\le \dfrac{16}{9}$

Trường hợp 2: $g(x)=mx^2+3mx+4\ge 0$ với $\forall x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ với x_1; x_2 là nghiệm của $g(x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \Delta=9m^2-16m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>\dfrac{16}{9}$

Vậy $m\ge 0$ thì tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y$

Khi đó:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{m+\frac{3m}{x}+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}}=\sqrt{m}$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{m+\frac{3m}{x}+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}}=-\sqrt{m}$$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $m>0$

* Xét trường hợp $x=-2$ là nghiệm của tử số $\Rightarrow x=-2$ là nghiệm của $g(x)=mx^2+3mx+4$

$\Rightarrow g(-2)=0\Rightarrow m=2$

Khi đó $y=\dfrac{\sqrt{2x^2+6x+4}}{x+2}\Rightarrow \lim\limits_{x\to-2^-} y=\dfrac{\sqrt{2(x+1)(x+2)}}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^-}\left[-\sqrt{\dfrac{2(x+1)}{x+2}}\right]=-\infty$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x=-2$.

$\Rightarrow$ $m=2$ thỏa mãn

* Xét trường hợp $x=-2$ không là nghiệm của tử số, để $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì

$\begin{cases} g(-2)\ne 0 \\ g(-2)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(-2)>0\Leftrightarrow 4-2m>0\Leftrightarrow m<2$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x=-2$ với $\forall m\in(0;2]$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có 3 tiệm cận là $\forall m\in(0;2]$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài là $m=1$; $m=2$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận.

Lời giải

Đáp án: $-1\le m<0$.

Nếu $m=0$ thì $y=\dfrac{1}{x+1}$. Hàm số này có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$.

Vậy với $m=0$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận (loại).

Nếu $m>0$ thì $mx^2+1>0$ với mọi x và tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=\sqrt{m}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=-\sqrt{m}$. Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=\sqrt{m}$ và $y=-\sqrt{m}$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}=+\infty$ nên $x=-1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $m>0$ không thỏa mãn.

Nếu $m<0$ thì tập xác định của hàm số là $D=\left[-\sqrt{-\dfrac{1}{m}};\sqrt{-\dfrac{1}{m}}\right]\setminus\{-1\}$.

Trường hợp này đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. Để đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có một tiệm cận đứng. Điều này xảy ra khi

$-\sqrt{-\dfrac{1}{m}}\le -1 \Leftrightarrow \sqrt{-\dfrac{1}{m}}\ge 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{m}\ge 1 \Leftrightarrow m\ge -1$.

Vậy với $-1\le m<0$ thì đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.

Câu 26. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+(3m+2)x+2m-1}{x+5}$ có tiệm cận xiên.

Câu 27. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2+(2m+1)x+m+3}{x+2}$ có tiệm cận xiên.

Câu 28. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{mx^2-mx+m-1}{x-1}$ có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho đến đường tiệm cận xiên của nó bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(m+2)x+m^2-4m+3}{mx+1}$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến tiệm cận xiên hoặc ngang là nhỏ nhất ?

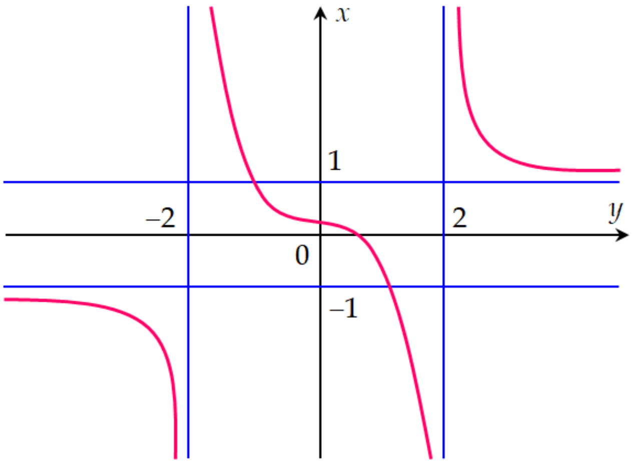
Câu 30. Cho hàm số $y=\dfrac{\left(m-1\right)x^2+\left(m+1\right)x-2m+3}{x-2m}$ $\left(C_m\right)$,$\forall m\in\mathbb{R}$. Tìm m để đồ thị $\left(C_m\right)$có tiệm cận xiên cắt hai trục tọa độ tại A, B sao cho ΔAOB có diện tích bằng 4 ?

CHỦ ĐỀ 3
TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ ẨN

DẠNG 1
BIẾT ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN VÀ HÀM SỐ CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

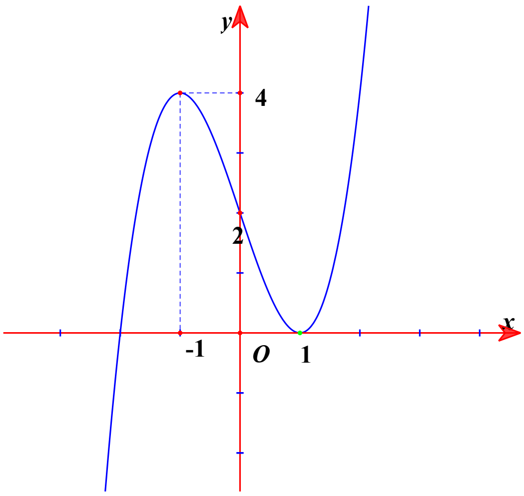
Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2}{3f(x)-2}$

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

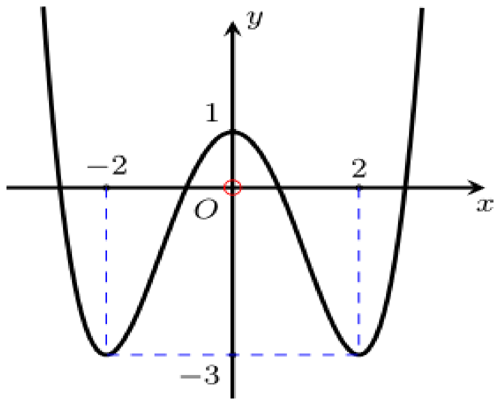
Câu 2. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

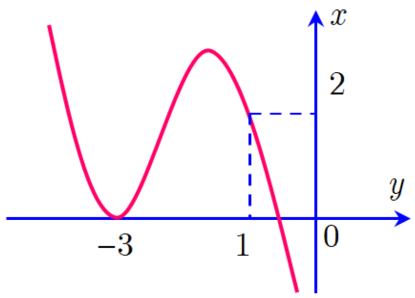
Câu 3. Cho hàm số bậc bốn $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong như hình bên.



Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[(f(x))^2-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↗	$+\infty$ || 5	↘	3	↗	$+\infty$

Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{1}{f(x)-5}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{x^4-1}{f^2\left(x\right)-4f\left(x\right)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 7. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có BBT như sau:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x-1\right)\sqrt{x+3}}{f^2\left(x\right)+3f\left(x\right)}$ là :

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, không âm trên R và thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=2$.

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{x^2+1}.f\left(x\right)+1}{x+3}$ là:

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=2$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} f\left(x\right)=1$ và hàm số

$y=g\left(x\right)=\dfrac{5f\left(x\right)-1}{\left[f^2\left(x\right)+1\right]\left(2x-3\right)}$. Trong các khẳng định sau về đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$, khẳng định nào đúng:

A. Đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ không có tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có tiệm cận ngang $y=2$ và không có tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có tiệm cận ngang $y=0$ và tiệm cận đứng $x=\dfrac{3}{2}$.

D. Đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có tiệm cận ngang $y=2$ và tiệm cận đứng $x=\dfrac{3}{2}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=1$ và $f\left(x\right)<1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Xét hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{2f^3\left(x\right)+f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)-1}{f^3\left(x\right)-4f^2\left(x\right)+5f\left(x\right)-2}$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số hàm số $g\left(x\right)$ có các đường tiệm cận ngang là $y=2$ và $y=0$.

B. Đồ thị hàm số hàm số $g\left(x\right)$ có các đường tiệm cận ngang là $y=-2$ và $y=0$.

C. Đồ thị hàm số hàm số $g\left(x\right)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y=2$.

D. Đồ thị hàm số hàm số $g\left(x\right)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y=-2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 11. Hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

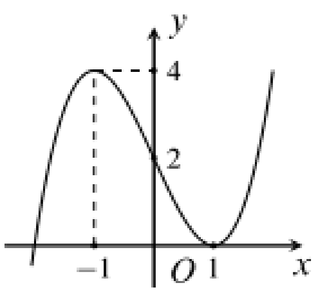
Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)-1}$ có bao nhiêu tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

Câu 12. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

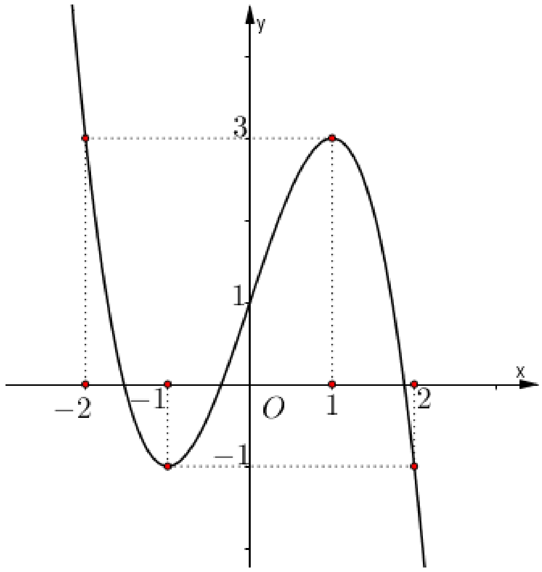
Đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{f^2\left(x\right)+2f\left(x\right)+1}{f^2\left(x\right)-9}$ có tổng số tất cả các đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là

Câu 13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm $f\left(x\right)$ như hình vẽ.



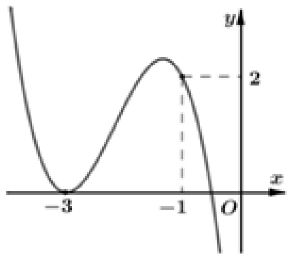
Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-1}{f^2(x)-4f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận **đứng**?

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?

Câu 15. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Đồ thị hàm $y=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

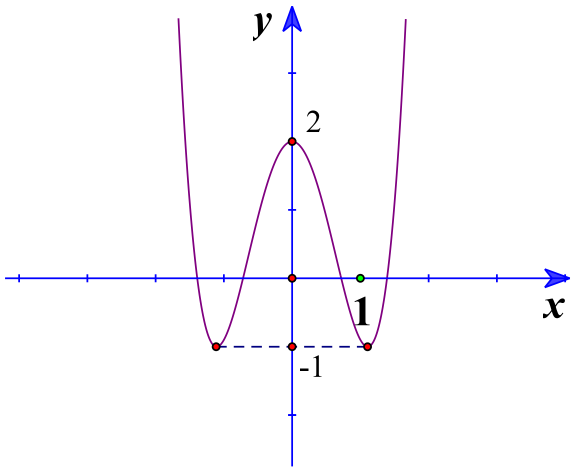
Phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ là bao nhiêu?

DẠNG 2

BIẾT ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN VÀ HÀM SỐ CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$ CÓ CHỨA THAM SỐ

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

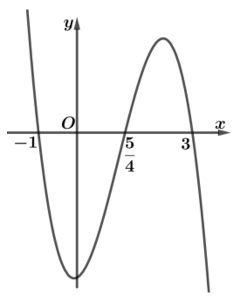
Câu 17. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ.



Số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020x}{f(x)\left[f(x)-m\right]}$ có tổng số 9 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

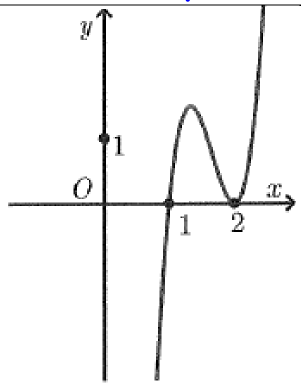
Câu 18. Cho hàm số $g(x)=\dfrac{2018}{h(x)-m^2-m}$ với $h(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx$ $(m,n,p,q\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g(x)$ là 2.

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 20.

Câu 19. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của $m\in[-10;1]$ để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{[f(x)-m][f(x)-1]}$ có đúng bốn đường tiệm cận đứng là :

A. 9. **B.** 12. **C.**11. **D.** 10.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

Số giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{1}{f(x)-m}$ có đúng 5 tiệm cận là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ || 3	↗	6

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{f^2(x)}{f(x)-m}$ có đúng 3 tiệm cận đứng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0			1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||		$+$	0	$+$	
$f(x)$			$+\infty$			2		
		↗	||		↗		↘	
	$-\infty$		||	$-\infty$				$-\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{(x^2+1)[f(x)-m]}$ có đúng ba đường tiệm cận.

A. $m>2$.　　**B.** không tồn tại m.　　**C.** $m\le 2$.　　**D.** $m<2$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2020;2020]$ để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3x}+x}{\sqrt{2f(x)-f^2(x)+m}}$ có tiệm cận ngang nằm bên dưới đường thẳng $y=-1$.

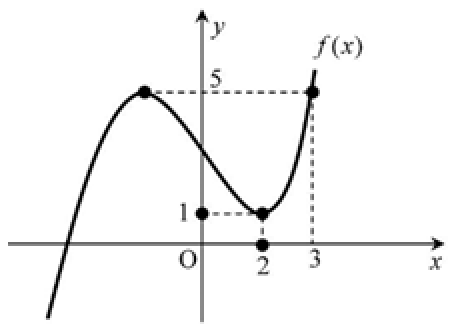
A. 4041.　　**B.** 2019.　　**C.** 1.　　**D.** 10.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm $g(x)=\dfrac{f(x)+1}{\sqrt{m.f^2(x)+2}}$ có hai đường tiệm ngang là

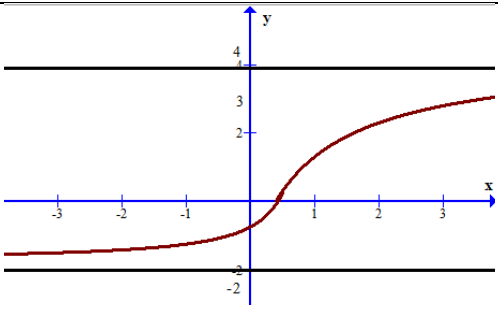
A. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$　　**B.** $(0;+\infty)$　　**C.** $(-\infty;0)$　　**D.** $\{0\}$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 25. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{m-x}}{f(x)-m}$ có tất cả 4 đường tiệm cận. Số phần tử của tập S là bao nhiêu?



Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới.



Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left|f(x)+\sqrt[3]{8-m}+\sqrt{m+1}-4\right|$ có đúng một tiệm cận ngang?

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-15	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm số các giá trị nguyên âm của tham số m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2021}{f(x)-m}$ có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 3.

Câu 28. Hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{1}{(f(x))^2-m}$ có đúng 2 tiệm cận đứng.

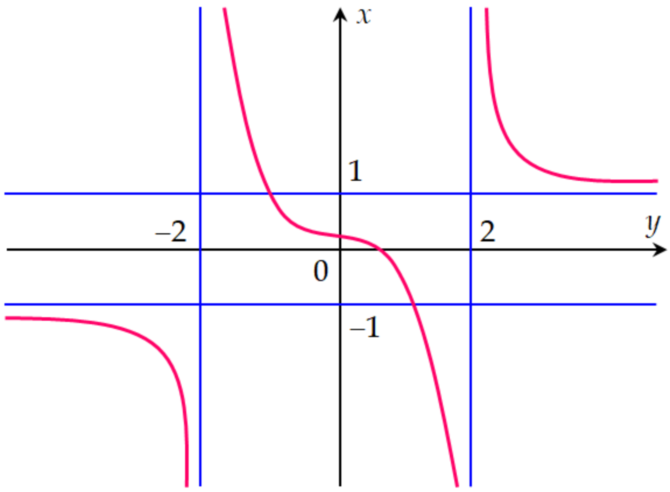
Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)f(x)}{\left(x^2-4x+m\right)\sqrt{f^2(x)+1}}$ có đúng 2 đường tiệm cận.

CHỦ ĐỀ 3
TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ ẨN

DẠNG 1
BIẾT ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN VÀ HÀM SỐ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{2}{3f(x)-2}$

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \frac{2}{3.(-1)-2} = -\frac{2}{5}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{2}{3.1-2} = 2$$

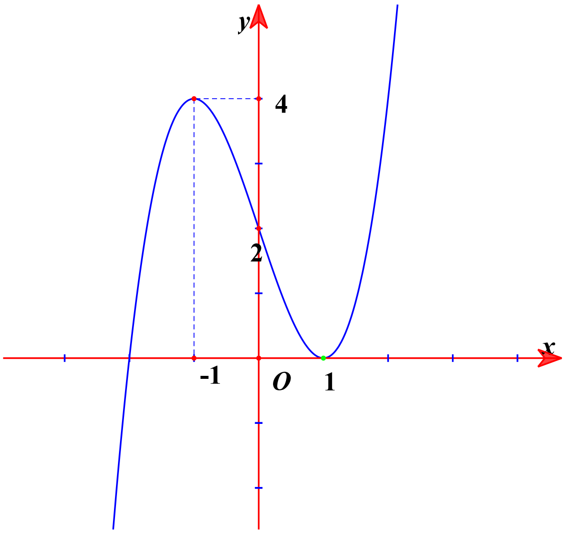
Suy ra đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận ngang.

Xét phương trình $3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{2}{3}$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy: phương trình $f(x) = \dfrac{2}{3}$ có duy nhất một nghiệm.

Vậy hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x-1\right)\left(x^2-1\right)}{f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

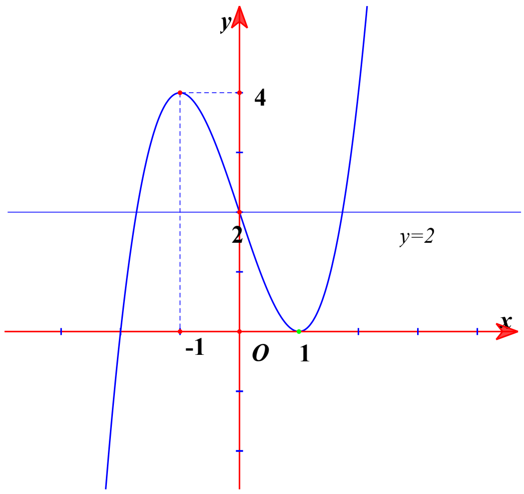
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D.

Ta xét mẫu số: $f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=0\quad(1)\\ f\left(x\right)=2\quad(2)\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy:



+) Phương trình (1) có nghiệm $x_1=a<-1$ (nghiệm đơn) và $x_2=1$ (nghiệm kép)

$\Rightarrow f\left(x\right)=\left(x-a\right)\left(x-1\right)^2$.

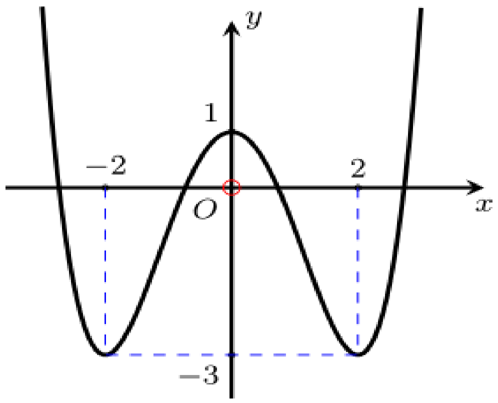
+) Phương trình (2) có nghiệm $x_3=b\in\left(a;-1\right)$, $x_4=0$ và $x_5=c>1$

$\Rightarrow f\left(x\right)-2=\left(x-b\right)x\left(x-c\right)$.

Do đó $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x-1\right)\left(x^2-1\right)}{f\left(x\right)\left[f\left(x\right)-2\right]}=\dfrac{\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)}{\left(x-a\right)\left(x-1\right)^2.\left(x-b\right)x\left(x-c\right)}=\dfrac{x+1}{\left(x-a\right)\left(x-b\right)x\left(x-c\right)}$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 3. Cho hàm số bậc bốn $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

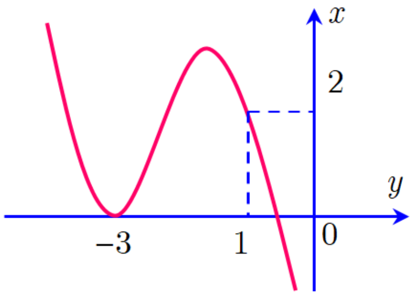
Chọn A.

Xét phương trình $f^2(x)+2f(x)-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f(x)=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0;x=x_1<-2;x=x_2>2 \\ x=-2;x=2 \end{array}\right.$

Trong đó nghiệm $x=0$, $x=-2$, $x=2$ đều có bội 2 và $x=x_1\,(x_1<-2)$; $x=x_2\,(x_2>2)$ là nghiệm đơn (bội 1).

So sánh bội nghiệm ở mẫu và bội nghiệm ở tử thì thấy đồ thị có các TCĐ là $x=0$; $x=2$; $x=x_1$; $x=x_2$

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong như hình bên.



Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[(f(x))^2-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $\begin{cases} x\neq 0 \\ x^2+x\geq 0 \\ [f(x)]^2-2f(x)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x\leq -1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} f(x)\neq 0 \\ f(x)\neq 2 \end{array}\right. \end{cases}$

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta thấy phương trình $f\left(x\right)=0$ có nghiệm $x=-3$ (bội 2), và nghiệm $x=x_0$;

$x_0\in\left(-1;0\right)$ nên : $f\left(x\right)=a\left(x+3\right)^2\left(x-x_0\right)$

Đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị $y=f\left(x\right)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x=-1$; $x=x_1$; $x_1\in\left(-3;-1\right)$

; $x=x_2$; $\left(x_2<-3\right)$. Nên $f\left(x\right)-2=a\left(x+1\right)\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$.

Do đó: $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[\left(f\left(x\right)\right)^2-2f\left(x\right)\right]}=\dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x.f\left(x\right)\left[f\left(x\right)-2\right]}$

$$=\frac{\left(x+1\right)\left(x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x.a\left(x+3\right)^2.\left(x-x_0\right).a\left(x+1\right)\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}=\frac{\sqrt{x^2+x}}{a^2x\left(x+3\right)\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to0^+}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}=\dfrac{\sqrt{x+1}}{a^2\sqrt{x}\left(x+3\right)\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}=+\infty$ nên $x=0$ là một đường tiệm cận

đứng của đồ thị $y=g\left(x\right)$

+)Các đường thẳng $x=-3$; $x=x_1$; $x=x_2$ đều là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$

Do đó đồ thị $y=g\left(x\right)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

+) Hàm số $y=g\left(x\right)$ xác định trên một khoảng vô hạn và bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu nên đồ thị

$y=f\left(x\right)$ có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có 5 đường tiệm cận.

Câu 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↗	$+\infty$ ‖ 5	↘	3	↗	$+\infty$

Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{1}{f\left(x\right)-5}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $y=g\left(x\right)$ xác định khi $f\left(x\right)$ xác định và $f\left(x\right)\neq5$ hay $\begin{cases}x\neq1\\x\neq a\ \left(a<1\right)\\x\neq b\ \left(b>2\right)\end{cases}$.

Lại có: $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -\infty$ vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left[f(x)-5\right] = 0,\ f(x) < 5 \text{ khi } x \to 1^+ \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left[f(x)-5\right] = 0,\ f(x) > 5 \text{ khi } x \to a^+ \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to b^+} g(x) = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left[f(x)-5\right] = 0,\ f(x) > 5 \text{ khi } x \to b^+ \end{cases}$

nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng : $x = 1$, $x = a$, $x = b$.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = -\dfrac{1}{7}$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 đường tiệm cận ngang:

$y = 0$, $y = -\dfrac{1}{7}$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$ là 5.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $y = g(x) = \dfrac{x^4-1}{f^2(x)-4f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D.

Xét phương trình $f^2(x)-4f(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = a,\ a\in(-\infty;-1) \\ x = 1 \quad (ng\ kép) \\ x = -1\ (ng\ kép) \\ \mathrm{x} = b,\ b\in(1;+\infty) \end{array}\right.$.

$\Rightarrow f^2(x)-4f(x) = h(x)(x-a)(x-1)^2(x-b)(x+1)^2$; $h(x)\neq 0$

Do đó

$$y = g(x) = \frac{x^4-1}{f^2(x)-4f(x)} = \frac{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{h(x)(x-a)(x-1)^2(x-b)(x+1)^2} = \frac{x^2+1}{h(x)(x-a)(x-1)(x-b)(x+1)}.$$

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x) = \dfrac{x^4-1}{f^2(x)-4f(x)}$ có 4 tiệm cận đứng.

Câu 7. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có BBT như sau:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)\sqrt{x+3}}{f^2(x)+3f(x)}$ là :

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Chọn C.

Xét PT $f^2(x)+3f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=-3 \end{array}\right.$ trong đó:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=x_1\in(1;2) \quad (ng\ kép) \\ x=x_2\in(2;+\infty) \end{array}\right.$$

$$f(x)=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \quad (ng\ kép) \\ x=x_3\in(-\infty;-3) \quad (ko\,t\,/\,m\ do\ x\geq -3) \\ x=x_4\in(2;+\infty) \end{array}\right.$$

Kiểm tra các giới hạn ta thấy đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)\sqrt{x+3}}{f^2(x)+3f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng là

$x=0$; $x=1$; $x=x_1$; $x=x_2$; $x=x_4$

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm trên R và thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{x^2+1}.f(x)+1}{x+3}$ là:

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1

Lời giải

Chọn A.

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\sqrt{x^2+1}.f(x)+1}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.f(x)+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}=-2 \Rightarrow y=-2 \text{ là tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2+1}.f(x)+1}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.f(x)+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}=4 \Rightarrow y=4 \text{ là tiệm cận ngang}$$

$\lim\limits_{x\to(-3)^+} y = \lim\limits_{x\to(-3)^+} \dfrac{2\sqrt{x^2+1}.f(x)+1}{x+3} = \lim\limits_{x\to(-3)^+} \dfrac{2\sqrt{10}.f(-3)+1}{x+3} = \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to(-3)^-} y = \lim\limits_{x\to(-3)^-} \dfrac{2\sqrt{x^2+1}.f(x)+1}{x+3} = \lim\limits_{x\to(-3)^-} \dfrac{2\sqrt{10}.f(-3)+1}{x+3} = \pm\infty$

$\Rightarrow x=-3$ là tiệm cận đứng.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} f(x)=1$ và hàm số $y=g(x)=\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right](2x-3)}$. Trong các khẳng định sau về đồ thị hàm số $y=g(x)$, khẳng định nào đúng:

A. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ không có tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có tiệm cận ngang $y=2$ và không có tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có tiệm cận ngang $y=0$ và tiệm cận đứng $x=\dfrac{3}{2}$.

D. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có tiệm cận ngang $y=2$ và tiệm cận đứng $x=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có :

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right](2x-3)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right]}}{2x-3} = 0$ suy ra đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị $y=g(x)$.

+) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} g(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} \dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right](2x-3)} = \lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} \dfrac{\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right]}}{2x-3} = +\infty$ suy ra đường thẳng $x=\dfrac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị $y=g(x)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $f(x)<1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x)=\dfrac{2f^3(x)+f^2(x)-2f(x)-1}{f^3(x)-4f^2(x)+5f(x)-2}$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số hàm số $g(x)$ có các đường tiệm cận ngang là $y=2$ và $y=0$.

B. Đồ thị hàm số hàm số $g(x)$ có các đường tiệm cận ngang là $y=-2$ và $y=0$.

C. Đồ thị hàm số hàm số $g(x)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y=2$.

D. Đồ thị hàm số hàm số $g(x)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y=-2$.

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định của hàm số $g(x)$ là $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2f^3(x)+f^2(x)-2f(x)-1}{f^3(x)-4f^2(x)+5f(x)-2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{1}{f(x)}-\frac{2}{f^2(x)}-\frac{1}{f^3(x)}}{1-\frac{4}{f(x)}+\frac{5}{f^2(x)}-\frac{2}{f^3(x)}}=2 \text{ vì } \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$$

$\Rightarrow$ đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số hàm số $g(x)$.

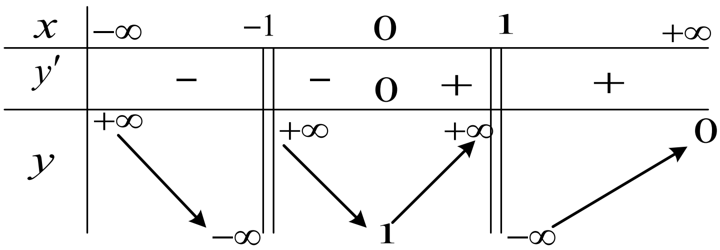
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2f^3(x)+f^2(x)-2f(x)-1}{f^3(x)-4f^2(x)+5f(x)-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{[2f(x)+1][f(x)+1][f(x)-1]}{[f(x)-1]^2[f(x)-2]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{[2f(x)+1][f(x)+1]}{[f(x)-1][f(x)-2]}=+\infty \text{ vì } \lim_{x\to+\infty} f(x)=1 \text{ và } f(x)<1\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Vậy đồ thị hàm số hàm số $g(x)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y=2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 11. Hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và có bảng biến thiên như sau :



Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có bao nhiêu tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

Lời giải

Đáp án: hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có 4 đường tiệm cận .

Nhìn vào bảng biến thiên ta có

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)-1}=-1;\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)-1}=0.$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y=-1$; $y=0$.

$$f(x)-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a;a<-1\\x=1\end{array}\right..$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)-1}=+\infty$. Vì $f(x)>1$ khi $x\to 0$.

Tương tự , $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{f(x)-1}=-\infty$ nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có hai tiệm cận đứng là hai đường thẳng $x=a$; $x=1$.

Vậy hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có 4 đường tiệm cận .

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{f^2(x)+2f(x)+1}{f^2(x)-9}$ có tổng số tất cả các đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là

Lời giải

Đáp án: tổng số các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị $y=g(x)$ là 6.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{f(x)}+\dfrac{1}{f(x)}}{1-\dfrac{9}{f^2(x)}}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{f(x)}+\dfrac{1}{f(x)}}{1-\dfrac{9}{f^2(x)}}=1$.

Suy ra đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị $y=g(x)$.

$y=g(x)=\dfrac{\left(f(x)+1\right)^2}{\left(f(x)-3\right)\left(f(x)+3\right)}$.

Dựa vào BBT ta có $f(x)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=a<-1 \\ x=b>4 \end{array}\right.$.

Với $x>0 \Rightarrow f(x)<3$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(f(x)+1\right)^2}{\left(f(x)-3\right)\left(f(x)+3\right)}=-\infty$ suy ra đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng.

Với $x>a \Rightarrow f(x)<3$, $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\left(f(x)+1\right)^2}{\left(f(x)-3\right)\left(f(x)+3\right)}=-\infty$ suy ra đường thẳng $x=a$ là tiệm cận đứng.

Với $x>b\Rightarrow f(x)>3$, $\lim\limits_{x\to b^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)}=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=b$ là tiệm cận đứng.

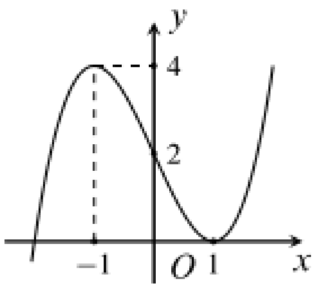
Dựa vào BBT ta có $f(x)=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=c,0<c<4\\x=d,d>4\end{array}\right.$ khi đó

Với $x>c\Rightarrow f(x)<-3$, $\lim\limits_{x\to c^+} g(x)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)}=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=c$ là tiệm cận đứng.

Với $x>d\Rightarrow f(x)>-3$, $\lim\limits_{x\to c^+} g(x)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)}=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=d$ là tiệm cận đứng.

Vậy tổng số các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị $y=g(x)$ là 6.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm $f(x)$ như hình vẽ.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-1}{f^2(x)-4f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận **đứng**?

Lời giải

Đáp án: đồ thị có 4 tiệm cận đứng.

Xét $f^2(x)-4f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=4\end{array}\right.$.

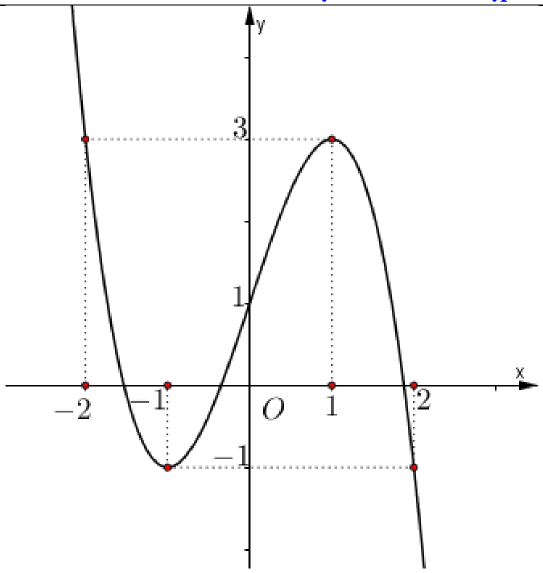
Xét $f(x)=0$ có 2 nghiệm $x_1\neq\pm1$ và $x_2=1$ là nghiệm bội (do đồ thị tiếp xúc với trục hoành tại $x=1$.

Trường hợp này có 2 tiệm cận đứng.

Xét $f(x)=4$ có 2 nghiệm $x_3\neq\pm1$ và $x_4=-1$ là nghiệm bội (do đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại $x=-1$. Trường hợp này có 2 tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị có 4 tiệm cận đứng.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?

Lời giải

Đáp án: đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có 3 tiệm cận đứng.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 & (1) \\ f^2(x)-f(x) \ne 0 \end{cases}$.

Xét $(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ f^2(x)-f(x)=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow f^2(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=1 \end{array}\right.$.

* Với $f(x)=0$:

Từ đồ thị hàm số ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x_3<x_2<0<x_1$.

Từ điều kiện (1) thì phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm $x=x_1$.

* Với $f(1)=1$:

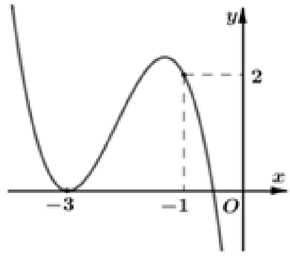
Từ đồ thị hàm số ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x_6<x_5=0<x_4$.

Từ điều kiện (1) thì phương trình $f(x)=1$ có 2 nghiệm $x=x_5$ và $x=x_4$ và cả 2 nghiệm này đều khác x_1.

Suy ra phương trình $(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có 3 tiệm cận đứng.

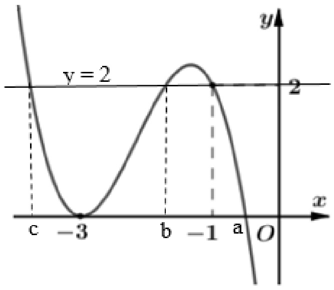
Câu 15. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Đồ thị hàm $y=\dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Lời giải

Đáp án: có 4 đường tiệm cận đứng.



Ta thấy phương trình bậc ba $f\left(x=2\right)$ có 3 nghiệm phân biệt là $x_1=c<-3$, $x_2=b$. với $-3<b<-1$ và $x_3=-1$.

Và phương trình bậc ba $f\left(x\right)=0$ có nghiệm kép $x=-3$ và nghiệm đơn $x=a$ với $-1<a<0$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=+\infty$ nên không mất tính tổng quát, ta giả sử

$f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow -\left(x+3\right)^2\left(x-a\right)=0$ và $f\left(x\right)=2 \Leftrightarrow -\left(x-c\right)\left(x-b\right)\left(x+1\right)=0$.

Ta có: $y=\dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)\right]}=\dfrac{\left(x+1\right)\left(x+3\right)\sqrt{x\left(x+1\right)}}{x.f\left(x\right).\left[f\left(x\right)-2\right]}$.

Khi đó: $\lim\limits_{x\to0^+} y=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(x+1\right)\left(x+3\right)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}.f\left(x\right).\left[f\left(x\right)-2\right]}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-3^+} y=\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{\left(x+1\right)\sqrt{x\left(x+1\right)}}{-x\left(x+3\right)\left(x-a\right).\left[f\left(x\right)-2\right]}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to c^+} y=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{\left(x+1\right)\left(x+3\right)\sqrt{x\left(x+1\right)}}{-x.f\left(x\right)\left(x-c\right)\left(x-b\right)\left(x+1\right)}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to b^+} y=\lim\limits_{x\to b^+}\dfrac{\left(x+1\right)\left(x+3\right)\sqrt{x\left(x+1\right)}}{-x.f\left(x\right)\left(x-c\right)\left(x-b\right)\left(x+1\right)}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-1^-} y=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{\left(x+3\right)\sqrt{x\left(x+1\right)}}{-x.f\left(x\right)\left(x-c\right)\left(x-b\right)}=0$.

$\lim\limits_{x\to -1^{+}} y$ không tồn tại.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có 4 đường tiệm cận đứng là $x=0$; $x=-3$; $x=c$; $x=b$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=h(x)$ là bốn..

Đặt $h(x)=\dfrac{1}{2f(x)-1}$.

*) Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2f(x)-1}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2f(x)-1}=0$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

*) Tiệm cận đứng:

Xét phương trình: $2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a<b<c$.

Đồng thời $\lim\limits_{x\to a^{+}} h(x)=\lim\limits_{x\to b^{-}} h(x)=\lim\limits_{x\to c^{+}} h(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số $y=h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x=a$, $x=b$ và $x=c$.

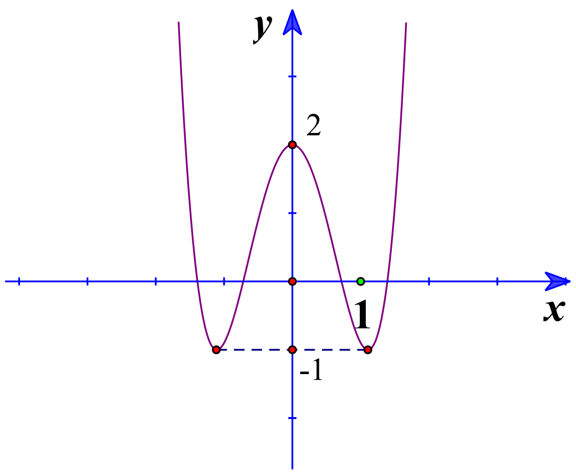
Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=h(x)$ là bốn.

DẠNG 2

BIẾT ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN VÀ HÀM SỐ CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$ CÓ CHỨA THAM SỐ

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ.



Số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020x}{f(x)\left[f(x)-m\right]}$ có tổng số 9 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

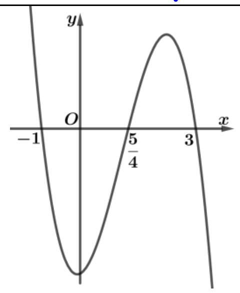
Ta có $g(x)$ là hàm phân thức hữu tỷ với bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0$, do đó đồ thị hàm số $g(x)$ luôn có một tiệm cận ngang là $y=0$.

Phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1;-2<x_1<-1 \\ x=x_2\in(-1;0) \\ x=x_3\in(0;1) \\ x=x_4\in(1;2) \end{array}\right.$.

Ta thấy phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt đều khác 0 nên $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$, $x=x_4$ là 4 tiệm cận đứng đồ thị hàm số $g(x)$.

Vậy để đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng 9 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng thì phương trình $f(x)=m$ phải có đúng 4 nghiệm phân biệt khác 0 và khác với 4 nghiệm $x_i\left(i=\overline{1,4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<2 \\ m\neq 0 \end{cases}$ mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=1$.

Câu 18. Cho hàm số $g(x)=\dfrac{2018}{h(x)-m^2-m}$ với $h(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx$ $(m,n,p,q\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ là 2.

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $h'\left(x\right)=4mx^3+3nx^2+2px+q$. Từ đồ thị ta có $h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{5}{4}\\ x=3\end{array}\right.$ và $\left(m<0\right)$.

Suy ra $h'\left(x\right)=4m\left(x+1\right)\left(x-\dfrac{5}{4}\right)\left(x-3\right)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m$.

Suy ra $h\left(x\right)=mx^4-\dfrac{13}{3}mx^3-mx^2+15mx+C$. Từ đề bài ta có $C=0$.

Vậy $h\left(x\right)=mx^4-\dfrac{13}{3}mx^3-mx^2+15mx$.

Xét $h\left(x\right)-m^2-m=0\Leftrightarrow m=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1\Rightarrow f'\left(x\right)=4x^3-13x^2-2x+15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{5}{4}\\ x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

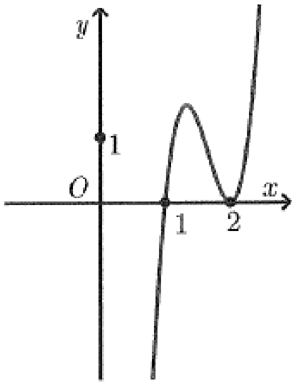
x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{35}{3}$	$\nearrow$	$\frac{7807}{768}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Để đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ có 2 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $h\left(x\right)-m^2-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $m=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m<0$ ta có $-\dfrac{35}{3}<m<-1$.

Do m nguyên nên $m\in\left\{-11;-10;...;-2\right\}$. Vậy có 10 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của $m\in\left[-10;1\right]$ để đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{x^2-3x+2}{\left[f\left(x\right)-m\right]\left[f\left(x\right)-1\right]}$ có đúng bốn đường tiệm cận đứng là :

A. 9. **B.** 12. **C.**11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C.

* $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

* $\left(f\left(x\right)-m\right)\left(f\left(x\right)-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=m\\f\left(x\right)=1\end{array}\right.$

Nhìn vào đồ thị hàm số ta có $f\left(x\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in\left(1;2\right)\\x=b\in\left(a;2\right)\\x=c\in\left(2;3\right)\end{array}\right.$.(có ba tiệm cận)

Suy ra đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có đúng 4 tiệm cận đứng với $m\in\left[-10;1\right]$ là $m\in\left[-10;0\right]$

Do đó số giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 11 số.

Câu 20. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	0	−	
$f(x)$	1 ↗		$+\infty$ || $-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

Số giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{1}{f\left(x\right)-m}$ có đúng 5 tiệm cận là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C.

Xét PT $f(x)-m=0$ có nhiều nhất là 3 nghiệm khi $1<m<3$ và $y=g(x)$ có tử số bằng 1 luôn khác 0 với mọi giá trị của m nên đồ thị $y=g(x)$ có nhiều nhất là 3 TCĐ

Có $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\dfrac{1}{1-m}$ nên đồ thị $y=g(x)$ có 2 TCN nếu $m\neq 1$, 1 TCN nếu $m=1$.

Vậy đồ thị $y=g(x)$ có đúng 5 TC khi $1<m<3$. Kết hợp $m\in Z$ được $m=2$.

Suy ra có 1 giá trị nguyên của m .

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ || 3	$\nearrow$	6

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{f^2(x)}{f(x)-m}$ có đúng 3 tiệm cận đứng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f^2(x)}{f(x)-m}=+\infty$ nên $\forall m$, đồ thị hàm số $y=g(x)$ luôn có một tiệm cận đứng $x=2$.

Mặt khác, từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ thì phương trình $f(x)-m=0$ tối đa 2 nghiệm. Vậy để đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng 3 tiệm cận đứng thì điều kiện cần là phương trình $f(x)=m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 2 $\Leftrightarrow 3<m<6$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to x_1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to x_1^+}\dfrac{f^2(x)}{f(x)-m}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to x_2^+}\dfrac{f^2(x)}{f(x)-m}=+\infty$ nên đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=x_1$ và $x=x_2$.

Vậy với $3<m<6$ thì đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng 3 tiệm cận đứng. Do m nguyên nên có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán là $m=4$ và $m=5$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{\left(x^2+1\right)\left[f\left(x\right)-m\right]}$ có đúng ba đường tiệm cận.

A. $m>2$. **B.** không tồn tại m. **C.** $m\le 2$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{\left(x^2+1\right)\left[f\left(x\right)-m\right]}$ là: $\begin{cases}x>0\\ f\left(x\right)\ne m\end{cases}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=0\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{\left(x^2+1\right)\left[f\left(x\right)-m\right]}$ luôn có tiệm cận ngang $y=0$.

Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{\left(x^2+1\right)\left[f\left(x\right)-m\right]}$ có đúng ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{\left(x^2+1\right)\left[f\left(x\right)-m\right]}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

Suy ra phương trình $f\left(x\right)-m=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt trên $\left(0;+\infty\right)$. Từ bảng biến thiên suy ra $m<2$.

Câu 23. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $\left[-2020;2020\right]$ để đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+3x}+x}{\sqrt{2f\left(x\right)-f^2\left(x\right)+m}}$ có tiệm cận ngang nằm bên dưới đường thẳng $y=-1$.

A. 4041. **B.** 2019. **C.** 1. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$ nên khi $x\to+\infty$ thì $2f\left(x\right)-f^2\left(x\right)\to-\infty$ vì vậy $\sqrt{2f\left(x\right)-f^2\left(x\right)}$ không có nghĩa nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty}g\left(x\right)$.

Xét $\lim\limits_{x\to-\infty}g\left(x\right)$

Trước hết $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=1$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2f\left(x\right)-f^2\left(x\right)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2f\left(x\right)-f^2\left(x\right)\right]}=1$

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)}{\sqrt{x^2+3x}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{-x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1\right)}=-\frac{3}{2}$$

Từ đó có $\lim\limits_{x\to-\infty}g\left(x\right)=\dfrac{-3}{2m+2}$ nên đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{-3}{2m+2}$.

Để tiệm cận ngang tìm được ở trên nằm dưới đường thẳng $y=-1$ thì điều kiện cần và đủ là $\frac{-3}{2m+2}<-1 \Leftrightarrow \frac{3}{2m+2}>1 \Leftrightarrow \begin{cases}3>2m+2\\2m+2>0\end{cases} \Leftrightarrow -1<m<\frac{1}{2}$ Tức có duy nhất giá trị nguyên $m=0$ thỏa mãn bài toán.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm $g(x)=\frac{f(x)+1}{\sqrt{m.f^2(x)+2}}$ có hai đường tiệm ngang là

A. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0)$ **D.** $\{0\}$

Lời giải

Chọn B.

TH1: $m=0$

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)+1}{\sqrt{2}}=\pm\infty$$

Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

TH2: $m<0$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f^2(x)=+\infty$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(m.f^2(x)+2\right)=-\infty$

Suy ra $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)$ không tồn tại.

TH3: $m>0$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+1}{\sqrt{m.f^2(x)+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)}{|f(x)|\sqrt{m+\frac{2}{f^2(x)}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)}{\sqrt{m+\frac{2}{f^2(x)}}}=\frac{1}{\sqrt{m}}$$

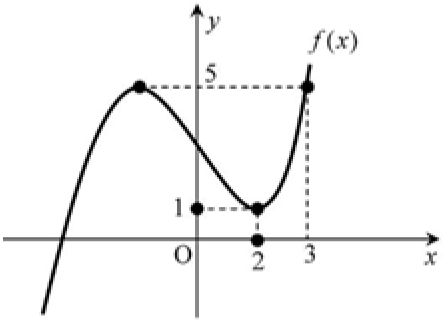
$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+1}{\sqrt{m.f^2(x)+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)}{|f(x)|\sqrt{m+\frac{2}{f^2(x)}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)}{\sqrt{m+\frac{2}{f^2(x)}}}=-\frac{1}{\sqrt{m}}$$

Đồ thị hàm số $g(x)$ có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y=\frac{1}{\sqrt{m}}$, $y=-\frac{1}{\sqrt{m}}$.

Tóm lại, tập hợp cần tìm là $(0;+\infty)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 25. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{m-x}}{f\left(x\right)-m}$ có tất cả 4 đường tiệm cận. Số phần tử của tập S là bao nhiêu?



Lời giải

Đáp án: tập S gồm 2 phần tử..

Với điều kiện $x\le m$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$ thì đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y=0$.

Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{m-x}}{f\left(x\right)-m}$ có 4 đường tiệm cận thì đồ thị phải có 3 đường tiệm cận đứng, suy ra phương trình $f\left(x\right)-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt x thỏa mãn $x\le m$.

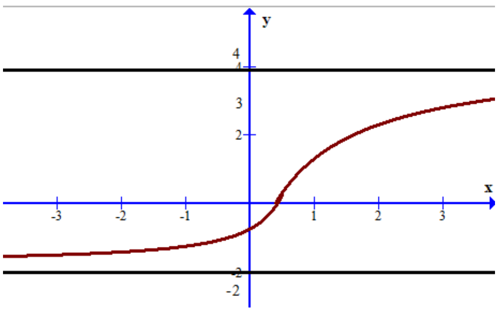
Từ đồ thị, phương trình $f\left(x\right)=m$ có 3 nghiệm khi $1<m<5$. Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{2;3;4\right\}$.

+ Trường hợp 1: Với $m=2$: Từ đồ thị, phương trình $f\left(x\right)-2=0$ có 3 nghiệm $x_1<x_2<2<x_3$, suy ra $m=2$ không thỏa mãn.

+ Trường hợp 2: Với $m\in\left\{3;4\right\}$: Từ đồ thị, phương trình $f\left(x\right)-m=0$ có 3 nghiệm $x_1<x_2<x_3<3$, suy ra $m=3$, $m=4$ thỏa mãn.

Vậy tập S gồm 2 phần tử.

Câu 26. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới.



Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)+\sqrt[3]{8-m}+\sqrt{m+1}-4\right|$ có đúng một tiệm cận ngang?

Lời giải

Đáp án: có 3 giá trị m là 0; 8; 35. .

Để đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)+\sqrt[3]{8-m}+\sqrt{m+1}-4\right|$ có đúng một tiệm cận ngang thì đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)+\sqrt[3]{8-m}+\sqrt{m+1}-4$ có hai tiệm cận ngang đối xứng nhau qua trục hoành , khi đó từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta tịnh tiến xuống đúng 1 đơn vị. Vậy $\sqrt[3]{8-m}+\sqrt{m+1}-4=-1$.

Giải $\sqrt[3]{8-m}+\sqrt{m+1}=3$ ta đặt $u=\sqrt[3]{8-m}$; $v=\sqrt{m+1}\ \left(v\ge 0\right)$

Khi đó ta có hệ: $\begin{cases}u+v=3\\ u^3+v^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=3-u\quad\left(u\le 3\right)\\ u^3+u^2-6u=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\ u=2\\ u=-3\end{array}\right.$

tìm được ba giá trị m là $0\,;\ 8\,;\ 35$.

Câu 27. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	-15	↗	$+\infty$

Tìm số các giá trị nguyên âm của tham số m để đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{2021}{f\left(x\right)-m}$ có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 3.

Lời giải

Đáp án: 14 giá trị với $m\in\left\{-14;-13;-12;-11;...;-2;-1\right\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to\pm\infty}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2021}{f\left(x\right)-m}=0$. Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ là $y=0$.

Để đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ có ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ phải có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $f\left(x\right)-m=0$ có số nghiệm là 2 $\Leftrightarrow$ phương trình $f\left(x\right)=m$ có số nghiệm là 2.

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ suy ra phương trình $f\left(x\right)=m$ có số nghiệm là 2 $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\ -15<m<1\end{array}\right.$.

Mà tham số m là số nguyên âm. Vậy $m\in\left\{-14;-13;-12;-11;...;-2;-1\right\}$.

Câu 28. Hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(f\left(x\right)\right)^2-m}$ có đúng 2 tiệm cận đứng.

Lời giải

Đáp án: $0<m<1$.

Xét phương trình $\left(f\left(x\right)\right)^2-m=0\Leftrightarrow\left(f\left(x\right)\right)^2=m\qquad(*)$

TH1: nếu $m<0$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

TH2: nếu $m=0$ thì phương trình $(*)\Leftrightarrow f\left(x\right)=0$ vô nghiệm. Nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

TH3: nếu m > 0 thì phương trình $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f(x)=\sqrt{m} & (1)\\ f(x)=-\sqrt{m} & (2)\end{array}\right.$

Với (1) : khi $0<m<1$ thì (1) có 2 nghiệm; $m=1$ thì (1) có nghiệm duy nhất

Với (2) : do $m>0$ nên $-\sqrt{m}<0\Rightarrow f\left(x\right)=-\sqrt{m}$ vô nghiệm.

Vậy để đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng thì $0<m<1$.

Câu 29. Cho hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)f\left(x\right)}{\left(x^2-4x+m\right)\sqrt{f^2\left(x\right)+1}}$ có đúng 2 đường tiệm cận.

Lời giải

Đáp án: có hai giá trị m là số nguyên dương $m\in\{3;4\}$..

Điều kiện xác định của hàm số $g\left(x\right)$: $x\ge-\dfrac{1}{3};x^2-4x+m\ne0$.

Vì $x\ge-\dfrac{1}{3}$ nên không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}g\left(x\right)$.

Vì hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=1\Rightarrow f\left(x\right)>1,\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x\right).\left(\sqrt{3x+1}-2\right)}{\sqrt{f^2\left(x\right)+1}.\left(x^2-4x+m\right)}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{f^2(x)}}} . \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{m}{x^2}} = 1.0 = 0$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$.

Ta có $g(x)=\dfrac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)f(x)}{\left(x^2-4x+m\right)\sqrt{f^2(x)+1}}=\dfrac{(3x-3)f(x)}{\left(x^2-4x+m\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)\sqrt{f^2(x)+1}}$.

Đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng hai tiệm cận khi và chỉ khi nó có đúng một tiệm cận đứng, tức là phương trình $x^2-4x+m=0$ có nghiệm kép x_0, $x_0 \ge -\frac{1}{3}$ hoặc có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trong đó $x_1=1$, $x_2 \ne 1$, $x_2 \ge -\frac{1}{3}$ hoặc có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 trong đó $x_3 < -\frac{1}{3}$, $x_4 \ge -\frac{1}{3}$, $x_4 \ne 1$.

Xét bảng biến thiên của hàm số $h(x)=-x^2+4x$:

x	$-\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$-x^2+4x$	$-\frac{13}{9}$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

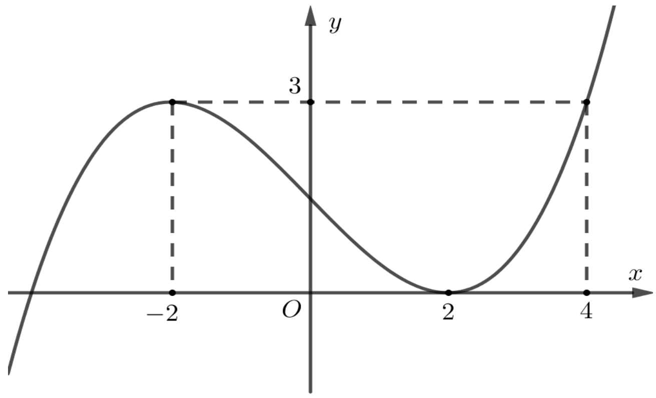
Ta có $x^2-4x+m=0 \Leftrightarrow m=-x^2+4x \qquad (1)$.

Từ bảng biến thiên suy ra $\left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=3 \\ m<-\frac{13}{9} \end{array}\right.$. Do m là số nguyên dương nên $m\in\{3;4\}$.

CHỦ ĐỀ 4
TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ ẨN LÀ HÀM HỢP

DẠNG 1
BIẾT ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$

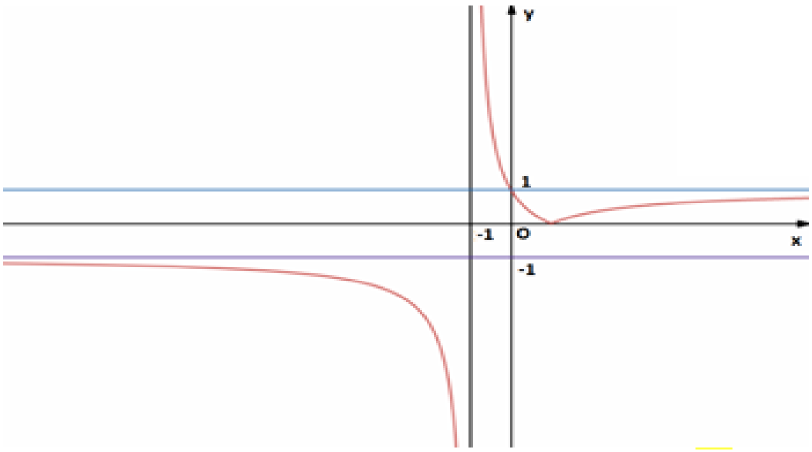
Câu 1. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{1}{f(4-x^2)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

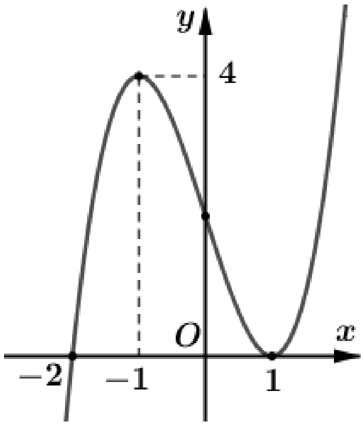
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm m để đồ thị hàm số $y = f(x-m)$ có tiệm cận đứng là trục Oy?

A. 0. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

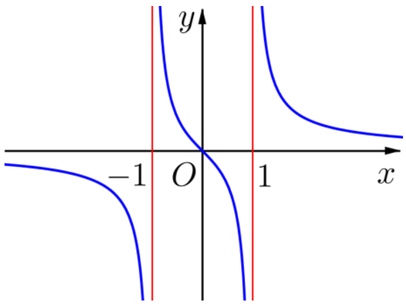
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm m để đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{1}{f(x^2 - 3) - m}$ có đúng 6 tiệm cận đứng?

A. $m \leq 0$. **B.** $-2 \leq m \leq 0$. **C.** $-3 < m < -1$. **D.** $0 < m < 4$.

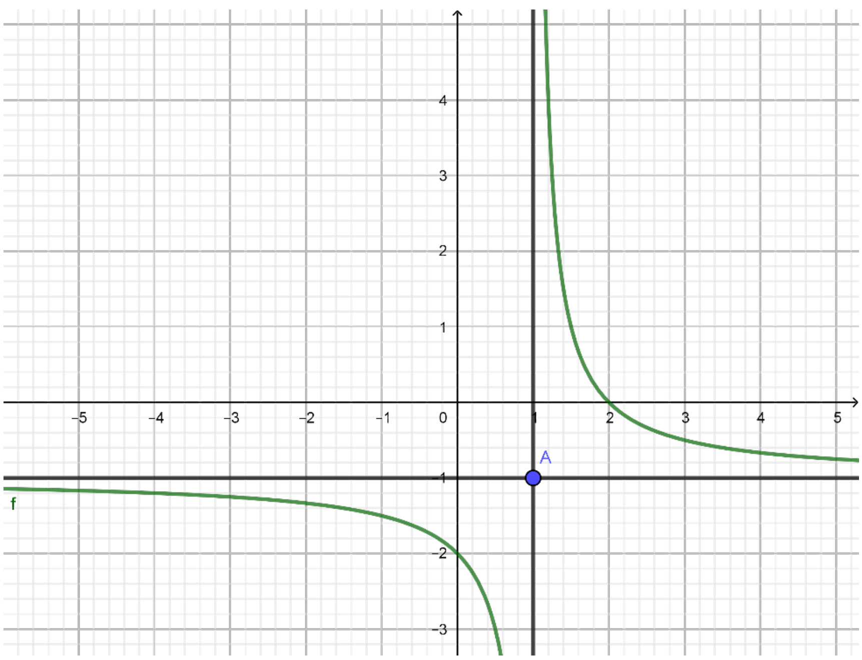
Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2021; 2021]$ để đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 2x + m) - m$ có 5 đường tiệm cận?

A. 4042. **B.** 2021. **C.** 2020. **D.** 4040.

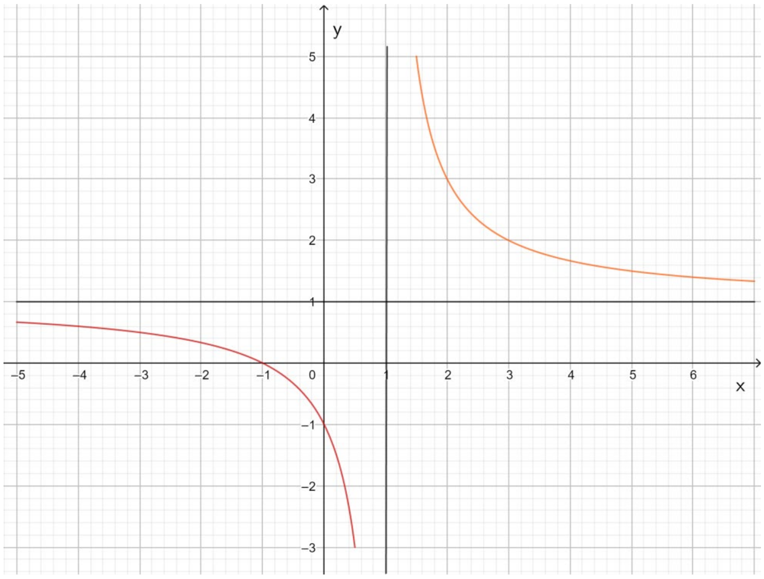
Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x-16\right)+10-m^2\right|$ có tiệm cận ngang nằm phía dưới đường thẳng $d: y=8$ (không trùng với d).

A. 8 **B.** 2 **C.** 6 **D.** 4

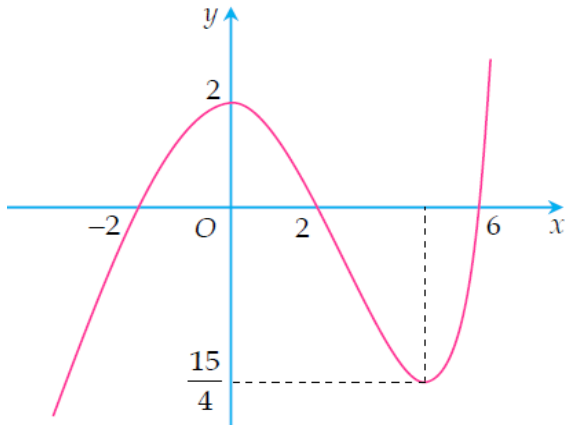
Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để đồ thị hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x-m^2\right|\right)-2020$ nhận đường thẳng $x=5$ làm tiệm cận đứng?

A. $m=\pm 2$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m=\pm 2 \\ m=\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$. **C.** $m=\pm\sqrt{6}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Với m , n là hai số nguyên dương, khi hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{x^2+8x+\sqrt{n-m}}{f\left(f\left(x\right)+m\right)}$ có số tiệm cận lớn nhất là n hãy tính giá trị nhỏ nhất của $S=m^2+n^2$

A. 14 . **B.** 74 . **C.** 50 . **D.** 3 .

DẠNG 2
BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{1}{f(x^3+2x)-5}$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $[-10;10]$ của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{f(x^2)-m}$ có 4 tiệm cận đứng.

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

DẠNG 3
BIẾT ĐẶC ĐIỂM CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$

Câu 10. Cho $y=f(x)$ là hàm số bậc ba, liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(x^3+3x)-1}$ có nhiều nhất bao nhiêu đường tiệm cận.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

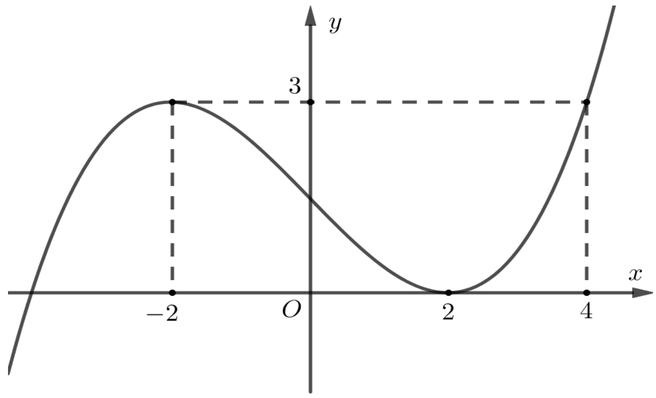
Câu 11. Cho hàm sô $y=f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$. Hàm số $y=g(x)=f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$ có bao nhiêu tiệm cận?.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3

CHỦ ĐỀ 4
TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ ẨN LÀ HÀM HỢP

DẠNG 1
BIẾT ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(4-x^2)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C.

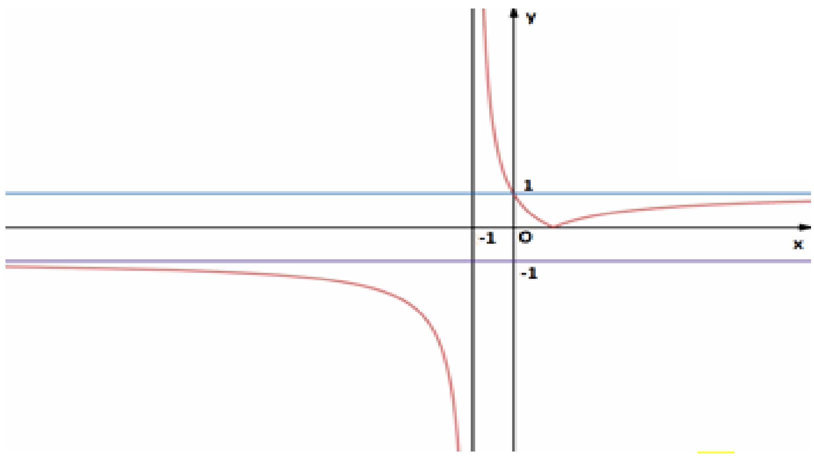
Từ đồ thị ta có $f(4-x^2)-3=0\Leftrightarrow f(4-x^2)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4-x^2=-2\\4-x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{6}\\x=0\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có ba đường tiệm cận đứng.

Lại có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(4-x^2)=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=0\Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có bốn đường tiệm cận.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm m để đồ thị hàm số $y=f\left(x-m\right)$ có tiệm cận đứng là trục Oy?

A. 0. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D.

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$.

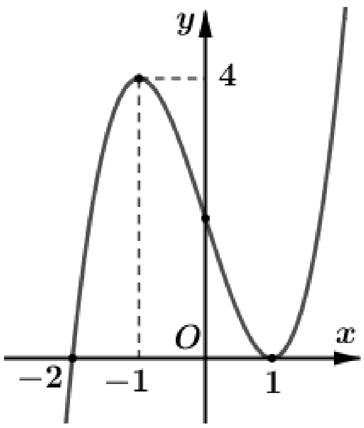
Tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}=\left(m;0\right)$ thì:

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ biến thành đồ thị hàm số $y=f\left(x-m\right)$.

Tiệm cận $x=-1$ của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ biến thành tiệm cận $x=-1+m$ của đồ thị hàm số $y=f\left(x-m\right)$.

Đồ thị hàm số $y=f\left(x-m\right)$ có tiệm cận đứng là trục $Oy \Leftrightarrow -1+m=0 \Leftrightarrow m=1$

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d \quad \left(a\neq 0\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm m để đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{1}{f\left(x^2-3\right)-m}$ có đúng 6 tiệm cận đứng?

A. $m\leq 0$. **B.** $-2\leq m\leq 0$. **C.** $-3<m<-1$. **D.** $0<m<4$.

Lời giải

Chọn D.

Xét hàm số $h\left(x\right)=f\left(x^2-3\right)\Rightarrow h'\left(x\right)=2x.f'\left(x^2-3\right)$

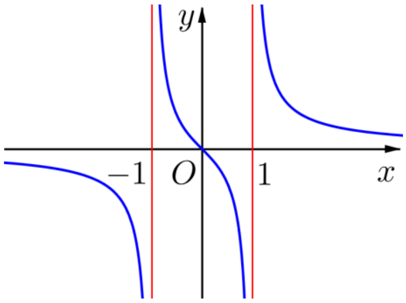
$$\Rightarrow h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2-3\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-3=-1\\x^2-3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\\x=\pm 2\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2-3	$+\infty$		1		-1		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x^2-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$f(-3)<0$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(x^2-3)-m}$ có đúng 6 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow h(x)=m$ có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0<m<4$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2021;2021]$ để đồ thị hàm số $y=f(x^2-2x+m)-m$ có 5 đường tiệm cận?

A. 4042. **B.** 2021. **C.** 2020. **D.** 4040.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra $f(x)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$ và các giới hạn: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$.

Vì hàm số $t=x^2-2x+m$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $y=f(x^2-2x+m)-m$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+m\neq 1 \\ x^2-2x+m\neq -1 \end{cases}$

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2-2x+m)=+\infty$ nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x^2-2x+m)-m\right]=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[f(t)-m\right]=-m$.

Do đó đồ thị hàm số $y=f(x^2-2x+m)-m$ có đúng một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-m$ (về cả hai phía $x\to+\infty$ và $x\to-\infty$).

Để đồ thị hàm số $y=f(x^2-2x+m)-m$ có 5 đường tiệm cận thì nó phải có 4 đường tiệm cận đứng.

Điều kiện cần: $\left[\begin{array}{l} x^2-2x+m=1 \\ x^2-2x+m=-1 \end{array}\right.$ phải có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2=-m+2\\(x-1)^2=-m\end{array}\right.$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}-m+2>0\\-m>0\end{cases} \Leftrightarrow m<0$.

Điều kiện đủ: Giả sử $x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2-2x+m=1$; $x_3,\ x_4$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2-2x+m=-1$.

Xét đường thẳng $x=x_1$, ta có $\lim\limits_{x\to x_1^{\mp}}\left[f\left(x^2-2x+m\right)-m\right]=\lim\limits_{t\to 1^{\pm}}\left[f(t)-m\right]=\pm\infty$.

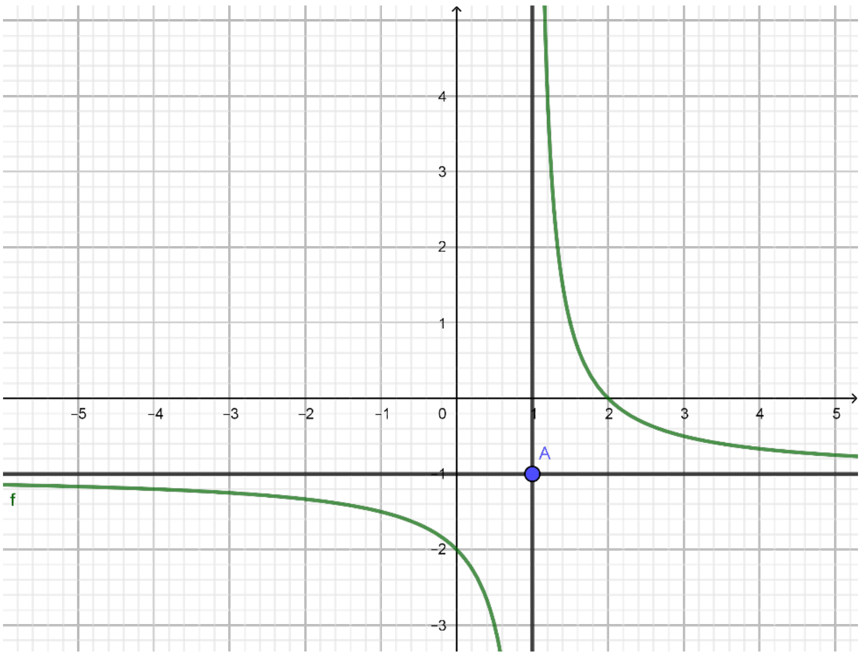
Suy ra đường thẳng $x=x_1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-2x+m\right)-m$.

Tương tự các đường thẳng $x=x_2$, $x=x_3$, $x=x_4$ cũng là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-2x+m\right)-m$.

Vậy để đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-2x+m\right)-m$ có 5 đường tiệm cận thì $m<0$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-2021;2021]$ nên có tất cả 2021 giá trị của m.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\left|f(x-16)+10-m^2\right|$ có tiệm cận ngang nằm phía dưới đường thẳng $d: y=8$ (không trùng với d).

A. 8 **B.** 2 **C.** 6 **D.** 4

Lời giải

Chọn C.

Đồ thị hàm số $g(x)=f(x-16)+10-m^2$ có được bằng cách thực hiện liên tiếp 2 phép tịnh tiến là tịnh tiến theo phương trục hoành sang phải 16 đơn vị và theo phương trục tung $\left(10-m^2\right)$ đơn vị.

Từ hình vẽ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x-16)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=9-m^2$

Do vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có một tiệm cận ngang là $y=9-m^2$, ta có 2 TH sau:

+) TH 1: Nếu $9-m^2<0$ thì tiệm cận ngang của đồ thị $y=|g(x)|$ là $y=m^2-9<8$

$\Rightarrow 9<m^2<17$

mà $m\in\mathbb{Z}$, nên $m=\pm4$

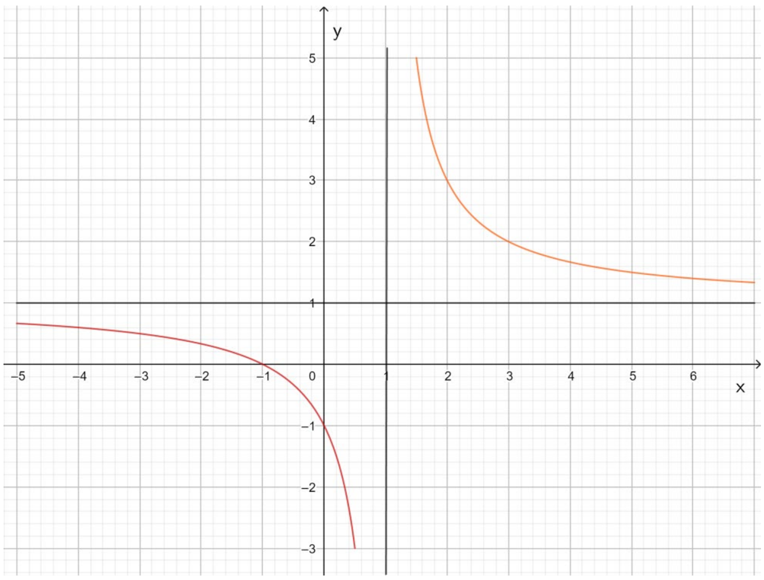
+) TH 2: Nếu $9-m^2\geq 0$ thì tiệm cận ngang của đồ thị $y=|g(x)|$ là $y=9-m^2<8$

$\Rightarrow 1<m^2\leq 9$

mà $m\in\mathbb{Z}$, nên $m=\pm2$, $m=\pm3$

+) KL: có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài ra.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để đồ thị hàm số $g(x)=f\left(\left|x-m^2\right|\right)-2020$ nhận đường thẳng $x=5$ làm tiệm cận đứng?

A. $m=\pm2$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m=\pm2 \\ m=\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$. **C.** $m=\pm\sqrt{6}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B.

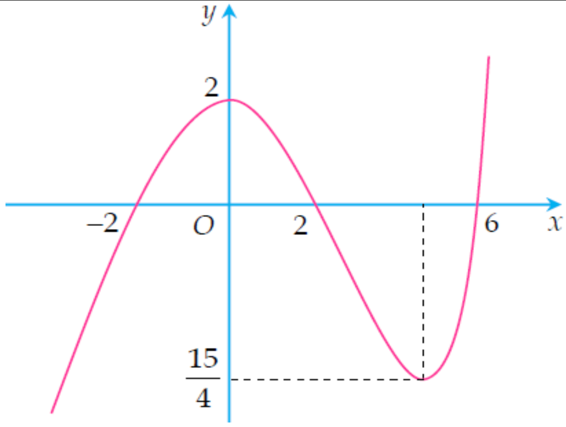
Xét hàm số $h(x)=f(|x|)$ có đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=1$ làm tiệm cận ngang, $x=1$, $x=-1$ làm tiệm cận đứng.

Suy ra đồ thị hàm số $u(x)=h\left(x-m^2\right)=f\left(\left|x-m^2\right|\right)$ nhận đường thẳng $x=m^2+1; x=m^2-1$ làm tiệm cận đứng, đường thẳng $y=1$ làm tiệm cận ngang.

Suy ra đồ thị hàm số $g(x)=u(x)-2020$ nhận đường thẳng $x=m^2+1; x=m^2-1$ làm tiệm cận đứng, đường thẳng $y=-2019$ làm tiệm cận ngang.

Theo đề bài, ta có $\left[\begin{array}{l} m^2+1=5 \\ m^2-1=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm2 \\ m=\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Với m , n là hai số nguyên dương, khi hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{x^2+8x+\sqrt{n-m}}{f\left(f\left(x\right)+m\right)}$ có số tiệm cận lớn nhất là n hãy tính giá trị nhỏ nhất của $S=m^2+n^2$

A. 14 . **B.** 74 . **C.** 50 . **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Để hàm số có tiệm cận đứng thì điều kiện:

$$f\left[f\left(x\right)+m\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)+m=-2 \\ f\left(x\right)+m=2 \\ f\left(x\right)+m=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=-m-2 \\ f\left(x\right)=-m+2 \\ f\left(x\right)=-m+6 \end{array}\right.$$

Khi đó để hàm số có có nhiều tiệm cận đứng nhất thì: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6-m<2 \\ 2-m>-\dfrac{15}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} -2-m>-\dfrac{15}{4} \\ 2-m<2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=5 \\ m=1 \end{array}\right.$

Xét $h\left(x\right)=x^2+8x+\sqrt{n-m}$ có $h'\left(x\right)=2x+8$

nên $h\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-4;+\infty\right)$

Khi $m=5$ thì đường thẳng $y=-7$ gặp $f\left(x\right)$ tại điểm có hoành độ lớn hơn -4 .

Nên $h\left(x\right)>0$, $\forall x\in\left(-4;+\infty\right)$. Do đó $\left[\begin{array}{l} S=74 \\ S=50 \end{array}\right. \Rightarrow \min S=50$

DẠNG 2

BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y=f\left(x\right)$

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{1}{f\left(x^3+2x\right)-5}$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

+ Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f\left(x^3+2x\right)-5}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f\left(x^3+2x\right)-5}=0$.

Đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có 1 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

+ Đặt $u=x^3+2x$, khi đó $f\left(x^3+2x\right)-5=0$ trở thành:

$$f\left(u\right)-5=0 \Leftrightarrow f\left(u\right)=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=a\left(a<-2\right) \\ u=1 \end{array}\right..$$

+ Với $u=a \Rightarrow x^3+2x=a$

Xét hàm số $h\left(x\right)=x^3+2x$ có $h'\left(x\right)=3x^2+2>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên $h\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(-\infty;+\infty\right)$, mà phương trình bậc ba có ít nhất 1 nghiệm nên phương trình $x^3+2x=a$ có nghiệm duy nhất giả sử là x_1.

+ Với $u=1 \Rightarrow x^3+2x=1$ do chứng minh trên nên phương trình cũng có 1 nghiệm duy nhất giả sử là $x_2\left(x_2\neq x_1\right)$.

+ Do x_1, x_2 không là nghiệm của tử số của $g\left(x\right)$ nên giới hạn của $g\left(x\right)$ khi x dần tới x_1 và giới hạn của $g\left(x\right)$ khi x dần tới x_2 đều là vô cực.

Suy ra đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có 2 tiệm cận đứng là $x=x_1$ và $x=x_2$.

+ Vậy, tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ là 3.

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $[-10;10]$ của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{f\left(x^2\right)-m}$ có 4 tiệm cận đứng.

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{f\left(x^2\right)-m}$ có 4 tiệm cận đứng khi phương trình $f\left(x^2\right)=m$ có 4 nghiệm x phân biệt.

Đặt $t=x^2$, $t\geq 0$. Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta thấy, phương trình $f\left(t\right)=m$ có 2 nghiệm dương t phân biệt khi $-1<m<3$.

Với mỗi giá trị $t>0$ cho ta 2 giá trị đối nhau của x, nên với điều kiện $-1<m<3$, phương trình $f\left(x^2\right)=m$ có 4 nghiệm x phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{f\left(x^2\right)-m}$ có 4 tiệm cận đứng khi $-1<m<3$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2\}$.

DẠNG 3

BIẾT ĐẶC ĐIỂM CỦA HÀM SỐ $y=f\left(x\right)$

Câu 10. Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm số bậc ba, liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{1}{f\left(x^3+3x\right)-1}$ có nhiều nhất bao nhiêu đường tiệm cận.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $t=x^3+3x \Rightarrow t'=3x^2+3>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
t'		$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Xét $f\left(x^3+3x\right)-1=0$. Vì $y=f\left(x\right)$ là hàm số bậc ba nên phương trình $f\left(t\right)=1$ có nhiều nhất 3 nghiệm t.

Từ bảng biến thiên ta suy ra với mỗi giá trị t có đúng một giá trị x.

Khi đó phương trình $f\left(x^3+3x\right)=1$ có nhiều nhất 3 nghiệm x.

Do đó đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có nhiều nhất 3 tiệm cận đứng.

Xét $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{f\left(x^3+3x\right)-1}=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dfrac{1}{f\left(t\right)-1}=0$ (vì $=\lim\limits_{t\to\pm\infty} f\left(t\right)=\pm\infty$).

Suy ra đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có 1 tiệm cận ngang là $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có nhiều nhất 4 đường tiệm cận.

Câu 11. Cho hàm sô $y=f\left(x\right)=\sqrt{x^2+2x+3}$. Hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(\dfrac{1}{f\left(x\right)}\right)$ có bao nhiêu tiệm cận?.

A. 0. **B. 1.** **C. 2.** **D. 3**

Lời giải

Chọn B.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ham số $y = g\left(x\right) = f\left(\frac{1}{f\left(x\right)}\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 2x + 3} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} + 3}$ có tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} g\left(x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} g\left(x\right) = \sqrt{3}$

Vây có 1 tiệm cận ngang.

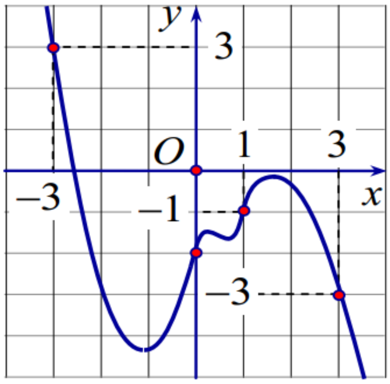
CHỦ ĐỀ 5

TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT HÀM SỐ $y = f'(x)$

DẠNG 1

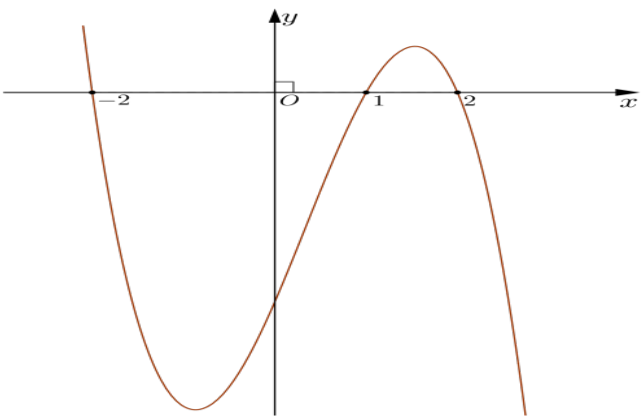
HÀM SỐ KHÔNG CHỨA THAM SỐ m

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x) = \dfrac{3}{2f(x) + x^2 + 4}$. Biết rằng $f(1) = -24$. Hỏi trên đoạn $[-3;3]$ đồ thị hàm số $y = h(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

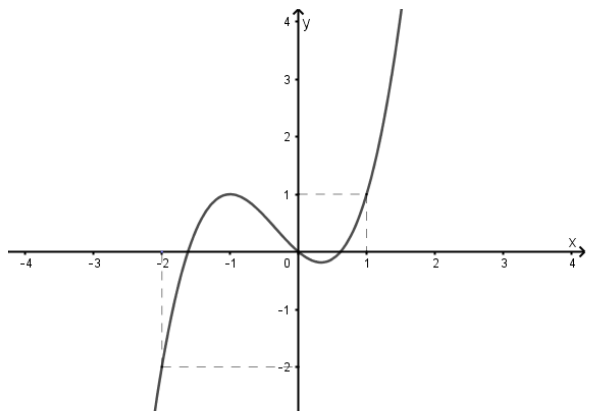
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên R, thỏa $f(1) = 0$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{2203x}{f^2(x) + f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A.3. **B.**2. **C.**5. **D.**4.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau:



Xét hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-\dfrac{x^2}{2}}$. Đặt $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\dfrac{x^2}{2}$, tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-\dfrac{x^2}{2}}$ có 4 đường tiệm cận đứng.

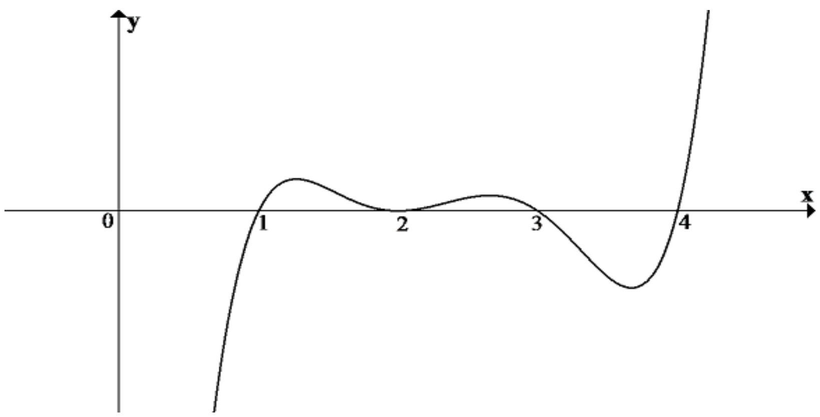
A. $\begin{cases} g\left(0\right)>0 \\ g\left(1\right)<0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} g\left(0\right)>0 \\ g\left(1\right)<0 \\ g\left(1\right).g\left(-2\right)>0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} g\left(0\right)>0 \\ g\left(-2\right)>0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} g\left(0\right)>0 \\ g\left(-2\right)\le 0 \\ g\left(1\right)\le 0 \end{cases}$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức liên tục trên R thỏa mãn $3f(1)-2<0$ và $3f(a)-a^3+3a>0,\forall a>2$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{x+1}{3f(x+2)-x^3+3x}$ có có số tiệm cận đứng là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

DẠNG 2
HÀM SỐ CHỨA THAM SỐ m

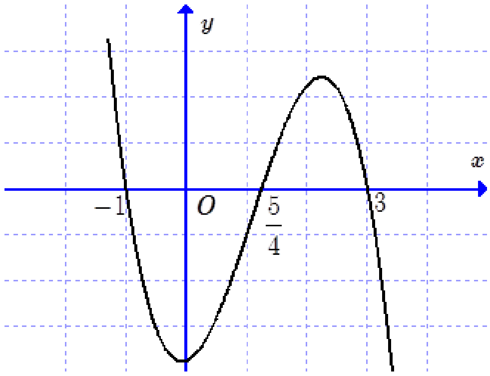
Câu 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y=f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	3 ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{2020}{f\left(x\right)-m}$ có nhiều nhất bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

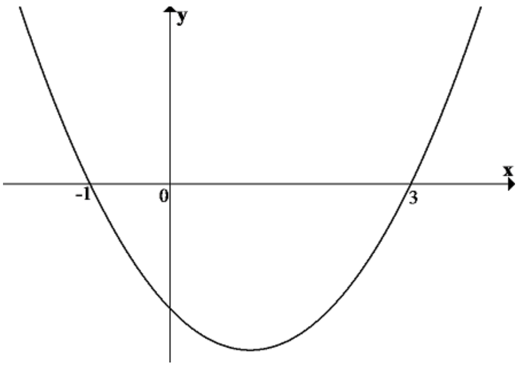
Câu 6. Cho hàm số $g(x)=\dfrac{2019}{h(x)-m^2-m}$ với $h(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx\,(m,n,p,q\in\mathbb{R}), h(0)=0$. Hàm số $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới :



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 tiệm cận đứng ?

A. 2 . **B.** 10. **C.** 71. **D.** 2019.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số bậc 3. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ và $f(-1)<20$.



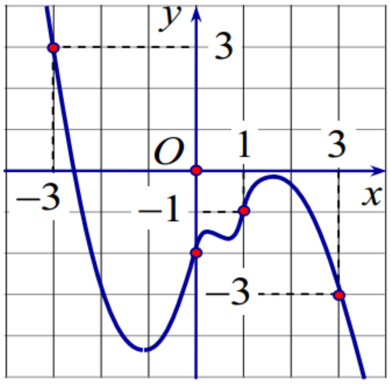
Giá trị của m để đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{f(x)-20}{f(x)-m}$ có 4 tiệm cận là

A. $m<f(3)$. **B.** $f\left(3\right)<m<f\left(-1\right)$. **C.** $m>f(-1)$. **D.** $f(3)\le m\le f(-1)$..

CHỦ ĐỀ 5
TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT HÀM SỐ $y = f'(x)$

DẠNG 1
HÀM SỐ KHÔNG CHỨA THAM SỐ m

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x) = \dfrac{3}{2f(x) + x^2 + 4}$. Biết rằng $f(1) = -24$. Hỏi trên đoạn $[-3;3]$ đồ thị hàm số $y = h(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D.

Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + x^2 + 4 \Rightarrow g'(x) = 2.(f'(x) + x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ ta được:

x	-3		1		3
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	$g(-3)$	↘	-43	↗	$g(3)$

Gọi a là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$. Ta có:

$$\int_{-3}^{a} |f'(x)|dx < \int_{a}^{3} |f'(x)|dx \Leftrightarrow f(a) - f(-3) < -(f(3) - f(a)) \Leftrightarrow f(-3) > f(3) \Leftrightarrow g(-3) > g(3).$$

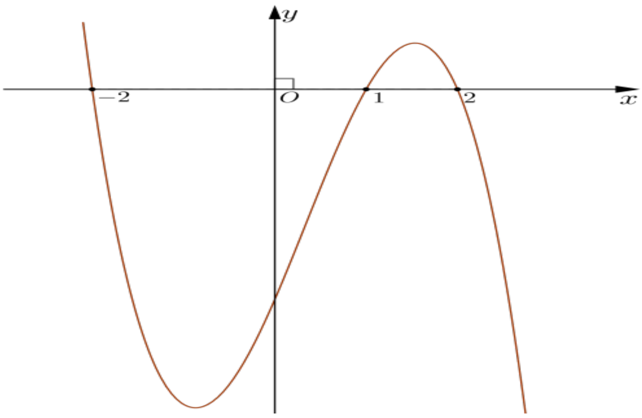
Lại có: $\int_{1}^{3} g'(x)dx < 4 \Leftrightarrow g(3) - g(1) < 4 \Leftrightarrow g(3) < g(1) + 4 \Leftrightarrow g(3) < -39 \Rightarrow g(3) < 0.$

S_{ABCD} là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi 4 đường thẳng: $x=-3; x=1; y=-5; y=3$.

Mặt khác: $\int_{-3}^{1}\left(-g'(x)\right)dx < S_{ABCD}=32 \Leftrightarrow g(-3)-g(1)<32 \Leftrightarrow g(-3)<-11$.

Do đó phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm, vậy đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cân đứng.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên R, thỏa $f(1)=0$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2203x}{f^2(x)+f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

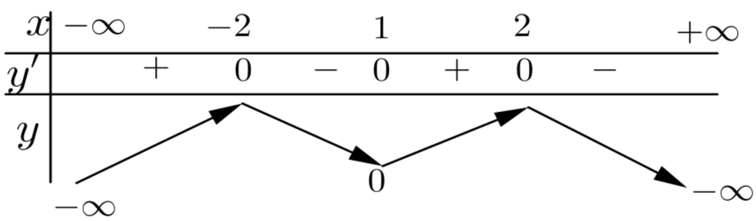
Chọn C.

$f^2(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=-1 \end{array}\right.$

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$, $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ 1<x<2 \end{array}\right.$

Ta lập được bảng biến thiên của hàm số



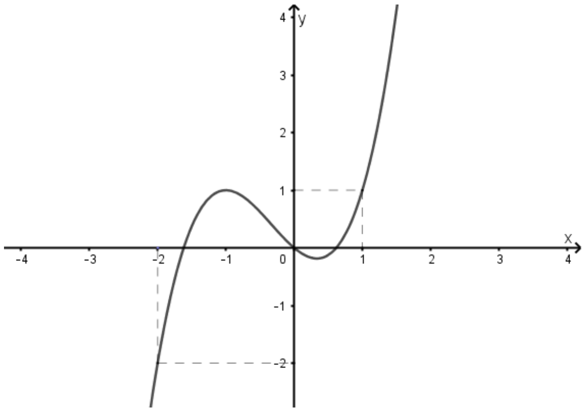
Từ bảng biến thiên ta có:

Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0

Phương trình $f(x)=-1$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

Vậy đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2203x}{f^2(x)+f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau:



Xét hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-\dfrac{x^2}{2}}$. Đặt $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\dfrac{x^2}{2}$, tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-\dfrac{x^2}{2}}$ có 4 đường tiệm cận đứng.

A. $\begin{cases} g\left(0\right)>0 \\ g\left(1\right)<0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} g\left(0\right)>0 \\ g\left(1\right)<0 \\ g\left(1\right).g\left(-2\right)>0 \end{cases}$.

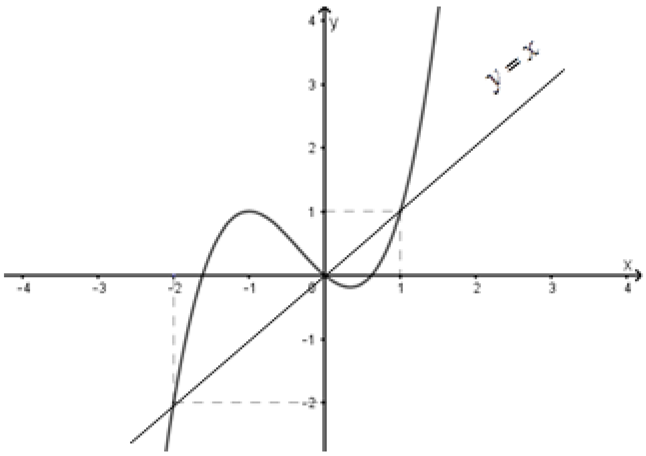
C. $\begin{cases} g\left(0\right)>0 \\ g\left(-2\right)>0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} g\left(0\right)>0 \\ g\left(-2\right)\le 0 \\ g\left(1\right)\le 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn b.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-\dfrac{x^2}{2}}$ có 4 đường tiệm cận đứng $\Rightarrow$ Phương trình $f(x)-\dfrac{x^2}{2}=0$ phải có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.



Ta có: $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-x$.

$g'\left(0\right)=f'\left(0\right)-0=0$, $g'\left(1\right)=f'\left(1\right)-1=0$, $g'\left(-2\right)=f'\left(-2\right)+2=0$.

Từ đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ suy ra

$f'\left(x\right)<x,\forall x\in\left(0;1\right)\cup\left(-\infty;-2\right)\Rightarrow g'\left(x\right)<0,\forall x\in\left(0;1\right)\cup\left(-\infty;-2\right)$.

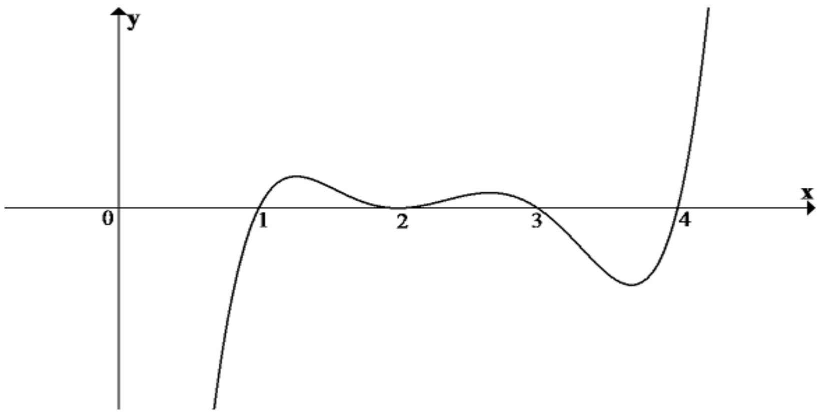
$f'\left(x\right)>x;\forall x\in\left(1;+\infty\right)\cup\left(-2;0\right)\Rightarrow g'\left(x\right)>0,\forall x\in\left(1;+\infty\right)\cup\left(-2;0\right)$..

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-2)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \\ g(-2) < 0 \end{cases}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên R thỏa mãn $3f(1) - 2 < 0$ và $3f(a) - a^3 + 3a > 0, \forall a > 2$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{x+1}{3f(x+2) - x^3 + 3x}$ có có số tiệm cận đứng là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn b.

Phương trình $f(x) = 20$ có một nghiệm $x = a > 3$ vì $f(-1) < 20$.

Từ đồ thị $f'(x)$ suy ra $f(x)$ là đa thức bậc 6 và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

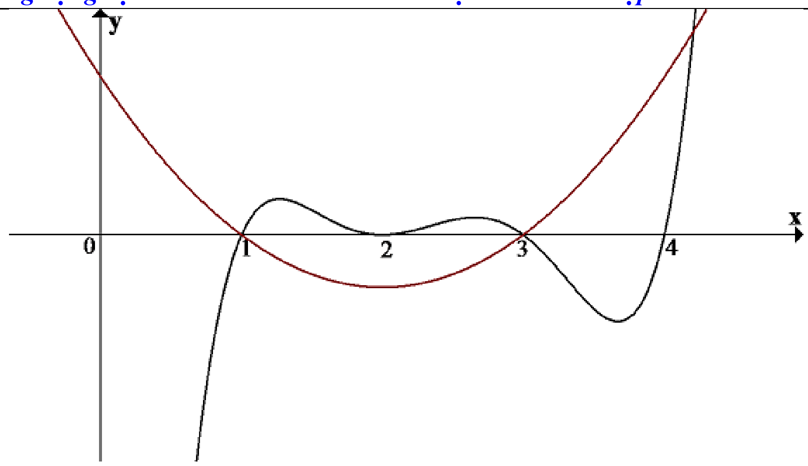
ĐK: $h(x) = 3f(x+2) - x^3 + 3x \neq 0$.

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm $g(x)$ bằng số nghiệm của $h(x)$ khác -1.

Ta đi tìm số nghiệm của phương trình $h(x) = 0$.

$h'(x) = 3f'(x+2) - 3x^2 + 3$. Đặt $t = x + 2 \Rightarrow h'(x) = k(t) = 3(f'(t) - t^2 + 4t - 3)$.

Khi đó $k(t) = 3(f'(t) - t^2 + 4t - 3) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t^2 - 4t + 3 (*)$



Sử dụng đồ thị nhận thấy (*) có 3 nghiệm là $t = 1; t = 3; t = a > 4 \Rightarrow x = -1; x = 1; x = a - 2 = b > 2$.

Ta có bảng biến thiên của $h(x)$ như sau :

x	$-\infty$		-1		1		b		$+\infty$
h'(x)		-	0	+	0	-	0	+	
h(x)	$+\infty$	↘	h(-1)	↗	h(1)	↘	h(b)	↗	$+\infty$

Ta có: $h(-1) = 3f(1) - 2 < 0; h(b) = 3f(a) - a^3 + 3a > 0; a > 2$.

Dựa vào bảng biến thiên của $h(x)$ ta thấy $h(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1.

Vậy $g(x)$ có 2 tiệm cận đứng.

DẠNG 2
HÀM SỐ CHỨA THAM SỐ m

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	$3 \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020}{f(x)-m}$ có nhiều nhất bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D.

Để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020}{f(x)-m}$ có đường tiệm cận đứng thì phương trình $f(x)-m=0$ phải có nghiệm.

Từ bbt của hàm số $y=f'(x)$ suy ra tồn tại a,b sao cho $\begin{cases} -1<a<1<b \\ f'(a)=f'(b)=0 \end{cases}$

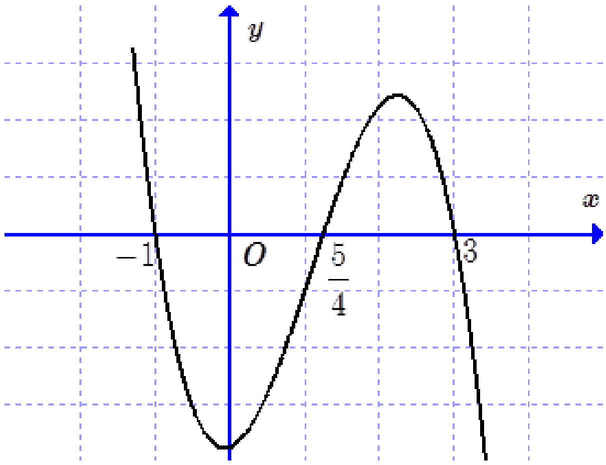
Từ đó ta có bbt của hàm số $y=f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		a		1		b		$+\infty$
y'		$+$		$-$			$+$			$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Suy ra phương trình $f(x)-m=0$ có nhiều nhất là 4 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020}{f(x)-m}$ có nhiều nhất 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 6. Cho hàm số $g(x)=\dfrac{2019}{h(x)-m^2-m}$ với $h(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx\,(m,n,p,q\in\mathbb{R}),h(0)=0$. Hàm số $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới :



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 tiệm cận đứng ?

A. 2 . **B.** 10. **C.** 71. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị suy ra $h'(x)=m(x+1)(4x-5)(x-3)=m(4x^3-13x^2-2x+15)$ và $m<0$.

Ta được $h(x)=m\left(x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)$.

Đồ thị $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $h(x)=m^2-m$ có 2 nghiệm phân biệt .

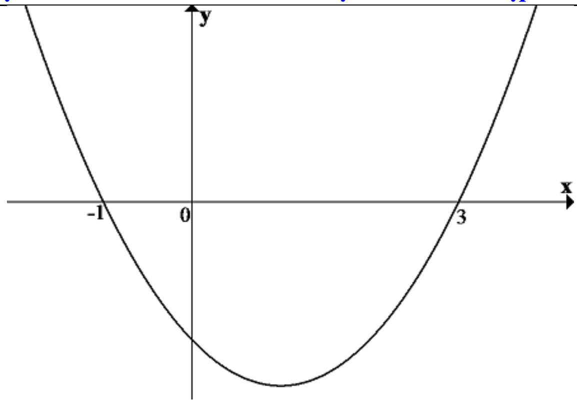
$\Leftrightarrow f(x)=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x=m+1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-32}{3}$	$\nearrow$	$\frac{8575}{768}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó $m+1\in\left(\dfrac{-32}{3};0\right)\Leftrightarrow m\in\left(\dfrac{-35}{3};-1\right)$. Vậy có 10 số nguyên m.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc 3. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ và $f(-1)<20$.



Giá trị của m để đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{f(x)-20}{f(x)-m}$ có 4 tiệm cận là

A. $m<f(3)$. **B.** $f\left(3\right)<m<f\left(-1\right)$. **C.** $m>f(-1)$. **D.** $f(3)\le m\le f(-1)$..

Lời giải

Chọn B.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	f(-1)	↘	f(3)	↗	$+\infty$

ĐK: $f(x)\ne m$

Nếu $m\ne 20$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Nếu $m\ne 20$ thì

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)-20}{f(x)-m}=1\Rightarrow$ Đường thẳng $y=1$ là TCN của đồ thị hàm số.

Phương trình $f(x)=20$ có một nghiệm $x=a>3$ vì $f(-1)<20$.

Suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 tiệm cận khi phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt khác a.

Suy ra $f(3)<m<f(-1)$.