



LỚP TOÁN THẦY CƯ- TP HUẾ

CS 1: Trung tâm MASTER EDUCATION- 25 THẠCH HẪN

CS 2: Trung Tâm 133 Xuân 68

CS 3: Trung tâm 168 Mai Thúc Loan

CS4: Trung Tâm THPT Nguyễn Trường Tộ

BÀI GIẢNG CHƯƠNG 3

TOÁN 11 – CÁNH DIỀU

GIỚI HẠN VÀ HÀM SỐ LIÊN TỤC



TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH LỚP TOÁN THẦY CƯ-TP HUẾ

(Chiêu sinh thường xuyên, bổ trợ kiến thức kịp thời)

MỤC LỤC

CHƯƠNG 3 : GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC.....	4
BÀI 1: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ.....	4
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....	4
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP	6
Dạng 1. Giới hạn hữu tỉ.....	6
1. Phương pháp	6
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng.....	6
Dạng 2. Dãy số chứa căn thức.....	7
1. Phương pháp	7
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng.....	8
Dạng 3. Tính giới hạn của dãy số chứa hàm mũ	9
1. Phương pháp	9
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng.....	9
Dạng 4. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn	10
1. Phương pháp	10
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng.....	10
Dạng 5: Phương pháp sai phân và quy nạp tính giới hạn.....	12
1. Phương pháp	12
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng.....	13
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA	16
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	20
BÀI 2: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ	43
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....	43
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP	45
Dạng 1: Dãy số có giới hạn hữu hạn	45
1. Phương pháp	45
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng.....	45
Dạng 2. Giới hạn tại vô cực.....	46
1. Phương pháp	46
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng.....	46

Dạng 3. giới hạn một bên	49
1. Phương pháp	49
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	49
Dạng 4. Dạng vô định $\frac{0}{0}$	51
1. Phương pháp	51
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	51
Dạng 5. Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$	58
1. Phương pháp	58
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	58
Dạng 6. Dạng vô định $\infty - \infty, 0 \cdot \infty$	62
1. Phương pháp	62
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	63
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA	65
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	67
BÀI 3: HÀM SỐ LIÊN TỤC	86
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....	86
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP	86
Dạng 1: Hàm số liên tục tại một điểm	86
1. Phương pháp	86
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	87
Dạng 2. Hàm số liên tục trên tập xác định.....	89
1. Phương pháp	89
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	89
Dạng 3. Số nghiệm của phương trình trên một khoảng.....	90
1. Phương pháp	90
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	91
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA	93
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	96
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 3.....	109
PHẦN 1: GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.....	109

BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG V.....	114
PHẦN 1: TRẮC NGHIỆM.....	114
PHẦN 2: TỰ LUẬN	133

CHƯƠNG 3 : GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 1: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa

-Ta có định nghĩa dãy số có giới hạn 0 như sau:

Dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Chú ý: Ngoài kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, ta cũng sử dụng các kí hiệu sau: $\lim u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$

Ta có: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Nhận xét: Nếu u_n ngày càng gần tới 0 khi n ngày càng lớn thì $\lim u_n = 0$.

-Ta có định nghĩa dãy số có giới hạn hữu hạn như sau:

Dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn là a khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$

Chú ý: Ngoài kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, ta cũng sử dụng các kí hiệu sau: $\lim u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$

Chú ý:

-Một dãy số có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

-Không phải dãy số nào cũng có giới hạn, chẳng hạn như dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$.

2. Một số giới hạn cơ bản

Ta có thể chứng tỏ được các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ với k là số nguyên dương cho trước;

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c}{n} = 0; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c}{n^k} = 0$ với c là hằng số, k là số nguyên dương cho trước;

c) Nếu $|q| < 1$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$;

d) Dãy số (u_n) với $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ có giới hạn là một số vô tỉ và gọi giới hạn đó là e ,

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Một giá trị gần đúng của e là 2,718281828459045.

II. ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Ta có định lý về giới hạn hữu hạn của một tổng, của một hiệu, của một tích, của một thương và của một căn thức như sau:

a) Nếu $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ thì:

$$\lim(u_n + v_n) = a + b;$$

$$\lim(u_n - v_n) = a - b.$$

$$\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b;$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} (v_n \neq 0, b \neq 0).$$

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

III. TỔNG CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

Cấp số nhân vô hạn $u_1, u_1q, \dots, u_1q^{n-1}, \dots$ có công bội q thoả mãn $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đã cho là: $S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots = \frac{u_1}{1-q}$.

IV. GIỚI HẠN VÔ CỰC

-Ta có định nghĩa về dãy số có giới hạn vô cực như sau:

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ hay $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

-Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ hay $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Nhận xét

$\lim n^k = +\infty$ với k là số nguyên dương cho trước.

$\lim q^n = +\infty$ với $q > 1$ là số thực cho trước.

Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = +\infty$ (hoặc $\lim v_n = -\infty$) thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Nếu $\lim u_n = a, a > 0$ và $\lim v_n = 0, v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

$\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim (-u_n) = -\infty$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Giới hạn hữu tỉ

1. Phương pháp

Để tính giới hạn của dãy số dạng phân thức, ta chia cả tử thức và mẫu thức cho lũy thừa cao nhất của n^k , với k là bậc cao nhất ở mẫu, rồi áp dụng các quy tắc tính giới hạn.

Chú ý : Cho $P(n), Q(n)$ lần lượt là các đa thức bậc m, k theo biến n :

$$P(x) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0 \quad (a_m \neq 0)$$

$$Q(n) = b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0 \quad (b_k \neq 0)$$

Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m}{b_k n^k}$, viết tắt $\frac{P(n)}{Q(n)} \sim \frac{a_m n^m}{b_k n^k}$, ta có các trường hợp sau :

Nếu « bậc tử » < « bậc mẫu » ($m < k$) thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$.

Nếu « bậc tử » = « bậc mẫu » ($m = k$) thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_m}{b_k}$.

Nếu « bậc tử » > « bậc mẫu » ($m > k$) thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a_m b_k > 0 \\ -\infty & \text{khi } a_m b_k < 0 \end{cases}$.

Đề ý rằng nếu $P(n), Q(n)$ có chứa « căn » thì ta vẫn tính được bậc của nó.

Cụ thể $\sqrt[m]{n^k}$ thì có bậc là $\frac{k}{m}$. Ví dụ $\sqrt{n}$ có bậc là $\frac{1}{2}$, $\sqrt[3]{n^4}$ có bậc là $\frac{4}{3}$,...

Trong các bài sau ta có thể dùng dấu hiệu trên để chỉ ra kết quả một cách nhanh chóng !

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 5n^2 + 1}{2n^3 + 6n^2 + 4n + 5}$.

Giải

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 5n^2 + 1}{2n^3 + 6n^2 + 4n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}}{2 + \frac{6}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{5}{n^3}} = \frac{3}{2}$$

Ví dụ 2: Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2n^2}{n^3 + 3n - 1}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2n^2}{n^3 + 3n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » < « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Ví dụ 3: Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^7 + n^2}{n^3 + 3n - 1}$

Lời giải

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^7 + n^2}{n^3 + 3n - 1} \approx \frac{n^7}{n^3} = n^4 = +\infty$$

Ví dụ 4: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giá trị của b bằng bao nhiêu

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+b}{5n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{b}{n}}{5+\frac{3}{n}} = \frac{2}{5} \quad (\forall b \in \mathbb{R})$$

$$\text{Giải nhanh : } \frac{2n+b}{5n+3} \sim \frac{2n}{5n} = \frac{2}{5} \text{ với mọi } b \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 5: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a bằng bao nhiêu

Lời giải

$$2 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{a + \frac{5}{n^2}} = \frac{4}{a} \quad (a \neq 0) \Leftrightarrow a = 2.$$

$$\text{Giải nhanh : } 2 \sim \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5} \sim \frac{4n^2}{an^2} = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a = 2.$$

Ví dụ 6: Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2n)(2n^3 + 1)(4n + 5)}{(n^4 - 3n - 1)(3n^2 - 7)}$.

Lời giải

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2n)(2n^3 + 1)(4n + 5)}{(n^4 - 3n - 1)(3n^2 - 7)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n^3}\right)\left(4 + \frac{5}{n}\right)}{\left(1 - \frac{3}{n^3} - \frac{1}{n^4}\right)\left(3 - \frac{7}{n^2}\right)} = \frac{1.2.4}{1.3} = \frac{8}{3}.$$

$$\text{Giải nhanh: } \frac{(n^2 + 2n)(2n^3 + 1)(4n + 5)}{(n^4 - 3n - 1)(3n^2 - 7)} \sim \frac{n^2 \cdot 2n^3 \cdot 4n}{n^4 \cdot 3n^2} = \frac{8}{3}.$$

Dạng 2. Dãy số chứa căn thức

1. Phương pháp

- Nếu biểu thức chứa căn thức cần nhân một lượng liên hiệp để đưa về dạng cơ bản.

$$\begin{array}{ll} A-B & \text{lượng liên hiệp là: } A+B \\ \sqrt{A}-\sqrt{B} & \text{lượng liên hiệp là: } \sqrt{A}+\sqrt{B} \\ \sqrt{A}-\sqrt{B} & \text{lượng liên hiệp là: } \sqrt{A}+\sqrt{B} \\ \sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B} & \text{lượng liên hiệp là: } \left(\sqrt[3]{A^2}+B\sqrt[3]{A}+B^2 \right) \\ \sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B} & \text{lượng liên hiệp là: } \left(\sqrt[3]{A^2}-B\sqrt[3]{A}+B^2 \right) \end{array}$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Tính $\lim \left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+5} \right)$

Giải

$$\lim \left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+5} \right) = \lim \frac{n^2+7-n^2-5}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+5}} = \lim \frac{2}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+5}} = 0$$

Ví dụ 2. Tính $\lim \left(\sqrt{n^2-n+1}-n \right)$

Lời giải

. $\sqrt{n^2-n+1}-n \sim \sqrt{n^2}-n=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \left(\sqrt{n^2-n+1}-n \right) = \lim \frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n} = \lim \frac{-1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = -\frac{1}{2}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-n+1}-n = \frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n} \sim \frac{-n}{\sqrt{n^2}+n} = -\frac{1}{2}.$

Ví dụ 3. Tính $\lim \left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n \right)$

Lời giải

$\sqrt[3]{n^2-n^3}+n \sim \sqrt[3]{-n^3}+n=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n \right) = \lim \frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^2-n^3)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2} = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1}{n}-1}+1} = \frac{1}{3}.$$

Giải nhanh : $\sqrt[3]{n^2-n^3}+n = \frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^2-n^3)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2} \sim \frac{n^2}{\sqrt[3]{n^6}-n\sqrt[3]{-n^3}+n^2} = \frac{1}{3}.$

Ví dụ 4. Tính $\lim \left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \right]$

Lời giải

$\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \sim \sqrt{n}(\sqrt{n}-\sqrt{n})=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2}.$

Dạng 3. Tính giới hạn của dãy số chứa hàm mũ

1. Phương pháp

Trong tính giới hạn $\lim \frac{u_n}{v_n}$ mà $u_n; v_n$ là hàm số mũ thì chia cả tử và mẫu cho a^n với a là cơ số lớn nhất. Sau đó sử dụng công thức: $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim \frac{3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n}$

Lời giải

$$\text{Giải nhanh : } \frac{3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n} \sim \frac{-2 \cdot 5^{n+1}}{5^n} = -10$$

$$\text{Cụ thể : } \lim \frac{3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n} = \lim \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 10}{2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} = -10.$$

Ví dụ 2: Tính $\lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n}$

Lời giải

$$\text{Giải nhanh : } \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} \sim \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \longrightarrow 0.$$

$$\text{Cụ thể : } \lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} = \lim \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n}{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Ví dụ 3: Tính $\lim \frac{(-1)^n 2^{5n+1}}{3^{5n+2}}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\text{Ta có: } \lim \frac{(-1)^n 2^{5n+1}}{3^{5n+2}} = \lim (-1)^n \cdot \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Cách 2: Mẹo giải nhanh

$$\frac{(-1)^n 2^{5n+1}}{3^{5n+2}} \sim (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5n} = 0.$$

Ví dụ 4: Tính $\lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\text{Ta có: } \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4 \cdot 2 \left(\frac{2}{4}\right)^n - \frac{3}{n^4}}{3 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^n + 1} \quad (\text{chia tử và mẫu cho } n^4).$$

$$\text{Suy ra } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} = \frac{0}{1} = 0.$$

Cách 2: Mẹo giải nhanh

$$\frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} \sim \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.$$

Ví dụ 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc $(0;20)$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 + \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} - \frac{1}{2^n}}$ là một số nguyên.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2} + 1} = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 + \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} - \frac{1}{2^n}} = \sqrt{3 + a}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a \in (0;20), a \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{a+3} \in \mathbb{Z} \end{cases} \longrightarrow a \in \{1;6;13\}.$$

Dạng 4. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

1. Phương pháp

Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn và có công bội là $|q| < 1$.

✓ Tổng các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn (u_n)

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}$$

✓ Mọi số thập phân đều được biểu diễn dưới dạng lũy thừa của 10

$$X = N, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots = N + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots$

Lời giải

Theo đề cho ta có: $u_1 = 1, q = -\frac{1}{2}$.

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 2: Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 0,212121...$ (chu kỳ là 21). Tìm a dưới dạng phân số.

Lời giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

Ta có: $a = 0,212121...$

$$= 0,21 + 0,0021 + 0,000021 + ...$$

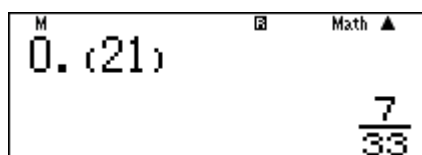
$$= 21 \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + ... \right)$$

Tổng $S = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + ...$ là tổng cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \frac{1}{10^2}$, $q = \frac{1}{10^2}$.

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{1}{99}. \text{ Do đó } A = 21 \cdot \frac{1}{99} = \frac{7}{33}.$$

Cách 3: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $0,(21)$ và ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả $\frac{7}{33}$.



Ví dụ 3: Tổng $S_n = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + (0,9)^3 + ... + (0,9)^{n-1} + ...$ có kết quả bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

$$S = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + (0,9)^3 + ... + (0,9)^{n-1} + ...$$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = 1$, $q = 0,9$.

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-0,9} = 10.$$

Ví dụ 4: Cho $S = 1 + q + q^2 + q^3 + ..., |q| < 1$

$$T = 1 + Q + Q^2 + Q^3 + ..., |Q| < 1$$

$$E = 1 + qQ + q^2Q^2 + q^3Q^3 + ...$$

Biểu thị biểu thức E theo S, T

Hướng dẫn giải

- $S = 1 + q + q^2 + q^3 + ..., |q| < 1$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn, có $u_1 = 1$, $q = q$.

Khi đó: $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-q} \Rightarrow q = \frac{S-1}{S}$. (1)

• Tương tự: $T = \frac{1}{1-Q} \Rightarrow Q = \frac{T-1}{T}$. (2)

• $E = 1 + q.Q + q^2.Q^2 + q^3.Q^3 + \dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội qQ (vì $|qQ| < 1$, và $u_1 = 1$).

$$E = \frac{u_1}{1-qQ} \quad (3)$$

Thay (1), (2) vào (3): $E = \frac{u_1}{1 - \frac{T-1}{T} \cdot \frac{S-1}{S}} \Rightarrow E = \frac{ST}{S+T-1}$.

Ví dụ 5: Tìm số hạng U_1 của cấp số nhân lùi vô hạn, biết $S = 4$; $q = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $S = \frac{u_1}{1-q} \left(|q| < 1 \right) \Rightarrow 4 = \frac{u_1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow u_1 = 2$.

Ví dụ 6: Tìm công bội của cấp số nhân lùi vô hạn, biết $S = -6$; $U_1 = -3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $S = \frac{u_1}{1-q} \left(|q| < 1 \right) \Rightarrow -6 = \frac{-3}{1-q} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$.

Dạng 5: Phương pháp sai phân và quy nạp tính giới hạn

1. Phương pháp

1) Dạng tổng các phân số.

Ví Dụ: $A = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

Ta phân tích: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. (1)

Để tính A ta thay k từ $2, 3, \dots, n$ vào biểu thức (1) ta tính dễ dàng

2) Dạng tích các phân số:

Ví dụ: $B = \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \dots, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

Ta phân tích: $\frac{k^2-1}{k^2} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k}{k+1}$. (2)

Để tính B ta thay k từ $2, 3, \dots, n$ vào biểu thức (2) ta tính dễ dàng

3) Dạng đa thức:

a) Mỗi đơn thức ở dạng tích:

Ví dụ: $C = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + 99.100.101$

Ta tách:

$$4k(k+1)(k+2):4 = k(k+1)(k+2)[(k+3)-(k-1)] \quad , k \geq 1, k \in N$$

$$= -(k-1)k(k+1)(k+2) + k(k+1)(k+2)(k+3):4 \quad (3)$$

Để tính C ta thay k từ : 1,2,3,..., 99 vào biểu thức (3) ta tính được dễ dàng

Ví dụ: $D = 3.5.7 + 5.7.9 + \dots + (2n+1)(2n+3)(2n+5), n \geq 1, n \in N$

Ta tách: $(2k+1)(2k+3)(2k+5) = (2k+1)(2k+3)(2k+5)[(2k+7)-(2k+1)]:8$

$$= ((2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7) - (2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)):8 \quad (4)$$

Để tính D ta thay k từ : 1,2,3,...,n vào biểu thức (4) ta tính dễ dàng

4) Đơn thức dạng lũy thừa

Ví Dụ: Tính $E = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3, \quad n \in N, n \geq 1$

Ta dùng hằng đẳng thức : $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$

$$x=1 \quad 2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$x=2 \quad 3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$

...

$$x=n \quad (n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

Cộng vế theo vế

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3E + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

$$3E = n^3 + 3n^2 + 3n - \left(\frac{3 \cdot n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ngoài ra ta có thể dự đoán được số hạng tổng quát, có thể kết hợp quy nạp để khẳng định.

Có thể dùng vòng lặp MTCT để giải quyết các bài toán này.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$. Tính $\lim u_n$

Lời giải

Ta luôn có: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ áp dụng vào u_n :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Do đó: $\lim u_n = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$

Ví dụ 2: Cho $u_n = \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Tính $\lim u_n$

Lời giải

Ta luôn có: $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \lim u_n = \lim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{6}.$$

Ví dụ 3: $\lim \frac{1+2+3+\dots+n}{2n^2}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Vì } 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ nên: } \lim \frac{1+2+3+\dots+n}{2n^2} = \lim \frac{n(n+1)}{4n^2} = \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 4: Tính giới hạn: $\lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right]$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } &\left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \dots \frac{n^2-1}{n^2} \\ &= \frac{(2+1) \cdot (2-1) \cdot (3+1) \cdot (3-1) \dots (n+1) \cdot (n-1)}{2^2 \cdot 3^2 \dots n^2} = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 5: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{2}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Lời giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

Ta chứng minh dãy (U_n) là bị chặn: $1 < U_n \leq 2$.

Dãy (U_n) là dãy giảm.

$$\text{Thật vậy ta xét } U_{k+1} < U_k \Leftrightarrow \frac{U_k + 1}{2} < U_k \Leftrightarrow 2U_k > U_k + 1 \Leftrightarrow U_k > 1 \text{ (đúng).}$$

Vậy dãy (U_n) có giới hạn. Đặt $\lim U_n = a$.

Ta có: $\lim(U_{n+1}) = \lim\left(\frac{U_n + 1}{2}\right)$ hay $a = \frac{a+1}{2} \Leftrightarrow a = 1$.

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Khai báo: $1 \rightarrow X$ {biến đếm}; $2 \rightarrow A$ {giá trị u_1 }

Ghi vào màn hình: $X = X + 1 : A = \frac{A+1}{2}$

Ấn **CALC** và lặp lại phím **=**, quan sát ta thấy dãy giảm và bị chặn dưới bởi 1. Vậy $\lim U_n = 1$.

Ví dụ 6: Tìm giới hạn của dãy:
$$\begin{cases} U_1 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Lời giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

Ta sẽ chứng minh dãy bị chặn: $\sqrt{2} \leq U_n < 2$ (bằng phương pháp quy nạp).

- $U_1 = \sqrt{2}$ (đúng).
- Giả sử $U_k \geq \sqrt{2}, \forall k \geq 1$.

Ta có: $U_{k+1} = \sqrt{2 + U_k} \geq \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} (\forall k \geq 1)$.

Vậy $U_k \geq \sqrt{2} \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tương tự: $U_n < 2 \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh dãy (U_n) là dãy tăng (bằng phương pháp quy nạp).

+ $U_1 = \sqrt{2}; U_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \Rightarrow U_1 < U_2$.

+ Giả sử $U_{k-1} < U_k \forall k \geq 2$. Ta xét $U_k < U_{k+1}; \forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\Leftrightarrow U_k < \sqrt{2 + U_k} \Leftrightarrow U_k^2 < 2 + U_k \Leftrightarrow U_k^2 - U_k - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 < U_k < 2 \text{ (luôn đúng vì } \sqrt{2} < U_k < 2, \forall k \in \mathbb{N}^*)$$

Vậy dãy (U_n) tăng; bị chặn trên nên có giới hạn, gọi $a = \lim U_n = \lim U_{n+1}$.

Ta có: $\lim U_n = \sqrt{2 + \lim U_n} \Leftrightarrow a = \sqrt{2 + a} \Leftrightarrow a^2 = 2 + a$

$$\Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \text{ (nhận)} \\ a = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Khai báo: $1 \rightarrow X$ {biến đếm}; $\sqrt{2} \rightarrow A$ {giá trị u_1 }

Ghi vào màn hình: $X = X + 1 : A = \sqrt{2 + A}$

Ấn **CALC** và lặp lại phím **=**, quan sát ta thấy dãy tăng và bị chặn dưới bởi 2. Vậy $\lim U_n = 2$.

Ví dụ 7: Tìm giới hạn của dãy:
$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{3}{U_n} \right); n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Lời giải

Ta có: $U_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có: $U_{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{3}{U_n} \right) \geq \sqrt{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy (U_n) là dãy bị chặn dưới.

$$\begin{aligned} \text{Vì } U_n \geq \sqrt{3} \Rightarrow U_n^2 \geq 3 \Rightarrow U_{n+1} &= \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{3}{U_n} \right) \leq \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{U_n^2}{U_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} (U_n + U_n) = U_n, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Dãy đã cho là giảm. Vậy dãy có giới hạn. Đặt $\lim U_{n+1} = \lim U_n = a$.

$$\text{Ta có: } \lim U_n = \lim \left[\frac{1}{2} \left(U_n + \frac{3}{U_n} \right) \right]$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{3}{a} \right) \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}.$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ với $u_n = 3 + \frac{1}{n}; v_n = 5 - \frac{2}{n^2}$. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim u_n, \lim v_n$.

b) $\lim(u_n + v_n), \lim(u_n - v_n), \lim(u_n \cdot v_n), \lim \frac{u_n}{v_n}$

Lời giải

a) Ta có: $\lim u_n = \lim \left(3 + \frac{1}{n} \right) = \lim 3 + \lim \frac{1}{n} = 3 + 0 = 3.$

$$\lim v_n = \lim \left(5 - \frac{2}{n^2} \right) = \lim 5 - \lim \frac{2}{n^2} = 5 - 0 = 5.$$

b)

$$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = 3 + 5 = 8$$

$$\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n = 3 - 5 = -2$$

$$\lim(u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n = 3 \cdot 5 = 15$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n} = \frac{3}{5}$$

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{5n+1}{2n};$

b) $\lim \frac{6n^2+8n+1}{5n^2+3};$

c) $\lim \frac{\sqrt{n^2+5n+3}}{6n+2};$

d) $\lim \left(2 - \frac{1}{3^n} \right);$

$$\text{e) } \lim \frac{3^n + 2^n}{4 \cdot 3^n}; \quad \text{g) } \lim \frac{2 + \frac{1}{n}}{3^n}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim \frac{5n+1}{2n} &= \lim \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \lim \frac{5}{2} + \lim \frac{1}{2n} = \frac{5}{2}. \\ \text{b) } \lim \frac{6n^2+8n+1}{5n^2+3} &= \lim \frac{6+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{3}{n^2}} = \frac{\lim \left(6+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2} \right)}{\lim \left(5+\frac{3}{n^2} \right)} = \frac{6}{5}. \\ \text{c) } \lim \frac{\sqrt{n^2+5n+3}}{6n+2} &= \lim \frac{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}}{6+\frac{2}{n}} = \frac{\lim \sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}}{\lim \left(6+\frac{2}{n} \right)} = \frac{1}{6}. \\ \text{d) } \lim \left(2 - \frac{1}{3^n} \right) &= \lim 2 - \lim \left(\frac{1}{3} \right)^n = 2 - 0 = 2. \\ \text{e) } \lim \frac{3^n + 2^n}{4 \cdot 3^n} &= \lim \frac{1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n}{4} = \frac{\lim \left[1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right]}{\lim 4} = \frac{1}{4}. \\ \text{g) } \lim \frac{2 + \frac{1}{n}}{3^n} &= \frac{\lim \left(2 + \frac{1}{n} \right)}{\lim 3^n} = 0. \end{aligned}$$

Bài 3. a) Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) , với $u_1 = \frac{2}{3}, q = -\frac{1}{4}$.

b) Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $1,(6)$ dưới dạng phân số.

Lời giải

a) Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn u_n , với $u_1 = \frac{2}{3}, q = -\frac{1}{4}$ là:

$$S = \lim \frac{\frac{2}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^n \right]}{1 - \left(-\frac{1}{4} \right)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{8}{15}.$$

b) Ta có:

$$1,(6) = 1 + 0,(6) = 1 + 0,6 + 0,06 + 0,006 + \dots + 0,000006 + \dots$$

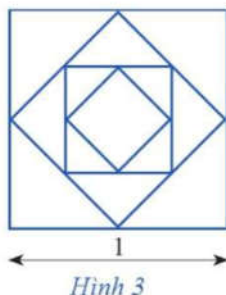
Dãy số 0,6; 0,006; 0,0006; ... lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 0,6$ và công bội

$q = \frac{1}{10}$ có $|q| < 1$ nên ta có:

$$0,6 + 0,06 + 0,006 + \dots + 0,000006 + \dots = \frac{0,6}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{2}{3}.$$

Suy ra $1, (6) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

Bài 4. Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như *Hình 3*.



Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.

- Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành ở bước thứ n ;
- Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

Lời giải

- Gọi S_n là diện tích của hình vuông thứ n .

Ta có: $S_1 = 1; S_2 = \frac{1}{2}; S_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2; \dots$

Dãy (S_n) lập thành cấp số nhân có số hạng đầu $S_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ có công thức tổng quát

là: $S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

- Ta có: $|q| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1$ nên dãy (S_n) trên lập thành một cấp số nhân lùi hạn nên ta có:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Vậy tổng diện tích của các hình vuông là 2 (đvdt).

Bài 5. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất

phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là chu kỳ

bán rã).

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021)

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kỳ thứ n .

- Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n) .
- Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.
- Từ kết quả câu b), chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban

đầu không còn độc hại đối với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

Lời giải

a) Ta có: $u_1 = 1; u_2 = \frac{1}{2}; u_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2; \dots$

Suy ra (u_n) lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$ và $q = \frac{1}{2}$ có số hạng tổng quát là:

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

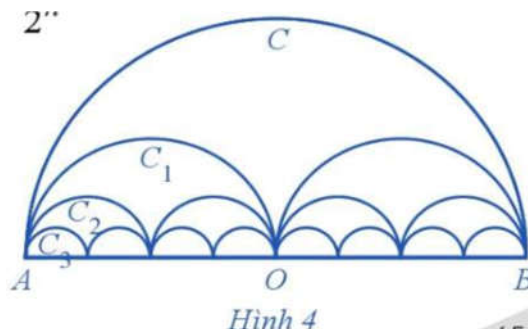
b) Ta có: $\lim u_n = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0.$

c) Đổi $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ kg} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 10^3 \text{ g}$

Để chất phóng xạ bé hơn 10^{-6} (g) thì $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 10^3 < 10^{-6} \Leftrightarrow n > 31.$

Vậy cần ít nhất 30 chu kì tương ứng với 720000 năm khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người.

Bài 6. Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$, C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{4}$, ..., C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}$, ... (Hình 4).



Gọi p_n là độ dài của C_n , S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB .

a) Tính p_n, S_n .

b) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .

Lời giải

+) Ta có: $p_1 = \frac{\pi R}{2}; p_2 = \frac{\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2^2}; p_3 = \frac{\pi R}{8} = \frac{\pi R}{2^3}; \dots$

(p_n) lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $p_1 = \frac{\pi R}{2}$ và công bội $q = \frac{1}{2} < 1$ có số

hạng tổng quát $p_n = \frac{\pi R}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

+) Ta có: $C_1 = \frac{\pi R^2}{4}; C_2 = \frac{\pi R^2}{4^2}; C_3 = \frac{\pi R^3}{4^3}; \dots$

(C_n) lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $C_1 = \frac{\pi R^2}{4}$ và công bội $q = \frac{1}{4} < 1$ có số

hạng tổng quát $C_n = \frac{\pi R}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{4n^2 - 2n + 1}$ là:

A. $-\frac{3}{4}$.

B. $-\infty$.

C. 0.

D. -1.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{4n^2 - 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-3}{n^2}}{4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{4} = 0.$$

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » < « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 2n + 1}{4n^4 + 2n + 1}$ là:

A. $+\infty$.

B. 0.

C. $\frac{2}{7}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 2n + 1}{4n^4 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{4 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}} = \frac{0}{4} = 0.$$

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » < « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 3: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \frac{1}{n+1}$ và $v_n = \frac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n}$ có giá trị bằng:

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{1} = 1.$

Giải nhanh : $\frac{n+1}{n+2} \sim \frac{n}{n} = 1.$

Câu 4: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là:

A. $a = 10.$

B. $a = 8.$

C. $a = 6.$

D. $a = 4.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+4}{5n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+\frac{4}{n}}{5+\frac{3}{n}} = \frac{a}{5}.$ Khi đó

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{5} = 2 \Leftrightarrow a = 10$

Giải nhanh : $2 \sim \frac{an+4}{5n+3} \sim \frac{an}{5n} = \frac{a}{5} \Leftrightarrow a = 10.$

Câu 5: Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+5}{2n^2+1}.$

A. $L = \frac{3}{2}.$

B. $L = \frac{1}{2}.$

C. $L = 2.$

D. $L = 1.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+5}{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$

Giải nhanh: $\frac{n^2+n+5}{2n^2+1} \sim \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}.$

Câu 6: Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}.$

A. $L = -\frac{3}{2}.$

B. $L = \frac{1}{5}.$

C. $L = \frac{1}{2}.$

D. $L = 0.$

Lời giải

Chọn A

$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}-3}{2+\frac{5}{n^2}-\frac{2}{n^3}} = \frac{-3}{2}$

Giải nhanh: $\frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2} \sim \frac{-3n^3}{2n^3} = -\frac{3}{2}.$

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 3an^4}{(1-a)n^4 + 2n + 1} > 0$.

A. $a \leq 0; a \geq 1$.

B. $0 < a < 1$.

C. $a < 0; a > 1$.

D. $0 \leq a < 1$.

Lời giải

Chọn C

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 3an^4}{(1-a)n^4 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n^2} - 3a}{(1-a) + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}} = \frac{-3a}{(1-a)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > 1 \end{cases}$$

Câu 8: Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n - n^3)(3n^2 + 1)}{(2n - 1)(n^4 - 7)}$.

A. $L = -\frac{3}{2}$.

B. $L = 1$.

C. $L = 3$.

D. $L = +\infty$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n - n^3)(3n^2 + 1)}{(2n - 1)(n^4 - 7)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{2}{n^2} - 1 \right) \cdot n^2 \left(3 + \frac{1}{n^2} \right)}{n \left(2 - \frac{1}{n} \right) \cdot n^4 \left(1 - \frac{7}{n^4} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{n^2} - 1 \right) \left(3 + \frac{1}{n^2} \right)}{\left(2 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{7}{n^4} \right)} = \frac{-1.3}{2.1} = -\frac{3}{2}$$

Giải nhanh: $\frac{(2n - n^3)(3n^2 + 1)}{(2n - 1)(n^4 - 7)} \sim \frac{-n^3 \cdot 3n^2}{2n \cdot n^4} = -\frac{3}{2}$.

Câu 9: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2}$ là:

A. $-\frac{1}{3}$.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 - \frac{2}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{1}{n^2} - 3 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 3}. \text{ Ta có}$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 3} = -\frac{1}{3} < 0 \end{cases} \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 3} = -\infty$$

Giải nhanh : $\frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2} \sim \frac{n^3}{-3n^2} = -\frac{1}{3}n \longrightarrow -\infty$.

Câu 10: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3n^3}{4n^2 + 2n + 1}$ là:

A. $\frac{3}{4}$.

B. $+\infty$.

C. 0

D. $\frac{5}{7}$.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{2}{n^2} + 3 \right)}{n^2 \left(4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\frac{2}{n^2} + 3}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}. \text{ Ta có}$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2} + 3}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{4} > 0 \end{cases} \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\frac{2}{n^2} + 3}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = +\infty.$$

Giải nhanh : $\frac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1} \sim \frac{3n^3}{4n^2} = \frac{3}{4}n \longrightarrow +\infty.$

Câu 11: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-n^4}{4n-5}$ là:

- A. 0. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-n^4}{4n-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left(\frac{3}{n^3} - 1 \right)}{n \left(4 - \frac{5}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \cdot \frac{\frac{3}{n^3} - 1}{4 - \frac{5}{n}}. \text{ Ta có}$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n^3} - 1}{4 - \frac{5}{n}} = -\frac{1}{4} < 0 \end{cases} \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-n^4}{4n-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \cdot \frac{\frac{3}{n^3} - 1}{4 - \frac{5}{n}} = -\infty.$$

Giải nhanh : $\frac{3n-n^4}{4n-5} \sim \frac{-n^4}{4n} = -\frac{1}{4}n^3 \longrightarrow -\infty.$

Câu 12: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

- A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2n^3}{2n^2-1}$. B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3}{-2n^3-4}$. C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3n^3}{-2n^2-1}$. D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2}$.

Lời giải

Chọn B

. Theo dấu hiệu ở đã nêu ở phần **Chú ý** trên thì ta chọn giới hạn nào rơi vào trường hợp « bậc tử » < « bậc mẫu » !

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2n^3}{2n^2-1} = +\infty : \text{ « bậc tử » } > \text{ « bậc mẫu » và } a_n b_k = 2.2 = 4 > 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3}{-2n^3-4} = 0 : \text{ « bậc tử » } < \text{ « bậc mẫu »}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3n^3}{-2n^2-1} = +\infty : \text{ « bậc tử » } > \text{ « bậc mẫu » và } a_n b_k = (-3).(-2) > 0.$$

$$\lim \frac{2n^2 - 3n^4}{-2n^4 + n^2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} : \text{ « bậc tử » } = \text{ « bậc mẫu » } \text{ và } \frac{a_m}{b_k} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

Câu 13: Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

A. $\frac{1+2n}{5n+5n^2}$. B. $u_n = \frac{n^3+2n-1}{-n+2n^3}$. C. $u_n = \frac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}$. D. $u_n = \frac{n^2-2n}{5n+1}$.

Lời giải

Chọn C

Ta chọn đáp án dạng « bậc tử » = « bậc mẫu » và $a_m b_k < 0$.

$$u_n = \frac{2n^2 - 3n^4}{n^2 + 2n^3} : \text{ « bậc tử » } > \text{ « bậc mẫu » } \text{ và } a_m b_k = -3.2 = -6 < 0 \longrightarrow \lim u_n = -\infty.$$

Chú ý : (i) $\lim (a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0) = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a_m > 0 \\ -\infty & \text{khi } a_m < 0 \end{cases}$

(ii) Giả sử $|q| > \max \{|q_i| : i = 1; 2; \dots; m\}$ thì

$$\lim (a \cdot q^n + a_m q_m^n + \dots + a_1 q_1^n + a_0) = \begin{cases} a_0 & \text{khi } |q| < 1 \\ +\infty & \text{khi } a > 0, q > 1. \\ -\infty & \text{khi } a < 0, q > 1 \end{cases}$$

Ta dùng « dấu hiệu nhanh » này để đưa ra kết quả nhanh chóng cho các bài sau.

Câu 14: Tính giới hạn $L = \lim (3n^2 + 5n - 3)$.

A. $L = 3$. B. $L = -\infty$. C. $L = 5$. D. $L = +\infty$.

Lời giải

Chọn D

$$L = \lim (3n^2 + 5n - 3) = \lim n^2 \left(2 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2} \right) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim n^2 = +\infty \\ \lim \left(2 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2} \right) = 2 > 0 \end{cases}$$

Giải nhanh : $3n^2 + 5n - 3 \sim 3n^2 \longrightarrow +\infty$.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10; 10)$ để

$$L = \lim (5n - 3(a^2 - 2)n^3) = -\infty.$$

A. 17. B. 3. C. 5. D. 10.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim (5n - 3(a^2 - 2)n^3) = \lim n^3 \left(\frac{5}{n^2} - 3(a^2 - 2) \right) = -\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim \left(\frac{5}{n^2} - 3(a^2 - 2) \right) = a^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < -\sqrt{2} \\ a > \sqrt{2} \end{cases}$$

Câu 16: Tính giới hạn $\lim(3n^4 + 4n^2 - n + 1)$.

- A. $L = 7$. B. $L = -\infty$. C. $L = 3$. D. $L = +\infty$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\lim(3n^4 + 4n^2 - n + 1) = \lim n^4 \left(3 + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} \right) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim n^4 = +\infty \\ \lim \left(3 + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} \right) = 3 > 0 \end{cases}$$

Giải nhanh : $3n^4 + 4n^2 - n + 1 \sim 3n^4 \longrightarrow +\infty$.

Câu 17: Giá trị của giới hạn $\lim(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})$ bằng:

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 5.

Lời giải

Chọn A

$\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1} \sim \sqrt{n} - \sqrt{n} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1}) = \lim \frac{4}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+1}} = 0$$

Câu 18: Giá trị của giới hạn $\lim(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{3n^2+2})$ là:

- A. -2. B. 0. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

$$\lim(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{3n^2+2}) = \lim n \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - \sqrt{3 + \frac{2}{n^2}} \right) = -\infty \text{ vì}$$

$$\lim n = +\infty, \lim \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - \sqrt{3 + \frac{2}{n^2}} \right) = 1 - \sqrt{3} < 0.$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-1} - \sqrt{3n^2+2} \sim \sqrt{n^2} - \sqrt{3n^2} = (1 - \sqrt{3})n \longrightarrow -\infty$.

Câu 19: Giá trị của giới hạn $\lim(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n})$ là:

- A. 1. B. 2. C. 4. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n} \sim \sqrt{n^2} - \sqrt{n^2} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n}) = \lim \frac{4n}{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-2n}} = \lim \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{2}{n}}} = 2.$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n} = \frac{4n}{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-2n}} \sim \frac{4n}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = 2.$

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1})=0$.

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1} \sim \sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}) &= \lim \frac{(a^2-a-2)n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} \\ &= \lim \frac{a^2-a-2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{a^2-a-2}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Câu 21: Giá trị của giới hạn $\lim(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2})$ là:

- A. 0. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2} \sim \sqrt{2n^2}-\sqrt{2n^2}=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\begin{aligned} \lim(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}) &= \lim \frac{2n-1}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}} \\ &= \lim \frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Giải nhanh :

$$\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2} = \frac{2n-1}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}} \sim \frac{2n}{\sqrt{2n^2}+\sqrt{2n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 22: Giá trị của giới hạn $\lim(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n})$ là:

- A. -1. B. $1-\sqrt{2}$. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

Giải nhanh : $\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n} \sim \sqrt{n^2}-\sqrt{2n^2} = (1-\sqrt{2})n \longrightarrow -\infty$.

Cụ thể : $\lim(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}) = \lim n \left(\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}} - \sqrt{2+\frac{1}{n}} \right) = -\infty$ vì

$$\lim n = +\infty, \lim \left(\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}} - \sqrt{2+\frac{1}{n}} \right) = 1-\sqrt{2} < 0$$

Câu 23: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim(\sqrt{n^2-8n-n+a^2})=0$.

- A. 0. B. 2. C. 1. D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Nếu $\sqrt{n^2 - 8n - n + a^2} \sim \sqrt{n^2} - n = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim(\sqrt{n^2 - 8n - n + a^2}) &= \lim \frac{(2a^2 - 8)n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim \frac{2a^2 - 8}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \\ &= a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2. \end{aligned}$$

Câu 24: Giá trị của giới hạn $\lim(\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n)$ là:

- A.** -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

$\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n \sim \sqrt{n^2} - n = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim(\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n) = \lim \frac{-2n + 3}{\sqrt{n^2 - 2n + 3} + n} = \lim \frac{-2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1} = -1$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n = \frac{-2n + 3}{\sqrt{n^2 - 2n + 3} + n} \sim \frac{-2n}{\sqrt{n^2} + n} = -1$.

Câu 25: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n = -1$.

- A.** 3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -3.

Lời giải

Chọn C

$\sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1} \sim \sqrt{n^2} - \sqrt{n^2} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\begin{aligned} -1 &= \lim u_n = \lim(\sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1}) = \lim \frac{an + 4}{\sqrt{n^2 + an + 5} + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \lim \frac{a + \frac{4}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = -2. \end{aligned}$$

Giải nhanh :

$$-1 \sim \sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{an + 4}{\sqrt{n^2 + an + 5} + \sqrt{n^2 + 1}} \sim \frac{an}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = -2.$$

Câu 26: Giá trị của giới hạn $\lim(\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 2})$ bằng:

- A.** 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

$\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2} \sim \sqrt[3]{n^3}-\sqrt[3]{n^3}=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}) = \lim \frac{-1}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2} + \sqrt[3]{n^3+1}\sqrt[3]{n^3+2} + \sqrt[3]{(n^3+2)^2}} = 0.$$

Câu 27: Giá trị của giới hạn $\lim(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n)$ bằng:

- A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n \sim \sqrt[3]{n^3}-n=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n) = \lim \frac{-2n^2}{\sqrt[3]{(n^3-2n^2)^2} + n\sqrt[3]{n^3-2n^2} + n^2} = \lim \frac{-2}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}} + \sqrt[3]{1-\frac{2}{n}} + 1} = -\frac{2}{3}.$$

Giải nhanh : $\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n = \frac{-2n^2}{\sqrt[3]{(n^3-2n^2)^2} + n\sqrt[3]{n^3-2n^2} + n^2} \sim \frac{-2n^2}{\sqrt[3]{n^6} + n\sqrt[3]{n^3} + n^2} = -\frac{2}{3}.$

Câu 28: Giá trị của giới hạn $\lim[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})]$ là:

- A. -1. B. $+\infty$. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

$\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) \sim \sqrt{n}(\sqrt{n}-\sqrt{n})=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = \lim \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = 1$$

Giải nhanh : $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \sim \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = 1.$

Câu 29: Giá trị của giới hạn $\lim[n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3})]$ bằng:

- A. -1. B. 2. C. 4. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}) \sim n(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2})=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}) = \lim \frac{4n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3}} = \lim \frac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}} = 2$$

Giải nhanh : $n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}) = \frac{4n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3}} \sim \frac{4n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} = 2.$

Câu 30: Giá trị của giới hạn $\lim[n(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6})]$ là:

A. $\sqrt{7}-1$.

B. 3.

C. $\frac{7}{2}$.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

$n(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}) \sim n(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2})=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\begin{aligned}\lim n(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}) &= \lim \frac{7n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-6}} \\ &= \lim \frac{7}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{6}{n^2}}} = \frac{7}{2}.\end{aligned}$$

Giải nhanh : $n(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}) = \frac{7n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-6}} \sim \frac{7n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} = \frac{7}{2}$.

Câu 31: Giá trị của giới hạn $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$ là:

A. 1.

B. 0.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

$\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4} \sim \sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}} = \lim -\frac{1}{2}(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}) = \lim n \cdot \left[-\frac{1}{2} \left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{4}{n^2}} \right) \right] = -\infty$$

$$\text{vì } \lim n = +\infty, \lim \left[-\frac{1}{2} \left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{4}{n^2}} \right) \right] = -1 < 0$$

Giải nhanh :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}} = -\frac{1}{2}(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}) \sim -\frac{1}{2}(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}) = -n \longrightarrow -\infty.$$

Câu 32: Giá trị của giới hạn $\lim \frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}$ là:

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

$\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2} \sim \sqrt{9n^2}=3n \neq 0 \longrightarrow$ giải nhanh :

$$\frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2} \sim \frac{\sqrt{9n^2}}{3n} = 1$$

$$\text{Cụ thể : } \lim \frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2} = \lim \frac{\sqrt{9-\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{9}}{3} = 1.$$

Câu 33: Giá trị của giới hạn $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}-n}$ là:

- A. 2. B. 0. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt[3]{n^3+1}-n \sim \sqrt[3]{n^3}-n=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim (\sqrt[3]{n^3+1}-n) = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2} + n\sqrt[3]{n^3+1} + n^2} = 0$$

Câu 34: Kết quả của giới hạn $\lim \frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}$ bằng:

- A. $-\frac{25}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. 1. D. $-\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Cụ thể : } \lim \frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n} = \lim \frac{2\left(\frac{1}{5}\right)^n - 25}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 2} = -\frac{25}{2}.$$

$$\text{Giải nhanh : } \frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n} \sim \frac{-5^{n+2}}{2.5^n} = -\frac{25}{2}$$

Câu 35: Kết quả của giới hạn $\lim \frac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}$ bằng:

- A. -1. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Giải nhanh : } \frac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1} \sim \frac{3^n}{-2.3^n} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Cụ thể : } \lim \frac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1} = \lim \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = -\frac{1}{2}.$$

Câu 36: Biết rằng $\lim \left(\frac{(\sqrt{5})^n - 2^{n+1} + 1}{5.2^n + (\sqrt{5})^{n+1} - 3} + \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1} \right) = \frac{a\sqrt{5}}{b} + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức

$$S = a^2 + b^2 + c^2.$$

- A. $S = 26$. B. $S = 30$. C. $S = 21$. D. $S = 31$.

Lời giải

Chọn B

$$\lim \left(\frac{(\sqrt{5})^n - 2^{n+1} + 1}{5 \cdot 2^n + (\sqrt{5})^{n+1} - 3} + \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1} \right) = \lim \left(\frac{1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}{5 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n + \sqrt{5} - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n} + \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 = \frac{\sqrt{5}}{5} + 2.$$

Giải nhanh :

$$\frac{(\sqrt{5})^n - 2^{n+1} + 1}{5 \cdot 2^n + (\sqrt{5})^{n+1} - 3} + \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1} \sim \frac{(\sqrt{5})^n}{(\sqrt{5})^{n+1}} + \frac{2n^2}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 = \frac{\sqrt{5}}{5} + 2 \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 2 \end{cases}$$

Vậy $S = 1^2 + 5^2 + 2^2 = 30$.

Câu 37: Kết quả của giới hạn $\lim \frac{\pi^n + 3^n + 2^{2n}}{3\pi^n - 3^n + 2^{2n+2}}$ là:

- A. 1. B. $\frac{1}{3}$. C. $+\infty$. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Giải nhanh: $\frac{\pi^n + 3^n + 2^{2n}}{3\pi^n - 3^n + 2^{2n+2}} = \frac{\pi^n + 3^n + 4^n}{3\pi^n - 3^n + 4 \cdot 4^n} \sim \frac{4^n}{4 \cdot 4^n} = \frac{1}{4}$

Cụ thể: $\lim \frac{\pi^n + 3^n + 2^{2n}}{3\pi^n - 3^n + 2^{2n+2}} = \lim \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}{3 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^n - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + 4} = \frac{1}{4}.$

Câu 38: Kết quả của giới hạn $\lim [3^n - \sqrt{5}^n]$ là:

- A. 3. B. $-\sqrt{5}$. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

Giải nhanh: Vì $3 > \sqrt{5}$ nên $3^n - \sqrt{5}^n \sim 3^n \longrightarrow +\infty$.

Cụ thể: $\lim [3^n - \sqrt{5}^n] = \lim 3^n \left[1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n \right] = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim 3^n = +\infty \\ \lim 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n = 1 > 0 \end{cases}$.

Câu 39: Kết quả của giới hạn $\lim (3^4 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n)$ là:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. B. -1. C. $-\infty$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Giải nhanh: $3^4 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n \sim -5 \cdot 3^n = -\infty$ ($-5 < 0$).

$$\text{Cụ thể : } \lim(3^4 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n) = \lim 3^n \left(162 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 5 \right) = -\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim 3^n = +\infty \\ \lim \left(162 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 5 \right) = -5 < 0 \end{cases}$$

Câu 40: Kết quả của giới hạn $\lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2n + 4^n}$ là:

- A. 0. B. 1. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Giải nhanh : } \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2n + 4^n} \sim \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \longrightarrow 0.$$

$$\text{Cụ thể : } 0 \leq \left| \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2n + 4^n} \right| \leq \frac{8 \cdot 3^{n+1}}{4^n} = 24 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0 \longrightarrow \lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2n + 4^n} = 0.$$

Câu 41: Kết quả của giới hạn $\lim \frac{2^{n+1} + 3n + 10}{3n^2 - n + 2}$ là:

- A. $+\infty$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \Rightarrow 2^n \geq C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \sim \frac{n^3}{6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{n}{2^n} \rightarrow 0 \\ \frac{2^n}{n^2} \rightarrow +\infty \end{cases} \text{ . Khi đó:}$$

$$\lim \frac{2^{n+1} + 3n + 10}{3n^2 - n + 2} = \lim \frac{2^n}{n^2} \cdot \frac{2 + 3 \cdot \frac{n}{2^n} + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim \frac{2^n}{n^2} = +\infty \\ \lim \frac{2 + 3 \cdot \frac{n}{2^n} + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{2}{3} > 0 \end{cases}.$$

Câu 42: Tìm tất cả giá trị nguyên của a thuộc $(0; 2018)$ để $\lim \sqrt[4]{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} \leq \frac{1}{1024}$.

- A. 2007. B. 2008. C. 2017. D. 2016.

Lời giải

Chọn B

$$\lim \sqrt[4]{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} = \lim \sqrt[4]{\frac{1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4^a}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4^a}} = \sqrt{\frac{1}{(2^a)^2}} = \frac{1}{2^a}.$$

$$\text{Giải nhanh: } \sqrt[4]{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} \sim \sqrt[4]{\frac{4^n}{4^{n+a}}} = \frac{1}{2^a} \leq \frac{1}{1024} \Leftrightarrow 2^a \geq 1024 = 2^{10} \Leftrightarrow a \geq 10.$$

Mà $a \in (0; 2018)$ và $a \in \mathbb{Z}$ nên $a \in \{10; 2017\} \longrightarrow$ có 2008 giá trị a .

Câu 43: Kết quả của giới hạn $\lim \left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

B. -1 .

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim \left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right) = \lim \frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1} + \lim \frac{(-1)^n}{3^n}$. Ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim \frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \\ 0 \leq \left| \frac{(-1)^n}{3^n} \right| \leq \left(\frac{1}{3} \right)^n \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{(-1)^n}{3^n} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \lim \left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right) = \frac{1}{3}.$$

Câu 44: Kết quả của giới hạn $\lim \left(\frac{\sqrt{3n} + (-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}-1} \right)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. -1 .

Lời giải

Chọn B

$\lim \left(\frac{\sqrt{3n} + (-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}-1} \right) = \lim \left(\frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1} + \frac{(-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}} \right)$. Ta có :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim \frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \\ 0 \leq \left| \frac{(-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}-1} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}-1} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{(-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}-1} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \lim \left(\frac{\sqrt{3n} + (-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}-1} \right) = \sqrt{3}.$$

Câu 45: Kết quả của giới hạn $\lim \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2}$ là:

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2} = \lim \sqrt{3^n} \cdot \sqrt{2 - \frac{n}{3^n} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n}$. Vì

$$\left. \begin{array}{l} \lim \sqrt{3^n} = +\infty \\ 0 \leq \frac{n}{3^n} \leq \frac{n}{C_n^2} = \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{n}{3^n} = 0 \\ \lim \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim \sqrt{3^n} = +\infty \\ \lim \sqrt{2 - \frac{n}{3^n} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n} = \sqrt{2} > 0 \end{array} \right.$$

do đó $\lim \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2} = +\infty$.

Câu 46: Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\frac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là:

- A.** $u_1 = 3$. **B.** $u_1 = 4$. **C.** $u_1 = \frac{9}{2}$. **D.** $u_1 = 5$.

Lời giải

Chọn A

Gọi q là công bội của cấp số nhân, ta có :

$$\begin{cases} \frac{u_1}{1-q} = 2 \\ S_3 = u_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2(1-q) \\ 2(1-q^3) = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -\frac{1}{2} \\ u_1 = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3 \end{cases}$$

Câu 47: Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots$

- A.** $S = \frac{27}{2}$. **B.** $S = 14$. **C.** $S = 16$. **D.** $S = 15$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots = 9 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots \right) = 9 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right) = \frac{27}{2}.$$

CSN lvh: $u_1=1, q=\frac{1}{3}$

Câu 48: Tính tổng $S = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right)$.

- A.** $S = \sqrt{2} + 1$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = 2\sqrt{2}$. **D.** $S = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$S = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2\sqrt{2}.$$

CSN lvh: $u_1=1, q=\frac{1}{2}$

Câu 49: Tính tổng $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots$.

- A.** $S = 3$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = 6$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots = \underbrace{1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots}_{\text{CSN lnh: } u_1=1, q=\frac{2}{3}} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3.$$

Câu 50: Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot 3^{n-1}}, \dots$ bằng:

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{8}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn D

. Ta có :

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot 3^{n-1}} + \dots = \frac{1}{2} \left(\underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}}_{\text{CSN lnh: } u_1=1, q=-\frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}} \right) = \frac{3}{8}.$$

Câu 51: Tính tổng $S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) + \dots$.

- A. 1. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) + \dots$$

$$= \left(\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots}_{\text{CSN lnh: } u_1=q=\frac{1}{2}} \right) - \left(\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots}_{\text{CSN lnh: } u_1=q=\frac{1}{3}} \right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Câu 52: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}$ ($|a| < 1, |b| < 1$) bằng:

- A. 0. B. $\frac{1-b}{1-a}$. C. $\frac{1-a}{1-b}$. D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B

Ta có $1+a+a^2+\dots+a^n$ là tổng $n+1$ số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu là 1 và công bội là a , nên $1+a+a^2+\dots+a^n = \frac{1(1-a^{n+1})}{1-a} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Tương tự: $1+b+b^2+\dots+b^n = \frac{1(1-b^{n+1})}{1-b} = \frac{1-b^{n+1}}{1-b}$.

$$\text{Do đó } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-b}{1-a} \cdot \frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}} = \frac{1-b}{1-a} \quad (|a| < 1, |b| < 1).$$

Câu 53: Rút gọn $S = 1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \dots + \cos^{2n} x + \dots$ với $\cos x \neq \pm 1$.

- A. $S = \sin^2 x$. B. $S = \cos^2 x$. C. $S = \frac{1}{\sin^2 x}$. D. $S = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$S = \underbrace{1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \dots + \cos^{2n} x + \dots}_{\text{CSN lvh: } u_1=1, q=\cos^2 x} = \frac{1}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Câu 54: Rút gọn $S = 1 - \sin^2 x + \sin^4 x - \sin^6 x + \dots + (-1)^n \cdot \sin^{2n} x + \dots$ với $\sin x \neq \pm 1$.

- A. $S = \sin^2 x$. B. $S = \cos^2 x$. C. $S = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$. D. $S = \tan^2 x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$S = \underbrace{1 - \sin^2 x + \sin^4 x - \sin^6 x + \dots + (-1)^n \cdot \sin^{2n} x + \dots}_{\text{CSN lvh: } u_1=1, q=-\sin^2 x} = \frac{1}{1 + \sin^2 x}.$$

Câu 55: Thu gọn $S = 1 - \tan \alpha + \tan^2 \alpha - \tan^3 \alpha + \dots$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

- A. $S = \frac{1}{1 - \tan \alpha}$. B. $S = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}$. C. $S = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$. D. $S = \tan^2 \alpha$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\tan \alpha \in (0; 1)$ với mọi $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4} \right)$, do đó

$$S = \underbrace{1 - \tan \alpha + \tan^2 \alpha - \tan^3 \alpha + \dots}_{\text{CSN lvh: } u_1=1, q=-\tan \alpha} = \frac{1}{1 + \tan \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}.$$

Câu 56: Cho m, n là các số thực thuộc $(-1; 1)$ và các biểu thức:

$$M = 1 + m + m^2 + m^3 + \dots$$

$$N = 1 + n + n^2 + n^3 + \dots$$

$$A = 1 + mn + m^2 n^2 + m^3 n^3 + \dots$$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $A = \frac{MN}{M + N - 1}$. B. $A = \frac{MN}{M + N + 1}$. C. $A = \frac{1}{M} + \frac{1}{N} - \frac{1}{MN}$. D. $A = \frac{1}{M} + \frac{1}{N} + \frac{1}{MN}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} M = \frac{1}{1-m} \\ N = \frac{1}{1-n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 - \frac{1}{M} \\ n = 1 - \frac{1}{N} \end{cases}, \text{ khi đó}$$

$$A = \frac{1}{1-mn} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)\left(1 - \frac{1}{N}\right)} = \frac{MN}{M+N-1}.$$

Câu 57: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,5111\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính tổng

$$T = a + b.$$

A. 17.

B. 68.

C. 133.

D. 137.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 0,5111\ldots = 0,5 + 10^{-2} + 10^{-3} + \ldots + 10^{-n} + \ldots$$

Dãy số $10^{-2}; 10^{-3}; \ldots; 10^{-n}; \ldots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng $u_1 = 10^{-2}$, công bội bằng $q = 10^{-1}$ nên $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{10^{-2}}{1-10^{-1}} = \frac{1}{90}$.

$$\text{Vậy } 0,5111\ldots = 0,5 + S = \frac{46}{90} = \frac{23}{45} \longrightarrow \begin{cases} a = 23 \\ b = 45 \end{cases} \longrightarrow T = a + b = 68.$$

Câu 58: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $A = 0,353535\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$.

$$\text{Tính } T = ab.$$

A. 3456.

B. 3465.

C. 3645.

D. 3546.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$A = 0,353535\ldots = 0,35 + 0,0035 + \ldots = \frac{35}{10^2} + \frac{35}{10^4} + \ldots = \frac{\frac{35}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{35}{99} \Rightarrow \begin{cases} a = 35 \\ b = 99 \end{cases} \Rightarrow T = 3465.$$

Câu 59: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $B = 5,231231\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$.

$$\text{Tính } T = a - b.$$

A. 1409.

B. 1490.

C. 1049.

D. 1940.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$B = 5,231231... = 5 + 0,231 + 0,000231 + ...$$

$$= 5 + \frac{231}{10^3} + \frac{231}{10^6} + ... = 5 + \frac{\frac{231}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} = 5 + \frac{231}{999} = \frac{1742}{333} \longrightarrow \begin{cases} a = 1742 \\ b = 333 \end{cases} \Rightarrow T = 1409$$

Câu 60: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,17232323...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a - b > 2^{15}$.

B. $a - b > 2^{14}$.

C. $a - b > 2^{13}$.

D. $a - b > 2^{12}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\begin{aligned} 0,17232323... &= 0,17 + 23 \left(\frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^8} + ... \right) \\ &= \frac{17}{100} + 23 \cdot \frac{\frac{1}{10000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{17}{100} + \frac{23}{100.99} = \frac{1706}{9900} = \frac{853}{4950} \\ &\longrightarrow \begin{cases} a = 853 \\ b = 4950 \end{cases} \Rightarrow 2^{12} < T = 4097 < 2^{13}. \end{aligned}$$

Câu 61: Tính giới hạn: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+...+(2n+1)}{3n^2+4}$.

A. 0.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $1+3+5+...+(2n+1) = (n+1)^2$.

Vậy: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+...+(2n+1)}{3n^2+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2+4}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n+1}{3n^2+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{4}{n^2}} = \frac{1}{3}.$$

Câu 62: Tính giới hạn: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} \right]$.

A. 0.

B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. Không có giới hạn.

hạn.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right] &= \lim \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.\end{aligned}$$

Câu 63: Tính giới hạn: $\lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n(2n-1)(2n+1)} \right]$.

- A. 1. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. 2.

Lời giải

Chọn c

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n(2n-1)(2n+1)} \right] \\ = \frac{1}{2} \lim \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \lim \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Câu 64: Tính giới hạn: $\lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right]$.

- A. $\frac{3}{4}$. B. 1. C. 0. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \\ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ \text{Vậy } \lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right] = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Câu 65: Tính giới hạn: $\lim \left[\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \right]$.

- A. $\frac{11}{18}$. B. 2. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ \text{Vậy: } & \lim \left[\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \right] = \frac{11}{18}. \end{aligned}$$

Câu 66: Cho dãy (u_n) với $u_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. $\lim u_n = 0$. B. $\lim u_n = \frac{1}{2}$. C. $\lim u_n = 1$. D. $\lim u_n$ không tồn tại.

Lời giải

Chọn B

Dãy số 1, 2, 3, ..., n là cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = 1$ số hạng cuối cùng $u_n = n$, công sai $d = 1$.

$$\text{Khi đó } S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(u_1 + n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{Viết lại: } u_n = \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$$

$$\lim u_n = \lim \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)} = \lim \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{n^2 \left(2 + \frac{2}{n^2} \right)} = \lim \frac{1}{2}.$$

Câu 67: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{U_n^2}{2}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

- A. 2. B. 1. C. $\sqrt{2}$. D. Không có giới hạn.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } U_1 = \frac{1}{2}; U_2 = \frac{5}{8}; U_3 = \frac{57}{64}; \dots$$

Ta chứng minh: $U_n < 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$ (bằng phương pháp quy nạp). Vậy dãy bị chặn trên.

Ta chứng minh (U_n) là dãy tăng. Thật vậy:

Ta có: $U_{n+1} > U_n \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{U_n^2}{2} > U_n$

$\Leftrightarrow U_n^2 - 2U_n + 1 > 0 \Leftrightarrow (U_n - 1)^2 > 0$ luôn đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$, vì $U_n < 1$.

Vậy dãy có giới hạn. Đặt $a = \lim U_n = \lim U_{n+1}$.

Ta có: $\lim U_{n+1} = \lim \left(\frac{1}{2} + \frac{U_n^2}{2} \right) \Rightarrow a = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow 2a = 1 + a^2$

$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$.

Câu 68: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{2 + U_n^2}{2U_n}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

- A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. Không có giới hạn.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $U_{n+1} = \frac{1}{U_n} + \frac{1}{2}U_n \geq \sqrt{2}$ (theo bất đẳng thức Cô-si với $U_n > 0$). Vậy (U_n) là dãy bị chặn dưới.

Dấu “=” không xảy ra, nên $U_n > \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lại có: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2 + U_n^2}{2U_n^2} = \frac{1}{U_n^2} + \frac{1}{2}$. Vì $U_n > \sqrt{2} \Rightarrow U_n^2 > 2$

$\Rightarrow \frac{1}{U_n^2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{U_n^2} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow U_{n+1} < U_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy giảm, khi đó U_n có giới hạn. Đặt $\lim U_{n+1} = \lim U_n = a$ ($a > 0$).

Ta có: $\lim U_{n+1} = \lim \frac{2 + U_n^2}{2U_n} \Rightarrow a = \frac{2 + a^2}{2a} \Rightarrow 2a^2 = 2 + a^2$

$\Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$ (vì $a > 0$).

Câu 69: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2 \cdot U_n}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

- A. 2. B. $1 + \sqrt{2}$. C. $\frac{1 + \sqrt{7}}{2}$. D. Không có giới hạn.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $U_1 = \sqrt{2}; U_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}; \dots$

Ta sẽ chứng minh $U_n < 2; \forall n \in \mathbb{N}^*$ (bằng phương pháp quy nạp).

$n=1, U_1 = \sqrt{2} < 2$. Giả sử $U_k < 2, \forall k \geq 1$.

Ta có: $U_{k+1} = \sqrt{2U_k} < \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$.

Vậy $U_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Lại có: $U_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lại có: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\sqrt{2U_n}}{U_n} = \sqrt{\frac{2}{U_n}} > \sqrt{\frac{2}{2}} = 1 \Rightarrow$ dãy tăng.

Vậy dãy đã cho có giới hạn. Đặt $\lim U_{n+1} = \lim U_n = a (a > 0)$

Ta có: $\lim U_{n+1} = \lim \sqrt{2U_n} \Rightarrow a = \sqrt{2a} \Rightarrow a^2 = 2a \Rightarrow a = 2$.

BÀI 2: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa

Ta viết khoảng K thay cho các khoảng $(a;b), (-\infty;b), (a;+\infty), (-\infty;+\infty)$.

Tổng quát ta có:

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$. Hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$, với c là hằng số.

Chú ý:

Hàm số $f(x)$ có thể không xác định tại $x = x_0$ nhưng vẫn tồn tại giới hạn của hàm số đó khi x dần tới x_0 .

2. Phép toán trên giới hạn hữu hạn của hàm số

Ta thừa nhận định lí sau:

a) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ ($L, M \in \mathbb{R}$) thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ (nếu } M \neq 0 \text{)}.$$

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

3. Giới hạn một phía

-Trong trường hợp tổng quát, ta có các định nghĩa sau:

■ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.

Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

■ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

Định lí sau đây cho ta mối liên hệ giữa "giới hạn hai phía" $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ với giới hạn bên trái

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ và giới hạn bên phải $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ khi và chỉ khi } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

II. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có

$$f(x_n) \rightarrow L.$$

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Chú ý

Với c, k là các hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c; \lim_{x \rightarrow -\infty} c = c; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

Các phép toán trên giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$ vẫn còn đúng khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

III. GIỚI HẠN VÔ CỰC (MỘT PHÍA) CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \rightarrow a^+$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow a$, ta có $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ hay $f(x) \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow a^+$.

Các trường hợp $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

Chú ý: Ta có hai giới hạn cơ bản sau:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty; \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty.$$

IV. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

-Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ hay $f(x) \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$.

Các trường hợp $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

Chú ý: Ta có ba giới hạn cơ bản sau:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k là số nguyên dương.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ với k là số nguyên dương chẵn.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ với k là số nguyên dương lẻ.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Dãy số có giới hạn hữu hạn

1. Phương pháp

Nếu hàm số $f(x)$ xác định trên $K \ni x_0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 7)$.

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 7) = 1 + 1 + 7 = 9.$$

Ví dụ 2: Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 1}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 1} = \frac{3 - 2}{5 + 3 + 1} = \frac{1}{9}.$$

Ví dụ 3: Tính $\lim_{x \rightarrow -1} |4x^3 - 2x - 3|$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow -1} |4x^3 - 2x - 3| = |-4 + 2 - 3| = 5.$$

Ví dụ 4: Tính $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + 3 - 2}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2 + 3} - 2} = \frac{-1 + 1}{\sqrt[3]{4} - 2} = 0.$$

Ví dụ 5: Tính $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{7x^2 + 9x - 1}}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{7x^2 + 9x - 1}} = \sqrt{\frac{16 - 16 + 3}{28 - 18 - 1}} = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Dạng 2. Giới hạn tại vô cực

1. Phương pháp

Giới hạn hữu hạn tại vô cực

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số (x_n) , $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ ta đều có $\lim f(x) = L$.

LƯU Ý: Định nghĩa $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

Giới hạn vô cực tại vô cực

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ với mọi dãy số (x_n) , $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ ta đều có $\lim f(x) = +\infty$.

LƯU Ý: Các định nghĩa: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

Một số giới hạn đặc biệt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0 \quad (c \text{ là hằng số, } k \text{ nguyên dương}).$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số nguyên lẻ; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số nguyên chẵn.

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [-f(x)] = -\infty$.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 5x)$

Lời giải

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giá trị của $f(x) = -2x^3 + 5x$ tại một điểm có giá trị âm rất nhỏ (do ta đang xét giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow -\infty$), chẳng hạn tại -10^{20} . Máy hiển thị kết quả như hình:

Đó là một giá trị dương rất lớn. Vậy chọn đáp án C, tức $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 5x) = +\infty$.

Cách 2: Ta có $-2x^3 + 5x = x^3 \left(-2 + \frac{5}{x^2} \right)$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2 + \frac{5}{x^2} \right) = -2 < 0$ nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{5}{x^2} \right) = +\infty$.

Vậy theo Quy tắc 1, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 5x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{5}{x^2} \right) = +\infty$.

Ví dụ 2: Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 - 2x^2 + 1)$

Lời giải

Cách 1: Theo nhận xét trên thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 - 2x^2 + 1) = +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$, k chẵn và $a_k > 0$).

Thật vậy, ta có $3x^4 - 2x^2 + 1 = x^4 \left(3 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = 3 > 0$ nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 - 2x^2 + 1) = +\infty$.

Nhận xét:

- Giới hạn tại vô cực của hàm đa thức là vô cực, chỉ phụ thuộc vào số hạng chứa lũy thừa bậc cao nhất.
- Giới hạn của hàm đa thức tại $+\infty$ phụ thuộc vào hệ số của lũy thừa bậc cao nhất. (Giống với giới hạn của dãy số dạng đa thức).
- Giới hạn của hàm đa thức tại $-\infty$ phụ thuộc vào bậc và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$ tại $x = -10^{20}$, ta được kết quả như hình:

Kết quả là một số dương rất lớn. Do đó chọn đáp án A,

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Lời giải

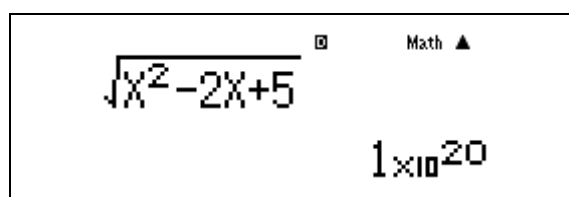
Hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Có thể giải nhanh như sau : Vì $x^2 - 2x + 5$ là một hàm đa thức của x nên có giới hạn tại vô cực. Mà $\sqrt{x^2 - 2x + 5} > 0$ với mọi x nên giới hạn của $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ tại $-\infty$ chắc chắn là $+\infty$.

Thật vậy, ta có $\sqrt{x^2 - 2x + 5} = \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} = |x| \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = 1 > 0$ nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = +\infty$.

Hoặc ta có thể sử dụng MTCT để tính giá trị của $f(x)$ tại một giá trị âm rất nhỏ của x , chẳng hạn tại $x = -10^{20}$ ta được kết quả như hình:



Kết quả này là một số dương rất lớn. Do đó ta chọn đáp án B. (Để thấy kết quả hiển thị trên máy tính như trên chỉ là kết quả gần đúng do khả năng tính toán hạn chế của MTCT. Tuy nhiên kết quả đó cũng giúp ta lựa chọn được đáp án chính xác).

Lưu ý:

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| = +\infty$.

Khi $x \rightarrow -\infty$ thì $x < 0$.

Với $x < 0$ ta có $\sqrt{x^2} = -x$.

Cần đặc biệt lưu ý các điều trên khi tính giới hạn tại $-\infty$ của hàm chứa căn thức.

Ví dụ 4: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1})$

Lời giải

Cách 1: Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1} &= \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} - \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x^2}\right)} = |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - |x| \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} \\ &= |x| \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} \right) = 1 - 2 = -1 < 0.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[|x| \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} \right) \right] = -\infty.$$

Lưu ý:

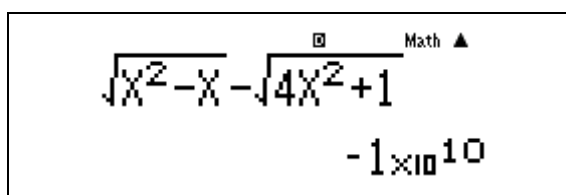
- Độc giả nên đọc lại phần giới hạn dãy số có chứa căn thức để hiểu hơn tại sao lại có định hướng giải như vậy (mà không đi nhân chia với biểu thức liên hợp).

- Có thể thấy như sau: Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 1} = +\infty$.

Mà hệ số của x^2 trong $4x^2 + 1$ lớn hơn hệ số của x^2 trong $x^2 - x$ nên suy ra

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1} \right) = -\infty.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x = -10^{10}$ ta được kết quả như hình.



Dạng 3. giới hạn một bên

1. Phương pháp

Ta cần nắm các tính chất sau

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_0 < x_n < b, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), a < x_n < x_0, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{2x-6}$

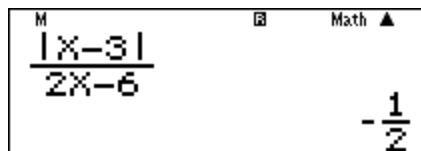
Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{2x-6} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{2(x-3)} = \frac{1}{2}.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{|x-3|}{2x-6}$ và ấn **CALC** $3+10^{-5}$ ta được kết quả



Ví dụ 2: Tính $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{1-x^3}{3x^2+x}}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{1-x^3}{3x^2+x}} = \sqrt{\frac{0}{4}} = 0.$$

Ví dụ 3: Tính $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - 2x + 3}{x^2 + 2x}$

Hướng dẫn giải

Tử số có giới hạn là -1 , mẫu số có giới hạn 0 và khi $x < -2$ thì $x^2 + 2x > 0$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = -\infty.$

Ví dụ 4: Tính $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + \sqrt{x}}{5x - \sqrt{x}}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + \sqrt{x}}{5x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(5\sqrt{x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2\sqrt{x} + 1)}{(5\sqrt{x} - 1)} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Ví dụ 5: Tính $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x^3 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x+1)(x+3)}{\sqrt{x^2(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+1}(x+3)}{\sqrt{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{1-x} = +\infty \text{ vì tử số có giới hạn là } 2, \text{ mẫu số có giới hạn } 0 \text{ và } 1-x > 0 \text{ với } x < 1.$$

Dạng 4. Dạng vô định $\frac{0}{0}$

1. Phương pháp

✓ Nhận dạng vô định $\frac{0}{0}$: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0$.

✓ Phân tích tử và mẫu thành các nhân tử và giản ước

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)A(x)}{(x - x_0)B(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x)}{B(x)} \text{ và tính } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x)}{B(x)}.$$

Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm là x_0 thì $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$

Đặc biệt:

- Nếu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, mà $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $f(x)$ được phân tích thành $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Phương trình bậc 3: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$)
 - $a + b + c + d = 0$ thì pt có một nghiệm là $x_1 = 1$, để phân tích thành nhân tử ta dùng phép chia đa thức hoặc dùng sơ đồ Hooc-ner
 - $a - b + c - d = 0$ thì pt có một nghiệm là $x_1 = -1$, để phân tích thành nhân tử ta dùng phép chia đa thức hoặc dùng sơ đồ Hooc-ner
- Nếu $u(x)$ và $v(x)$ có chứa dấu căn thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hiệp, sau đó phân tích chúng thành tích để giản ước.

$A - B$ lượng liên hiệp là: $A + B$.

$\sqrt{A} - B$ lượng liên hiệp là: $\sqrt{A} + B$.

$\sqrt{A} - \sqrt{B}$ lượng liên hiệp là: $\sqrt{A} + \sqrt{B}$.

$\sqrt[3]{A} - B$ lượng liên hiệp là: $\left(\sqrt[3]{A^2} + B\sqrt[3]{A} + B^2\right)$.

$\sqrt[3]{A} + B$ lượng liên hiệp là: $\left(\sqrt[3]{A^2} - B\sqrt[3]{A} + B^2\right)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

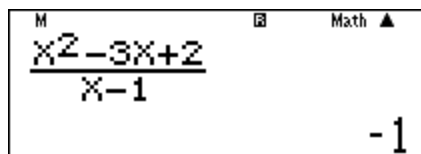
Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{X^2-3X+2}{X-1}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $1+10^{-10}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả



Ví dụ 2: Tính $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x^2}$.

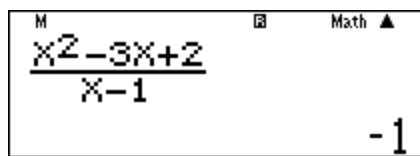
Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-1)(x-1)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(2x-1)}{(1+x)} = \frac{-1}{2}.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{2X^2-3X+1}{1-X^2}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $1+10^{-10}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả



Ví dụ 3: Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$

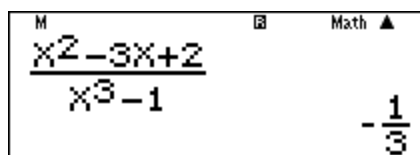
Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x^2+x+1} = \frac{-1}{3}.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $1+10^{-10}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả



Ví dụ 4: Tính $\lim_{t \rightarrow a} \frac{t^4 - a^4}{t - a}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{t^4 - a^4}{t - a} = \lim_{t \rightarrow a} (t^3 + t^2a + ta^2 + a^3) = 4a^3.$$

Ví dụ 5: Tính $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^4 - 1}{y^3 - 1}$

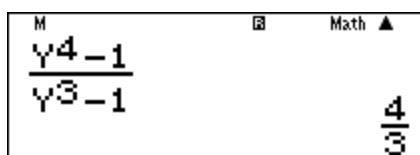
Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^4 - 1}{y^3 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1)(y^3 + y^2 + y + 1)}{(y-1)(y^2 + y + 1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 + y^2 + y + 1}{y^2 + y + 1} = \frac{4}{3}.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{Y^4 - 1}{Y^3 - 1}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $1+10^{-10}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả



Ví dụ 6: Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sqrt{x+7} - 3}$

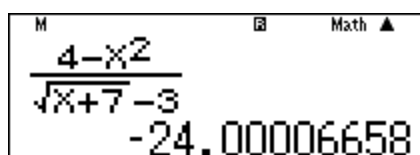
Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sqrt{x+7} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x^2 - 4)(\sqrt{x+7} + 3)}{(\sqrt{x+7} - 3)(\sqrt{x+7} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7} + 3)}{x+7-9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[(x+2)(\sqrt{x+7} + 3) \right] = -24. \end{aligned}$$

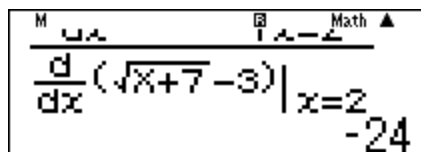
Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{4 - X^2}{\sqrt{X+7} - 3}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $1+10^{-5}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả ≈ -24 .



Lưu ý: Để ra kết quả chính xác -24 ta có thể tính theo quy tắc Lô-pi-tan như sau:

Nhập $\frac{\frac{d}{dx}(4-X^2)}{\frac{d}{dx}(\sqrt{X+7}-3)}\Big|_{x=2}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả chính xác -24 .



Ví dụ 7: Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

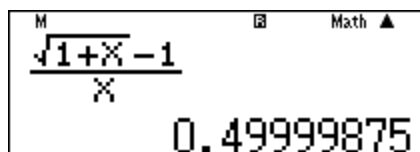
Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}.$$

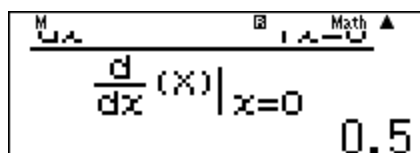
Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $0+10^{-5}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả $\approx \frac{1}{2}$.



Lưu ý: Để ra kết quả chính xác $\frac{1}{2}$ ta có thể tính theo quy tắc Lô-pi-tan như sau:

Nhập $\frac{\frac{d}{dx}(\sqrt{1+X}-1)}{\frac{d}{dx}(X)}\Big|_{x=0}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả chính xác $0,5 = \frac{1}{2}$.



Ví dụ 8: Tính $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-6x+8}{\sqrt{x}-2}$

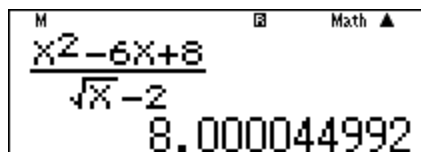
Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-6x+8}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x-2)(\sqrt{x}+2) = 2 \times 4 = 8.$$

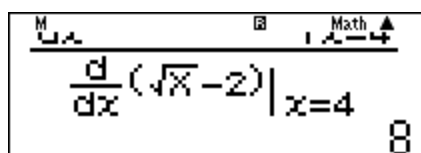
Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{x^2 - 6x + 8}{\sqrt{x} - 2}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $4 + 10^{-5} \boxed{=}$ ta được kết quả ≈ 8 .



Lưu ý: Để ra kết quả chính xác 8 ta có thể tính theo quy tắc Lô-pi-tan như sau:

Nhập $\frac{\frac{d}{dx}(X^2 - 6X + 8)}{\frac{d}{dx}(\sqrt{X} - 2)} \Big|_{x=4}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả chính xác 8.



Ví dụ 9: Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 4} - 2}{4 - \sqrt{2x^2 + 8}}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$E = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 4} - 2}{4 - \sqrt{2x^2 + 8}}$$

Nhân tử và mẫu hai lượng liên hợp:

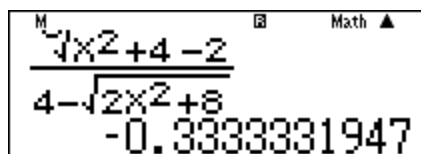
$$\left[\left(\sqrt[3]{x^2 + 4} \right)^2 + 2\sqrt[3]{x^2 + 4} + 4 \right] \left[4 + \sqrt{2x^2 + 8} \right]$$

$$E = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2 + 4} - 2 \right) \left[\left(\sqrt[3]{x^2 + 4} \right)^2 + 2\sqrt[3]{x^2 + 4} + 4 \right] \left(4 + \sqrt{2x^2 + 8} \right)}{\left(4 - \sqrt{2x^2 + 8} \right) \left(4 + \sqrt{2x^2 + 8} \right) \left[\left(\sqrt[3]{x^2 + 4} \right)^2 + 2\sqrt[3]{x^2 + 4} + 4 \right]}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 4 - 8)(4 + \sqrt{2x^2 + 8})}{(16 - 2x^2 - 8) \left[\left(\sqrt[3]{x^2 + 4} \right)^2 + 2\sqrt[3]{x^2 + 4} + 4 \right]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(4 + \sqrt{2x^2 + 8})}{[-2(x^2 - 4)] \left[\left(\sqrt[3]{x^2 + 4} \right)^2 + 2\sqrt[3]{x^2 + 4} + 4 \right]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 + \sqrt{2x^2 + 8}}{-2 \left[\left(\sqrt[3]{x^2 + 4} \right)^2 + 2\sqrt[3]{x^2 + 4} + 4 \right]} = \frac{8}{-24} = -\frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

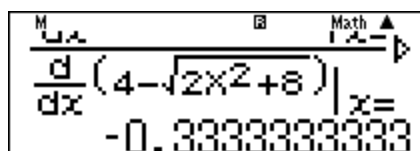
Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{4-\sqrt{2x^2+8}}$ ấn **CALC** $4+10^{-5}$ **=** ta được kết quả $\approx -\frac{1}{3}$.



Lời bình: Nếu ta dùng quy tắc Lô-pi-tan

Nhập $\frac{\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x^2+4}-2)}{\frac{d}{dx}(4-\sqrt{2x^2+8})} \Big|_{x=2}$ rồi ấn phím **=** ta được kết quả $-0,3 = -\frac{1}{3}$.



Ví dụ 10: Tính $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[4]{x^2+12}-2}{x^2-4}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

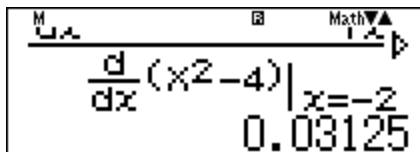
$$\begin{aligned}
 E &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[4]{x^2+12}-2}{x^2-4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt[4]{x^2+12}-2)(\sqrt[4]{x^2+12}+2)}{(x^2-4)(\sqrt[4]{x^2+12}+2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 12} - 4}{(x^2 - 4)(\sqrt[4]{x^2 + 12} + 2)} \quad (\text{vẫn còn dạng vô định } \frac{0}{0}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt{x^2 + 12} - 4)(\sqrt{x^2 + 12} + 4)}{(x^2 - 4)(\sqrt[4]{x^2 + 12} + 2)(\sqrt{x^2 + 12} + 4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 12 - 16}{(x^2 - 4)(\sqrt[4]{x^2 + 12} + 2)(\sqrt{x^2 + 12} + 4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(\sqrt[4]{x^2 + 12} + 2)(\sqrt{x^2 + 12} + 4)} = \frac{1}{32}.
 \end{aligned}$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Ta dùng quy tắc Lô-pi-tan

Nhập $\frac{\frac{d}{dx}(\sqrt[4]{x^2 + 12} - 2)}{\frac{d}{dx}(x^2 - 4)} \Big|_{x=-2}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả $0,03125 = \frac{1}{32}$.



Ví dụ 11: Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{x^2 - 1}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\begin{aligned}
 E &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{x^2 - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[6]{x} - 1)(\sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x} + 1)}{(x^2 - 1)(\sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(x^2 - 1)(\sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x} + 1)} \quad (\text{Vẫn dạng vô định } \frac{0}{0})
 \end{aligned}$$

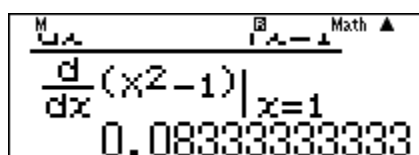
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x} + 1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x} + 1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{12}.$$

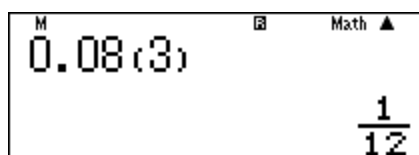
Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Ta dùng quy tắc Lô-pi-tan

Nhập $\frac{\frac{d}{dx}(\sqrt{x}-1)}{\frac{d}{dx}(x^2-1)} \Big|_{x=1}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả $0,08(3) = \frac{1}{12}$.



Để chuyển $0,08(3) = \frac{1}{12}$ ta bấm như sau 0.08Qs3=



Dạng 5. Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

1. Phương pháp

✓ Nhận biết dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} \text{ khi } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \pm\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{u(x)}{v(x)} \text{ khi } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \pm\infty.$$

- ✓ Chia tử và mẫu cho x^n với n là số mũ cao nhất của biến ở mẫu (Hoặc phân tích thành tích chứa nhân tử x^n rồi giản ước)
- ✓ Nếu $u(x)$ hoặc $v(x)$ có chứa biến x trong dấu căn thì đưa x^k ra ngoài dấu căn (Với k là mũ cao nhất của biến x trong dấu căn), sau đó chia tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của x (thường là bậc cao nhất ở mẫu).
- ✓ Cách tính giới hạn dạng này hoàn toàn tương tự giới hạn dãy số.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + x^3 - 2x^2 - 3}{x - 2x^4}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

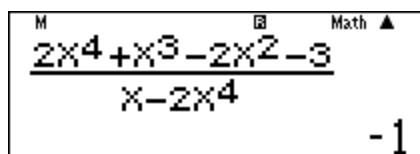
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + x^3 - 2x^2 - 3}{x - 2x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}}{\frac{1}{x^3} - 2} = -1.$$

Cách 2: Mẹo giải nhanh

$$\frac{2x^4 + x^3 - 2x^2 - 3}{x - 2x^4} \sim \frac{2x^4}{-2x^4} = -1.$$

Cách 3: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{2x^4 + x^3 - 2x^2 - 3}{x - 2x^4}$ ấn **CALC** 10^{15} ta được kết quả -1 .



Lời bình: “Bậc tử bằng bậc mẫu” nên kết quả $\frac{2}{-2} = -1$.

Ví dụ 2: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x + 2}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 2x}{5 + \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right) = 5 > 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x) = -\infty.$$

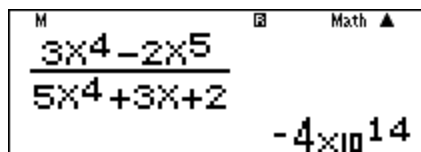
Do đó: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x + 2} = -\infty.$

Cách 2: Mẹo giải nhanh

$$\frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x + 2} \sim \frac{-2x^5}{5x^4} = -\frac{2}{5}x = -\infty.$$

Cách 3: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x + 2}$ ấn **CALC** 10^{15} **=** ta được kết quả $\approx -\infty$.



Lời bình: Bậc tử lớn hơn bậc mẫu nên kết quả là ∞ .

Ví dụ 3: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 2}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

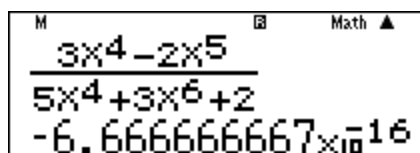
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}}{\frac{5}{x^2} + 3 + \frac{2}{x^6}} = \frac{0}{3} = 0.$$

Cách 2: Mẹo giải nhanh

$$\frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 2} \sim \frac{-2x^5}{3x^6} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = 0.$$

Cách 3: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 2}$ ấn **CALC** 10^{15} **=** ta được kết quả ≈ 0 .



Lời bình: “Bậc tử bé hơn bậc mẫu” nên kết quả là 0.

Ví dụ 4: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x^4 + 4x^5 + 2}{9x^5 + 5x^4 + 4}}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

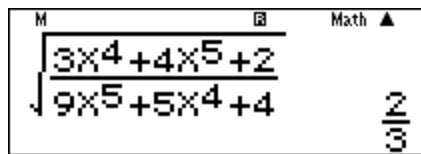
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x^4 + 4x^5 + 2}{9x^5 + 5x^4 + 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\frac{3}{x} + 4 + \frac{2}{x^5}}{9 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^5}}} = \frac{2}{3}.$$

Cách 2: Mẹo giải nhanh

$$\sqrt{\frac{3x^4 + 4x^5 + 2}{9x^5 + 5x^4 + 4}} \sim \sqrt{\frac{4x^5}{9x^5}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Cách 3: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\sqrt{\frac{3x^4 + 4x^5 + 2}{9x^5 + 5x^4 + 4}}$ ấn **CALC** 10^{15} **=** ta được kết quả ≈ 0 .



Ví dụ 5: Tính $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3x}}{\sqrt{4x^2 + 1 - x + 2}}$.

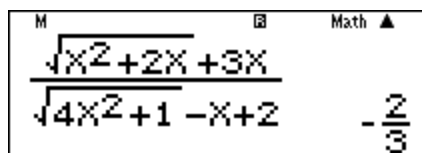
Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3x}}{\sqrt{4x^2 + 1 - x + 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 3x}{|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x^2} - x + 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 3}{-\sqrt{4 + \frac{1}{x^2} - 1 + \frac{2}{x}}} = \frac{2}{-3}.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3x}}{\sqrt{4x^2 + 1 - x + 2}}$ ấn **CALC** -10^{15} **=** ta được kết quả $\frac{2}{3}$.



Ví dụ 6: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x + 5}}{2x - 7}$

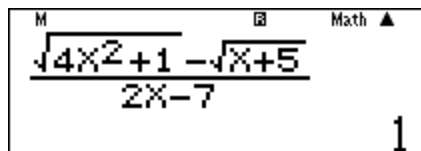
Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x + 5}}{2x - 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}}{2 - \frac{7}{x}} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x + 5}}{2x - 7}$ ấn **CALC** 10^{25} **=** ta được kết quả



Ví dụ 7: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+5) \sqrt{\frac{x}{x^3-1}}$

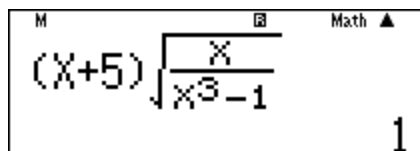
Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+5) \sqrt{\frac{x}{x^3-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x(x+5)^2}{x^3-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\left(1+\frac{5}{x}\right)^2}{1-\frac{1}{x^3}}} = 1.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $(x+5) \sqrt{\frac{x}{x^3-1}}$ ấn **CALC** 10^{25} ta được kết quả



Ví dụ 8: Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x^2+1)^3 (1-2x)^{94}}{2x^{100}+3}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} E &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x^2+1)^3 (1-2x)^{94}}{2x^{100}+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[x^2 \left(-1 + \frac{1}{x^2} \right) \right]^3 \left[x \left(\frac{1}{x} - 2 \right) \right]^{94}}{x^{100} \left(2 + \frac{3}{x^{100}} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 \left(-1 + \frac{1}{x^2} \right)^3 x^{94} \left(\frac{1}{x} - 2 \right)^{94}}{x^{100} \left(2 + \frac{3}{x^{100}} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(-1 + \frac{1}{x^2} \right)^3 \left(\frac{1}{x} - 2 \right)^{94}}{2 + \frac{3}{x^{100}}} = \frac{(-1)^3 \cdot (-2)^{94}}{2} = -2^{93}. \end{aligned}$$

Dạng 6. Dạng vô định $\infty - \infty, 0 \cdot \infty$

1. Phương pháp

- ✓ Nếu biểu thức chứa biến số dưới dấu căn thì nhân và chia với biểu thức liên hợp
- ✓ Nếu biểu thức chứa nhiều phân thức thì quy đồng mẫu và đưa về cùng một biểu thức.
- ✓ Thông thường, các phép biến đổi này có thể cho ta khử ngay dạng vô định $\infty - \infty; 0 \cdot \infty$ hoặc chuyển về dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3})$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x+3}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)} = 0.$$

Ví dụ 2: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+5} - x)$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+5} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}} + 1} = \frac{5}{2}.$$

Ví dụ 3: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2+5x})$

Hướng dẫn giải

$$E = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2+5x})$$

Nhân và chia liên hợp $x + \sqrt{x^2+5x}$

$$E = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2+5x})(x + \sqrt{x^2+5x})}{x + \sqrt{x^2+5x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 5x}{x + |x|\sqrt{1+\frac{5}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{x + x\sqrt{1+\frac{5}{x}}} \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{1 + \sqrt{1+\frac{5}{x}}} = \frac{-5}{1 + \sqrt{1+0}} = -\frac{5}{2}.$$

Ví dụ 4: Tính $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+1} - 1 \right)$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} E &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+1} - 1 \right) \text{ (Dạng vô định } 0 \cdot \infty \text{)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-x-1}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x+1} = -1. \end{aligned}$$

Ví dụ 6: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + 5} = 0$.

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{5}{x}} = 1.$$

Ví dụ 7: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 2} - x \right)$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{x^2 + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Ví dụ 8: Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1 - x^2 - x - 1}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 + x + 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 + x + 1})} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

Ví dụ 9: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-7} \right)$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-7} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5 - x+7}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-7}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-7}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{12}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + \sqrt{1 - \frac{7}{x}}} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 10: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 5x} - x \right)$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 5x} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - 5x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{\sqrt{x^2 - 5x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{\sqrt{1 - \frac{5}{x}} + 1} = -\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Ví dụ 11: Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + 5} = 1$.

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} = -1.$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Sử dụng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} x^2$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$

Lời giải

a) $\lim_{x \rightarrow -3} x^2 = (-3)^2 = 9$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = 10.$

Bài 2. Biết rằng hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$. Trong trường hợp này có tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ hay không? Giải thích.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$ suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \neq 5 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 3)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

Lời giải

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 3) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 2)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2) = 1.$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}.$

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x+1}{3x-4};$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x-11}{2x+3};$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x};$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{1}{x-6}$

g) $\lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{1}{x-7}$

Lời giải

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x+1}{3x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(9+\frac{1}{x}\right)}{x\left(3-\frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9+\frac{1}{x}}{3-\frac{4}{x}} = 3.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x-11}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(7-\frac{11}{x}\right)}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7-\frac{11}{x}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{7}{2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1.$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -1.$

e) $\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{1}{x-6} = -\infty.$

f) $\lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{1}{x-7} = +\infty.$

Bài 5. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \frac{50t}{t+4}$ ($t \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50t}{t+4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50t}{t\left(1+\frac{4}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50}{1+\frac{4}{t}} = 50.$

Ý nghĩa: Tối đa một nhân viên chỉ có thể lắp được 50 bộ phận mỗi ngày.

Bài 6. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số: $C(x) = 50000 + 105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

a) Chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm là:

$$\bar{C}(x) = \frac{50000 + 105x}{x} \quad (\text{sản phẩm}).$$

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50000 + 105x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{50000}{x} + 105 \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{50000}{x} + 105 \right) = 105.$

Ý nghĩa: Khi số sản phẩm sản xuất ra ngày càng nhiều thì chi phí trung bình chỉ tối đa là 105 nghìn đồng.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11)$ là:

A. 37.

B. 38.

C. 39.

D. 40.

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11) = 3 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 + 11 = 37$$

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4|$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4| = \left| (\sqrt{3})^2 - 4 \right| = 1$$

Câu 3: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2}$ là:

A. $\sin \frac{1}{2}$.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2} = 0 \cdot \sin \frac{1}{2} = 0$$

Câu 4: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2}$ là:

A. 1.

B. -2.

C. 2.

D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2} = \frac{(-1)^2 - 3}{(-1)^3 + 2} = -2$$

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{(2x - 1)(x^4 - 3)}$ là:

- A. 1. B. -2. C. 0. D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{(2x - 1)(x^4 - 3)} = \frac{1 - 1^3}{(2 \cdot 1 - 1)(1^4 - 3)} = 0$$

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x - 1|}{x^4 + x - 3}$ là:

- A. $-\frac{3}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x - 1|}{x^4 + x - 3} = \frac{|-1 - 1|}{1 - 1 - 3} = -\frac{2}{3}$$

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - x}{x - 1}$ là:

- A. $-\frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - x}{x - 1} = \frac{\sqrt{3 + 1} + 1}{-1 - 1} = -\frac{3}{2}$$

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{9x^2 - x}{(2x - 1)(x^4 - 3)}}$ là:

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\sqrt{5}$. C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{9x^2 - x}{(2x - 1)(x^4 - 3)}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 3^2 - 3}{(2 \cdot 3 - 1)(3^4 - 3)}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Câu 9: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x}}$ là:

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x}} = \sqrt[3]{\frac{2^2 - 2 + 1}{2^2 + 2 \cdot 2}} = \frac{1}{2}$$

Câu 10: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 4} - \sqrt{3x - 2}}{x + 1}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. 0.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 4} - \sqrt{3x - 2}}{x + 1} = \frac{\sqrt[3]{12 - 4} - \sqrt{6 - 2}}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

Câu 11: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^3 + 1)$ là:

A. 1.

B. $-\infty$.

C. 0.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{1}{x^3} \right) = -1 < 0 \end{cases}$$

Giải nhanh: $x - x^3 + 1 \sim (-1)x^3 \longrightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Câu 12: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x|^3 + 2x^2 + 3|x|)$ là:

A. 0.

B. $+\infty$.

C. 1.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x|^3 + 2x^2 + 3|x|) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 2x^2 - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right) = +\infty.$$

Giải nhanh: $|x|^3 + 2x^2 + 3|x| \sim |x|^3 \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Câu 13: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$ là:

A. 0.

B. $+\infty$.

C. $\sqrt{2} - 1$.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty: \sqrt{x^2+1} + x \sim \sqrt{x^2} + x = 2x \rightarrow +\infty$.

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) = +\infty$$

$$\text{vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 = 2 > 0 \end{cases}$$

Câu 14: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{3x^3-1} + \sqrt{x^2+2})$ là:

A. $\sqrt[3]{3}+1$.B. $+\infty$.C. $\sqrt[3]{3}-1$.D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty: \sqrt[3]{3x^3-1} + \sqrt{x^2+2} \sim \sqrt[3]{3x^3} + \sqrt{x^2} = (\sqrt[3]{3}+1)x \rightarrow +\infty$.

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{3x^3-1} + \sqrt{x^2+2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{3 - \frac{1}{x^3}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = +\infty$$

$$\text{vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{3 - \frac{1}{x^3}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = \sqrt[3]{3} + 1 > 0 \end{cases}$$

Câu 15: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{4x^2+7x+2x})$ là:

A. 4.

B. $-\infty$.

C. 6.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

Đặt x^2 làm nhân tử chung:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{4x^2+7x+2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt{4 + \frac{7}{x} + 2} \right) = +\infty$$

$$\text{vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4 + \frac{7}{x}} + 2 \right) = 4 > 0 \end{cases}.$$

Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty : x(\sqrt{4x^2 + 7x + 2x}) \sim x(\sqrt{4x^2 + 2x}) = 4x^2 \rightarrow +\infty.$

Câu 16: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ là:

- A. 0. B. $+\infty$. C. 3. D. Không xác định.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} = \frac{12}{4} = 3$$

Câu 17: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$ là:

- A. $-\frac{3}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $-\frac{5}{3}$. D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{5}{3}.$$

Câu 18: Biết rằng $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3 + 6\sqrt{3}}{3 - x^2} = a\sqrt{3} + b$. Tính $a^2 + b^2$.

- A. 9. B. 25. C. 5. D. 13.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3 + 6\sqrt{3}}{3 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2(x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}x + 3)}{(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2(x^2 - \sqrt{3}x + 3)}{\sqrt{3} - x} \\ &= \frac{2[(-\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}(-\sqrt{3}) + 3]}{\sqrt{3} - (-\sqrt{3})} = \frac{18}{2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 9. \end{aligned}$$

Câu 19: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 + 3x} \right|$ là:

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 + 3x} \right| = \lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{(x+3)(x-2)}{x(x+3)} \right| = \lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{x-2}{x} \right| = \left| \frac{-3-2}{-3} \right| = \frac{5}{3}.$$

Câu 20: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$ là:

- A. $\frac{1}{3}$. B. 0. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3-x > 0$ với mọi $x < 3$, do đó:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{(3-x)(9+3x+x^2)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{9+3x+x^2}} = \frac{\sqrt{3-3}}{\sqrt{9+3.3+3^2}} = 0. \end{aligned}$$

Câu 21: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + \pi^{21})\sqrt[7]{1-2x} - \pi^{21}}{x}$ là:

- A. $-\frac{2\pi^{21}}{7}$. B. $-\frac{2\pi^{21}}{9}$. C. $-\frac{2\pi^{21}}{5}$. D. $\frac{1-2\pi^{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + \pi^{21})\sqrt[7]{1-2x} - \pi^{21}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + \pi^{21})(\sqrt[7]{1-2x} - 1)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} x = -\frac{2\pi^{21}}{7}.$$

Câu 22: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x}}{x^2}$ là:

- A. 0. B. $-\infty$. C. 1. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2+x) - x}{x^2(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x}} = +\infty$$

vì $1 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x}) = 0$ và $\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x} > 0$ với mọi $x > 0$.

Câu 23: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{4x+4} - 2}$ là:

- A. -1. B. 0. C. 1. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{4x+4} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt[3]{(4x+4)^2} + 2\sqrt[3]{4x+4} + 4)}{(4x+4-8)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{(4x+4)^2} + 2\sqrt[3]{4x+4} + 4)}{4(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{12}{12} = 1. \end{aligned}$$

Câu 24: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$ là:

- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{13}{12}$. C. $\frac{11}{12}$. D. $-\frac{13}{12}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\sqrt{1+x} - 2}{x} + \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sqrt{x+1} + 1} + \frac{1}{4 + 2\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{(8-x)^2}} \right) = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

Câu 25: Biết rằng $b > 0$, $a + b = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} = 2$. Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $1 < a < 3$. B. $b > 1$. C. $a^2 + b^2 > 10$. D. $a - b < 0$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{ax+1} - 1}{x} + \frac{1 - \sqrt{1-bx}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{ax}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)} + \frac{bx}{x(1 + \sqrt{1-x})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)} + \frac{b}{(1 + \sqrt{1-x})} \right) = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 2. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy ta được: } \begin{cases} a + b = 5 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ 2a + 3b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3, b = 2$$

Câu 26: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3}$ là:

- A. -2 . B. $+\infty$. C. 3 . D. 2 .

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} = 2.$

Giải nhanh : khi $x \rightarrow -\infty$ thì : $\frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3} \sim \frac{2x^2}{x^2} = 2.$

Câu 27: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 3}{x^2 + 6x + 3}$ là:

A. -2.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 3}{x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} = -\infty.$

Giải nhanh : khi $x \rightarrow -\infty$ thì : $\frac{2x^3 + 5x^2 - 3}{x^2 + 6x + 3} \sim \frac{2x^3}{x^2} = 2x \rightarrow -\infty.$

Câu 28: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + 11}{3x^6 + 2x^5 - 5}$ là:

A. -2.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + 11}{3x^6 + 2x^5 - 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x^3} - \frac{7}{x^4} + \frac{11}{x^6}}{3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^6}} = \frac{0}{3} = 0.$

Giải nhanh : khi $x \rightarrow -\infty$ thì : $\frac{2x^3 - 7x^2 + 11}{3x^6 + 2x^5 - 5} \sim \frac{2x^3}{3x^6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^3} \rightarrow 0.$

Câu 29: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$ là:

A. -2.

B. $+\infty$.

C. 3.

D. -1.

Lời giải

Chọn D

Khi $x \rightarrow -\infty$ thì $\sqrt{x^2} = -x \longrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x \sim \sqrt{x^2} - x = -x - x = -2x \neq 0$

$\longrightarrow$ chia cả tử và mẫu cho x , ta được $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1} = -1.$

- Câu 30:** Biết rằng $\frac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ (với a là tham số). Tính giá trị nhỏ nhất của $P = a^2 - 2a + 4$.
- A. $P_{\min} = 1$. B. $P_{\min} = 3$. C. $P_{\min} = 4$. D. $P_{\min} = 5$.

Lời giải

Chọn B

Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $\sqrt{x^2} = x \rightarrow \sqrt{x^2+1} - x \sim \sqrt{x^2} - x = x - x = 0$

$\rightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((2-a)x-3)(\sqrt{x^2+1}+x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(2-a-\frac{3}{x}\right) \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right).$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right) = 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2-a-\frac{3}{x}\right) = 2-a > 0 \Rightarrow a < 2.$$

$$\text{Giải nhanh : ta có } x \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$= ((2-a)x-3)(\sqrt{x^2+1}+x) \sim (2-a)x \cdot (\sqrt{x^2}+x) = 2(2-a)x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow a < 2.$$

$$\text{Khi đó } P = a^2 - 2a + 4 = (a-1)^2 + 3 \geq 3, P = 3 \Leftrightarrow a = 1 < 2 \Rightarrow P_{\min} = 3.$$

- Câu 31:** Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ là:

- A. -2 . B. -1 . C. -2 . D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Giải nhanh: khi } x \rightarrow -\infty \rightarrow \frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1} \sim \frac{\sqrt{4x^2}}{x} = \frac{-2x}{x} = -2.$$

$$\text{Cụ thể: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt{4}}{1} = -2.$$

- Câu 32:** Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ là:

- A. $-\frac{1}{5}$. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Giải nhanh : khi

$$x \rightarrow +\infty \longrightarrow \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{9x^2 - 3x} + 2x} \sim \frac{\sqrt{4x^2} - x}{\sqrt{9x^2} + 2x} = \frac{2x - x}{3x + 2x} = \frac{1}{5}.$$

Cụ thể : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{9x^2 - 3x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x} - 1}{\sqrt{9 - \frac{3}{x}} + 2} = \frac{1}{5}.$

Câu 33: Biết rằng $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{ax^2 - 3x} + bx} > 0$ là hữu hạn (với a, b là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng.

- A. $a \geq 0$. B. $L = -\frac{3}{a+b}$ C. $L = \frac{3}{b-\sqrt{a}}$ D. $b > 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta phải có $ax^2 - 3x > 0$ trên $(-\infty; \alpha) \Leftrightarrow a \geq 0$.

Ta có $x \rightarrow -\infty \longrightarrow \sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x \sim \sqrt{4x^2} - x = -3x \neq 0$.

Như vậy xem như “tử” là một đa thức bậc 1. Khi đó $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{ax^2 - 3x} + bx} > 0$ khi và chỉ khi $\sqrt{ax^2 - 3x} + bx$ là đa thức bậc 1.

Ta có $\sqrt{ax^2 - 3x} + bx \sim \sqrt{ax^2} + bx = (-\sqrt{a} + b)x \longrightarrow -\sqrt{a} + b \neq 0$.

Khi đó $\frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{ax^2 - 3x} + bx} \sim \frac{-3x}{(-\sqrt{a} + b)x} = \frac{3}{b - \sqrt{a}} = L > 0 \Leftrightarrow b - \sqrt{a} > 0 \Rightarrow b > \sqrt{a}$.

Câu 34: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1}}{\sqrt{2x^2 + 1}}$ là:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. 0. C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. 1.

Lời giải

Chọn C

Giải nhanh: $x \rightarrow -\infty \longrightarrow \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1}}{\sqrt{2x^2 + 1}} \sim \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{2x^2}} = \frac{x}{-\sqrt{2}x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1}}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}}{-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2+1}+ax)$ là $+\infty$.

A. $a > \sqrt{2}$.

B. $a < \sqrt{2}$.

C. $a > 2$.

D. $a < 2$.

Lời giải

Chọn B

Giải nhanh: $x \rightarrow -\infty \longrightarrow \sqrt{2x^2+1}+ax \sim \sqrt{2x^2}+x$

$$= -\sqrt{2}x+ax = (a-\sqrt{2})x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow a-\sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow a < \sqrt{2}.$$

Cụ thể: vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2+1}+ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+a \right) = +\infty$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+a \right) = a-\sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow a < \sqrt{2}.$$

Câu 36: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3-x^2)$ là:

A. 1.

B. $+\infty$.

C. -1.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn D

Giải nhanh : $x \rightarrow -\infty \longrightarrow 2x^3-x^2 \sim 2x^3 \rightarrow -\infty$.

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3-x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(2-\frac{1}{x} \right) = -\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2-\frac{1}{x} \right) = 2 > 0 \end{cases}$.

Câu 37: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$ là:

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2-1}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+1}{x^2-4} \right) = -\infty$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 3 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2-4) = 0$ và $x^2-4 < 0$ với mọi $x \in (-2; 2)$.

Câu 38: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-15}{x-2}$ là:

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. $-\frac{15}{2}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-15) = -13 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0 \text{ \& } x-2 > 0, \forall x > 2 \end{cases} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-15}{x-2} = -\infty.$$

Câu 39: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ là:

- A. $-\infty$. B. $+\infty$.
C. $-\frac{15}{2}$. D. Không xác định.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x+2} = 2 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0 \text{ \& } \sqrt{x-2} > 0, \forall x > 2 \end{cases} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} = +\infty.$$

Câu 40: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|3x+6|}{x+2}$ là:

- A. $-\infty$. B. 3.
C. $+\infty$. D. Không xác định.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|x+2| = x+2$ với mọi $x > -2$, do đó :

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|3x+6|}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{3|x+2|}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{3(x+2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} 3 = 3$$

Câu 41: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ là:

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $-\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{(2-x)(1-2x)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{1-2x} = -\frac{1}{3}.$$

Câu 42: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}$ là:

- A. -2. B. 2. C. 0. D. $\frac{2}{\sqrt{15}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x+3 > 0$ với mọi $x > -3$, nên:

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 + 13x + 30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+3)(x+10)}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{x+3} \cdot (x+10)}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{\sqrt{-3+3}(-3+10)}{\sqrt{(-3)^2+5}} = 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}.$$

Câu 43: Cho hàm số Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ là:

- A. $+\infty$. B. 2. C. 4. D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{3x^2+1} = \sqrt{3 \cdot 1^2 + 1} = 2$$

Câu 44: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ là:

- A. $+\infty$. B. -1. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{1-x} = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0 \text{ \& } 1-x > 0 (\forall x < 1) \end{cases}.$$

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2-3 & \text{với } x \geq 2 \\ x-1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ là:

- A. -1. B. 0. C. 1. D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2-3) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1.$$

Câu 46: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}+3 & \text{với } x \geq 2 \\ ax-1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Tìm a để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

- A. $a = 1$. B. $a = 2$. C. $a = 3$. D. $a = 4$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax-1) = 2a-1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{x-2}+3) = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ tồn tại} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2a-1 = 3 \Leftrightarrow a = 2.$$

Câu 47: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{với } x > 3 \\ 1 & \text{với } x = 3 \\ 3 - 2x^2 & \text{với } x < 3 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$. B. Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.
C. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6$. D. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -15$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 2x + 3) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (3 - 2x^2) = -15 \end{cases} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

$\longrightarrow$ không tồn tại giới hạn khi $x \rightarrow 3$.

Vậy chỉ có khẳng định C sai.

Câu 48: Biết rằng $a + b = 4$ và $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right)$ hữu hạn. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{b}{1-x^3} - \frac{a}{1-x} \right)$.
A. 1. B. 2. C. 1. D. -2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a + ax + ax^2 - b}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a + ax + ax^2 - b}{(1-x)(1+x+x^2)}.$$

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right) \text{ hữu hạn} \Leftrightarrow 1 + a \cdot 1 + a \cdot 1^2 - b = 0 \Leftrightarrow 2a - b = -1.$$

$$\text{Vậy ta có } \begin{cases} a + b = 4 \\ 2a - b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow L = -\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right)$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{1+x+x^2} = 1.$$

Câu 49: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+2x^2} - x)$ là:

- A. 0. B. $+\infty$. C. $\sqrt{2}-1$. D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+2x^2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 2} - 1 \right) = +\infty$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 2} - 1 \right) = \sqrt{2} - 1 > 0.$$

$$\text{Giải nhanh : } x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{1+2x^2} - x \sim \sqrt{2x^2} - x = \sqrt{2}x - x = (\sqrt{2} - 1)x \rightarrow +\infty.$$

Câu 50: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$ là:

- A. 0. B. $+\infty$. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn A

$x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2+1}-x \sim \sqrt{x^2}-x = x-x = 0 \longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp.

Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2+1}-x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \sim \frac{1}{\sqrt{x^2}+x} = \frac{1}{2x} \rightarrow 0$.

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{0}{2} = 0$.

Câu 51: Biết rằng $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}) = a\sqrt{5}+b$. Tính $S = 5a+b$.

- A. $S = 1$. B. $S = -1$. C. $S = 5$. D. $S = -5$.

Lời giải

Chọn A

$x \rightarrow -\infty \longrightarrow \sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5} \sim \sqrt{5x^2}+x\sqrt{5} = -\sqrt{5}x+x\sqrt{5} = 0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $x \rightarrow -\infty \longrightarrow \sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}$
 $= \frac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}} \sim \frac{2x}{\sqrt{5x^2}-x\sqrt{5}} = \frac{2x}{-2\sqrt{5}x} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Cụ thể: Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}}$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{5+\frac{2}{x}}+\sqrt{5}} = \frac{2}{-2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{5}\sqrt{5} \longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow S = -1$.

Câu 52: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x})$ là:

- A. $\frac{7}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $+\infty$. D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

. Khi $x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x} \sim \sqrt{x^2}-\sqrt{x^2} = 0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4x}$

$$= \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 4x}} \sim \frac{-x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4x}) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x}}} = -\frac{1}{2}.$$

Câu 53: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2})$ là:

- A. $\sqrt[3]{3} + 1$. B. $+\infty$. C. $\sqrt[3]{3} - 1$. D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\sqrt[3]{3 - \frac{1}{x^3}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = -\infty$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{3 - \frac{1}{x^3}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = \sqrt[3]{3} - 1 > 0.$$

Giải nhanh:

$$x \rightarrow -\infty \longrightarrow \sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2} \sim \sqrt[3]{3x^3} + \sqrt{x^2} = (\sqrt[3]{3} - 1)x \rightarrow -\infty.$$

Câu 54: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2})$ là:

- A. $\frac{5}{6}$. B. $+\infty$. C. -1 . D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Khi } x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \sim \sqrt{x^2} - \sqrt[3]{x^3} = x - x = 0$$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x + x - \sqrt[3]{x^3 - x^2}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + \frac{x^2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 1} + \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{Giải nhanh: } \sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} = (\sqrt{x^2 + x} - x) + (x - \sqrt[3]{x^3 - x^2})$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + \frac{x^2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 1} + \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} \sim \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} + \frac{x^2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[6]{x^6}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} (x \rightarrow +\infty).$$

Câu 55: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1})$ là:

- A. 0. B. $+\infty$ C. -1. D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn A

$x \rightarrow +\infty \rightarrow \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1} \sim \sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{2x} = 0 \rightarrow$ nhân lượng liên hợp:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)} + \sqrt[3]{(2x+1)^2}} = 0.$$

Giải nhanh: $\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1} =$

$$\frac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{4x^2-1} - \sqrt[3]{(2x+1)^2}} \sim \frac{-2}{\sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{4x^2}} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{4x^2}} \rightarrow 0.$$

Câu 56: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right]$ là:

- A. $+\infty$ B. -1. C. 0. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = 0 - 1 = -1.$

Câu 57: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$ là:

- A. 1. B. $+\infty$ C. 0. D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \frac{0 \cdot \sqrt{2}}{2} = 0.$

Câu 58: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}$ là:

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $+\infty$ D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2(2x+1)}{3x^3+x^2+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{x}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Giải nhanh:

$$x \rightarrow +\infty \longrightarrow x \sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}} \sim x \cdot \sqrt{\frac{2x}{3x^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 59: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(\sin \pi x - \frac{1}{x^2} \right)$ là:

- A. 0. B. -1. C. π . D. $+\infty$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(\sin \pi x - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \sin \pi x - 1) = -1.$$

Câu 60: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^3 + 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}$ là:

- A. 3. B. $+\infty$ C. 0. D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn C

Với $x \in (-1; 0)$ thì $x+1 > 0$ và $\frac{x}{x-1} > 0$.

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^3 + 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1)(x^2 - x + 1) \sqrt{\frac{x}{(x-1)(x+1)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sqrt{x+1} (x^2 - x + 1) \sqrt{\frac{x}{x-1}} = 0$$

BÀI 3: HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. KHÁI NIỆM

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Nhận xét: Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại x_0 .

2. Hàm số liên tục trên một khoảng hoặc một đoạn

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu hàm số đó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Chú ý: Khái niệm hàm số liên tục trên các tập hợp có dạng $(a; b), [a; b), (a; +\infty), [a; +\infty), (-\infty; a), (-\infty; a], (-\infty; +\infty)$ được định nghĩa tương tự.

Nhận xét: Đồ thị hàm số liên tục trên một khoảng là "đường liền" trên khoảng đó.

II. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

1. Tính liên tục của một số hàm sơ cấp cơ bản

-Trong trường hợp tổng quát, ta có định lý sau:

Các hàm đa thức và hai hàm số lượng giác $y = \sin x, y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Các hàm phân thức hữu tỉ và hai hàm số lượng giác $y = \tan x, y = \cot x$ liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Hàm căn thức $y = \sqrt{x}$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

2. Tính liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lý sau:

Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

a) Các hàm số $y = f(x) + g(x), y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 ;

b) Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Hàm số liên tục tại một điểm

1. Phương pháp

Ta cần phải nắm vững định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}}{x}$ với $x \neq 0$. Phải bổ sung thêm giá trị $f(0)$ bằng bao nhiêu thì hàm số liên tục tại $x = 0$?

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2-2+x}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Như vậy để hàm số liên tục tại $x = 0$ thì phải bổ sung thêm giá trị $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a - x^2 & \text{với } x \neq 1 \text{ và } a \in \mathbb{R} \\ 3 & \text{với } x = 1 \end{cases}$. Giá trị của a để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ là bao nhiêu?

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (a - x^2) = a - 1.$$

Để hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a - 1 = 3 \Leftrightarrow a = 4$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^3-x+6}} & \text{với } x \neq 3 \text{ và } x \neq -2 \\ b+3 & \text{với } x = 3 \text{ và } b \in \mathbb{R} \end{cases}$. Tìm b để $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^3-x+6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; f(3) = b+3.$$

Để hàm số liên tục tại $x = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow b + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow b = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a-2 & \text{khi } x < 2 \\ \sin \frac{\pi}{x} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại $x = 2$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có

$$\left. \begin{aligned} & \bullet f(2) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (a-2) = a-2 \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned} \right\}$$

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi $a-1=2 \Leftrightarrow a=3$.

Ví dụ 5: Tìm số a để hàm số sau liên tục tại điểm x_0 .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{nếu } x > 2 \\ ax+2 & \text{nếu } x \leq 2 \end{cases}; x_0 = 2.$$

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)}{(x-2) \left[\left(\sqrt[3]{3x+2} \right)^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4 \right]} = \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = ax+2 = 2a+2.$$

Lại có: $f(2) = 2a+2$.

Hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ nếu $2a+2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = -\frac{7}{8}$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x+5}} & \text{với } -5 < x < 4 \\ mx+2 & \text{với } x = 4 \\ \frac{\sqrt{x}}{3} & \text{với } x > 4 \end{cases}$. Tìm giá trị của m để $f(x)$ liên tục tại $x=4$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-2}{\sqrt{x+5}} = \frac{2}{3}; \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x}}{3} = \frac{2}{3}.$

Và $f(4) = 4m+2$

Để hàm số liên tục tại $x=4$ thì $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$

$\Leftrightarrow 4m+2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}.$

Ví dụ 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-4x+3} & \text{nếu } x < 1 \\ \frac{1}{6} \cos \pi x + a^2 - x & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$. Tìm giá trị của a để $f(x)$ liên tục tại $x=1$

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

- $f(1) = \frac{1}{6} \cos \pi + a^2 - 1 = -\frac{1}{6} + a^2 - 1.$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{6} \cos \pi x + a^2 - x \right) = -\frac{1}{6} + a^2 - 1.$
- $$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^2 + 8} - 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{x^2 + 8} - 3)(\sqrt{x^2 + 8} + 3)}{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{x^2 + 8} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 8 - 9}{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{x^2 + 8} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)(\sqrt{x^2 + 8} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{(x-3)(\sqrt{x^2 + 8} + 3)} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Để hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{6} + a^2 - 1 = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Dạng 2. Hàm số liên tục trên tập xác định

1. Phương pháp

- Để chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng, đoạn ta dùng các định nghĩa về hàm số liên tục trên khoảng, đoạn và các nhận xét để suy ra kết luận.
- Khi nói xét tính liên tục của hàm số (mà không nói rõ gì hơn) thì ta hiểu phải xét tính liên tục trên tập xác định của nó.
- Tìm các điểm gián đoạn của hàm số tức là xét xem trên tập xác định của nó hàm số không liên tục tại các điểm nào
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục trên (a, b) và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ -4 & \text{khi } x = -2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} & \text{khi } x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \text{khi } x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Lời giải

a) Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x \neq -2$ (1)

- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x-2) = -2-2 = -4.$
- $f(-2) = -4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = -2$ (2)
- Từ (1) và (2) ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x \neq \sqrt{2}$ (1)

- $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x+\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$
- $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = f(\sqrt{2}) \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = \sqrt{2}$ (2)
- Từ (1) và (2) ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Tìm các giá trị của m để các hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ m & \text{khi } x = -2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Lời giải

a) Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x \neq 2$.

- Do đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ (1)
- Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 2+1 = 3; f(2) = m.$
- Khi đó $(1) \Leftrightarrow 3 = m \Leftrightarrow m = 3$.

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (mx + 1) = m + 1; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 1 + 1 = 2; f(1) = 2.$

- Từ YCBT $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$.

Dạng 3. Số nghiệm của phương trình trên một khoảng

1. Phương pháp

- ✓ Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm
 - Tìm hai số a và b sao cho $f(a) \cdot f(b) < 0$
 - Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$
 - Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (a; b)$
- ✓ Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất k nghiệm
 - Tìm k cặp số a_i, b_i sao cho các khoảng $(a_i; b_i)$ rời nhau và

$$f(a_i) \cdot f(b_i) < 0, i = 1, \dots, k$$
 - Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_i \in (a_i; b_i)$.

- ✓ Khi phương trình $f(x)=0$ có chứa tham số thì cần chọn a, b sao cho :
- $f(a), f(b)$ không còn chứa tham số hoặc chứa tham số nhưng dấu không đổi.
 - Hoặc $f(a), f(b)$ còn chứa tham số nhưng tích $f(a).f(b)$ luôn âm.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $m(x-1)(x+2)+2x+1=0$.

Lời giải

Đặt $f(x)=m(x-1)(x+2)+2x+1$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(1)=3; f(-2)=-3 \Rightarrow f(1).f(-2)<0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm với mọi m .

Ví dụ 2: Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số:

a) $(1-m^2)(x+1)^3+x^2-x-3=0$

b) $\cos x+m\cos 2x=0$

c) $m(2\cos x-\sqrt{2})=2\sin 5x+1$

Lời giải

a) Xét $\begin{cases} m=1 \\ m=-1 \end{cases}$. Phương trình có dạng $x^2-x-3=0$ nên PT có nghiệm

- Với $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$ giả sử $f(x)=(1-m^2)(x+1)^3+x^2-x-3$
- $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên $[-1;0]$
- Ta có $f(-1)=m^2+1>0; f(0)=-1<0 \Rightarrow f(-1).f(0)<0$
- Do đó PT luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m

b) Đặt $f(x)=\cos x+m\cos 2x \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

- Ta có $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}>0; f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}<0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right).f\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0$
- Do đó PT luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m

c) Đặt $f(x)=m(2\cos x-\sqrt{2})-2\sin 5x-1 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

- Ta có $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}-1<0; f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1>0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right).f\left(-\frac{\pi}{4}\right)<0$
- Do đó PT luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m

Ví dụ 3. Chứng minh rằng các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

a) $x^3-3x+1=0$

b) $2x+6\sqrt[3]{1-x}=3$

Lời giải

a) Dễ thấy hàm $f(x) = x^3 - 3x + 1$ liên tục trên R .

Ta có:

- $\begin{cases} f(-2) = -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(-2).f(-1) < 0 \Rightarrow$ tồn tại một số $a_1 \in (-2; -1): f(a_1) = 0(1)$.
- $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(0).f(1) < 0 \Rightarrow$ tồn tại một số $a_2 \in (0; 1): f(a_2) = 0(2)$.
- $\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(1).f(2) < 0 \Rightarrow$ tồn tại một số $a_3 \in (1; 2): f(a_3) = 0(3)$.

Do ba khoảng $(-2; -1)$, $(0; 1)$ và $(1; 2)$ đôi một không giao nhau nên phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt.

Mà phương trình bậc 3 thì chỉ có tối đa là 3 nghiệm nên $x^3 - 3x + 1 = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

b) Đặt $\sqrt[3]{1-x} = t \Leftrightarrow x = 1 - t^3 \Rightarrow 2t^3 - 6t + 1 = 0$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 6t + 1$ liên tục trên R .

Ta có: $\begin{cases} f(-2).f(-1) = -3.5 < 0 \\ f(0).f(1) = 1.(-3) < 0 \\ f(1).f(2) = -3.5 < 0 \end{cases} \Rightarrow$ tồn tại 3 số t_1, t_2 và t_3 lần lượt thuộc 3 khoảng đôi một

không giao nhau là $(-2; -1)$, $(0; 1)$ và $(1; 2)$ sao cho $f(t_1) = f(t_2) = f(t_3) = 0$ và do đây là phương trình bậc 3 nên $f(t) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Ứng với mỗi giá trị t_1, t_2 và t_3 ta tìm được duy nhất một giá trị x thỏa mãn $x = 1 - t^3$ và hiển nhiên 3 giá trị này khác nhau nên PT ban đầu có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $x^5 - 3x + 3 = 0$

b) $x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$

Lời giải

a) Xét $f(x) = x^5 - 3x + 3$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ tồn tại một số $x_1 > 0$ sao cho $f(x_1) > 0$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow$ tồn tại một số $x_2 < 0$ sao cho $f(x_2) < 0$.

Từ đó $f(x_1).f(x_2) < 0 \Rightarrow$ luôn tồn tại một số $x_0 \in (x_2; x_1): f(x_0) = 0$ nên phương trình $x^5 - 3x + 3 = 0$ luôn có nghiệm.

b) Xét $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1$ liên tục trên R

Ta có: $f(-1) = -3 < 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ tồn tại một số $a > 0$ sao cho $f(a) > 0$.

$\Rightarrow x^2 - x - 3 = 0$ nên luôn tồn tại một số $x_0 \in (0; a)$ thỏa mãn $f(x_0) = 0$ nên phương trình $x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ luôn có nghiệm.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm $x \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$ với $a \neq 0$ và $2a + 6b + 19c = 0$.

Lời giải

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

+) Nếu $c = 0$ thì $f(x) = 0$ có 2 nghiệm là $\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$

+) Nếu $c \neq 0$, ta có $f(0) = c$; $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{a}{9} + \frac{b}{3} + c = \frac{1}{18}(2a + 6b + 18c) = -\frac{c}{18}$

$\Rightarrow f(0) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{c^2}{18} < 0$. Do đó $f(x) = 0$ có nghiệm trong $\left(0; \frac{1}{3}\right)$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Dùng định nghĩa xét tính liên tục của hàm số $f(x) = 2x^3 + x + 1$ tại điểm $x = 2$.

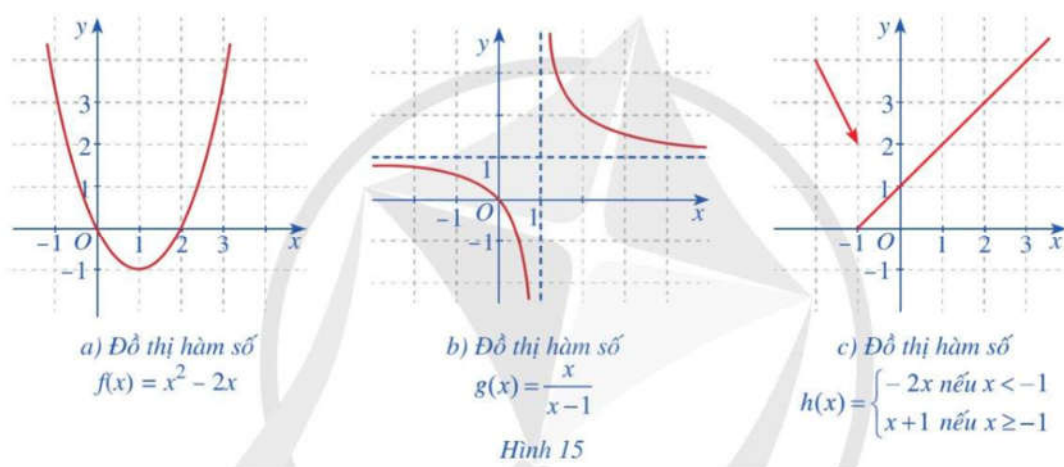
Lời giải

Hàm số $f(x) = 2x^3 + x + 1$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 + x + 1) = 2 \cdot 2^3 + 2 + 1 = 17 = f(2)$.

Do đó hàm số liên tục tại $x = 2$.

Bài 2. Trong các hàm số có đồ thị ở Hình 15a, 15b, 15, hàm số nào liên tục trên tập xác định của hàm số đó? Giải thích.



Lời giải

+) Hình 15a): Hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Hàm số liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

Hàm số $\frac{x-1}{x+4}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -4)$ và $(-4; +\infty)$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & x \neq 4 \\ 2a + 1 & x = 4 \end{cases}$

- a) Với $a=0$, xét tính liên tục của hàm số tại $x=4$.
 b) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại $x=4$?
 c) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục trên tập xác định của nó?

Lời giải

a) Với $a=0$, tại $x=4$, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + x + 1) = 4^2 + 4 + 1 = 21 \text{ và } f(4) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \neq f(4)$.

Vì vậy hàm số không liên tục tại $x=4$.

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + x + 1) = 4^2 + 4 + 1 = 21$ và $f(4) = 2 \cdot a + 1$

Để hàm số liên tục tại $x=4$ thì $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$

$$\Leftrightarrow 21 = 2a + 1$$

$$\Leftrightarrow 2a = 20$$

$$\Leftrightarrow a = 10$$

Vậy với $a=10$ thì hàm số liên tục tại $x=4$.

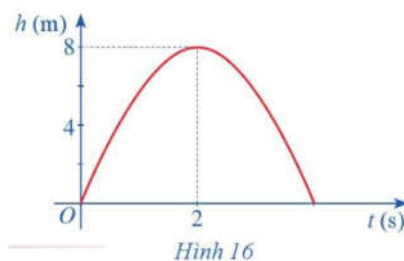
c) Với $x \in (-\infty; 4)$ có $f(x) = x^2 + x + 1$ liên tục với mọi x thuộc khoảng này.

Với $x \in (4; +\infty)$ có $f(x) = 2a + 1$ liên tục với mọi x thuộc khoảng này.

Tại $x=4$ thì $a=10$ hàm số liên tục.

Vậy với $a=10$ hàm số liên tục trên tập xác định của nó.

Bài 6. Hình 16 biểu thị độ cao h (m) của một quả bóng được đá lên theo thời gian t (s), trong đó $h(t) = -2t^2 + 8t$.



a) Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.

b) Dựa vào đồ thị hãy xác định $\lim_{t \rightarrow 2} (-2t^2 + 8t)$.

Lời giải

a) Hàm số $h(t) = -2t^2 + 8t$ là hàm đa thức nên liên tục trên tập xác định.

b) Dựa vào đồ thị hàm số khi t tiến dần đến 2 thì $h(t)$ dần đến 8. Vậy $\lim_{t \rightarrow 2} (-2t^2 + 8t) = 8$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$, chứa $x = 2$. Theo giả thiết thì ta phải có

$$m = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3.$$

Câu 2: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại

$x = 1$.

- A. $m = 0$. B. $m = 2$. C. $m = 4$. D. $m = 6$.

Lời giải

Chọn A

. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết ta phải có

$$3 + m = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 3 \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số k để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ k + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại

$x = 1$.

- A. $k = \frac{1}{2}$. B. $k = 2$. C. $k = -\frac{1}{2}$. D. $k = 0$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ có TXĐ: $D = [0; +\infty)$. Điều kiện bài toán tương đương với

$$\text{Ta có: } k + 1 = y(1) = \lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

Câu 4: Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - x}{\sqrt{x + 1} - 2} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$ (với m là tham số).

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $m \in (-3; 0)$.

B. $m \leq -3$.

C. $m \in [0; 5)$.

D. $m \in [5; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $(-1; +\infty)$. Theo giả thiết ta phải có

$$m = f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = -\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+1}+2) = -4.$$

Câu 5: Hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x^4+x}{x^2+x} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại:

A. mọi điểm trừ $x = 0, x = 1$.

B. mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

C. mọi điểm trừ $x = -1$.

D. mọi điểm trừ

$x = 0$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; -1), (-1; 0)$ và $(0; +\infty)$.

(i) Xét tại $x = -1$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4+x}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2-x+1) = 3 = f(-1).$$

→ hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = -1$.

(ii) Xét tại $x = 0$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4+x}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2-x+1) = 1 = f(0).$$

→ hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Câu 6: Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x(x+1)}{x^2-1} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$.

Hàm số $f(x) = \frac{x(x+1)}{x^2-1}$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ và $(1; +\infty)$.

(i) Xét tại $x = -1$, ta có $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} = f(-1) \longrightarrow$ Hàm số liên tục tại $x = -1$.

(ii) Xét tại $x = 1$, ta có
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty \end{cases} \longrightarrow$$

Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2 x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ (1-m)x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$; $(2; +\infty)$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 2$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2). \quad (*)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(2) = 4m^2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [(1-m)x] = 2(1-m) \longrightarrow (*) \Leftrightarrow 4m^2 = 2(1-m) \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} m^2 x^2 = 4m^2 \end{cases}$$

Câu 8: Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{khi } x \in [0; 4] \\ 1+m & \text{khi } x \in (4; 6] \end{cases}$ tục trên $[0; 6]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m < 2$. B. $2 \leq m < 3$. C. $3 < m < 5$. D. $m \geq 5$.

Lời giải

Chọn A

Để thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(0;4)$ và $(4;6)$. Khi đó hàm số liên tục trên đoạn $[0;6]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=4, x=0, x=6$.

Tức là ta cần có
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = f(6) \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) \end{cases} \quad (*)$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \\ f(0) = \sqrt{0} = 0 \end{cases}; \bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} (1+m) = 1+m \\ f(6) = 1+m \end{cases};$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (1+m) = 1+m; \text{ Khi đó } (*) \text{ trở thành } 1+m = 2 \Leftrightarrow m = 1 < 2. \\ f(4) = 1+m \end{cases}$$

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. Khi đó hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi nó liên tục tại $x=1$, tức là ta cần có

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1). \quad (*)$$

Ta có $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x > 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \\ 2-x & \text{khi } x < 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2-x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1 \end{cases} \longrightarrow (*) \text{ không thỏa mãn với mọi}$

$a \in \mathbb{R}$. Vậy không tồn tại giá trị a thỏa yêu cầu.

Câu 10: Biết rằng $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ (với a là tham số). Khẳng định

nào dưới đây về giá trị a là đúng?

- A. a là một số nguyên. B. a là một số vô tỉ. C. $a > 5$. D. $a < 0$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định và liên tục trên $[0;1]$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$. (*)

Ta có
$$\begin{cases} f(1) = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} [(x+1)(\sqrt{x}+1)] = 4 \end{cases} \xrightarrow{(*)} a = 4.$$

Câu 11: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ -2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.
B. $f(x)$ không liên tục trên $(0;2)$.
C. $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.
D. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có
$$\begin{cases} f(1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-(\sqrt{2-x}+1)] = -2 \end{cases} \xrightarrow{\quad} f(x) \text{ liên tục tại } x=1.$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 12: Tìm giá trị nhỏ nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x-3}-x} & \text{khi } x > 3 \\ 1 - a^2x & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục tại $x=3$.

- A. $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.
B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.
C. $-\frac{4}{3}$.
D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện bài toán trở thành: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$. (*)

Ta có
$$\begin{cases} f(3) = 1 - 3a^2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x-3}-x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-2)(\sqrt{4x-3}+x)}{1-x} = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (1 - a^2x) = 1 - 3a^2. \end{cases}$$

$\xrightarrow{(*)} a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\quad} a_{\min} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$

Câu 13: Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ a^2x + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

- A. $a_{\max} = 3$.
B. $a_{\max} = 0$.
C. $a_{\max} = 1$.
D. $a_{\max} = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta cần có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$. (*)

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(2) = 2a^2 - \frac{7}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} = \frac{1}{4} \longrightarrow (*) \Leftrightarrow a = \pm 1 \longrightarrow a_{\max} = 1. \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(a^2 x + \frac{1}{4} \right) = 2a^2 - \frac{7}{4} \end{cases}$$

Câu 14: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.
B. $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 1)$.
C. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.
D. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - \cos x) = 1 - \cos 0 = 0 \longrightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x = 0. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{0+1} = 1 \end{cases}$$

Câu 15: Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ x-1 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là

sai?

- A. Hàm số liên tục tại $x = -1$.
B. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty, -1); (1; +\infty)$.
C. Hàm số liên tục tại $x = 1$.
D. Hàm số liên tục trên khoảng $(-1, 1)$.

Lời giải

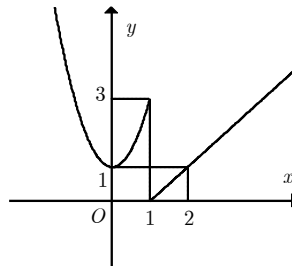
Chọn A

Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; -1), (-1; 1), (1; +\infty)$.

$$\bullet \text{ Ta có } \begin{cases} f(-1) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x-1) = -2 \end{cases} \longrightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x = -1.$$

$$\bullet \text{ Ta có } \begin{cases} f(1) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x=1. \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos \frac{\pi x}{2} = 0 \end{cases}$$

Câu 16: Hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên không liên tục tại điểm có hoành độ là bao nhiêu?



A. $x = 0$.

B. $x = 1$.

C. $x = 2$.

D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy tại điểm có hoành độ $x=1$ đồ thị của hàm số bị "đứt" nên hàm số không liên tục tại đó.

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \neq 3 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ nên $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x} & \text{khi } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

B. mọi điểm trừ $x = 0$.

C. mọi điểm trừ $x = 1$.

D. mọi điểm trừ $x = 0$ và $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ và $(1; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 0. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1)=1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x=1. \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = 1 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x < 3, x \neq 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x \geq 3 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

B. mọi điểm trừ $x=1$.

C. mọi điểm trừ $x=3$.

D. mọi điểm trừ $x=1$ và $x=3$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;1), (1;3)$ và $(3;+\infty)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1)=4 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \longrightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x=1. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(3)=2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x+1) = 4 \longrightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x=3. \end{cases}$$

Câu 19: Số điểm gián đoạn của hàm số $h(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x < 0 \\ x^2+1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 3x-1 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=h(x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=h(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0), (0;2)$ và $(2;+\infty)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} h(0)=1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0 \longrightarrow f(x) \text{ không liên tục tại } x=0. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} h(2) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 5 \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 2. \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 1) = 5 \end{cases}$$

Câu 20: Tính tổng S gồm tất cả các giá trị m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ m^2 x + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $S = -1$.

B. $S = 0$.

C. $S = 1$.

D. $S = 2$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Điều kiện bài toán trở thành $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$. (*)

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (m^2 x + 1) = m^2 + 1 \longrightarrow (*) \Leftrightarrow m^2 + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 1 \longrightarrow S = 0.$$

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x \cos x & \text{khi } x < 0 \\ \frac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0 \leq x < 1. \\ x^3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $x \in \mathbb{R}$.

B. mọi điểm trừ $x = 0$.

C. mọi điểm trừ $x = 1$.

D. mọi điểm trừ $x = 0; x = 1$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 0), (0; 1)$ và $(1; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x \cos x) = 0 \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 0. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{1+x} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1)=1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{2} \longrightarrow f(x) \text{ không liên tục tại } x=1. \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^3 = 1 \end{cases}$$

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = -4x^3 + 4x - 1$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.
- B. Phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- C. Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-2; 0)$.
- D. Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

(i) Hàm $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R} \longrightarrow$ A đúng.

(ii) Ta có $\begin{cases} f(-1) = -1 < 0 \\ f(-2) = 23 > 0 \end{cases} \longrightarrow f(x) = 0$ có nghiệm x_1 trên $(-2; 1)$, mà

$$(-2; -1) \subset (-2; 0) \subset (-\infty; 1) \longrightarrow \text{B sai và C đúng}$$

(iii) Ta có $\begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \longrightarrow f(x) = 0$ có nghiệm x_2 thuộc $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Kết hợp với (1) suy ra

$$f(x) = 0 \text{ có các nghiệm } x_1, x_2 \text{ thỏa: } -3 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < \frac{1}{2} \longrightarrow \text{D đúng.}$$

Câu 23: Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.
- B. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.
- C. Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2; 1)$.
- D. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + x + 1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có

$$(i) \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-1) = -3 \end{cases} \Rightarrow f(-1).f(0) < 0 \longrightarrow f(x) = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm } x_1 \text{ thuộc } (-1; 0).$$

(ii) $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(0).f(1)<0 \longrightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm x_2 thuộc $(0;1)$.

$$(iii) \begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 15 \end{cases} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0 \longrightarrow f(x) = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm } x_3 \text{ thuộc } (1; 2).$$

Vậy phương trình $f(x)=0$ đã cho có các nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa

$$-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$$

Câu 24: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên $\mathbb{R}$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chon D

Hàm số $f(x)=x^3-3x-1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-2;-1)$, $(-1;0)$, $(0;2)$.

Ta có

- $\begin{cases} f(-2) = -3 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-2)f(-1) < 0 \longrightarrow (1) \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (-2; -1).$

- $\begin{cases} f(-1)=1 \\ f(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(-1)f(0) < 0 \longrightarrow (1) \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (-1;0).$

- $\begin{cases} f(2)=1 \\ f(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(2)f(0) < 0 \longrightarrow (1) \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (0;2).$

Như vậy phương trình (1) có ít nhất ba thuộc khoảng $(-2;2)$. Tuy nhiên phương trình $f(x)=0$ là phương trình bậc ba có nhiều nhất ba nghiệm. Vậy phương trình $f(x)=0$ có đúng nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ sao cho $f(-1)=2$, $f(4)=7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x)=5$ trên đoạn $[-1;4]$:

A. Vô nghiệm.

B. Có ít nhất một nghiệm.

C. Có đúng một nghiệm.

D. Có đúng hai

nghiệm.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=5 \Leftrightarrow f(x)-5=0$. Đặt $g(x)=f(x)-5$. Khi đó

$$\begin{cases} g(-1) = f(-1) - 5 = 2 - 5 = -3 \\ g(4) = f(4) - 5 = 7 - 5 = 2 \end{cases} \Rightarrow g(-1)g(4) < 0.$$

Vậy phương trình $g(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;4)$ hay phương trình $f(x)=5$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;4)$.

Câu 26: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10;10)$ để phương trình $x^3 - 3x^2 + (2m-2)x + m - 3 = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$?

A. 19.

B. 18.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + (2m-2)x + m - 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

• Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1 < -1 < x_2 < x_3$. Khi đó $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Ta có $f(-1) = (-1 - x_1)(-1 - x_2)(-1 - x_3) > 0$ (do $x_1 < -1 < x_2 < x_3$).

Mà $f(-1) = -m - 5$ nên suy ra $-m - 5 > 0 \Leftrightarrow m < -5$.

• Thử lại: Với $m < -5$, ta có

▪ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại $a < -1$ sao cho $f(a) < 0$. (1)

▪ Do $m < -5$ nên $f(-1) = -m - 5 > 0$. (2)

▪ $f(0) = m - 3 < 0$. (3)

▪ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại $b > 0$ sao cho $f(b) > 0$. (4)

Từ (1) và (2), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; -1)$; Từ (2) và (3), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$; Từ (3) và (4), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0; +\infty)$.

Vậy khi $m < -5$ thỏa mãn $\xrightarrow[m \in (-10; 10)]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-9; -8; -7; -6\}$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 3

PHẦN 1: GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 là:

A. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

B. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

C. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

D. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 2: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 6n + 1}{8n^2 + 5}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n + 1}{-3n^3 + 5n^2 - 2}$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 - n + 3}}{8n - 5}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{2^{n+1}}{3^n} \right)$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4.5^n + 2^{n+2}}{6.5^n}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{n^3}}{6^n}$.

Lời giải

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 6n + 1}{8n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(2 + \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(8 + \frac{5}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}}{8 + \frac{5}{n^2}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n + 1}{3n^3 + 6n^2 - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^3 \left(3 + \frac{6}{n} - \frac{2}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{3 + \frac{6}{n} - \frac{2}{n^3}} = 0$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 - n + 3}}{8n - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{4 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}}{n \left(8 - \frac{5}{n} \right)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{2^{n+1}}{3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n \right) = 4$.

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4.5^n + 2^{n+2}}{6.5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4.5^n + 2.2^n}{6.5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 2 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n}{6} = \frac{2}{3}$.

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{n^3}}{6^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{4}{n^3} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6} \right)^n = 2 \cdot 0 = 0$.

Câu 3: Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} (4x^2 - 5x + 6); \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}.$$

Lời giải

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} (4x^2 - 5x + 6) = 4(-3)^2 - 5 \cdot (-3) + 6 = -3.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(2x - 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(x - 4)(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(\sqrt{x} + 2)(x + 4)} = \frac{1}{32}$$

Câu 4: Tính các giới hạn sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x + 8}{5x - 2} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 8}{5x - 2}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - x + 1}}{3x - 2} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - x + 1}}{3x - 2}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2 + 4}{2x + 4} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^2 + 4}{2x + 4}. \end{array}$$

Lời giải

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x + 8}{5x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(6 + \frac{8}{x} \right)}{x \left(5 - \frac{2}{x} \right)} = \frac{6}{5}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 8}{5x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(6 + \frac{8}{x} \right)}{x \left(5 - \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + \frac{8}{x}}{5 - \frac{2}{x}} = \frac{6}{5}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - x + 1}}{3x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{9 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x \left(3 - \frac{2}{x} \right)} = -\frac{3}{3} = -1.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - x + 1}}{3x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{9 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x \left(3 - \frac{2}{x} \right)} = \frac{3}{3} = 1.$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2 + 4}{2x + 4} = -\infty$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^2 + 4}{2x + 4} = +\infty.$$

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{nếu } x < 2 \\ 4 & \text{nếu } x = 2 \\ -3x + b & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$

- a) Với $a=0, b=1$, xét tính liên tục của hàm số tại $x=2$.
 b) Với giá trị nào của a, b thì hàm số liên tục tại $x=2$?
 c) Với giá trị nào của a, b thì hàm số liên tục trên tập xác định?

Lời giải

$$\text{a) Với } a=0, b=1, \text{ hàm số } f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{khi } x < 2 \\ 4 & \text{khi } x = 2 \\ -3x+b & \text{khi } x > 2 \end{cases}$$

Với $x < 2$ thì $f(x) = 2x$ là hàm liên tục.

Với $x > 2$ thì $f(x) = -3x+1$ là hàm liên tục.

Tại $x = 2$ ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-3x+1) = -5.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. Do đó không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Vậy hàm số liên tục trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

b) Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x+a) = 4+a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-3x+b) = -6+b$$

Để hàm số liên tục tại $x = 2$ thì:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4+a=4 \\ -6+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=10 \end{cases}$$

Vậy với $a=0$ và $b=10$ thì hàm số liên tục tại $x=2$.

c) Tập xác định của hàm số là: $\mathbb{R}$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số liên tục tại $x=2$. Vì vậy với $a=0$ và $b=10$ thỏa mãn điều kiện.

Câu 6: Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất (Hình 18). Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$



Hình 18

Lời giải

Gọi u_n là dãy số thể hiện quãng đường di chuyển của quả bóng sau mỗi lần chạm đất.

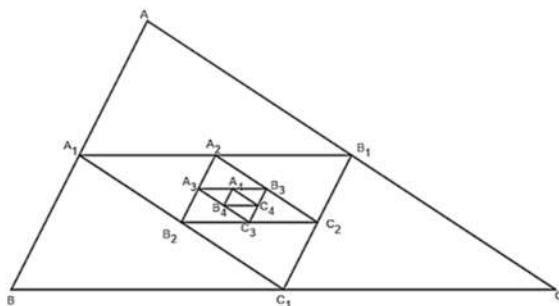
$$\text{Ta có: } u_1 = 55,8, u_2 = \frac{1}{10} \cdot u_1; u_3 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot u_1; \dots; u_n = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \cdot u_1.$$

Khi đó dãy (u_n) lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 55,8$ và công bội $q = \frac{1}{10}$ thỏa mãn $|q| < 1$.

$$\text{Suy ra } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{55,8}{1 - \frac{1}{10}} = 62 \text{ (m)}.$$

Vậy tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần là 62 m.

Câu 7: Cho một tam giác đều ABC cạnh a . Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC , tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$, ..., tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n$, ... Gọi $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ và $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$



- Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .
- Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$ và $S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$

Lời giải

a)

(p_n) là dãy số chu vi của các tam giác theo thứ tự $ABC, A_1B_1C_1, \dots$

$$\text{Ta có: } p_1 = p_{\Delta ABC} = a + a + a = 3a;$$

$$p_2 = p_{\Delta A_1 B_1 C_1} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \cdot (3a) = \frac{1}{2} \cdot p_1$$

$$p_3 = p_{\Delta A_2 B_2 C_2} = \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (3a) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot p_1; \dots ;$$

$$p_{\Delta A_n B_n C_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot p_1; \dots$$

Suy ra:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot (3a) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (3a) = 0 \cdot 3a = 0.$$

(S_n) là dãy số chu vi của các tam giác theo thứ tự $ABC, A_1 B_1 C_1, \dots$

Gọi h là chiều cao của tam giác ABC và $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có:

$$S_1 = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ah;$$

$$S_2 = S_{\Delta A_1 B_1 C_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} ah\right) = \frac{1}{4} \cdot S_1;$$

$$S_3 = S_{\Delta A_2 B_2 C_2} = S_{\Delta A_n B_n C_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot S_1; \dots ;$$

$$S_{\Delta A_n B_n C_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot S_1; \dots$$

Suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot S_1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} ah\right) = 0 \cdot \frac{1}{2} ah = 0.$$

b)

+) Ta có (p_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $p_1 = 3a$ và công bội

$q = \frac{1}{2}$ thỏa mãn $|q| < 1$ có tổng:

$$P_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = \frac{3a}{1 - \frac{1}{2}} = 6a$$

+) Ta cũng có (S_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $S_1 = \frac{1}{2} ah$ và công

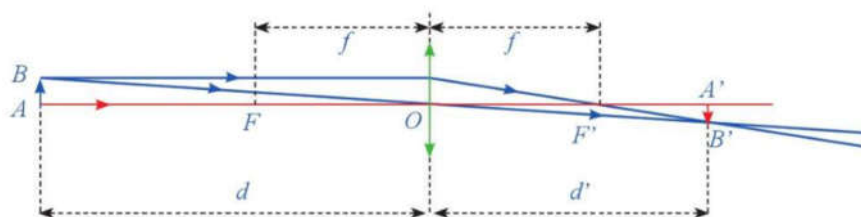
bội $q = \frac{1}{2}$ thỏa mãn $|q| < 1$ có tổng:

$$S_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \frac{\frac{1}{2}ah}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}ah$$

Câu 8: Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f . Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính như Hình 19. Công thức thấu kính là $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$.

a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.

b) Tìm $\lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d)$, $\lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d)$ và $\lim_{d \rightarrow f} \varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.



Hình 19

Lời giải

a) Ta có: $\frac{1}{d'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d} \Leftrightarrow \frac{1}{d'} = \frac{d-f}{df} \Leftrightarrow d' = \frac{df}{d-f}$.

b) Ta có:

$$\lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d) = \lim_{d \rightarrow f^+} \frac{df}{d-f} = +\infty; \quad \lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d) = \lim_{d \rightarrow f^-} \frac{df}{d-f} = -\infty;$$

$$\lim_{d \rightarrow f} \varphi(d) = \lim_{d \rightarrow f} \frac{df}{d-f} = \infty$$

Giải thích ý nghĩa: Khi khoảng cách của vật tới thấu kính mà gần với tiêu cự thì khoảng cách ảnh của vật đến thấu kính ra xa vô tận nên lúc đó bằng mắt thường mình không nhìn thấy.

BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG V

PHẦN 1: TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Kết quả của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n-1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n}$ bằng:

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$\lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n-1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} = \lim \frac{3^n - 2 \cdot 2^n - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} = \lim \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n}{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = 0$$

Câu 2: Giá trị đúng của $\lim(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2})$ là:

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\lim(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}) = \lim n \left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - \sqrt{3+\frac{2}{n^2}} \right) = -\infty.$$

$$\text{Vì } \lim n = +\infty; \lim \left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - \sqrt{3+\frac{2}{n^2}} \right) = 1 - \sqrt{3} < 0.$$

Câu 3: Giá trị đúng của $\lim(3^n - 5^n)$ là:

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 2. D. -2.

Lời giải

Chọn B

$$\lim(3^n - 5^n) = \lim 5^n \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1 \right) = -\infty.$$

$$\text{Vì } \lim 5^n = +\infty; \lim \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1 \right) = -1.$$

Câu 4: Tính giới hạn $T = \lim(\sqrt{16^{n+1}+4^n} - \sqrt{16^{n+1}+3^n})$

- A. $T = 0$ B. $T = \frac{1}{4}$ C. $T = \frac{1}{8}$ D. $T = \frac{1}{16}$

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } T &= \lim(\sqrt{16^{n+1}+4^n} - \sqrt{16^{n+1}+3^n}) = \lim \frac{4^n - 3^n}{\sqrt{16^{n+1}+4^n} + \sqrt{16^{n+1}+3^n}} \\ &= \lim \frac{4^n - 3^n}{\sqrt{16 \cdot 16^n + 4^n} + \sqrt{16 \cdot 16^n + 3^n}} = \lim \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\sqrt{16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n} + \sqrt{16 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}} = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Câu 5: Cho dãy số (u_n) có $\lim u_n = 2$. Tính giới hạn $\lim \frac{3u_n - 1}{2u_n + 5}$.

A. $\frac{-1}{5}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{5}{9}$

D. $+\infty$

Lời giải

Chọn C

Từ $\lim u_n = 2$ ta có $\lim \frac{3u_n - 1}{2u_n + 5} = \frac{3 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 2 + 5} = \frac{5}{9}$.

Câu 6: Biết $\lim \frac{2n^3 + n^2 - 4}{an^3 + 2} = \frac{1}{2}$ với a là tham số. Khi đó $a - a^2$ bằng

A. -12 .

B. -2 .

C. 0 .

D. -6 .

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim \frac{2n^3 + n^2 - 4}{an^3 + 2} = \lim \frac{n^3 \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^3} \right)}{n^3 \left(a + \frac{2}{n^3} \right)} = \frac{2}{a} = \frac{1}{2}$.

Suy ra $a = 4$. Khi đó $a - a^2 = 4 - 4^2 = -12$.

Câu 7: Tìm $L = \lim \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n} \right)$

A. $L = \frac{5}{2}$.

B. $L = +\infty$.

C. $L = 2$.

D. $L = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $1+2+3+\dots+k$ là tổng của cấp số cộng có $u_1 = 1$, $d = 1$ nên

$$1+2+3+\dots+k = \frac{(1+k)k}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2+\dots+k} = \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

$$L = \lim \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \right) = \lim \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{n+1} \right) = 2.$$

Câu 8: Tính $I = \lim \left[n \left(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 1} \right) \right]$.

A. $I = +\infty$

B. $I = \frac{3}{2}$

C. $I = 1,499$

D. $I = 0$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } I = \lim \left[n \left(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 1} \right) \right] = \lim \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{3}{2}$$

Câu 9: Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào có giá trị khác với các giới hạn còn lại?

A. $\lim \frac{3n-1}{3n+1}$ B. $\lim \frac{2n+1}{2n-1}$ C. $\lim \frac{4n+1}{3n-1}$ D. $\lim \frac{n+1}{n-1}$

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\lim \frac{3n-1}{3n+1} = \lim \frac{3 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{vì } \lim \frac{1}{n} = 0; \quad \lim \frac{2n+1}{2n-1} = \lim \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{vì } \lim \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim \frac{4n+1}{3n-1} = \lim \frac{4 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{4}{3} \quad \text{vì } \lim \frac{1}{n} = 0; \quad \lim \frac{n+1}{n-1} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = 1 \quad \text{vì } \lim \frac{1}{n} = 0.$$

Câu 10: Tính $\lim n \left(\sqrt{4n^2 + 3} - \sqrt[3]{8n^3 + n} \right)$.

A. $+\infty$. B. 1. C. $-\infty$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim n \left(\sqrt{4n^2 + 3} - \sqrt[3]{8n^3 + n} \right) &= \lim n \left[\left(\sqrt{4n^2 + 3} - 2n \right) + \left(2n - \sqrt[3]{8n^3 + n} \right) \right] \\ &= \lim \left[n \left(\sqrt{4n^2 + 3} - 2n \right) + n \left(2n - \sqrt[3]{8n^3 + n} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \lim n \left(\sqrt{4n^2 + 3} - 2n \right) = \lim \frac{3n}{\left(\sqrt{4n^2 + 3} + 2n \right)} = \lim \frac{3}{\left(\sqrt{4 + \frac{3}{n^2}} + 2 \right)} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Ta có: } \lim n \left(2n - \sqrt[3]{8n^3 + n} \right) = \lim \frac{-n^2}{\left(4n^2 + 2n\sqrt[3]{8n^3 + n} + \sqrt[3]{(8n^3 + n)^2} \right)}$$

$$= \lim \frac{-1}{\left(4 + 2\sqrt[3]{8 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{\left(8 + \frac{1}{n^2} \right)^2} \right)} = -\frac{1}{12}.$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{4n^2 + 3} - \sqrt[3]{8n^3 + n} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}.$$

Câu 11: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ bằng

- A. 2. B. 4. C. $\frac{1}{4}$. D. 0.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

Câu 12: Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3}$

- A. $L = -\infty$ B. $L = 0$ C. $L = +\infty$ D. $L = 1$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3} = \frac{3-3}{3+3} = 0.$$

Câu 13: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+1}{-x+1}$ bằng

- A. 2 B. 4 C. -1 D. -4

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+1}{-x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{-1 + \frac{1}{x}} = -4.$$

Câu 14: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{2x-4}$ bằng

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $-\frac{3}{4}$. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{2 - \frac{4}{x}} = \frac{3}{2}.$$

Câu 15: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$. C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty$. D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ do $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ và $x > 0$. Vậy đáp án A đúng.

Suy ra đáp án B sai.

Các đáp án C và D đúng. Giải thích tương tự đáp án A.

Câu 16: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+1}$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. 2.

D. -1.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 2.$$

Câu 17: Xác định $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2}$.

A. 0.

B. $-\infty$.

C. Không tồn tại.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty.$$

Vậy không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2}$.

Câu 18: Cho số thực a thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018} = \frac{1}{2}$. Khi đó giá trị của a là

A. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $a = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

C. $a = \frac{1}{2}$.

D. $a = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2+\frac{3}{x^2}+\frac{2017}{x}}}{2+\frac{2018}{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 19: Cho các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 3$, hỏi $\lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) - 4g(x)]$ bằng

- A. 5. B. 2. C. -6. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) - 4g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} 3f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} 4g(x) = 3 \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - 4 \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -6$.

Câu 20: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = +\infty$. B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = 1$. C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = -\infty$. D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = 0$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}}{x \left(\frac{1}{x} - 2x \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}}{\frac{1}{x} - 2x} = +\infty$. Vậy A đúng.

Câu 21: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{(x+2)^2}$ bằng

- A. $-\infty$. B. $\frac{3}{16}$. C. 0. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+2)^2} \cdot (x+1) = -\infty$.

Do $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -2} (x+1) = -1 < 0$.

Câu 22: Cho $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{3x+1}-1)}{x}$ và $J = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x+1}$. Tính $I - J$.

- A. 6. B. 3. C. -6. D. 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{3x+1}-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{x(\sqrt{3x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{\sqrt{3x+1}+1} = 3.$$

$$J = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-2) = -3.$$

Khi đó $I - J = 6$.

Câu 23: Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-3}{x-1}$

A. $+\infty$.

B. 2.

C. $-\infty$.

D. -2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-3}{x-1} = +\infty$ vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} (4x-3) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$, $x-1 > 0$ khi $x \rightarrow 1^+$.

Câu 24: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$.

A. $L = 1$

B. $L = -1$

C. $L = 0$

D. $L = \frac{\pi}{2}$

Lời giải

Chọn B

Đặt: $t = x - \frac{\pi}{2}$.

Khi $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ thì $t \rightarrow 0$. Vậy $L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t} = -1$.

Câu 25: Tìm giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1-\sqrt{x^2-x+2})$.

A. $I = 1/2$.

B. $I = 46/31$.

C. $I = 17/11$.

D. $I = 3/2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1-\sqrt{x^2-x+2}) \Leftrightarrow I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-x^2+x-2}{x+\sqrt{x^2-x+2}} + 1 \right)$
 $\Leftrightarrow I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x+\sqrt{x^2-x+2}} + 1 \right) \Leftrightarrow I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} + 1 \right) \Leftrightarrow I = \frac{3}{2}$.

Câu 26: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+5}}{x-3}$ bằng

A. 0.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+5}}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2) - (\sqrt[3]{x+5}-2)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+5-8}{(x-3)\left((\sqrt[3]{x+5})^2 + 2\sqrt[3]{x+5} + 4\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+5})^2 + 2\sqrt[3]{x+5} + 4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Câu 27: Tính $\lim_{x \rightarrow a^{505}} \frac{x^4 - a^{2020}}{x - a^{505}}$.

- A. $2a^{2010}$. B. $4a^{1515}$. C. $+\infty$. D. $4a^{505}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^{505}} \frac{x^4 - a^{2020}}{x - a^{505}} &= \lim_{x \rightarrow a^{505}} \frac{(x - a^{505})(x + a^{505})(x^2 + a^{1010})}{x - a^{505}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^{505}} (x + a^{505})(x^2 + a^{1010}) = (a^{505} + a^{505})((a^{505})^2 + a^{1010}) = 4a^{1515}. \end{aligned}$$

Câu 28: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4}$ bằng

- A. $\frac{5}{4}$. B. $-\frac{5}{4}$. C. $\frac{1}{4}$. D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{5}{4}.$$

Câu 29: $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x}$ bằng.

- A. 1. B. -1. C. $\frac{5}{4}$. D. $-\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x-1}{x} = \frac{5}{4}.$$

Câu 30: Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-3}}$.

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. C. $\sqrt{2}$. D. $-\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{-x\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

Câu 31: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**

A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2 \right) = \frac{-3}{2}.$ **B.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2 \right) = +\infty.$

C. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty.$ **D.** $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty.$

Lời giải

Chọn C

+ Với đáp án A ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1 - x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-3}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x\left(3-\frac{3}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{2}{x}\right)} \right) = \frac{-3}{2} \Rightarrow \text{A đúng.}$$

+ Với đáp án B ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1 - x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-3}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x\left(3-\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{2}{x}\right)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{0} \right) = +\infty \Rightarrow \text{B đúng.}$$

+ Với đáp án C ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0$, $x+1 < 0$ với mọi $x < -1$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} (3x+2) = -1 < 0$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1} = +\infty \Rightarrow \text{C sai.}$

+ Với đáp án D ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0$, $x+1 > 0$ với mọi $x > -1$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} (3x+2) = -1 < 0$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty \Rightarrow \text{D đúng.}$

Câu 32: Tính giới hạn $K = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{x^2-3x}.$

A. $K = -\frac{2}{3}$.

B. $K = \frac{2}{3}$.

C. $K = \frac{4}{3}$.

D. $K = 0$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } K = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(x-3)(\sqrt{4x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{(x-3)(\sqrt{4x+1}+1)} = -\frac{2}{3}.$$

Câu 33: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x-1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Để hàm số đã cho có đạo hàm tại $x=1$ thì $2a+b$

bằng:

A. 2.

B. 5.

C. -2.

D. -5.

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1-1}{x-1} = 2;$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax^2+bx-a-b}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x^2-1)+b(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)[a(x+1)+b]}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} [a(x+1)+b] = 2a+b \end{aligned}$$

$$\text{Theo yêu cầu bài toán: } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow 2a+b=2.$$

Câu 34: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{6x-2}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\bullet \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{6x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{6-\frac{2}{x}} = \frac{1}{6}.$$

Câu 35: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-4x+2}-x)$

A. -4.

B. -2.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x + 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1}$$

$$= -2.$$

Câu 36: Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$.

- A. Không tồn tại. B. -1. C. ± 1 . D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}.$$

Xét:

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1.$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1.$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$.

Câu 37: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^{2018} - 1}$.

- A. -1. B. 1. C. 2. D. 0.

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^{2018} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{2017}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{1}{x^{2017}}} = 0.$$

Câu 38: Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- I. $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.
 II. $f(x)$ không liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) \geq 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

- A. Chỉ I đúng. B. Chỉ II đúng. C. Cả I và II đúng. D. Cả I và II sai.

Lời giải

Chọn A

Câu 39: Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I). $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ liên tục với mọi $x \neq 1$.

(II). $f(x) = \sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(III). $f(x) = \frac{|x|}{x}$ liên tục tại $x=1$.

A. Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (I) và (II). **C.** Chỉ (I) và (III). **D.** Chỉ (II) và (III).

Lời giải

Chọn D

Ta có (II) đúng vì hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định.

Ta có (III) đúng vì $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x}, & \text{khi } x \geq 0 \\ -\frac{x}{x}, & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 1$.

Vậy hàm số $y = f(x) = \frac{|x|}{x}$ liên tục tại $x=1$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{khi } x \neq 4 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 4 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất ?

- A.** Hàm số liên tục tại $x=4$.
B. Hàm số liên tục tại mọi điểm trên tập xác định nhưng gián đoạn tại $x=4$.
C. Hàm số không liên tục tại $x=4$.
D. Tất cả đều sai.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4} = f(4)$

Hàm số liên tục tại điểm $x=4$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}-1} + 2 & \text{khi } x > 1 \\ 3x^2 + x - 1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất ?

- A.** Hàm số liên tục tại $x=1$.
B. Hàm số liên tục tại mọi điểm.
C. Hàm số không liên tục tại $x=1$.
D. Tất cả đều sai.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{x-1}} + 2 \right] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 + x - 1) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Hàm số không liên tục tại $x=1$.

Câu 42: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - m & \text{khi } x \geq 0 \\ mx + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 2$.

B. $m = \pm 2$.

C. $m = -2$.

D. $m = 0$.

Lời giải

Chọn C

Trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $f(x) = 2\sqrt{x} - m$ là hàm số liên tục.

Trên khoảng $(-\infty; 0)$ hàm số $f(x) = mx + 2$ là hàm số liên tục.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\sqrt{x} - m) = -m = f(0)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (mx + 2) = 2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -m = 2 \Leftrightarrow m = -2.$$

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{|2x^2 - 7x + 6|}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ a + \frac{1-x}{2+x} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Biết a là giá trị để hàm số $f(x)$ liên

tục tại $x_0 = 2$, tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $-x^2 + ax + \frac{7}{4} > 0$.

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Tại $x_0 = 2$, ta có:

$$\bigcirc f(2) = a - \frac{1}{4}$$

$$\bigcirc \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(a + \frac{1-x}{2+x} \right) = a - \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \bigcirc \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2x^2 - 7x + 6|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|(x-2)(2x-3)|}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(2x-3)}{x-2} = -\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x-3) = -1. \end{aligned}$$

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ thì $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

$$\Leftrightarrow a - \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}.$$

Với $a = -\frac{3}{4}$, xét bất phương trình $-x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{7}{4} > 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{4} < x < 1$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ là?

- A. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$. B. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.
C. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$. D. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số f xác định trên đoạn $[a; b]$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$, đồng thời $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Câu 45: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ m + \frac{1-x}{1+x} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại

$x = 0$.

- A. $m = 1$. B. $m = -2$. C. $m = -1$. D. $m = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(m + \frac{1-x}{1+x} \right) = m + 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = -1.$$

$$f(0) = m + 1$$

Để hàm liên tục tại $x = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m + 1 = -1 \Rightarrow m = -2$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x} & \text{khi } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào đúng

- A. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc đoạn $[0;1]$.
- B. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 0$.
- C. Hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.
- D. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

- Nếu $x \neq 0, x \neq 1$ thì hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 0), (0; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- Nếu $x = 0$ thì $f(0) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$.

Suy ra: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Do đó, hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

- Nếu $x = 1$ thì $f(1) = 1$ và $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$.

Do đó, hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$.

Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

- A. $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 0$.
- B. $f(\sqrt{2}) < 0$.
- C. $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.
- D. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

$$\text{Ta có } f(0)=1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Vì $f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nên $f(x)$ gián đoạn tại $x=0$. Do đó $f(x)$ không có đạo hàm tại $x=0$.

$$\forall x \neq 0 \quad f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} \geq 0 \text{ nên } f(\sqrt{2}) > 0. \text{ Vậy A, B, C sai.}$$

Câu 48: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để

hàm số gián đoạn tại $x=1$.

A. $m \neq 2$.

B. $m \neq 1$.

C. $m \neq 2$.

D. $m \neq 3$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Hàm số gián đoạn tại $x=1$ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} \neq 3m$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} \neq 3m \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) \neq 3m \Leftrightarrow 3 \neq 3m \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Câu 49: Tìm tham số thực m để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-12}{x+4} & \text{khi } x \neq -4 \\ mx+1 & \text{khi } x = -4 \end{cases}$ liên tục tại điểm

$$x_0 = -4.$$

A. $m = 4$.

B. $m = 3$.

C. $m = 2$.

D. $m = 5$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có:

$$+ \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2+x-12}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x-3)(x+4)}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -4} (x-3) = -7.$$

$$+ f(-4) = -4m+1.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -4$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = f(-4) \Leftrightarrow -4m+1 = -7$

$$\Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 50: Cho a, b là hai số thực sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} & x \neq 1 \\ 2ax - 1, & x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính

$$a - b.$$

A. 0

B. -1

C. -5

D. 7

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(1) = 2a - 1$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì phải tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1}$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

Để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1}$ thì $(x^2 + ax + b) : x-1 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow b = -a - 1$.

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+a+1) = a+2.$$

Do đó để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì t_2 .

Câu 51: Giá trị của m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 3x-m & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$ là

A. -5.

B. 1.

C. -1.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(1) = 3 - m$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 3 - m = 2 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 52: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 4}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ -2ax + 1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục tại điểm

$$x=1.$$

A. $a=3$.

B. $a=2$.

C. $a=-2$.

D. $a=-1$.

Lời giải:

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f(1) = 1 - 2a$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2ax + 1) = 1 - 2a; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 4) = 5.$$

Hàm số đã cho liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow 1 - 2a = 5 \Leftrightarrow a = -2.$

Câu 53: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln x} & \text{khi } x > 1 \\ m.e^{x-1} + 1 - 2mx^2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$$

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = 0$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$, $f(1) = 1 - m$.

Ta thấy hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\ln x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (m.e^{x-1} + 1 - 2mx^2) = 1 - m.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1).$$

$$\Leftrightarrow 1 - m = 1 \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 54: Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} & \text{khi } x > -1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \leq -1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = -1$.

- A. $m = 2$. B. $m = 0$. C. $m = -4$. D. $m = 4$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x+1)(x+3)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+3) = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (mx + 2) = -m + 2.$$

$$f(-1) = -m + 2.$$

Để hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = -1$ thì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = f(-1)$

$$\Leftrightarrow 2 = -m + 2 \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 55: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + a - 1, & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}, & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tìm tất cả giá trị của a để hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 0$.

- A. $a = 1$. B. $a = 3$. C. $a = 2$. D. $a = 4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + a - 1) = a - 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x(\sqrt{1+2x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+2x}+1} = 1.$$

Hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow a - 1 = 1 \Leftrightarrow a = 2$.

Câu 56: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2 x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ (1-m)x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có hàm số luôn liên tục $\forall x \neq 2$.

$$\text{Tại } x = 2, \text{ ta có } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1-m)x = (1-m)2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (m^2 x^2) = 4m^2; \quad f(2) = 4m^2.$$

Hàm số liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4m^2 = (1-m)2 \Leftrightarrow 4m^2 + 2m - 2 = 0(1)$$

Phương trình luôn có hai nghiệm thực phân biệt. Vậy có hai giá trị của m .

PHẦN 2: TỰ LUẬN

Câu 57: Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2 + 4n + 1}{2n^2 - 3n + 7}.$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4}{5n^3 + n + 8}.$

$$c) \lim \frac{(n+1)(2n-1)}{(3n+2)(n+3)}.$$

Lời giải

$$a) \lim \frac{-3n^2+4n+1}{2n^2-3n+7} = \lim \frac{-3+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}} = -\frac{3}{2}.$$

$$b) \lim \frac{n^3+4}{5n^3+n+8} = \lim \frac{1+\frac{1}{n^3}}{5+\frac{1}{n^2}+\frac{8}{n^3}} = \frac{1}{5}.$$

$$c) \lim \frac{(n+1)(2n-1)}{(3n+2)(n+3)} = \lim \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3}.$$

Câu 58: Tính các giới hạn sau

$$a) \lim \frac{\sqrt{n^2+n}+3\sqrt{n^2+1}}{n+1}. \quad b) \lim \frac{\sqrt[3]{8n^3+n}+2n+1}{3n+1}. \quad c) \lim \frac{n\sqrt{n^2+1}+2n^2+3}{3n^2+n+1}.$$

Lời giải

$$a) \lim \frac{\sqrt{n^2+n}+3\sqrt{n^2+1}}{n+1} = \lim \frac{\frac{\sqrt{n^2+n}+3\sqrt{n^2+1}}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+3\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{1}+3\sqrt{1}}{1} = 4.$$

$$b) \lim \frac{\sqrt[3]{8n^3+n}+2n+1}{3n+1} = \lim \frac{\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^2}}+2+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt[3]{8}+2}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$c) \lim \frac{n\sqrt{n^2+1}+2n^2+3}{3n^2+n+1} = \lim \frac{\frac{n\sqrt{n^2+1}+2n^2+3}{n^2}}{\frac{3n^2+n+1}{n^2}} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+2+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{1}+2}{3} = 1.$$

Câu 59: Tính các giới hạn sau

$$a) \lim \frac{n(2n+1)(3n+2)}{(6n+1)^3}. \quad b) \lim \frac{(2n+1)(n-2)+n}{n^3+n}.$$

Lời giải

$$a) \lim \frac{n(2n+1)(3n+2)}{(6n+1)^3} = \lim \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)}{\left(6+\frac{1}{n}\right)^3} = \frac{2 \cdot 3}{6^3} = \frac{1}{36}.$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n-2)+n}{n^3+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0.$$

Câu 60: Tính các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+n}-3n^2}{n^2+1}. \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2-n}-3n+1}{n^2+2}.$$

Lời giải

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+n}-3n^2}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^3}}-3}{1+\frac{1}{n^2}} = -3.$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2-n}-3n+1}{n^2+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{9}{n^2}-\frac{1}{n^3}}-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} = 0.$$

Câu 61: Tính các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n^2+n)-n^2+1}{(n+1)(n^2+2)-3n^3}. \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2+2)(n+3)+n^2}{2n^3-1}.$$

Lời giải

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n^2+n)-n^2+1}{(n+1)(n^2+2)-3n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)-3} = \frac{1.2}{1.1-3} = -1.$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2+2)(n+3)+n^2}{2n^3-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(3+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n^3}} = 3.$$

Câu 62: Tính các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-4^n}{1+4^n}. \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n-5.3^n}{3^n+1}. \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n-4^n}{3^n+4^n}.$$

Lời giải

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-4^n}{1+4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4^n}-1}{\frac{1}{4^n}+1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n-5.3^n}{3^n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-5}{1+\frac{1}{3^n}} = -5$$

$$c) \lim \frac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n} = \lim \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} = -1$$

Câu 63: Tính các giới hạn sau

a) $\lim \left(\sqrt[3]{n^3 - 3n^2} - n \right).$

b) $\lim \left(\sqrt[3]{n^3 + 3} - \sqrt{n^2 + 2} \right).$

Lời giải

$$a) \lim \left(\sqrt[3]{n^3 - 3n^2} - n \right) = \lim \frac{n^3 - 3n^2 - n^3}{\sqrt[3]{(n^3 - 3n^2)^2} + n^2 - n \cdot \sqrt[3]{n^3 - 3n^2}} = - \lim \frac{3}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^2} + 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{3}{n}}}$$

$$\text{Khi } n \rightarrow \infty \text{ thì: } \lim \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim \sqrt[3]{1 - \frac{3}{n}} = 1 \Rightarrow \lim \left(\sqrt[3]{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^2} + 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{3}{n}} \right) = 1$$

$$\text{Do đó, } \lim \left(\sqrt[3]{n^3 - 3n^2} - n \right) = -3$$

$$b) \lim \left(\sqrt[3]{n^3 + 3} - \sqrt{n^2 + 2} \right) = \lim \left(\sqrt[3]{n^3 + 3} - n \right) + \lim \left(n - \sqrt{n^2 + 2} \right)$$

$$= \lim \frac{n^3 + 3 - n^3}{\left(n^3 + 3\right)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3}} + \lim \frac{n^2 - n^2 - 2}{n + \sqrt{n^2 + 2}} = \lim \frac{3}{\left(n^3 + 3\right)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3}} - \lim \frac{2}{n + \sqrt{n^2 + 2}}$$

$$\text{Khi } n \rightarrow \infty \text{ thì: } \lim \left(\left(n^3 + 3\right)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3} \right) = \infty; \lim \left(n + \sqrt{n^2 + 2} \right) = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(n^3+3)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3+3}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n + \sqrt{n^2+2}} = 0. \text{ Do đó, } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3+3} - \sqrt{n^2+2}) = 0$$

Câu 64: Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1 - \sqrt{n^2+n})$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - n}{\sqrt{4n^2+3n-2n}}$.

Lời giải

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1 - \sqrt{n^2+n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - n^2 - n}{n+1 + \sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+1 + \sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$

Do đó, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1 - \sqrt{n^2+n}) = \frac{1}{2}$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - n}{\sqrt{4n^2+3n-2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n-n^2}{4n^2+3n-4n^2} \cdot \frac{\sqrt{4n^2+3n+2n}}{\sqrt{n^2+n+n}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{3}{n} + 2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + 1}} = \frac{2}{3}$

Do đó, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - n}{\sqrt{4n^2+3n-2n}} = \frac{2}{3}$

Câu 65: Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2+n} - \sqrt[3]{2n^2-8n^3})$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^2-n^3} + n}{\sqrt{n^2+n-n}}$.

Lời giải

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2+n} - \sqrt[3]{2n^2-8n^3}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2+n} + 2n) - \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{2n^2-8n^3} + 2n)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+n-4n^2}{\sqrt{4n^2+n}-2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-8n^3+8n^3}{(2n^2-8n^3)^{\frac{2}{3}} + 4n^2 - 2n\sqrt[3]{2n^2-8n^3}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}-2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{\sqrt[3]{(2n^2-8n^3)^2} + 4n^2 - 2n\sqrt[3]{8n^3\left(\frac{1}{4n}-1\right)}}$$

$$= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 2 \right)} + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 \cdot \left(\frac{1}{4n} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} + 2 - 2 \left(\frac{1}{4n} - 1 \right)^{\frac{1}{3}} \right]}$$

$$\text{Khi } n \rightarrow \infty \text{ thì: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 2 \right) = 2 - 2 = 0 \\ \lim \left[2 \cdot \left(\frac{1}{4n} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} + 2 - 2 \left(\frac{1}{4n} - 1 \right)^{\frac{1}{3}} \right] = -2 + 2 + 2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lim \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 2 \right)} + \frac{1}{\lim \left[2 \cdot \left(\frac{1}{4n} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} + 2 - 2 \left(\frac{1}{4n} - 1 \right)^{\frac{1}{3}} \right]} = +\infty$$

$$\text{Do đó, } \lim \left(\sqrt{4n^2 + n} - \sqrt[3]{2n^2 - 8n^3} \right) = +\infty$$

$$\text{b) } \lim \frac{\sqrt[3]{2n^2 - n^3} + n}{\sqrt{n^2 + n} - n} = \lim \frac{2n^2 - n^3 + n^3}{n^2 + n - n^2} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt[3]{(2n^2 - n^3)^2} + n^2 - n\sqrt[3]{2n^2 - n^3}}$$

$$= \lim \frac{n \left(n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n \right)}{\sqrt[3]{n^6 \cdot \left(\frac{2}{n} - 1 \right)^2} + n^2 - n\sqrt[3]{n^3 \left(\frac{2}{n} - 1 \right)}} = \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{\left(\frac{2}{n} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} + 1 - \sqrt[3]{\frac{2}{n} - 1}}$$

$$\text{Khi } n \rightarrow \infty \text{ thì: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim \left(\left(\frac{2}{n} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} + 1 - \sqrt[3]{\frac{2}{n} - 1} \right) = -1 + 1 + 1 = 1 \\ \lim \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{\left(\frac{2}{n} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} + 1 - \sqrt[3]{\frac{2}{n} - 1}} = 1. \text{ Do đó, } \lim \frac{\sqrt[3]{2n^2 - n^3} + n}{\sqrt{n^2 + n} - n} = 1$$

Câu 66: Tìm các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{-2x^2 + 6x - 4}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{-x^2 + 3x - 2}$$

Lời giải

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{-2x^2 + 6x - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{-2(x^2 - 3x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{-2(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{-2(x-1)} = -1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x^2 + 2x + 3} \right) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{-x^2 + 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{-(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+2} = 0$$

Câu 67: Tìm giới hạn các hàm số sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - x^2 - 72}{x^2 - 2x - 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 5x^2 + 4x^6}{(1-x)^2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a}$$

Lời giải

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - x^2 - 72}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^3 + 3x^2 + 8x + 24)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 3x^2 + 8x + 24}{x+1} = \frac{51}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 - 2x - 3)}{(x-3)(x^3 + 3x^2 + x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 3x^2 + x + 3} = 0$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 5x^2 + 4x^6}{(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x)}{(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x}{(x-1)} = \infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^3 + ax^2 + a^2x + a^3) = 4a^3$$

Câu 68: Tính các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x^3 + 8} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + x - 6}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{x+5} = \frac{8}{9} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x^3 + 8} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2-x}{x^2 - 2x + 4} = \frac{1}{3} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + x - 6} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(2x-3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{2x-3} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Câu 69: Tính các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + x - 30}{2x^2 - 9x - 5} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x^2 - 1} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{-x^2 + 4x + 5}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + x - 30}{2x^2 - 9x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+6)}{(x+5)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+6}{2x+1} = 1 \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(x-2)}{(2x-1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x-2}{2x+1} = -\frac{3}{4} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{-x^2 + 4x + 5} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x+1)(x+1)}{(x+1)(5-x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{5-x} = \frac{-1}{6} \end{aligned}$$

Câu 70: Tính các giới hạn sau

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 + 2x + 4}{x^2 - 3x - 4} \quad \text{c) } \\ \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3} \end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{2} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 + 2x + 4}{x^2 - 3x - 4} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - 2x + 4)}{(x+1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x + 4}{x-4} = -\frac{7}{5} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2+3)(x^2-9)}{(x^2+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2+3)(x-3)}{x^2+1} = -\frac{36}{5} \end{aligned}$$

Câu 71: Tính các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + x - 18}{x^3 - 8} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - x^2 - 72}{x^2 - 2x - 3}$$

Lời giải

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + x - 18}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(4x+9)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x+9}{x^2 + 2x + 4} = \frac{17}{12}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - x^2 - 72}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 + 8)(x-3)(x+3)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 + 8)(x+3)}{x+1} = \frac{51}{2}$$

Câu 72: Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1} \quad b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}$$

Lời giải

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{5}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{5}{3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 + 1)(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{(x^2 + 1)(x+3)} = 0$$

Câu 73: Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) \quad b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right) \quad c) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x + 2} + \frac{4}{x^2 - 4} \right)$$

Lời giải

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2 - (x+1)}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 - x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-1}{x + 1} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(1 + x + x^2) - 3}{(1 - x)(1 + x + x^2)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(x - 1)(x + 2)}{(1 - x)(1 + x + x^2)} \right]$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x + 2}{1 + x + x^2} \right) = -1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x + 2} + \frac{4}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left[\frac{x - 2 + 4}{(x - 2)(x + 2)} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x - 2} = -\frac{1}{4}$$

Câu 74: Tìm giới hạn các hàm số sau

$$a) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3}-2}{49-x^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{x+2}}{x^2-3x+2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{x^3-4x^2+3}$$

Lời giải

$$a) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3}-2}{49-x^2} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt{x-3}-2)(\sqrt{x-3}+2)}{(\sqrt{x-3}+2)(7-x)(7+x)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{(7+x)(\sqrt{x-3}+2)} = \frac{1}{56}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{x+2}}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-\sqrt{x+2})(2+\sqrt{x+2})}{(x-1)(x-2)(2+\sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-1)(2+\sqrt{x+2})} = -\frac{1}{4}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{x^3-4x^2+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x+7}-3)(\sqrt{2x+7}+3)}{(x-1)(x^2-3x-3)(\sqrt{2x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x^2-3x-3)(\sqrt{2x+7}+3)} = -\frac{1}{15}$$

Câu 75: Tìm giới hạn các hàm số sau

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x^2+3}}{-x^2+3x-2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{x^3-8}$$

Lời giải

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{x^2+3}}{-x^2+3x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2-\sqrt{x^2+3})(2+\sqrt{x^2+3})}{-(2-\sqrt{x^2+3})(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(2-\sqrt{x^2+3})(x-2)} = -\frac{1}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{4x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{(x+2)(\sqrt{4x+1}+3)} = \frac{1}{6}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{x^3-8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-\sqrt{x+2})(x+2\sqrt{x+2})}{(x-2)(x^2+2x+4)(x+\sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(x^2+2x+4)(x+\sqrt{x+2})} = \frac{1}{16}$$

Câu 76: Tìm giới hạn các hàm số sau

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{2x^3+5x+3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{2x+x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{2x+12}+x}{x^2+2x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{x^3+x^2-2}$$

Lời giải

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{2x^3+5x+3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}.1+1)}{(x+1)(2x+3)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}.1+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(2x+3)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}.1+1)} = 1$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{2x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt[3]{1-x}) \left(1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}{x(x+2) \left(1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+2) \left(1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{2x+12} + x}{x^2 + 2x} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt[3]{2x+12} + x) \left(\sqrt[3]{(2x+12)^2} - x\sqrt[3]{2x+12} + x^2\right)}{x(x+2) \left(\sqrt[3]{(2x+12)^2} - x\sqrt[3]{2x+12} + x^2\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 12)}{x(x+2) \left(\sqrt[3]{(2x+12)^2} - x\sqrt[3]{2x+12} + x^2\right)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 12}{\left(\sqrt[3]{(2x+12)^2} - x\sqrt[3]{2x+12} + x^2\right)x} = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x^3 + x^2 - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[4]{x} - 1) \left((\sqrt[4]{x} + 1)\right) (\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 2) (\sqrt[4]{x} + 1) (\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1) (\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 2) (\sqrt[4]{x} + 1) (\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x^2 + x + 2) (\sqrt[4]{x} + 1) (\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Câu 77: Tính các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} + x - 4}{x^3 - 4x^2 + 3} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 1} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} + x^3 - 3x}{x - 1}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} + x - 4}{x^3 - 4x^2 + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 7 - (x-4)^2}{(x^3 - x^2 - 3x^2 + 3) (\sqrt{2x+7} - x + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 10x - 9}{(x^2 - 3(x+1)) (\sqrt{2x+7} - x + 4)} = \frac{(x-1)(9-x)}{(x-1)(x^2 - 3(x+1)) (\sqrt{2x+7} - x + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9-x}{(x^2 - 3(x+1)) (\sqrt{2x+7} - x + 4)} = \frac{9-1}{(1-3 \cdot 2)(3-1+4)} = -\frac{4}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} + x^3 - 3x}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 3x + 2}{(x^2 - 1) (x^3 + \sqrt{3x-2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1 - 3x + 3}{(x-1)(x+1) (x^3 + \sqrt{3x-2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 + 1)(x^3 - 1) - 3(x-1)}{(x-1)(x+1) (x^3 + \sqrt{3x-2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \left((x^3 + 1)(x^2 + x + 1) - 3\right)}{(x-1)(x+1) (x^3 + \sqrt{3x-2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 + 1)(x^2 + x^2 - 1) - 3}{(x+1) (x^3 + \sqrt{3x-2})} = \frac{(1+1)(1+1+1) - 3}{(1+1)(1+1)} = \frac{2 \cdot 3 - 3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} + x^3 - 3x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3 - (x^3 - 3x)^2}{(x-1) (\sqrt{x^2+3} - x^3 + 3x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3 - x^6 + 6x^4 - 9x^2}{(x-1) (\sqrt{x^2+3} - x^3 + 3x)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^6 + 6x^4 - 8x^2 + 3}{(x-1)(\sqrt{x^2+3} - x^3 + 3x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^6 + x^4 + 5x^4 - 5x^2 + 3 - 3x^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+3} - x^3 + 3x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)(-x^4+5x^2-3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3} - x^3 + 3x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(-x^4+5x^2-3)}{(\sqrt{x^2+3} - x^3 + 3x)} = \frac{(1+1)(-1+5-3)}{2-1+3} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Câu 78: Tính các giới hạn sau

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{1-3x-5x^2} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}
 \end{array}$$

Lời giải

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{2+0}{1-0} = 2$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{1-3x-5x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}-5} = \frac{1+0}{0-3.0-5} = -\frac{1}{5}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}+1}{x^2+x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{0+0}{1+0+0} = 0$$

Câu 79: Tính các giới hạn sau

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x(2x^2-1)}{(5x-1)(x^2+2x)} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3-2x^2-1}{4x^4+3x-2} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3-2x+2}{-2x^3+2x^2-1}
 \end{array}$$

Lời giải

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x(2x^2-1)}{(5x-1)(x^2+2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6-\frac{3}{x^2}}{\left(5-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{6-3.0}{(5-0)(1+2.0)} = \frac{6}{5}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3-2x^2-1}{4x^4+3x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{4+\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}} = \frac{3.0-2.0-0}{4+3.0-2.0} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3-2x+2}{-2x^3+2x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{-2+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}} = \frac{3-2.0+2.0}{-2+2.0-0} = -\frac{3}{2}$$

Câu 80: Tính các giới hạn sau

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+2x}}{3x-1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+2}+3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+1-x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x+3}}{x^2+1}
 \end{array}$$

Lời giải

a) Đặt $x = -t$. Với $x \rightarrow -\infty \Rightarrow t = +\infty$

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2x}}{3x - 1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{t^2 + 3t - 2t}}{-3t - 1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{t} - 2}}{-3 - \frac{1}{t}} = \frac{\sqrt{1 + 3 \cdot 0 - 2}}{-3 - 0} = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} + 3x + 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 1 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x} - 1} = 4$$

Đặt $x = -t$. Với $x \rightarrow -\infty \Rightarrow t = +\infty$. Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} + 3x + 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 1 - x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t^2 - t + 2} - 3t + 1}{\sqrt{4t^2 + 1} + 1 + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2}} - 3 + \frac{1}{t}}{\sqrt{4 + \frac{1}{t^2}} + \frac{1}{t} + 1} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x+3}}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{0 + 3 \cdot 0}}{1 + 0} = 0$$

Câu 81: Tính các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2 - x|}{2x^2 - 5x + 2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2 - x|}{2x^2 - 5x + 2}$$

Lời giải

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{x + 2}{x - 2}} = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2 - x|}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{(x - 2)(2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2x - 1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2 - x|}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2 - x}{(x - 2)(2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{2x - 1} = -\frac{1}{3}$$

Câu 82: Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -1 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad (\text{tại } x = 1)$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad (\text{tại } x = 1)$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } f(-1) = \frac{-1+3}{-1-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{x-1} = -1 = f(-1) \Rightarrow \text{hàm số liên tục tại } x = -1$$

$$b) \text{ Ta có: } f(1) = \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = f(1)$$

Vậy hàm số liên tục tại $x = 1$.

Câu 83: Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad (\text{tại } x = 2)$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{khi } x > 5 \\ (x-5)^2+3 & \text{khi } x \leq 5 \end{cases} \quad (\text{tại } x = 5)$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } f(2) = 1$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(-x^2+3x-1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2+3x-1}{(x-1)} = 1 = f(2)$$

Vậy hàm số liên tục tại $x = 2$

$$b) \text{ Ta có: } f(5) = (5-5)^2+3 = 3.$$

$$\text{Lại có } \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} [(x-5)^2+3] = 3$$

$$\text{Và } \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{2x-1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{\sqrt{2x-1}+3}{2} = 3$$

Từ đó $f(5) = \lim_{x \rightarrow 5} f(x) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x = 5$.

Câu 84: Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng :

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x+2}{x^3+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \frac{4}{3} & \text{khi } x = -1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2-3x+4 & \text{khi } x < 2 \\ 5 & \text{khi } x = 2 \\ 2x+1 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$$

Lời giải

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1 + (x + 1)}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \left(1 + \frac{1}{x^2 - x + 1} \right) = \frac{4}{3}$$

Do đó, hàm số này liên tục tại $x = -1$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3x + 4) = 2; \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 1) = 5$$

$$\text{Mà } f(x) = 5 \text{ khi } x = 2 \text{ nên } \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

Do đó, hàm số đã cho liên tục khi $x \geq 2$

Câu 85: Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng :

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ -4 & \text{khi } x = -2 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} & \text{khi } x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \text{khi } x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Lời giải

a) Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x \neq -2$ (1)

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -2 - 2 = -4.$$

$$f(-2) = -4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) \Rightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = -2 \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x \neq \sqrt{2}$ (1)

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x + \sqrt{2}) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = f(\sqrt{2}) \Rightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = \sqrt{2} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 86: Chứng minh rằng các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$a) x^3 - 3x + 1 = 0$$

$$b) 2x + 6\sqrt[3]{1-x} = 3$$

Lời giải

a) Dễ thấy hàm $f(x) = x^3 - 3x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có:

- $\begin{cases} f(-2) = -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(-2).f(-1) < 0 \Rightarrow$ tồn tại một số $a_1 \in (-2; -1): f(a_1) = 0(1)$.
- $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(0).f(1) < 0 \Rightarrow$ tồn tại một số $a_2 \in (0; 1): f(a_2) = 0(2)$.
- $\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(1).f(2) < 0 \Rightarrow$ tồn tại một số $a_3 \in (1; 2): f(a_3) = 0(3)$.

Do ba khoảng $(-2; -1)$, $(0; 1)$ và $(1; 2)$ đôi một không giao nhau nên phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt.

Mà phương trình bậc 3 thì chỉ có tối đa là 3 nghiệm nên $x^3 - 3x + 1 = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

b) Đặt $\sqrt[3]{1-x} = t \Leftrightarrow x = 1-t^3 \Rightarrow 2t^3 - 6t + 1 = 0$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 6t + 1$ liên tục trên R .

Ta có: $\begin{cases} f(-2).f(-1) = -3.5 < 0 \\ f(0).f(1) = 1.(-3) < 0 \\ f(1).f(2) = -3.5 < 0 \end{cases} \Rightarrow$ tồn tại 3 số t_1, t_2 và t_3 lần lượt thuộc 3 khoảng đôi

một không giao nhau là $(-2; -1)$, $(0; 1)$ và $(1; 2)$ sao cho $f(t_1) = f(t_2) = f(t_3) = 0$ và do đây là phương trình bậc 3 nên $f(t) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Ứng với mỗi giá trị t_1, t_2 và t_3 ta tìm được duy nhất một giá trị x thỏa mãn $x = 1-t^3$ và hiển nhiên 3 giá trị này khác nhau nên PT ban đầu có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Câu 87: Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $x^5 - 3x + 3 = 0$

b) $x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$

Lời giải

a) Xét $f(x) = x^5 - 3x + 3$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ tồn tại một số $x_1 > 0$ sao cho $f(x_1) > 0$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow$ tồn tại một số $x_2 < 0$ sao cho $f(x_2) < 0$.

Từ đó $f(x_1).f(x_2) < 0 \Rightarrow$ luôn tồn tại một số $x_0 \in (x_2; x_1): f(x_0) = 0$ nên phương trình $x^5 - 3x + 3 = 0$ luôn có nghiệm.

b) Xét $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1$ liên tục trên R

Ta có: $f(-1) = -3 < 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ tồn tại một số $a > 0$ sao cho $f(a) > 0$.

$\Rightarrow x^2 - x - 3 = 0$ nên luôn tồn tại một số $x_0 \in (0; a)$ thỏa mãn $f(x_0) = 0$ nên phương trình $x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ luôn có nghiệm.