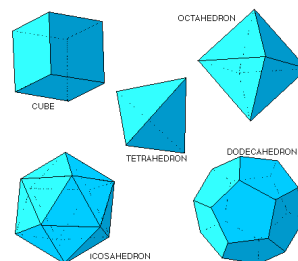
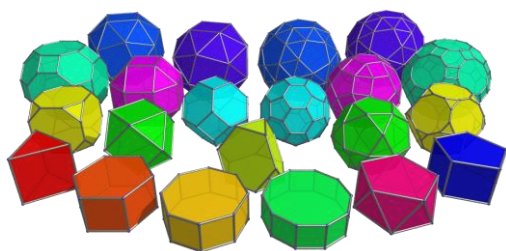


TỶ SỐ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN



Giáo viên: LÊ BÁ BẢO Trường THPT Đặng Huy Trú, Huế

SĐT: 0935.785.115 Địa chỉ: 116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế

I- PHƯƠNG PHÁP

Kết quả 1: Cho tam giác OAB , trên cạnh OA chọn $A' \neq O$, trên cạnh OB chọn $B' \neq O$.

Lúc đó:

$$\frac{S_{OA'B'}}{S_{OAB}} = \frac{OA'}{OA} \cdot \frac{OB'}{OB}$$

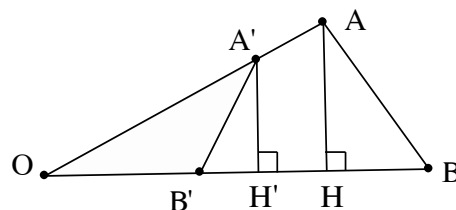
Chứng minh:

Gọi H, H' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và A' lên OB .

$$\text{Lúc đó: } S_{OA'B'} = \frac{1}{2} A'H' \cdot OB' \text{ và } S_{OAB} = \frac{1}{2} AH \cdot OB$$

Suy ra:

$$\frac{S_{OA'B'}}{S_{OAB}} = \frac{A'H'}{AH} \cdot \frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA} \cdot \frac{OB'}{OB} \quad (\text{Định lý thales})$$



Kết quả 2:

Cho hình chóp $S.ABC$, trên cạnh SA chọn $A' \neq O$, trên cạnh SB chọn $B' \neq O$ trên cạnh SC chọn $C' \neq O$.

Lúc đó:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Chứng minh:

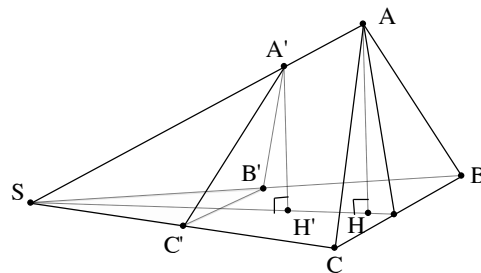
Gọi H, H' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và A' lên mp(SBC).

Lúc đó:

$$V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{3} A'H' \cdot S_{SB'C'} \text{ và } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{SBC}$$

Suy ra:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{A'H'}{AH} \cdot \frac{S_{SB'C'}}{S_{SBC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \quad (\text{Định lý thales})$$



II- BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tỉ số thể tích của khối $AA'B'C'$ và khối $ABCC'$ là

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

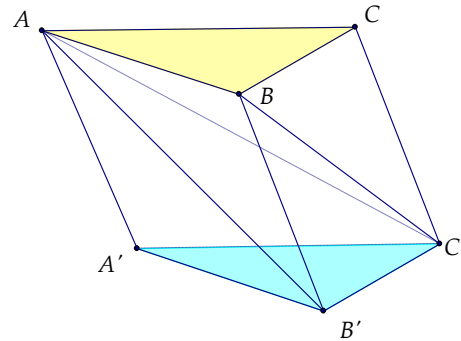
Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{V_{AA'B'C'}}{V_{C'ABC}} = \frac{\frac{1}{3}d(A;(A'B'C')).S_{A'B'C'}}{\frac{1}{3}d(C;(ABC)).S_{ABC}} \quad (1)$$

$$\text{Do } S_{ABC} = S_{A'B'C'} \text{ và } d(A;(A'B'C')) = d(C;(ABC))$$

$$\text{nên (1): } \frac{V_{AA'B'C'}}{V_{C'ABC}} = 1.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**



Ví dụ 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD . Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại E . Gọi V_2 là thể tích của khối chóp $S.AMEN$ và V_1 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $V_2 = \frac{1}{3}V_1$. B. $V_2 = \frac{1}{4}V_1$. C. $V_2 = \frac{1}{8}V_1$. D. $V_2 = \frac{1}{6}V_1$.

Lời giải

$$\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{1}{2} \longrightarrow \text{Qua } O \text{ dựng } OK \parallel AE.$$

$$\text{Xét } \triangle AEC: \begin{cases} OK \parallel AE \\ OK = \frac{1}{2}AE \end{cases} \text{ Suy ra: } K \text{ là trung}$$

điểm EC .

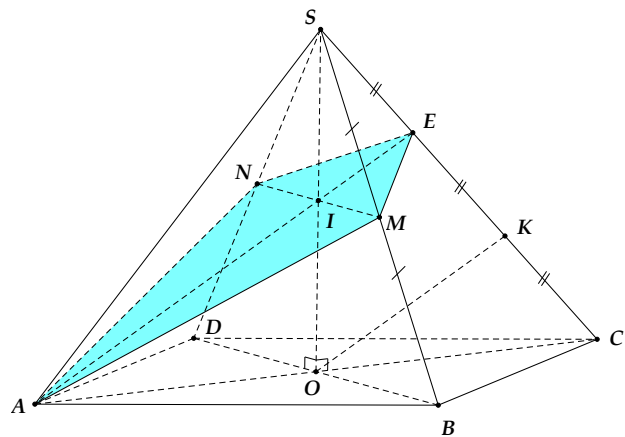
$$\text{Xét } \triangle SOK: \begin{cases} IE \parallel OK \\ IE = \frac{1}{2}OK \end{cases} \text{ Suy ra: } E \text{ là trung}$$

$$\text{điểm } SK. \text{ Vậy } \frac{SE}{SC} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có: } \frac{V_{S.AMEN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2V_{S.AME}}{2V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SE}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow V_{S.AMEN} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD} \text{ hay } V_2 = \frac{1}{6}V_1.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**



Ví dụ 3: Cho tứ diện đều $ABCD$. Điểm M là trung điểm AB và N trên cạnh CD sao cho $\overline{CN} = 2\overline{ND}$. Tỉ số thể tích của khối $ABCD$ và khối $MNBC$ bằng

- A. 3. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

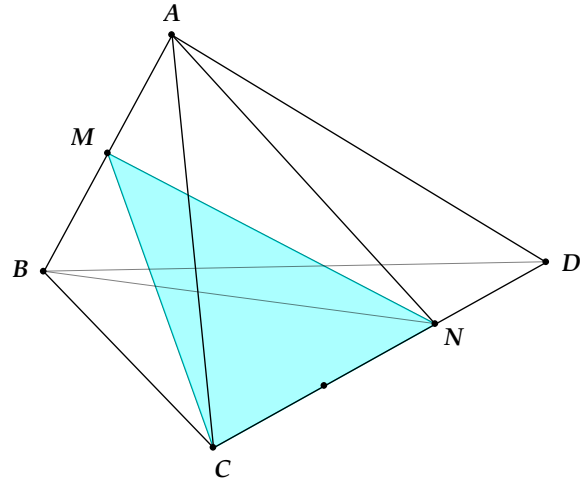
Lời giải

Ta có:

$$\frac{V_{BMCN}}{V_{BACN}} = \frac{1}{2}; \quad \frac{V_{BACN}}{V_{BACD}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{V_{BMCN}}{V_{BACN}} \cdot \frac{V_{BACN}}{V_{BACD}} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_{BMCN}}{V_{BACD}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{V_{BACD}}{V_{BMCN}} = 3.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.



Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh SB, SC sao cho $SM = MB$, $\overline{SN} = -2\overline{CN}$. Mặt phẳng (AMN) chia khối chóp thành hai phần, gọi $V_1 = V_{S.AMN}$ và $V_2 = V_{ABCNM}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $V_1 = V_2$. B. $V_1 = \frac{1}{3}V_2$. C. $V_1 = \frac{1}{2}V_2$. D. $V_1 = \frac{2}{3}V_2$.

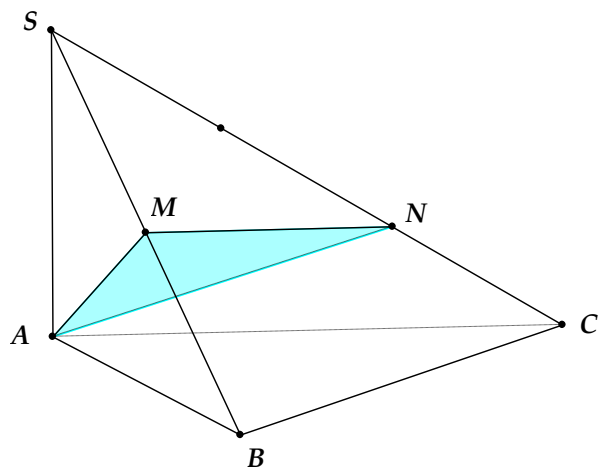
Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{3}V_{S.ABC} \Rightarrow V_{ABCNM} = \frac{2}{3}V_{S.ABC}$$

$$\text{Vậy } V_1 = \frac{1}{2}V_2.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.



Ví dụ 5: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, SM . Mặt phẳng (ABN) cắt SC tại E . Gọi V_2 là thể tích của khối chóp $S.ABE$ và V_1 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $V_2 = \frac{1}{3}V_1$. B. $V_2 = \frac{1}{4}V_1$. C. $V_2 = \frac{1}{8}V_1$. D. $V_2 = \frac{1}{6}V_1$.

Lời giải

→ Qua M dựng $MK \parallel BE$. Xét tam giác BEC :

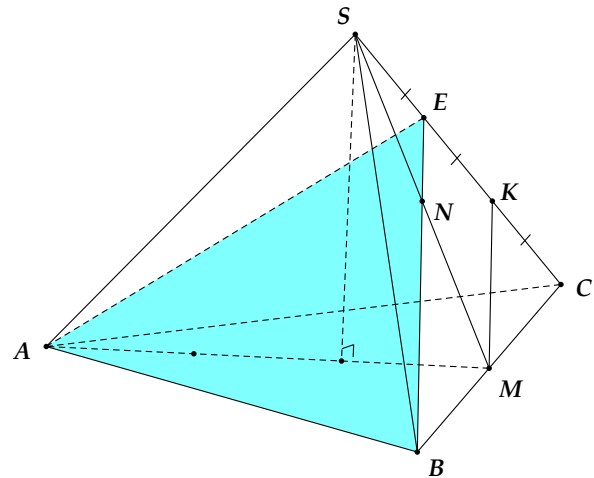
$$\begin{cases} MK \parallel BE \\ MK = \frac{1}{2}BE \end{cases} \text{ Suy ra: } K \text{ là trung điểm } EC.$$

Xét tam giác SMK : $\begin{cases} NE \parallel MK \\ NE = \frac{1}{2}MK \end{cases}$ Suy ra: E là

trung điểm SK . Vậy $\frac{SE}{SC} = \frac{1}{3}$

$$\text{Ta có: } \frac{V_{S.ABE}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SE}{SC} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.ABE} = \frac{1}{3}V_{S.ABC}$$

$$\text{hay } V_2 = \frac{1}{3}V_1. \Rightarrow \text{Chọn đáp án A.}$$



Ví dụ 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AA' và BB' . Đường thẳng CE cắt đường thẳng $C'A'$ tại E' . Đường thẳng CF cắt đường thẳng $B'C'$ tại F' . Gọi V_2 là thể tích khối chóp $C.ABFE$ và V_1 là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $V_2 = \frac{1}{3}V_1$. B. $V_2 = \frac{1}{4}V_1$. C. $V_2 = \frac{1}{8}V_1$. D. $V_2 = \frac{1}{6}V_1$.

Lời giải

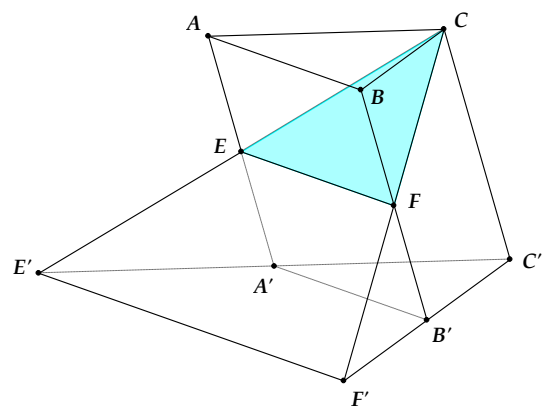
Hình chóp $C.A'B'C'$ và lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đường cao và đáy bằng nhau nên

$$V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_{C.ABB'A'} = V_1 - \frac{1}{3}V_1 = \frac{2}{3}V_1.$$

Do EF là đường trung bình của hình bình hành

$$ABB'A' \Rightarrow S_{ABFE} = \frac{1}{2}S_{ABB'A'} \Rightarrow V_{C.ABFE} = \frac{1}{2}V_{C.ABB'A'} = \frac{1}{3}V_1$$

$$\text{hay } V_2 = \frac{1}{3}V_1. \Rightarrow \text{Chọn đáp án A.}$$



Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABC$, trên AB, BC, SC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = 2MB, BN = 4NC, SP = PC$. Tỉ lệ thể tích hai khối chóp $S.BMN$ và $A.CPN$ là:

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{5}{6}$.

C. $\frac{8}{3}$.

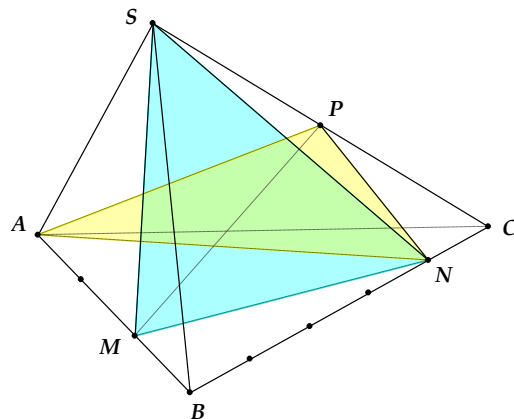
D. 1.

Lời giải

$$+ \frac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{B.MNS}}{V_{B.ACS}} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BS}{BS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$$

$$+ \frac{V_{A.CPN}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{C.ANP}}{V_{C.ABS}} = \frac{CA}{CA} \cdot \frac{CN}{CB} \cdot \frac{CP}{CS} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.BMN}}{V_{A.CNP}} = \frac{4}{15} : \frac{1}{10} = \frac{8}{3}$$



$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Ví dụ 8: (Đề minh họa Bộ GD&ĐT) Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a, AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB . Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A. $V = \frac{7}{2}a^3$.

B. $V = 14a^3$.

C. $V = \frac{28}{3}a^3$.

D. $V = 7a^3$.

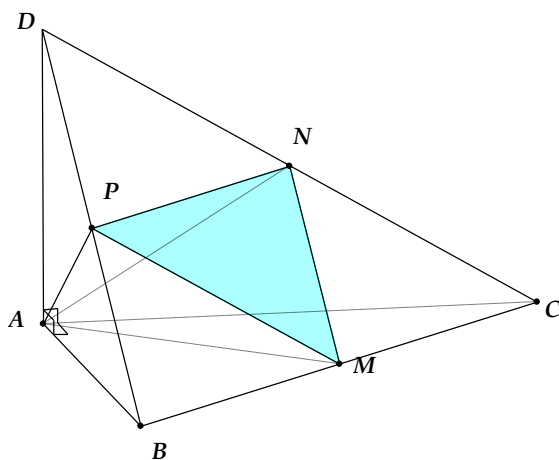
Lời giải

Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD = 28a^3$.

Dễ thấy $\triangle MNP$ được tạo nên bởi các đường trung bình của $\triangle BCD \Rightarrow$ chúng đồng dạng với nhau theo tỉ số

$$\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{V_{AMNP}}{V_{ABCD}} = \frac{S_{MNP}}{S_{BCD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{AMNP} = \frac{1}{4} V_{ABCD} = 7a^3.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.



Ví dụ 9: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của $ABCD$; M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và $A'D'$. Tỉ số thể tích của khối $A'ABD$ và khối $OMND'C'B'$ bằng

A. $\frac{4}{9}$.

B. $\frac{4}{7}$.

C. $\frac{5}{7}$.

D. $\frac{3}{7}$.

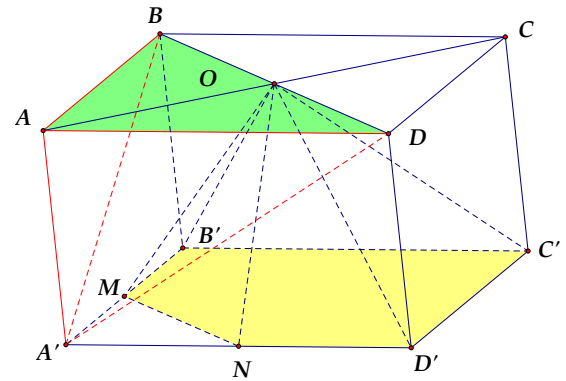
Lời giải

$$\text{Do } S_{ABD} = S_{A'B'D'} \Rightarrow S_{MND'C'B'} = S_{B'C'D'} + S_{MND'B'} \\ = S_{ABD} + S_{MND'B'}$$

$$\text{Mặt khác ta có: } \frac{S_{A'MN}}{S_{A'B'D'}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{MND'B'} = \frac{3}{4} S_{A'B'D'} = \frac{3}{4} S_{ABD}$$

$$\text{Suy ra: } S_{MND'C'B'} = \frac{7}{4} S_{ABD}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{V_{A'ABD}}{V_{OMND'C'B'}} = \frac{\frac{1}{3} d(A'; (ABCD)) \cdot S_{ABD}}{\frac{1}{3} d(O; (A'B'C'D')) \cdot S_{MND'C'B'}} \\ = \frac{S_{ABD}}{S_{MND'C'B'}} = \frac{4}{7} \Rightarrow \text{Chọn đáp án B.}$$



Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a$, $\triangle ABC$ đều cạnh $2a$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh SB, SC sao cho $SM = MB$, $\overrightarrow{SN} = -2\overrightarrow{CN}$. Tính thể tích khối $AMNCB$.

A. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{9}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

C. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{9}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

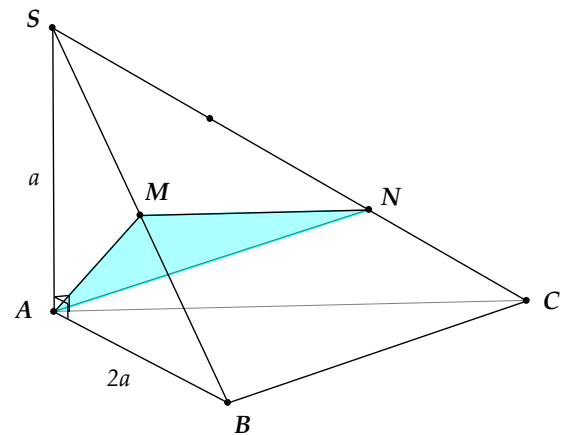
Lời giải

$$\text{Ta có: } S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}(2a)^2}{4} = \sqrt{3}a^2 \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} \Rightarrow V_{ABCNM} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = \frac{2\sqrt{3}a^3}{9}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.



Ví dụ 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm cạnh SA . Mặt phẳng (α) qua M và song song với $(ABCD)$, cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại N, P, Q . Gọi $V_1 = V_{S.ABCD}$ và $V_2 = V_{S.MNPQ}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V_1 = 8V_2$.

B. $V_1 = 6V_2$.

C. $V_1 = 16V_2$.

D. $V_1 = 4V_2$.

Lời giải

Dễ thấy, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh SB, SC, SD .

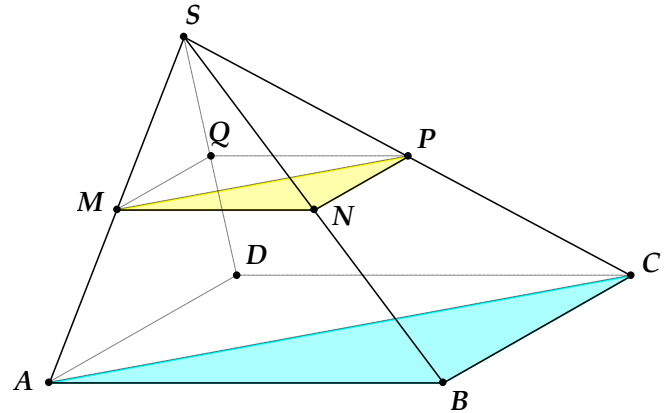
Ta có:

$$\begin{cases} V_{S.MNPQ} = 2V_{S.MNP} \\ V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2V_{S.MNP}}{2V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

$$\Rightarrow V_1 = 8V_2.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.



Ví dụ 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm cạnh SC . Mặt phẳng (α) chứa AM và song song với BD , cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại N, P . Gọi $V_1 = V_{S.ANMP}$ và $V_2 = V_{ABCDPMN}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $V_2 = 3V_1$. B. $V_2 = \frac{3}{2}V_1$. C. $V_2 = 2V_1$. D. $V_2 = \frac{7}{2}V_1$.

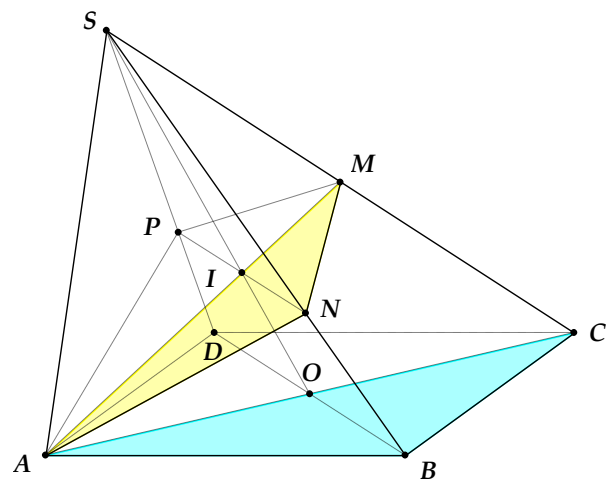
Lời giải

Gọi $BD \cap AC = \{O\}$; $AM \cap SO = \{I\}$. Suy ra I là trọng tâm ΔSAC và ΔSBD . Qua I dựng $PN // BD \Rightarrow$ Thiết diện là tứ giác $ANMP$.

Ta có: $\frac{V_1}{V_{S.ABCD}} = \frac{2V_{S.ANM}}{2V_{S.ABC}} = \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}V_{S.ABCD} \Rightarrow V_2 = \frac{2}{3}V_{S.ABCD} \Rightarrow V_2 = 2V_1.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.



Ví dụ 13: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh SA, SB, SC, SD sao cho $SM = MA$; $SN = 2NB$; $\overline{SP} = 3\overline{PC}$; $\overline{SQ} = \frac{1}{3}\overline{SD}$. Tính thể tích khối $SMNPQ$.

- A. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{16}$. B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{48}$. C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{16}$. D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{32}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{1}{4} V_{S.ABC} = \frac{1}{8} V_{S.ABCD}$

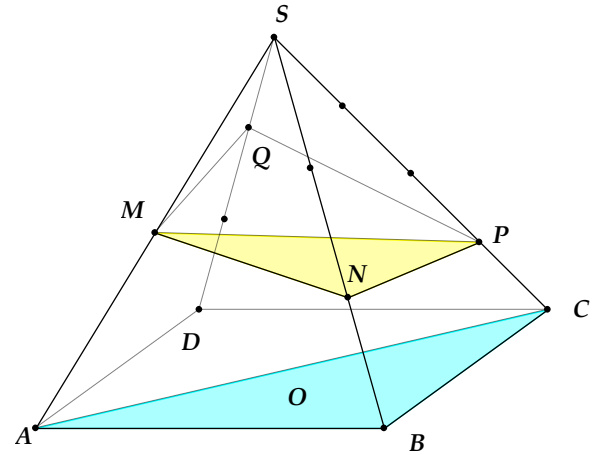
Tương tự: $\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SP}{SC} \cdot \frac{SQ}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow V_{S.MPQ} = \frac{1}{8} V_{S.ACD} = \frac{1}{16} V_{S.ABCD}$

Vậy $V_{SMNPQ} = V_{S.MNP} + V_{S.MPQ} = \frac{3}{16} V_{S.ABCD}$

$= \frac{3}{16} \cdot \frac{\sqrt{2}a^3}{6} = \frac{\sqrt{2}a^3}{32}$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.



Ví dụ 14: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi $V_1 = V_{A.A'B'C'}$ và $V_2 = V_{ABC.A'B'C'}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V_1 = \frac{3}{4} V_2$.

B. $V_1 = \frac{1}{2} V_2$.

C. $V_1 = \frac{1}{3} V_2$.

D. $V_1 = \frac{2}{3} V_2$.

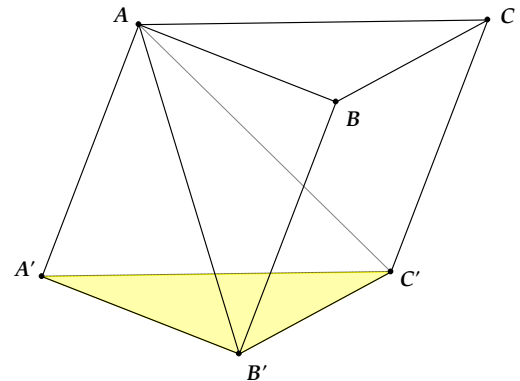
Lời giải

Ta có: $V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3} d(A; (A'B'C')) \cdot S_{\Delta A'B'C'}$

và $V_{ABC.A'B'C'} = d(A; (A'B'C')) \cdot S_{\Delta A'B'C'}$

Suy ra: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.



Ví dụ 15: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Điểm M trên cạnh AA' sao cho: $AM = 2MA'$. Gọi $V_1 = V_{M.BCC'B'}$ và $V_2 = V_{ABC.A'B'C'}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V_1 = \frac{3}{4} V_2$.

B. $V_1 = \frac{1}{2} V_2$.

C. $V_1 = \frac{1}{3} V_2$.

D. $V_1 = \frac{2}{3} V_2$.

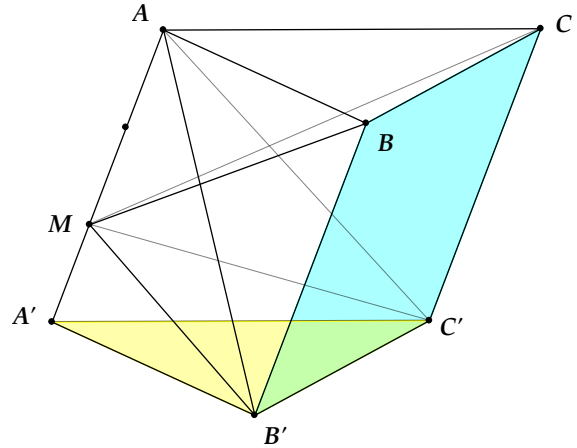
Lời giải

Do $AA' // (BCC'B') \Rightarrow V_{M.BCC'B'} = V_{A.BCC'B'}$.

Ta có: $V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_{A.BCC'B'} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'}$.

Suy ra: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.



Nhận xét: Điểm M có vẻ như có thể nằm bất kì trên đường thẳng AA'? Kết quả tỉ số thể tích trên vẫn đúng!

Ví dụ 16: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $V_1 = V_{BACB'}$ và $V_2 = V_{ABCD.A'B'C'D'}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V_1 = \frac{5}{9} V_2$.

B. $V_1 = \frac{1}{6} V_2$.

C. $V_1 = \frac{1}{3} V_2$.

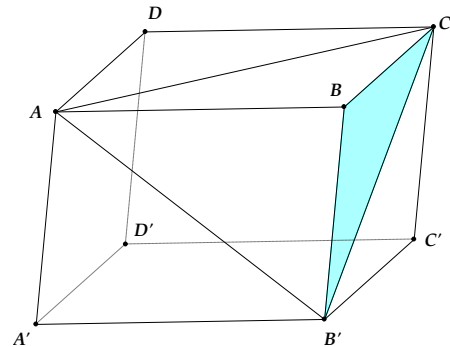
D. $V_1 = \frac{2}{3} V_2$.

Lời giải

Ta có: $V_{B.ACB'} = \frac{1}{3} d(A; (BCB')) \cdot S_{\triangle BCB'}$
 $= \frac{1}{3} d(A; (BCB'C')) \cdot \frac{1}{2} S_{\triangle BCB'C'}$
 $= \frac{1}{6} d(A; (BCB'C')) \cdot S_{\triangle BCB'C'} = \frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

Suy ra: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{6}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.



Ví dụ 17: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Gọi $V_1 = V_{MBCB'}$ và $V_2 = V_{ABCD.A'B'C'D'}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V_1 = \frac{5}{12} V_2$.

B. $V_1 = \frac{1}{6} V_2$.

C. $V_1 = \frac{1}{12} V_2$.

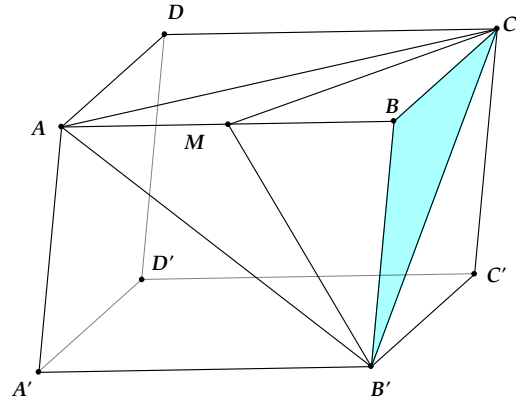
D. $V_1 = \frac{2}{3} V_2$.

Lời giải

Ta có:

$$V_{MBCB'} = \frac{1}{2} V_{ABCB'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{12} V_{ABCD.A'B'C'D'}$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.



Ví dụ 18: Cho khối lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$, đường thẳng đi qua trọng tâm tam giác ABC song song với BC cắt AB tại D , cắt AC tại E . Mặt phẳng đi qua A', D, E chia khối lăng trụ thành hai phần, tỉ số thể tích (số bé chia cho số lớn) của chúng bằng:

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{4}{23}$.

C. $\frac{4}{9}$.

D. $\frac{4}{27}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

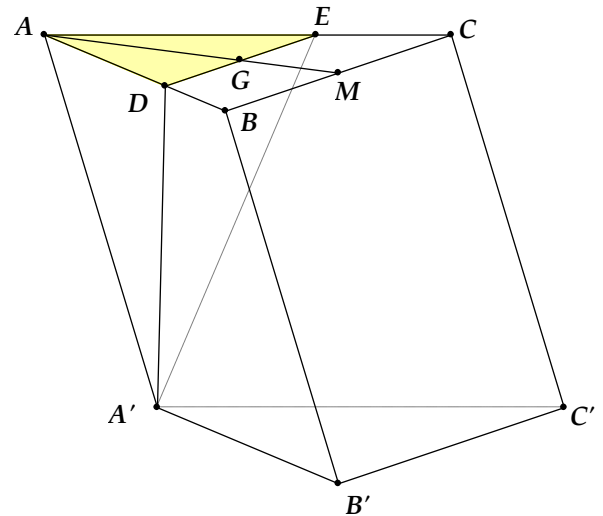
Mặt khác:

$$V_{A'ADE} = \frac{1}{3} d(A'; (ADE)) \cdot S_{ADE} = \frac{1}{3} d(A'; (ABC)) \cdot \frac{4}{9} S_{ABC}$$

$$= \frac{4}{27} d(A'; (ABC)) \cdot S_{ABC} = \frac{4}{27} V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\Rightarrow V_{A'B'C'CEDB} = \frac{23}{27} V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow \frac{V_{A'ADE}}{V_{A'B'C'CEDB}} = \frac{4}{23}$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.



Ví dụ 19: Xét khối chóp tứ giác đều $SABCD$, mặt phẳng chứa đường thẳng AB đi qua điểm C' của cạnh SC chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính tỉ số $\frac{SC'}{SC}$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

D. $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Đặt $\frac{SC'}{SC} = x; (0 < x < 1)$.

Ta có:

$$\frac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = x^2 \Rightarrow V_{S.AD'C'} = x^2 V_{S.ADC} = \frac{x^2}{2} V_{S.ABCD}.$$

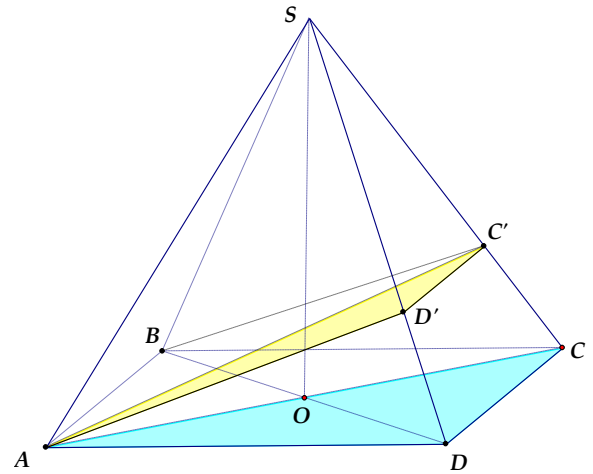
và $\frac{V_{S.ABC'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SC'}{SC} = x \Rightarrow V_{S.ABC'} = x V_{S.ABC} = \frac{x}{2} V_{S.ABCD}.$

$$\Rightarrow V_{S.ABC'D'} = V_{S.ABC'} + V_{S.AC'D'} = \frac{x^2 + x}{2} V_{S.ABCD}.$$

Theo đề bài ta suy ra $V_{S.ABC'D'} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} \Leftrightarrow \frac{x^2 + x}{2} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.



Ví dụ 20: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Tính thể tích khối chóp $A.CB'D'$.

A. $\frac{V}{3}.$

B. $\frac{V}{2}.$

C. $\frac{2V}{3}.$

D. $\frac{3V}{4}.$

Lời giải

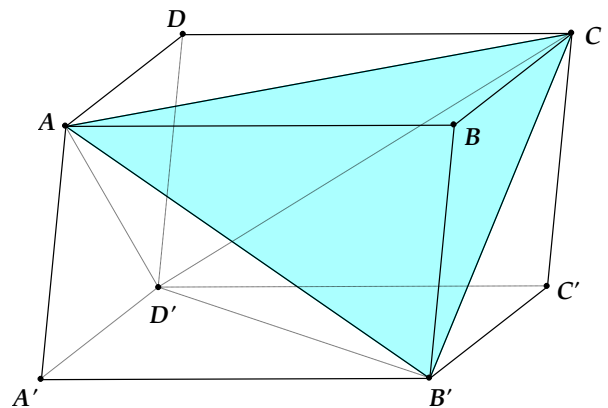
Hình hộp đã cho là hợp của khối chóp đang xét với 4 khối chóp $A'.AB'D'; B.AB'C; C'.B'CD'; D.ACD';$ 4 khối cuối này cùng có thể tích bằng $\frac{V}{6}$ nên thể tích cần

tìm bằng $V - \frac{4V}{6} = \frac{V}{3}.$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Nhận xét: Hoàn toàn có thể "thử" trường hợp đặc biệt, khi hình hộp đặc biệt trở thành hình lập phương cạnh a thì dễ thấy thể tích khối lập phương là a^3 , còn khối $A.CB'D'$ là khối tứ diện đều cạnh $a\sqrt{2} \Rightarrow$ thể tích tương ứng là

$$\frac{\sqrt{2}(a\sqrt{2})^3}{12} = \frac{a^3}{3}.$$
 So sánh ta đưa ra kết quả.



Ví dụ 21: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $BC = 2AB$, SA vuông góc với đáy. Gọi M là điểm trên cạnh AD sao cho $AM = AB$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối chóp $S.ABM$ và $S.ABC$. Tính $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{1}{8}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{2}$.

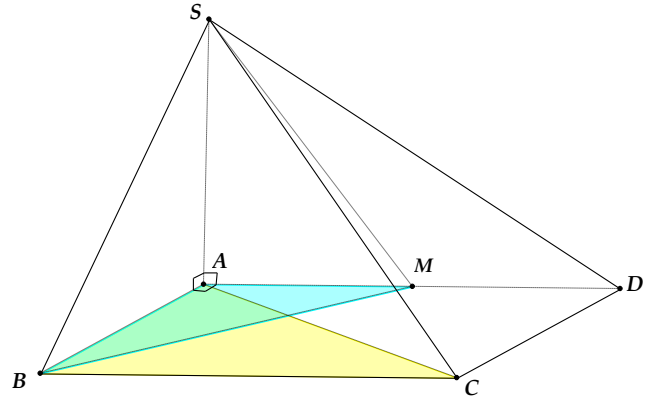
Lời giải

Ta có:

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \frac{AD}{2} = \frac{1}{4} S_{ABCD} \Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Mặt khác: } V_{S.ABC} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.



Ví dụ 22: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa đường thẳng SA và mặt đáy bằng 60° . Gọi $A'; B'; C'$ tương ứng là điểm đối xứng của $A; B; C$ qua S . Tính thể tích khối bát diện có các mặt $ABC; A'B'C'; A'BC; B'CA; C'AB; AB'C'; BC'A'; CA'B'$.

A. $2\sqrt{3}a^3$.

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

D. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Thể tích khối bát diện đã cho là

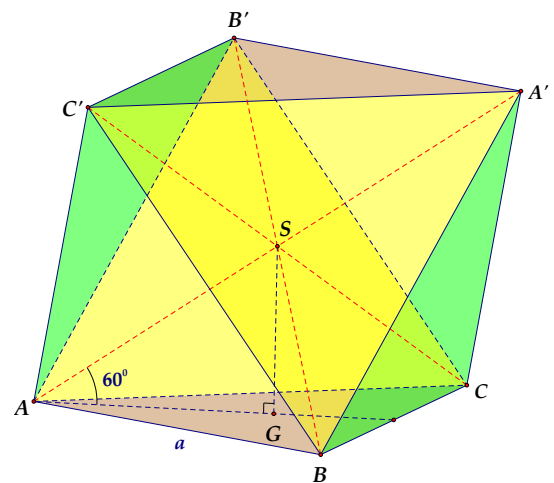
$$V = 2V_{A'B'C'BC} = 2 \cdot 4V_{A'.SBC} = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot SG \cdot S_{\triangle SBC}.$$

Ta có: $(SA; (ABC)) = \widehat{SAG} = 60^\circ$. Xét $\triangle SGA$ vuông tại

$$G: \tan \widehat{SAG} = \frac{SG}{SA} \Rightarrow SG = SA \cdot \tan \widehat{SAG} = a.$$

$$\text{Vậy } V = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot SG \cdot S_{\triangle ABC} = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.



III- BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

- Câu 1.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh SA, SB, SC, SD sao cho $SM = MA; SN = 2NB; \overline{SP} = 3\overline{PC}; \overline{SQ} = \frac{1}{3}\overline{SD}$. Tính tỉ số thể tích giữa khối $SMNPQ$ và khối $S.ABCD$.
- A. $\frac{3}{16}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{3}{32}$. D. $\frac{1}{12}$.
- Câu 2.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi $V_1 = V_{A.BCC'B'}$ và $V_2 = V_{ABC.A'B'C'}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $V_1 = \frac{3}{4}V_2$. B. $V_1 = \frac{1}{2}V_2$. C. $V_1 = \frac{1}{3}V_2$. D. $V_1 = \frac{2}{3}V_2$.
- Câu 3.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi B' và C' lần lượt là trung điểm của AB và AC . Khi đó tỉ số thể tích của khối tứ diện $AB'C'D$ và khối tứ diện $ABCD$ bằng:
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{8}$.
- Câu 4.** Cho hình lăng trụ ngũ giác $ABCDE.A'B'C'D'E'$. Gọi A'', B'', C'', D'', E'' lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC', DD', EE' . Khi đó tỉ số thể tích của khối lăng trụ $ABCDE.A''B''C''D''E''$ và khối lăng trụ $ABCDE.A'B'C'D'E'$ bằng:
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{1}{10}$.
- Câu 5.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có thể tích bằng V . Lấy điểm A' trên cạnh SA sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA$. Mặt phẳng qua A' và song song với đáy của hình chóp cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' . Khi đó thể tích khối chóp $S.A'B'C'D'$ bằng:
- A. $\frac{V}{3}$. B. $\frac{V}{9}$. C. $\frac{V}{27}$. D. $\frac{V}{81}$.
- Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABC$ có A' và B' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB . Tỉ số thể tích $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}}$ bằng:
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. 4. D. 2.
- Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi A' và B' lần lượt là trung điểm của SA và SAB . Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C$ và $S.ABC$ bằng:
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{8}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{16}$

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $ACB'D'$ và khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Tỉ số thể tích của khối chóp $O.A'B'C'D'$ và khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O . Khi đó, tỉ số $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.ABCD}}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{8}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O . Khi đó, tỉ số $\frac{V_{S.OAB}}{V_{S.ABCD}}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{8}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O . Khi đó, tỉ số $\frac{V_{S.OAB}}{V_{S.ABC}}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{8}$.

Câu 14. Cho tứ diện $SABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, AC . Gọi $V_1 = V_{S.ABC}$, $V_2 = V_{S.MNP}$. Lựa chọn kết luận đúng trong các kết luận sau:

- A. $V_1 = 2V_2$. B. $V_1 = 8V_2$. C. $V_1 = 4V_2$. D. $V_1 = 6V_2$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB . Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{S.CDMN}}{V_{S.CDAB}}$.

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{5}{8}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=9$; $SB=4$; $SC=8$ và đôi một vuông góc. Các điểm $A'; B'; C'$ thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = 2\overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{SB'} = 3\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{SC'} = 4\overrightarrow{SC}$. Tính thể tích khối chóp $S.A'B'C'$.

- A. 24. B. 16. C. 2. D. 12.

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính thể tích khối tứ diện $ACD'B'$.

A. $\frac{a^3}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

C. $\frac{a^3}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$.