

CHỦ ĐỀ CÁC DẠNG BÀI TOÁN ĐẾM

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

DẠNG 1: BÀI TOÁN ĐẾM SỐ CÓ YẾU TỐ CHIA HẾT

Phương pháp giải:

Một số dấu hiệu chia hết cần lưu ý:

- Số n chia hết cho 2 khi chữ số tận cùng của nó là 0, 2, 4, 6, 8. Ví dụ: 24; 508...
- Số n chia hết cho 3 khi tổng các chữ số của nó chia hết cho 3. Ví dụ: 126; 540...
- Số n chia hết cho 4 khi 2 chữ số tận cùng của nó phải chia hết cho 4. Ví dụ: 116; 544...
- Số n chia hết cho 5 khi chữ số tận cùng của nó là 0 hoặc 5. Ví dụ: 80, 205...
- Số n chia hết cho 6 khi nó đồng thời chia hết cho 2 và 3.
- Số n chia hết cho 8 khi 3 chữ số cuối cùng của nó phải chia hết cho 8.
- Số n chia hết cho 9 khi tổng các chữ số của nó chia hết cho 9.
- Số n chia hết cho 10 khi chữ số tận cùng của nó là 0.
- Số n chia hết cho 12 khi nó đồng thời chia hết cho 3 và 4.
- Số n chia hết cho 15 khi nó đồng thời chia hết cho 3 và 5.
- Số n chia hết cho 20 khi hai chữ số tận cùng của nó là 00; 20; 40; 60 và 80
- Số n chia hết cho 25 khi hai chữ số tận cùng của nó là 25; 50; 75; và 00.

Ví dụ 1. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

- a) Lập được bao nhiêu số lẻ có 5 chữ số từ A .
b) Lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau từ A .

Lời giải:

a) Gọi số lẻ có 5 chữ số được lập từ dãy là $\overline{abcde}$

Ta có 4 cách chọn e (vì số được lập là số lẻ), với mỗi cách chọn e lần lượt có 8 cách chọn a , 9 cách chọn b , 9 cách chọn c và 9 cách chọn d . Do đó có tổng cộng $4.8.9.9.9 = 23328$ số thỏa mãn.

b) Gọi số chẵn có 5 chữ số được lập từ dãy là $\overline{abcde}$ (các chữ số đôi một khác nhau).

- TH1: $e = 0$ khi đó chọn a, b, c, d và sắp xếp có A_9^4 cách do vậy có: $A_9^4 = 3024$ số.
- TH2: $e = \{2; 4; 6; 8\}$ có 4 cách chọn, khi đó chọn a có 7 cách chọn, và chọn bộ 3 số b, c, e và sắp xếp có tổng cộng A_7^3 cách. Do đó có $4.7.A_7^3 = 5880$

Do đó có: 8904 số chẵn được lập từ tập trên.

Ví dụ 2. Chọn tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

- a) Lập được bao nhiêu số có 4 chữ số chia hết cho 5 từ A .
b) Lập được bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 3 từ A .

Lời giải:

a) Gọi số có 4 chữ số chia hết cho 5 được lập từ A có dạng $\overline{abcd}$

Ta có: chọn a có 5 cách chọn, b có 6 cách chọn, c có 6 cách chọn và d có 2 cách chọn.

Khi đó có $5.6.6.2 = 360$ số thỏa mãn YCBT.

b) Gọi số thỏa mãn YC là $\overline{abcd}$ (các chữ số đôi một khác nhau).

Số có 3 chữ số chia hết cho 3 nên có tổng 3 chữ số là số chia hết cho 3. Mặt khác số đó là số chẵn do vậy phải có ít nhất 1 số chẵn trong 4 số. Các bộ 4 số thỏa mãn là: $(0;1;2;3); (0;1;3;5); (0;3;4;5); (1;2;4;5)$

- TH1: Xét bộ 4 số là $0,1,2,3$

+) Xét $d = 0$ khi đó có $A_3^3 = 6$ số

+) Xét $d = 2$ khi đó có: $2.2 = 4$ số

Vậy có 10 số ở bộ này thỏa mãn

- TH2: Xét bộ số là $0,1,3,5$ khi đó $d = 0$ vậy có $1.A_3^3 = 6$ số thỏa mãn.
- TH3: Xét bộ số $0,3,4,5$ cũng có 10 số thỏa mãn như TH1.
- TH4: Xét bộ số $1,2,4,5$ có $2.3.2.1 = 12$ số thỏa mãn.

Vậy tổng cộng có: 38 số thỏa mãn YCBT.

Ví dụ 3. Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Từ các chữ số đã cho ta có thể lập được:

- a) Bao nhiêu số chẵn có bốn chữ số và bốn chữ số đó khác nhau từng đôi một.
b) Bao nhiêu số chia hết cho 5, có ba chữ số và ba chữ số đó khác nhau từng đôi một.
c) Bao nhiêu số chia hết cho 9, có ba chữ số và ba chữ số đó khác nhau từng đôi một.

Lời giải:

a) Số chẵn gồm bốn chữ số khác nhau có dạng: $\overline{abc0}$ hoặc $\overline{abc2}$ hoặc $\overline{abc4}$

- Với số $\overline{abc0}$ ta có: 5 cách chọn a , 4 cách chọn b , 3 cách chọn $c \Rightarrow$ có $5.4.3 = 60$ số
- Với số $\overline{abc2}$ hoặc $\overline{abc4}$ ta có: 4 cách chọn a , 4 cách chọn b , 3 cách chọn c .

$\Rightarrow$ có $4.4.3 = 48$ số $\overline{abc2}$ và 48 số $\overline{abc4}$

Vậy có: $60 + 48 + 48 = 156$ số chẵn.

b) Số chia hết cho 5 và gồm ba chữ số có dạng $\overline{ab0}$ hoặc $\overline{ab5}$

- Với số $\overline{ab0}$ ta có: 5 cách chọn a , 4 cách chọn $b \Rightarrow$ có $5.4 = 20$ số.
- Với số $\overline{ab5}$ ta có: 4 cách chọn a , 4 cách chọn $b \Rightarrow$ có $4.4 = 16$ số. Vậy có: $20 + 16$ số cần tìm.

c) Gọi $\overline{abc}$ là số chia hết cho 9 gồm ba chữ số khác nhau. Khi đó $\{a, b, c\}$ có thể là: $\{0, 4, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$

- Khi $\{a, b, c\} = \{0, 4, 5\}$ thì các số phải tìm là: $405, 450, 504, 540 \rightarrow$ có 4 số.
- Khi $\{a, b, c\} = \{1, 3, 5\}$ hay $\{2, 3, 4\}$ thì số phải tìm là hoán vị của 3 phần tử $\rightarrow$ có $3! = 6$ số. Vậy có: $4 + 6 + 6 = 16$ số cần tìm.

Ví dụ 4. Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có ba chữ số khác nhau và không lớn hơn 789?

Lời giải:

Ta xét các trường hợp sau:

TH1: Chữ số hàng đơn vị là 2, 4, 6 $\Rightarrow$ có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

- Nếu chữ số hàng trăm nhỏ hơn 7: Khi đã chọn chữ số hàng đơn vị, ta còn 5 cách chọn chữ số hàng trăm. Sau khi đã chọn chữ số hàng đơn vị và hàng trăm, ta có 7 cách chọn chữ số hàng chục $\Rightarrow$ Số các số thu được là: $3.5.7 = 105$ số.

- Nếu chữ số hàng trăm bằng 7: Sau khi chọn chữ số hàng đơn vị, ta còn 6 cách chọn chữ số hàng chục $\Rightarrow$ Số các số thu được là $3.6 = 18$

TH2: Chữ số hàng đơn vị là 8:

- Nếu chữ số hàng trăm nhỏ hơn 7: có 6 cách chọn chữ số hàng trăm. Sau khi đã chọn chữ số hàng trăm, ta có 7 cách chọn chữ số hàng chục.

$\Rightarrow$ Số các số thu được là: $6.7 = 42$ số.

- Nếu chữ số hàng trăm bằng 7: có 6 cách chọn chữ số hàng chục.

$\Rightarrow$ Số các số thu được là: 6 số.

Vậy tất cả có: $105 + 18 + 42 + 6 = 171$ số.

DẠNG 2: BÀI TOÁN ĐẾM SỐ CÓ RÀNG BUỘC LỚN BÉ, SỐ LẦN XUẤT HIỆN CHỮ SỐ.

Ví dụ 1. Cho các chữ số: 0, 2, 4, 5, 6. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số

a) Có 3 chữ số đôi một khác nhau và lớn hơn 226

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau và nhỏ hơn 5133.

Lời giải:

a) Số cần lập có dạng $\overline{abc} > 226$ (trong đó $a, b, c \in \{0; 2; 4; 5; 6\}$ và đôi một khác nhau)

TH1: Với $a = 2$ thì $b = \{4; 5; 6\}$ có 3 cách chọn suy ra c còn 3 cách chọn nên có $1.3.3 = 9$ số.

TH2: Với $a = \{4; 5; 6\}$ có 3 cách chọn thì b có 4 cách chọn và c còn 3 cách chọn nên có $3.4.3 = 36$ số.

Theo quy tắc cộng có $9 + 36 = 45$ số.

b) Số cần lập có dạng $\overline{abcd} < 5133$ (trong đó $a, b, c \in \{0; 2; 4; 5; 6\}$ và đôi một khác nhau)

TH1: Nếu $a = 5 \Rightarrow b = 0$ khi đó c, d có lần lượt 3 và 2 cách chọn suy ra có $3.2 = 6$ số.

TH2: Nếu $a = \{2; 4\}$ thì $\overline{bcd}$ có $A_4^3 = 24$ cách chọn suy ra có $2.24 = 48$ số.

Theo quy tắc cộng có $6 + 48 = 54$ số.

Ví dụ 2. Cho các chữ số: 0, 2, 3, 5, 7, 8. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số

a) Có 4 chữ số đôi một khác nhau và nhỏ hơn 6540

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau và lớn hơn 2318

Lời giải:

a) Số cần lập có dạng $\overline{abcd} < 6540$ (trong đó $a, b, c, d \in \{0; 2; 3; 5; 7; 8\}$ và đôi một khác nhau)

TH1: Nếu $a = 6, b = 5 \Rightarrow c, d \in \{0, 2, 3\}$ nên $\overline{cd}$ có $A_3^2 = 6$

TH2: Nếu $a = 6; b = \{0, 2, 3\}$ có 3 cách chọn thì $\overline{cd}$ có $A_4^2 = 12$ cách lập suy ra có $3.12 = 36$ số.

TH3: Nếu $a = \{2; 3; 5\}$ có 3 cách chọn thì $\overline{bcd}$ có $A_5^3 = 60$ cách lập suy ra có $3.60 = 180$ số.

Vậy theo quy tắc cộng có $6 + 36 + 180 = 222$ số.

b) Số cần lập có dạng $\overline{abcd} > 2318$ (trong đó $a, b, c, d \in \{0, 2, 3, 5, 7, 8\}$ và đôi một khác nhau)

TH1: Nếu $a = 2, b = 3 \Rightarrow c = \{5, 6, 7\}$ có 3 cách chọn và d có 3 cách chọn suy ra có $3.3 = 9$ số.

TH2: Nếu $a = 2, b = \{5, 6, 7\}$ có 3 cách chọn thì $\overline{cd}$ có $A_4^2 = 12$ cách chọn suy ra có $3.12 = 36$ số

TH3: Nếu $a = \{3; 5; 7; 8\}$ suy ra $\overline{bcd}$ có $A_6^3 = 120$ cách suy ra có $4.120 = 480$ số.

Vậy theo quy tắc cộng có $9 + 36 + 480 = 525$ số.

Ví dụ 3. Cho các chữ số: 1, 2, 3, 5, 6, 9. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số

a) Có 3 chữ số đôi một khác nhau và lớn hơn 308.

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau và nhỏ hơn 6256.

Lời giải:

a) Số được lập có dạng $\overline{abc} > 308$ trong đó $a, b, c \in \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}$ và đôi một khác nhau

TH1: Nếu $a = 3$ suy ra $b, c = \{1, 2, 5, 6, 9\}$ nên $\overline{bc}$ có A_5^2 cách chọn

TH2: Nếu $a = \{5, 6, 9\}$ thì $b, c = \{1, 2, 5, 6, 9\}$ nên $\overline{bc}$ có A_5^2 cách chọn

Vậy có $A_5^2 + 3A_5^2 = 80$ số

b) Số được lập có dạng $\overline{abcd} < 6256$ trong đó $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}$ và đôi một khác nhau

TH1: $a = 6, b = 2, c = 5 \Rightarrow d = \{1, 3\}$ nên có 2 số.

TH2: $a = 6, b = 2, c = \{1, 3\} \Rightarrow d$ có 3 cách chọn nên có $2.3 = 6$ số.

TH3: $a = 6, b = 1 \Rightarrow \overline{cd}$ có A_4^2 cách chọn nên có $A_4^2 = 12$ số.

TH4: $a = \{1, 2, 3, 5\}$ thì $\overline{bcd}$ có A_5^3 cách chọn nên có $4.A_5^3 = 240$ số.

Theo quy tắc cộng có $2 + 6 + 12 + 240 = 260$ số.

Ví dụ 4. Cho các chữ số: 0, 1, 2, 5, 6, 8. Từ các số trên có thể lập được bao nhiêu số

a) Có 4 chữ số đôi một khác nhau và không bé hơn 2019.

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau và không lớn hơn 5008.

Lời giải:

a) Số cần lập có dạng $\overline{abcd} \geq 2019$ trong đó $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 5, 6, 8\}$ và đôi một khác nhau

TH1: $a = 2, b = 0 \Rightarrow c = \{5, 6, 8\}$ suy ra d có 3 cách chọn suy ra $3.3 = 9$ số.

TH2: $a = 2, b = \{1, 5, 6, 8\}$ có 4 cách chọn suy ra $\overline{cd}$ có $A_4^2 = 12$ cách lập nên có $4.12 = 48$ số.

TH3: $a = \{5, 6, 8\}$ thì $\overline{bcd}$ có $A_5^3 = 60$ cách lập nên có $3.60 = 180$ số.

Theo quy tắc cộng có $9 + 48 + 180 = 237$ số.

b) Số cần lập có dạng $\overline{abcd} \leq 5008$ trong đó $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 5, 6, 8\}$ và đôi một khác nhau

TH1: $a = 5$ (không tồn tại số thỏa mãn)

TH2: Với $a = \{1, 2\}$ suy ra $\overline{bcd}$ có $A_3^3 = 60$ cách lập nên có $2.60 = 120$ số.

Vậy có 120 số.

Ví dụ 5. Cho các chữ số: 0, 2, 4, 5, 6, 9. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số

a) Có 3 chữ số đôi một khác nhau luôn có mặt chữ số 4

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau luôn có mặt chữ số 6

Lời giải:

a) Xét số có 3 chữ số dạng $\overline{abc}$ ($a \neq 0$) được lập từ 6 số trên có $5.5.4 = 100$ số.

Xét số có 3 chữ số được lập từ các số trên và không có mặt chữ số 4 có: $4.4.3 = 48$ số.

Suy ra có $100 - 48 = 52$ số có 3 chữ số đôi một khác nhau luôn có mặt chữ số 4.

b) Xét số có 4 chữ số dạng $\overline{abcd}$ ($a \neq 0$) được lập từ 6 số trên có $5.5.4.3 = 300$ số.

Xét số có 4 chữ số được lập từ các số trên và không có mặt chữ số 6 có: $4.4.3.2 = 96$ số.

Suy ra có $300 - 96 = 204$ số có 4 chữ số đôi một khác nhau luôn có mặt chữ số 6.

Ví dụ 6. Cho các chữ số: 0, 1, 2, 5, 6, 8. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số

a) Có 3 chữ số đôi một khác nhau, là số chẵn và luôn có mặt chữ số 5.

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau, là số lẻ và luôn có mặt chữ số 2.

Lời giải:

a) Xét số có 3 chữ số khác nhau dạng $\overline{abc}$ là số chẵn và luôn có mặt chữ số 5.

TH1: Với $c = 0$ thì 2 số còn một số là 5 và một số thuộc tập $\{1, 2, 6, 8\}$ có 4 cách chọn, sắp xếp a, b suy ra có $4.2! = 8$ số được lập.

TH2: Với $c = \{2; 6; 8\}$ có 3 cách chọn.

+) Với $a = 5$ thì b có 4 cách chọn nên có $3.4 = 12$ số.

+) Với $b = 5$ thì $a \neq 0$ nên a có 3 cách chọn nên có $3.3 = 9$ số.

Vậy có tổng cộng $8 + 12 + 9 = 29$ số.

b) Số cần lập có dạng $\overline{abcd}$ là số lẻ và luôn có mặt chữ số 2.

Chọn $d = \{1, 5\}$ có 2 cách chọn

TH1: Nếu $a = 2$ thì $\overline{bc}$ có $A_2^2 = 2$ cách lập nên có $2.12 = 24$ số.

TH2: Nếu $b = 2$ thì a có 3 cách chọn và c có 3 cách chọn nên có $3.3 = 9$ số.

TH3: Nếu $c = 2$ hoàn toàn tương tự trường hợp 2 ta cũng có 9 số thỏa mãn.

Vậy có tổng cộng $24 + 9 + 9 = 42$ số thỏa mãn

Ví dụ 7. Cho các chữ số 0, 1, 3, 4, 5, 7. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số

a) Có 3 chữ số đôi một khác nhau, luôn có mặt chữ số 3 và chia hết cho 5.

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau, là số chẵn và luôn có mặt chữ số 7.

Lời giải:

a) Xét các số có 3 chữ số dạng $\overline{abc}$ chia hết cho 5.

TH1: Nếu $c = 0$ thì $\overline{ab}$ có $A_5^2 = 20$ cách chọn suy ra có 20 số

TH2: Nếu $c = 5$ thì $a = \{1; 3; 4; 7\}$ có 4 cách chọn và b có 4 cách chọn suy ra có $4.4 = 16$ số.

Do đó có 36 số.

Xét các số có 3 chữ số dạng $\overline{abc}$ chia hết cho 5 và không có mặt chữ số 3.

TH1: Nếu $c = 0$ thì $\overline{ab}$ có $A_4^2 = 6$ cách chọn suy ra có 6 số

TH2: Nếu $c = 5$ thì $a = \{1; 4; 7\}$ có 3 cách chọn và b có 3 cách chọn suy ra có $3.3 = 9$ số.

Do đó có $6 + 9 = 15$ số.

Vậy có $36 - 15 = 21$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Xét số có 4 chữ số khác nhau dạng $\overline{abcd}$ là số chẵn.

TH1: Nếu $d = 0$ thì $\overline{abc}$ có A_5^3 cách chọn nên có 60 số.

TH2: Nếu $d = 4$ thì $a \neq 0$ nên có 4 cách chọn, $\overline{bc}$ có A_4^2 cách chọn suy ra có $4.A_4^2 = 48$ số.

Vậy có $60 + 48 = 108$ số.

Xét số có 4 chữ số khác nhau dạng $\overline{abcd}$ là số chẵn và không có mặt chữ số 7.

TH1: Nếu $d = 0$ thì $\overline{abc}$ có A_4^3 cách chọn nên có 24 số.

TH2: Nếu $d = 4$ thì $a \neq 0$ nên có 3 cách chọn, $\overline{bc}$ có A_3^2 cách chọn suy ra $3.A_3^2 = 18$ số.

Vậy có $24 + 18 = 42$ số.

Do đó có $108 - 42 = 66$ số có 4 chữ số đôi một khác nhau, là số chẵn và luôn có mặt chữ số 7.

Ví dụ 8. Cho các chữ số: 0, 1, 2, 3, 4, 6. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số

a) Có 3 chữ số đôi một khác nhau, luôn có mặt chữ số 6 và chia hết cho 3.

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau, và luôn có mặt chữ số 2, 3.

Lời giải:

a) Số cần lập có dạng $\overline{abc}$ trong đó $(a + b + c) : 3$

Do số đó luôn có mặt chữ số 6 nên $(a, b, c) = \{(6, 0, 3), (6, 1, 2), (6, 2, 4)\}$

Bộ 3 số $(6, 0, 3)$ lập được $2.2.1 = 4$ số.

Các bộ $(6, 1, 2)$ và $(6, 2, 4)$ mỗi bộ lập được $3! = 6$ số.

Do đó có $4 + 6.2 = 16$ số thỏa mãn yêu cầu.

b) Số có 4 chữ số đôi một khác nhau dạng $\overline{abcd}$.

Các bộ 4 số thỏa mãn yêu cầu là $(2; 3; 0; 1), (2; 3; 0; 4), (2; 3; 0; 6), (2; 3; 1; 4), (2; 3; 1; 6)$ và $(2; 3; 4; 6)$

Các bộ số $(2; 3; 0; 1), (2; 3; 0; 4), (2; 3; 0; 6)$ mỗi bộ có $3.3.2.1 = 18$ số.

Các bộ số $(2; 3; 1; 4), (2; 3; 1; 6)$ và $(2; 3; 4; 6)$ mỗi bộ có $4! = 24$ số.

Vậy có tổng cộng $18.3 + 24.3 = 126$ số.

Ví dụ 9. Cho các chữ số: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số

a) Có 3 chữ số đôi một khác nhau, là số lẻ và không có mặt chữ số 4.

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau, và luôn có mặt chữ số 1, 6.

Lời giải:

a) Số cần lập có dạng $\overline{abc}$ trong đó $a, b, c = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

Số cần lập là số lẻ nên $c = \{1; 3; 5\}$ có 3 cách chọn, khi đó a, b lần lượt có 4 và 3 cách chọn.

Do đó có tổng cộng $3.4.3 = 36$ số

b) Chọn thêm 2 số từ tập $\{2; 3; 4; 5\}$ có $C_4^2 = 6$ cách chọn

Từ 2 số chọn thêm và 2 số 1, 6 ta lập được $4! = 24$ số có 4 chữ số

Do đó có $C_4^2.24 = 144$ số.

Ví dụ 10. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số không chia hết cho 5, trong đó:

a) Các chữ số có thể trùng nhau.

b) Các chữ số phải khác nhau.

Lời giải:

Gọi số cần lập là $\overline{abcde}$

a) Ta có e có 8 cách chọn, a có 9 cách chọn, 3 số b, c, d đều có 10 cách chọn.

Do đó có tổng cộng $8.9.10.10.10 = 72000$ số thỏa mãn.

b) Ta có e có 8 cách chọn, với mỗi cách chọn e có 8 cách chọn a , 8 cách chọn b , 7 cách chọn c và 6 cách chọn d . Vậy có $8.8.8.7.6 = 21504$ số thỏa mãn.

Ví dụ 11. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau trong đó:

a) Tích các chữ số là số lẻ.

b) Tích các chữ số chia hết cho 10.

Lời giải:

Gọi số cần lập là $\overline{abc}$

a) Bộ 3 số có tích các chữ số là số lẻ là: $(1; 3; 5); (1; 3; 7); (1; 3; 9); (3; 5; 7); (3; 5; 9); (5; 7; 9)$

Do đó có tổng cộng: $6.3! = 36$ số.

b) Tích các chữ số chia hết cho 10 do đó phải có mặt chữ số 5 và ít nhất một số chia hết cho 2.

- TH1: số đó có 2 số chẵn vậy có: $C_4^2.3! = 36$ số.

- TH2: số đó có 1 chữ số chẵn có: $C_4^1.C_4^1.3! = 96$ số.

Do vậy có tổng số $36 + 96 = 132$ số.

Ví dụ 12. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 6 chữ số khác nhau thỏa mãn:

a) Không bắt đầu bởi 456.

b) Số tận cùng không bằng 5.

Lời giải:

Số được lập có dạng $\overline{abcdef}$

a) Số các số lẻ có 6 chữ số khác nhau là: $3.5.5.4.3.2 = 1800$ số.

Số các số lẻ có 6 chữ số khác nhau và bắt đầu bằng 456 là: $1.2.3.2 = 6$ số.

Do đó có tổng cộng $1800 - 6 = 1794$ số thỏa mãn.

b) Số các số lẻ có 6 chữ số khác nhau và có tận cùng là số 5 là: $1.5.5.4.3.2 = 600$ số.

Do vậy có $1800 - 600 = 1200$ số thỏa mãn.

Ví dụ 13. Từ các chữ số 0; 4; 5; 7; 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên:

a) Là số lẻ, có 4 chữ số và nhỏ hơn 5000.

b) Lớn hơn 3000 và các chữ số đôi một khác nhau.

Lời giải:

a) Số được lập có dạng $\overline{abcd}$

Có 2 cách chọn $d = \{5; 7\}$. Khi đó có 1 cách chọn $a = 4, b$ có 5 cách chọn và c có 5 cách chọn.

Do đó có $2.1.5.5 = 50$ số.

b) Chọn a có 4 cách chọn, với mỗi cách chọn a có 4 cách chọn b , 3 cách chọn c và 2 cách chọn d .

Do đó có $4.4.3.2 = 96$ số.

Ví dụ 14. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số sao cho:

a) Chữ số 5 có mặt đúng 3 lần, các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần.

b) Chữ số 3 có mặt 2 lần, chữ số 4 có mặt 3 lần, các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần.

Lời giải:

a) Trường hợp chữ số đầu tiên bằng 0, chọn 3 vị trí cho 3 số 5 và 2 vị trí cho 2 số khác ta có $A_5^3.A_8^2$ cách.

Trường hợp có cả chữ số 0 ta được $A_6^3.A_8^3$ cách suy ra có $A_6^3.A_8^3 - A_5^3.A_8^2 = 36960$

b) Trường hợp chữ số đầu tiên bằng 0, chọn 2 vị trí cho số 3; 3 vị trí cho số 4 và 1 vị trí còn lại cho số khác ta có $A_6^2.A_4^3.8$ số. Trường hợp chữ số đầu tiên bằng 0 ta có $A_5^2.A_3^3$ số, dẫn đến có

$A_6^2.A_4^3.8 - A_5^2.A_3^3 = 5640$ số

Ví dụ 15. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau sao cho:

a) Số đó có tổng các chữ số bằng 5.

b) Số đó có tổng các chữ số ở hàng chục và hàng trăm bằng 5.

Lời giải:

a) Các khả năng xảy ra để tổng bằng 5 gồm $(0; 1; 4); (0; 2; 3)$

Tính cả số 0 ở đầu ta có $3! \cdot 2$ cách, riêng trường hợp số 0 ở đầu ta có $2! \cdot 2$ cách, suy ra có 8 số.

b) Các khả năng xảy ra gồm $(5; 0; a), (4; 1; a), (1; 4; a), (3; 2; a), (2; 3; a)$

Từng trường hợp số a có lần lượt 5; 5; 5; 5; 5 cách nên tổng cộng thu được 25 số.

Ví dụ 16. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau

sao cho:

- a) Số đó có tổng các chữ số bằng 8.
- b) Số đó có tổng các chữ số bằng 8 và lớn hơn 235.

Lời giải:

- a) Các khả năng xảy ra để tổng bằng 8 gồm có $(0;1;7), (0;2;6), (0;3;5), (1;2;5), (1;3;4)$.
Tổng khả năng là $3! \cdot 4$, trường hợp chữ số đầu bằng 0 ta có $2! + 2! + 2!$ nên thu được 18 số.
- b) Khả năng 23a và 24a thì a đều không tồn tại, ta thu được 251 và 260.
Xét khả năng 3ab ta có $(a;b) = (0;5), (1;4)$
Xét khả năng 4ab ta có $(a;b) = (1;3)$
Xét khả năng 5ab ta có $(a;b) = (0;3), (1;2)$
Xét khả năng 6ab ta có $(a;b) = (2;0)$ và 7ab ta có $(a;b) = (1;0)$
Thực hiện hoán vị các khả năng trên ta được $2! \cdot 7$ tức là 14 số

Ví dụ 17. Từ các chữ số 0, 1, 2, 5, 6, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau thỏa mãn

- a) Số đó không có tận cùng bằng 6
- b) Số đó chia hết cho 5

Lời giải:

Gọi số có 4 chữ số khác nhau là $\overline{abcd}$ ($a \neq 0$)

- a) Do $d \neq 6$ nên ta chia làm 2 trường hợp như sau:

TH1: $d = 0$ suy ra có: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ số thỏa mãn.

TH2: Với $d = \{1; 2; 5; 7; 8\}$ có 5 cách chọn d , khi đó có lần lượt 5 cách chọn a , 5 cách chọn b và 4 cách chọn c do đó có $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 = 500$ số.

Theo quy tắc cộng có $120 + 500 = 620$ số.

- b) Số đó chia hết cho 5 nên $d = \{0; 5\}$

TH1: $d = 0$ suy ra có: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ số thỏa mãn.

TH2: $d = 5$ suy ra có: $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ số thỏa mãn.

Theo quy tắc cộng có $120 + 100 = 220$ số.

Ví dụ 18. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau trong đó phải có chữ số 2?

Lời giải:

Số có 4 chữ số có dạng $\overline{abcd}$ ($a \neq 0$)

Có $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1470$ số có 4 chữ số được lập từ 8 số trên.

Có $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$ số có 4 chữ số không có mặt chữ số 2 được lập từ các chữ số trên.

Do đó có $1470 - 720 = 750$ số có 4 chữ số khác nhau và luôn có mặt chữ số 2.

Ví dụ 19. Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau sao cho

- a) Luôn có mặt chữ số 5
b) Số tạo thành nhỏ hơn 4000.

Lời giải:

a) Số có 4 chữ số có dạng $\overline{abcd}$ ($a \neq 0$)

Có $7.7.6.5 = 1470$ số có 4 chữ số được lập từ 8 số trên.

Có $6.6.5.4 = 720$ số có 4 chữ số không có mặt chữ số 5 được lập từ các chữ số trên.

Do đó có $1470 - 720 = 750$ số có 4 chữ số khác nhau và luôn có mặt chữ số 5.

b) Số tạo thành nhỏ hơn 4000 nên $a = \{1; 2; 3\}$ có 3 cách chọn, khi đó các số b, c, d lần lượt có 7, 6, 5 cách chọn nên theo quy tắc nhân có $3.7.6.5 = 630$ số.

Ví dụ 20. Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ có đúng năm chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.

Lời giải:

Số cần lập có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ trong đó a_5 lẻ $a_1 \neq 0$ và $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$

Rõ ràng $a_5 \geq 5$

TH1: $a_5 = 5$ có 1 số là 12345.

TH2: Nếu $a_5 = 7$ thì $a_1, a_2, a_3, a_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ chọn 4 trong 6 số này ta được 1 số thỏa mãn yêu cầu nên trường hợp này có C_6^4 số

TH3: Nếu $a_5 = 9$ thì $a_1, a_2, a_3, a_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ chọn 4 trong 8 số này ta được 1 số thỏa mãn yêu cầu nên trường hợp này có C_8^4 số

Vậy theo quy tắc cộng có $1 + C_6^4 + C_8^4 = 86$ số

Ví dụ 21. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

- a) Có thể lập được bao nhiêu số chẵn có năm chữ số khác nhau?
b) Có thể lập được bao nhiêu số lẻ có ba chữ số khác nhau nhỏ hơn 400?

Lời giải:

a) Số cần lập có dạng $\overline{abcde}$ ($a \neq 0$), số cần lập là số chẵn nên e là số chẵn

- **TH1:** nếu $e = 0$ thì có $6.5.4.3 = 360$ cách lập số $\overline{abcd}$
- **TH2:** nếu $e = \{2; 4; 6\}$ thì có $5.5.4.3 = 300$ cách lập số $\overline{abcd}$ nên có $3.300 = 900$ số

Theo quy tắc cộng có $360 + 900 = 1260$ số.

b) Số cần lập có dạng $\overline{abc}$ ($a < 4$)

- **TH1:** Nếu $a = 4 \Rightarrow c = \{1; 3; 5\}$ và b có 5 cách chọn nên trường hợp này có $3.5 = 15$ số.
- **TH2:** Nếu $a = \{1; 3\} \Rightarrow c = \{1; 3; 5\} \setminus \{a\}$ và b có 5 cách chọn nên trường hợp này có $2.2.5 = 20$ số.

Vậy theo quy tắc cộng có $15 + 20 = 35$ số.

Ví dụ 22. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thiết lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau?

Lời giải:

Kí hiệu $T = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$,

- Đi tìm các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau được lập từ tập T
- Số cần tìm có dạng $\overline{xyzmnp}$ trong đó x, y, z, m, n, p đôi một khác nhau và thuộc T .
- + Chọn x có 6 cách
- + Chọn y có 5 cách (trừ x)
- + Chọn z có 4 cách (trừ x, y)
- + Chọn m có 3 cách (trừ x, y, z)
- + Chọn n có 2 cách (trừ x, y, z, m)
- + Chọn p có 1 cách (trừ x, y, z, m, n)
- Theo quy tắc nhân thì có $6.5.4.3.2.1 = 720$ số thỏa mãn
- Đi tìm số các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau được lập từ tập T mà chữ số 1 và 6 cạnh nhau

Ta ghép hai chữ số 1 và 6 để tạo thành một số kép i . Có 2 cách ghép như vậy là 16 hoặc 61.

Bài toán trở thành : Từ 5 chữ số 2;3;4;5; i có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau.

- + Ghép hai chữ số 1 và 6 để tạo thành một số kép có 2 cách.
- + Chữ số hàng vạn có 5 cách chọn.
- + Chữ số hàng nghìn có 4 cách chọn (trừ chữ số hàng vạn).
- + Chữ số hàng trăm có 3 cách chọn (trừ chữ số hàng vạn, nghìn).
- + Chữ số hàng chục có 2 cách chọn (trừ chữ số hàng vạn, nghìn, trăm).
- + Chữ số hàng đơn vị có 1 cách chọn (trừ chữ số hàng vạn, nghìn, trăm, chục).

Theo quy tắc nhân thì có $2.5.4.3.2.1 = 240$ số thỏa mãn.

Do đó có $720 - 240 = 480$ số thỏa mãn.

Ví dụ 23. Tính các số tự nhiên đôi một khác nhau có 6 chữ số tạo thành từ các số 0,1,2,3,4,5 sao cho 2 chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau.

Lời giải:

Ta ghép hai chữ số 3 và 4 để tạo thành một số kép i . Có 2 cách ghép như vậy là 34 hoặc 43.

Bài toán trở thành : Từ 5 chữ số 0;1;2;5; i có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau.

- + Ghép hai chữ số 3 và 4 để tạo thành một số kép có 2 cách.
- + Chữ số hàng vạn có 4 cách chọn (trừ số 0)
- + Chữ số hàng nghìn có 4 cách chọn (trừ chữ số hàng vạn)
- + Chữ số hàng trăm có 3 cách chọn (trừ chữ số hàng vạn, nghìn)
- + Chữ số hàng chục có 2 cách chọn (trừ chữ số hàng vạn, nghìn, trăm)
- + Chữ số hàng đơn vị có 1 cách chọn (trừ chữ số hàng vạn, nghìn, trăm, chục)

Theo quy tắc nhân thì có $2.4.4.3.2.1 = 192$ số thỏa mãn.

240

Ví dụ 24. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số sao cho:

- a) Các chữ số đứng liền sau luôn lớn hơn chữ số đứng liền trước?
- b) Các chữ số sau luôn nhỏ hơn chữ số đứng liền trước?

Lời giải:

a) Số thỏa mãn bài toán thì không thể có số 0 vì nếu có số 0 thì phải có dạng 01234, số này không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó số cần tìm có 5 chữ số phải được chọn từ tập $T = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Với mỗi cách chọn 5 số bất kỳ từ tập T thì chỉ có 1 cách sắp xếp theo thứ tự tăng dần, từ đó chỉ lập được 1 số thỏa mãn bài toán.

Do đó số các số thỏa mãn bài toán chính là số tổ hợp chập 5 của 9 phần tử từ tập T

Vậy có tất cả $C_9^5 = 126$ số thỏa mãn bài toán.

b) Ký hiệu $K = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Với mỗi cách chọn 5 số bất kỳ từ tập K thì chỉ có 1 cách sắp xếp theo thứ tự giảm dần, từ đó chỉ lập được 1 số thỏa mãn bài toán.

Do đó số các số thỏa mãn bài toán chính là số tổ hợp chập 5 của 10 phần tử tập K .

Vậy có tất cả $C_{10}^5 = 252$ số thỏa mãn bài toán.

DẠNG 3. BÀI TOÁN CHỌN NGƯỜI VÀ ĐỒ VẬT

Ví dụ 1. Một nhóm công nhân gồm 15 nam và 5 nữ. Người ta muốn chọn từ nhóm ra 5 người để lập thành một tổ công tác sao cho phải có 1 tổ trưởng nam, 1 tổ phó nam và có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác.

Lời giải:

Số cách chọn 5 người để lập tổ công tác trong đó có 1 tổ trưởng nam và không có nữ là:

$$C_{15}^1 \cdot C_{14}^1 \cdot C_{13}^3 = 60060$$

Số cách chọn ra 5 người để lập đội công tác trong đó 1 tổ trưởng nam, 1 tổ phó nam là:

$$C_{15}^1 \cdot C_{14}^1 \cdot C_{18}^3 = 171360$$

Vậy khi đó số cách thỏa mãn bài toán là: $171360 - 60060 = 111300$ cách.

Ví dụ 2. Một lớp có 10 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Cần chọn ra 5 học sinh để đi làm công tác “Mùa hè xanh”. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 5 học sinh đó phải có ít nhất:

- a) Hai học sinh nữ và hai học sinh nam.
- b) Một học sinh nữ và một học sinh nam.

Lời giải:

a) Các trường hợp có thể xảy ra là 2 nữ 3 nam và 3 nữ 2 nam nên số cách chọn là:

$$C_{10}^2 \cdot C_{10}^3 + C_{10}^3 \cdot C_{10}^2 = 10800$$

b) Các trường hợp có thể xảy ra là: 1 nữ 4 nam, 2 nữ 3 nam, 3 nữ 2 nam, 4 nữ 1 nam nên số cách chọn là:

$$C_{10}^1 \cdot C_{10}^4 + C_{10}^2 \cdot C_{10}^3 + C_{10}^3 \cdot C_{10}^2 + C_{10}^4 \cdot C_{10}^1 = 15000$$

Ví dụ 3. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề có 5 câu hỏi khác nhau và

nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2.

Lời giải:

Ta có trong bộ đề có 5 năm và phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, dễ, trung bình) nên mỗi đề với 1 loại câu hỏi thì số câu tối đa là 3 mà số câu dễ không ít hơn 2 nên số câu dễ hoặc 2 hoặc 3.

Trường hợp 1:

Nếu số câu dễ bằng 3 thì số câu khó và trung bình phải lần lượt bằng 1 nên số cách ra đề là $C_5^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{15}^3 = 22750$

Trường hợp 2:

Nếu số câu dễ bằng 2 thì có 2 khả năng xảy ra. Hoặc số câu trung bình = 2 và số câu khó = 1 hoặc số câu trung bình bằng 1 và số câu khó bằng 2 nên số cách ra đề là $C_{15}^2 \cdot (C_{10}^2 \cdot C_5^1 + C_{10}^1 \cdot C_5^2) = 34125$.

Như vậy thì tổng số cách ra đề là $22750 + 34125 = 56875$

Ví dụ 4. Có hai chuồng gà, chuồng 1 nhốt 3 gà trống và 4 gà mái, chuồng 2 nhốt 4 gà trống và 5 gà mái. Hỏi có bao nhiêu cách bắt một lần 3 con gà từ một trong hai chuồng đã cho, trong đó có hai gà trống và một gà mái?

Lời giải:

TH1: Chuồng được chọn là chuồng 1: Số cách 3 con gà ở chuồng 1 trong đó có hai gà trống và một gà mái là: $C_3^2 \cdot C_4^1 = 12$

TH2: Chuồng được chọn là chuồng 2: Số cách 3 con gà ở chuồng 2 trong đó có hai gà trống và một gà mái là $C_4^2 \cdot C_5^1 = 30$

Vậy theo quy tắc cộng có: $12 + 30 = 42$ cách chọn

Ví dụ 5. Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số bi lấy ra không có đủ cả 3 màu?

Lời giải:

Số cách chọn ra 4 viên bi trong 15 viên bi là C_{15}^4

Số cách chọn ra 4 viên bi trong 15 viên bi có đủ 3 màu là

TH1: 2 viên bi đỏ, 1 viên bi trắng và 1 viên bi vàng có: $C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1 = 180$ cách

TH2: 1 viên bi đỏ, 2 viên bi trắng và 1 viên bi vàng có: $C_4^1 \cdot C_5^2 \cdot C_6^1 = 240$ cách

TH3: 1 viên bi đỏ, 1 viên bi trắng và 2 viên bi vàng có: $C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^2 = 300$ cách.

Vậy có $C_{15}^4 - 180 - 240 - 300 = 645$ cách

Ví dụ 6. Xếp 3 viên bi đỏ có bán kính khác nhau và 3 viên bi xanh giống nhau vào một dãy 7 ô trống. Hỏi:

a) Có bao nhiêu cách xếp khác nhau?

b) Có bao nhiêu cách xếp khác nhau sao cho 3 viên bi đỏ xếp cạnh nhau và 3 viên bi xanh xếp cạnh nhau?

Lời giải:

a) Xếp 3 viên bi đỏ có bán kính khác nhau vào 7 ô trống có A_7^3 cách

Xếp 3 viên bi xanh giống nhau vào 4 ô còn lại có C_4^3

Vậy có $A_7^3.C_4^3 = 840$ cách xếp

b) Xem 3 viên bi đỏ là 1 bộ, 3 viên bi xanh là 1 bộ, còn ô trống còn lại là 1 bộ $\Rightarrow$ có $3!$ cách xếp các bộ.
Mà 3 viên bi đỏ có bán kính khác nhau nên hoán vị 3 viên bi đỏ có $3!$

Vậy có $3!.3! = 36$ cách xếp.

Ví dụ 7. Một thầy giáo có 12 cuốn sách đôi một khác nhau trong đó có 5 cuốn sách Văn, 4 cuốn sách Nhạc và 3 cuốn sách Họa. Ông muốn lấy ra 6 cuốn và tặng cho 6 học sinh A, B, C, D, E, F mỗi em một cuốn.

a) Giả sử thầy giáo chỉ muốn tặng cho các học sinh trên những cuốn sách thuộc 2 thể loại Văn và Nhạc. Hỏi có bao nhiêu cách tặng?

b) Giả sử thầy giáo muốn rằng sau khi tặng sách xong, mỗi một trong ba loại sách trên đều còn lại ít nhất một cuốn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải:

a) Số cách tặng là số sách chọn 6 cuốn sách từ 9 cuốn có kể thứ tự, suy ra số cách tặng là $A_9^6 = 60480$ cách.

b) Tổng 2 bộ sách bất kì đều vượt quá 6 cuốn, nên không thể chọn sao cho cùng hết 2 loại sách.

Số cách chọn 6 quyển sách từ 12 quyển là $A_{12}^6 = 665280$

Số cách chọn sao cho không còn sách Văn $A_6^5 = 5040$

Số cách chọn sao cho không còn sách Nhạc $A_6^4.A_8^2 = 20160$

Số cách chọn sao cho không còn sách Họa $A_6^3.A_9^3 = 60480$

Số cách chọn cần tìm là $665280 - 85680 = 579600$

Ví dụ 8. Một lớp có 18 nam và 12 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 5 bạn làm cán sự lớp sao cho:

a) Mọi người đều vui vẻ tham gia.

b) Bạn A và B không thể làm việc chung với nhau.

c) Bạn C và D từ chối tham gia.

Lời giải:

a) Chọn 5 bạn làm ban cán sự lớp khi mọi người vui vẻ tham gia sẽ có $C_{30}^5 = 142506$

b) Khi có 2 bạn A, B không thể làm việc chung với nhau thì ta sẽ có $C_{28}^5 + 2.C_{29}^4 = 145782$

c) Khi C, D từ chối thì sẽ còn 28 người, do đó số cách chọn là $C_{28}^5 = 98280$

Ví dụ 9. Có 5 nam và 5 nữ ngồi vào hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 5 ghế. Hỏi:

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho hai người đối diện khác phái?

b) Có bao nhiêu cách sắp xếp mà nam và nữ ngồi xen kẽ và đối diện?

Lời giải:

a) Có $5! = 120$ cách chia 5 nam, 5 nữ thành 5 cặp nam – nữ

Có $5! = 120$ cách chọn 5 cặp ghế đối diện cho 5 cặp nam – nữ

Có 2 cách xếp mỗi cặp nam nữ vào cặp ghế đã chọn.

$\Rightarrow$ Có $120.120.2^5 = 46080$ cách

b) Để nam nữ ngồi xen kẽ thì nam ngồi vào 6 vị trí chẵn và nữ ngồi vào 6 vị trí lẻ mà 2 người đối diện và xen kẽ có thể đổi chỗ cho nhau nên có $2.5!.5! = 28800$

Ví dụ 10. Cần xếp 3 nam và 2 nữ vào 1 hàng ghế có 7 chỗ ngồi sao cho 3 nam ngồi kề nhau và 2 nữ ngồi kề nhau. Hỏi có bao nhiêu cách.

Lời giải:

Ta có 3 nam và 2 nữ ngồi cùng nhau là 2 nhóm a và b.

Số cách sắp xếp trong nhóm a là $3! = 6$ và trong nhóm b là $2! = 2$ cách

Trong 7 chỗ ngồi gồm 3 nam và 2 nữ nên số ghế trống là 2, nếu ta coi 3 nam và 2 nữ ngồi cạnh nhau là các nhóm riêng biệt thì số chỗ ngồi mặc định là 4, từ đó số cách sắp xếp 2 nhóm a và b vào 4 chỗ ngồi là $C_4^2 = 6$ cách. Vậy số cách là $3!.2!.C_4^2 = 72$

Ví dụ 11. Xếp 3 nam, 2 nữ vào 8 ghế. Có bao nhiêu cách, nếu:

a) Nam và nữ ngồi tùy ý.

b) Xếp 5 người ngồi kề nhau.

c) Xếp 3 nam ngồi kề, 2 nữ ngồi kề và giữa hai nhóm có ít nhất một ghế trống.

Lời giải:

a) Có $A_8^5 = 6720$ cách xếp 5 học sinh vào 8 ghế trống 1 cách tùy ý.

b) Buộc 5 người là 1 phần tử thì có 4 cách xếp phần tử đó vào 8 ghế, xếp 5 người này có $5!$ cách. Do đó theo quy tắc nhân có $4.5! = 480$ cách.

c) Xếp 3 nam ngồi kề có $3! = 6$ cách, xếp 2 nữ ngồi kề có $2! = 2$ cách. Coi 3 nam là 1 phần tử A, 2 nữ là 1 phần tử B và 3 ghế trống kia là 3 phần tử.

Xếp 3 ghế trống có 1 cách, như vậy có 4 vị trí để xếp 2 phần tử A và B xen kẽ các ghế trống này. Theo quy tắc nhân có $6.2.A_4^2 = 144$ cách

Ví dụ 12. Có 4 người đàn ông, 2 người đàn bà và 1 đứa trẻ được xếp ngồi vào bảy chiếc ghế đặt quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho:

a) Đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn bà?

b) Đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn ông?

Lời giải:

a) Xếp hai người đàn bà ngồi cạnh nhau. Có 2 cách

Sau đó xếp đứa trẻ ngồi vào giữa. Có 1 cách.

Xếp 4 người đàn ông vào 4 ghế còn lại. Có $4!$ cách

Theo quy tắc nhân, có $2.4! = 48$ cách.

b) Đầu tiên chọn 2 người đàn ông. Có C_4^2 cách.

Xếp 2 người đó ngồi cạnh nhau. Có 2 cách.

Sau đó xếp đứa trẻ vào giữa. Có 1 cách.

Xếp 4 người còn lại vào 4 ghế còn lại. Có $4!$ cách

Vậy theo quy tắc nhân, có $C_4^2.2.4! = 288$ cách.

Ví dụ 13. Có 4 người đàn ông, 2 người đàn bà và một đứa trẻ. Có bao nhiêu cách xếp thành hàng ngang:

- a) Sao cho 2 người đàn bà và đứa trẻ đứng cạnh nhau.
- b) Sao cho đứa trẻ đứng giữa hai người đàn bà.
- c) Sao cho đứa trẻ đứng giữa hai người đàn ông.
- c) Đứa trẻ không đứng giữa hai người đàn bà.
- e) Hai người đàn bà và đứa trẻ không ai đứng gần nhau.

Lời giải:

a) Vì 2 người đàn bà và đứa trẻ đứng cạnh nhau nên gom 3 người này thành nhóm X.

Số cách xếp 4 người đàn ông và X là $5! = 120$ cách xếp.

Ứng với mỗi cách xếp trên có $3! = 6$ cách xếp 2 người đàn bà và đứa trẻ

Theo quy tắc nhân ta có $120.6 = 720$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán

b) Vì đứa trẻ đứng giữa hai người đàn bà có nghĩa 3 người này cũng đứng cạnh nhau nên gom 3 người này thành nhóm X.

Số cách xếp 4 người đàn ông và X là $5! = 120$ cách xếp.

Ứng với mỗi cách xếp trên có $2! = 2$ cách xếp 2 người đàn bà.

Theo quy tắc nhân ta có $120.2 = 240$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Đầu tiên chọn 2 người đàn ông trong 4 người đàn ông có $C_4^2 = 6$ cách chọn

Vì đứa trẻ đứng giữa hai người đàn ông có nghĩa 3 người này đứng cạnh nhau nên gom 3 người này thành nhóm X.

Số cách xếp 4 người gồm 2 đàn ông, 2 đàn bà và X là $5! = 120$ cách xếp.

Ứng với mỗi cách xếp trên có $2! = 2$ cách xếp 2 người đàn ông.

Theo quy tắc nhân ta có $120.2.6 = 1440$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán

d) Bước 1: Sắp xếp 7 người bất kì là $7!$

Bước 2: Xếp đứa trẻ đứng giữa hai người đàn bà là 240 cách

Suy ra cách sắp hai đứa trẻ không đứng giữa hai người đàn bà $7! - 240 = 4800$

e) Xếp 4 người đàn ông có $4!$ cách. Khi đó có 5 vị trí (xen kẽ và 2 đầu) để xếp 2 người đàn bà và 1 đứa trẻ còn lại vào hàng ngang. Vậy có $4!.A_5^3 = 1440$ cách.

Ví dụ 14. Có 7 người đàn ông, 2 người đàn bà và 3 em bé. Có bao nhiêu cách xếp thành hàng ngang sao cho:

- a) 2 người đàn bà ngồi cạnh nhau và 3 em bé ngồi cạnh nhau.
- b) 3 em bé luôn ngồi giữa 2 người đàn bà.
- c) Mỗi đứa bé phải ngồi giữa 1 người đàn ông và một người đàn bà.
- d) 3 em bé luôn ngồi cạnh nhau.

Lời giải:

a) Xếp 2 người đàn bà ngồi cạnh nhau có $2! = 2$ cách (coi là phần tử A), xếp 3 em bé ngồi cạnh nhau có $3! = 6$ cách (coi là phần tử B), xếp phần tử A, B và 7 người đàn ông có $9!$ cách.

Vậy có $2.6.9! = 4354560$ cách.

b) Xếp 3 em bé ngồi giữa 2 người đàn bà có $3!.2 = 18$ cách (coi là phần tử X)

Xếp X và 7 người đàn ông có $8!$ Cách.

Vậy có $18.8! = 725760$ cách.

c) Chọn ra 2 người đàn ông có C_7^2 cách.

Xếp 2 người đàn ông và 2 người đàn bà xen kẽ nhau có $2.2.2 = 8$ cách.

Xếp 3 đứa trẻ xen kẽ 4 người này có $3!$ cách.

Xếp 7 người này (coi là phần tử X) và 5 người đàn ông còn lại có $6!$ cách.

Do đó theo quy tắc nhân có: $C_7^2.8.3!.6! = 725760$ cách.

d) Xếp 3 em bé ngồi cạnh nhau có $3! = 6$ cách (coi là phần tử X)

Xếp phần tử X và 9 người còn lại có $10!$ cách.

Do đó theo quy tắc nhân có $6.10! = 21772800$ cách.

Ví dụ 15. Xếp 6 bạn nam và 4 bạn nữ thành một hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách xếp:

a) Nữ luôn đứng cạnh nhau.

b) Nam nữ đứng xen kẽ.

c) Không có 2 nữ nào đứng cạnh nhau.

d) Nữ luôn đứng thành 2 cặp và hai cặp này không đứng cạnh nhau.

Lời giải:

a) Xếp 4 bạn nữ có $4!$ cách (coi là phần tử X), xếp X và 6 bạn nam còn lại có $7!$ cách.

Vậy có $4!.7! = 120960$ cách.

b) Không tồn tại trường hợp nam nữ đứng xen kẽ (luôn có ít nhất 2 bạn nam đứng cạnh nhau)

c) Xếp 6 bạn nam có $6!$ cách, khi đó có 7 vị trí để xếp các bạn nữ sao cho 2 bạn nữ bất kỳ không đứng cạnh nhau suy ra có $6!.A_7^4 = 604800$ cách.

d) Chia nữ thành 2 cặp có $C_4^2.C_2^2 = 6$ cách, gọi 2 cặp đó là A và B, (trong 6 cách này chỉ có 3 cặp mà các phần tử trong mỗi tập đều khác nhau)

Xếp các bạn nữ trong mỗi cặp có $2!.2!$ cách

Xếp 6 bạn nam có $6!$ cách, khi đó có 7 vị trí để xếp 2 cặp A và B không đứng cạnh nhau

Do đó có $3.6!.A_7^2.2!.2! = 326880$ cách.

Ví dụ 16. Có bao nhiêu cách xếp chỗ cho 4 bạn nữ và 6 bạn nam vào 10 ghế mà không có bạn nữ nào ngồi cạnh nhau, nếu:

a) Ghế xếp thành hàng ngang?

b) Ghế xếp thành một bàn tròn?

Lời giải:

a) Xếp 6 nam có $6!$ cách.

Giữa các nam này có 7 chỗ trống (5 chỗ trống ở giữa và 2 chỗ trống ở 2 đầu), xếp 4 nữ vào có A_7^4 cách.

Theo quy tắc nhân, số cách xếp chỗ thỏa yêu cầu là $6!.A_7^4 = 604800$ cách.

b) Xếp 6 nam có $5!$ cách (hoán vị vòng quanh).

Giữa các nam này có 6 chỗ trống, xếp 4 nữ vào có A_6^4 cách.

Theo quy tắc nhân, số cách xếp chỗ thỏa yêu cầu là: $5!.A_6^4 = 43200$ cách.

Ví dụ 17. Một đoàn tàu có 3 toa chở khách: toa 1, toa 2, toa 3. Trên sân ga có 4 hành khách chuẩn bị đi

tàu. Biết rằng mỗi toa có ít nhất một ghế trống. Hỏi có bao nhiêu:

- a) Cách sắp xếp 4 vị khách lên 3 toa tàu đó?
- b) Cách sắp xếp 4 vị khách lên tàu để có 1 toa có 3 trong 4 vị khách trên?

Lời giải:

- a) Mỗi người có 4 lựa chọn nên số cách xếp là $3^4 = 81$ cách
- b) Chọn 1 toa có 3 cách chọn, chọn 3 hành khách xếp vào toa đó có $3.C_4^3$ cách, 1 người còn lại vào 1 trong 2 toa còn lại có 2 cách.
Theo quy tắc nhân có $3.C_4^3.2 = 24$ cách.

Ví dụ 18. Một nhóm học sinh có 7 em nam và 3 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 em này trên một hàng ngang trong mỗi yêu cầu sau đây:

- a) Giữa hai bạn nữ bất kỳ đều không có một em nam nào?
- b) Hai vị trí đầu và cuối hàng là các em nam và không có 2 em nữ nào ngồi cạnh nhau?

Lời giải:

- a) Vì giữa 2 bạn nữ không có một bạn nam nào, có nghĩa 3 bạn nữ này đứng cạnh nhau. Gọi nhóm 3 bạn nữ này là nhóm X.
Bước 1: Xếp X và 7 bạn nam trên 1 hàng ngang, có $8!$ cách xếp.
Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có $3!$ cách xếp các bạn nữ trong X.
Vậy có $8!.3! = 241920$ cách xếp.
- b) Bước 1: Xếp 7 bạn nam thành một hàng ngang, có $7!$ cách xếp.
Bước 2: Xem các bạn nam là những vách ngăn, giữa 7 bạn nam có 6 vị trí để xếp 3 bạn nữ. Chọn 3 vị trí trong 6 vị trí để xếp ba bạn nữ có A_6^3 cách.
Theo quy tắc nhân có $7!.A_6^3 = 604800$ cách.

Ví dụ 19. Có 4 gia đình, mỗi gia đình có 1 ông bố, 1 bà mẹ, 1 con trai và 1 con gái cùng tham dự 1 bữa tiệc. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi những người này thành một hàng ngang sao cho:

- a) Các ông bố ngồi chung với nhau, các bà mẹ ngồi chung với nhau, các bé trai ngồi chung với nhau và các bé gái ngồi chung với nhau.
- b) Các thành viên trong 1 gia đình luôn ngồi cạnh nhau và hai đứa con luôn ngồi giữa bố mẹ của mình.

Lời giải:

- a) Xếp 4 ông bố cạnh nhau có $4!$ Cách (coi là phần tử A), tương tự xếp 4 bà mẹ, 4 bé trai và 4 bé gái cũng có $4!$ cách và ta buộc lại thành các phần tử B, C, D
Xếp 4 phần tử A, B, C, D có $4!$ cách.
Vậy theo quy tắc nhân có $4!.4!.4!.4! = 7962624$ cách
- b) Xếp 4 thành viên trong gia đình A gồm 1 ông bố, 1 bà mẹ, 1 con trai và 1 con gái sao cho hai đứa con luôn ngồi giữa bố mẹ của mình có $2!.2! = 4$ cách xếp các thành viên của gia đình A
Tương tự có 4 cách xếp các thành viên của gia đình B, C, D.
Xếp 4 phần tử A, B, C, D có $4!$ cách
Vậy theo quy tắc nhân có $4.4.4.4! = 6144$ cách.

Ví dụ 20. Có 6 nam, 6 nữ trong đó có 3 bạn tên A, B, C. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thành một hàng dọc để vào lớp sao cho:

- a) Các bạn nữ không đứng cạnh nhau.
- b) Đầu hàng và cuối hàng luôn là nam.
- c) Đầu hàng và cuối hàng luôn cùng phái.
- d) Đầu hàng và cuối hàng luôn khác phái.
- e) A, B, C luôn đứng gần nhau.
- f) A, B, C không ai đứng gần nhau.
- g) A, B đứng cách nhau đúng 1 người.
- h) A, B cách nhau đúng 2 người.

Lời giải:

a) Các bạn nữ không đứng cạnh nhau nên 6 nữ và 6 nam đứng xen kẽ nhau.

Xếp 6 bạn nữ xen kẽ 6 bạn nam có $2.6!.6! = 1036800$ cách.

b) Chọn 2 bạn nam xếp đầu hàng có A_6^2 cách.

Xếp 10 bạn còn lại vào giữa có $10!$ nên có $A_6^2.10! = 108864000$ cách

c) Xét trường hợp đầu hàng và cuối hàng luôn là nam (hoặc luôn là nữ) đều bằng $A_6^2.10! = 108864000$

Do đó số cách xếp mà đầu hàng và cuối hàng luôn cùng phái là $2.108864000 = 217728000$

d) Chọn bạn đầu hàng có 12 cách (là nam hoặc nữ) thì bạn cuối hàng có 6 cách (vì đầu hàng và cuối hàng khác phái)

Xếp 10 bạn còn lại vào giữa có $10!$ nên có: $12.6.10! = 261273600$ cách.

e) Xếp 3 bạn A, B, C đứng cạnh nhau có $3! = 6$ cách (coi là phần tử X)

Xếp phần tử X và 9 bạn còn lại có $10!$ cách nên theo quy tắc nhân có $10!.3! = 21772800$ cách.

f) Xếp 9 bạn (không gồm A, B, C) thành một hàng ngang có $9!$ cách. Khi đó có 10 vị trí cho các bạn A, B, C sao cho không có hai bạn nào đứng cạnh nhau

Do đó có $9!.A_{10}^3 = 32659200$ cách.

g) Chọn ra 1 người (không gồm A, B) có 10 cách chọn, xếp A, B và người đó sao cho người đó đứng giữa có 2 cách, như vậy buộc 3 người này thành 1 phần tử X có $10.3 = 30$ cách.

h) Chọn ra 2 người (không gồm A, B) có C_{10}^2 cách chọn, xếp A, B và 2 người đó sao cho 2 người đó đứng giữa A và B có $2.2! = 4$ cách, như vậy buộc 4 người này thành 1 phần tử X có $4C_{10}^2$ cách

Xếp phần tử X và 8 bạn còn lại có $9!$ cách nên theo quy tắc nhân có $4C_{10}^2.9! = 65318400$ cách.

Ví dụ 21. Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn 5 học sinh lập thành một đoàn đại biểu để tham gia tổ chức lễ khai giảng Hội có bao nhiêu cách:

- a) Chọn ra 5 học sinh, trong đó không có quá 3 nữ.
- b) Chọn ra 5 học sinh, trong đó có 3 nam và 2 nữ.
- c) Chọn ra 5 học sinh, trong đó có ít nhất 1 nam.
- d) Chọn ra 5 học sinh, trong đó anh A và chị B không thể cùng tham gia cùng đoàn đại biểu.

e) Chọn ra 5 học sinh, trong đó anh X và chị Y chỉ có thể hoặc cùng tham gia đoàn đại biểu hoặc không cùng tham gia.

Lời giải:

a) Chọn ra 5 học sinh, trong đó không có quá 3 nữ gồm các trường hợp

TH1: 1 nữ và 4 nam có $C_{15}^1 \cdot C_{25}^4$

TH2: 2 nữ và 3 nam có $C_{15}^2 \cdot C_{25}^3$

TH3: 3 nữ và 2 nam có $C_{15}^3 \cdot C_{25}^2$

Theo quy tắc cộng có $C_{15}^1 \cdot C_{25}^4 + C_{15}^2 \cdot C_{25}^3 + C_{15}^3 \cdot C_{25}^2 = 567750$ cách

b) Chọn 5 học sinh, trong đó có 3 nam và 2 nữ có $C_{15}^2 \cdot C_{25}^3 = 241500$ cách

c) Chọn ra 5 học sinh có C_{40}^5 cách

Chọn ra 5 học sinh trong đó không có học sinh nam (toàn nữ) có C_{15}^5 cách

Do đó có $C_{40}^5 - C_{15}^5 = 655005$ Cách chọn ra 5 học sinh, trong đó có ít nhất 1 nam.

d) Chọn ra 5 học sinh có C_{40}^5 cách

Chọn ra 5 học sinh, trong đó anh A và chị B cùng tham gia cùng đoàn đại biểu có $1 \cdot C_{37}^3$ cách.

Như vậy có $C_{40}^5 - C_{37}^3 = 650238$ cách sao cho A và chị B không thể cùng tham gia đoàn đại biểu.

e) Chọn ra 5 học sinh, trong đó anh X và chị Y cùng tham gia đoàn đại biểu $1 \cdot C_{37}^3$ cách

Chọn ra 5 học sinh, trong đó anh X và chị Y cùng không tham gia đoàn đại biểu C_{38}^5 cách

Suy ra có $1 \cdot C_{37}^3 + C_{38}^5 = 509712$ cách.

Ví dụ 22. Mỗi bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 6 ghế, Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp trong mỗi trường hợp sau:

a) Bất cứ 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường với nhau.

b) Bất cứ 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường với nhau.

Lời giải:

a) Xếp chỗ ngồi cho 2 nhóm học sinh có 2 cách xếp

Trong nhóm học sinh trường A, có 6! cách xếp 6 học sinh vào 6 chỗ ngồi

Trong nhóm học sinh trường B, có 6! cách xếp 6 học sinh vào 6 chỗ ngồi

Vậy có $2 \cdot 6! \cdot 6! = 1036800$ cách xếp

b) Học sinh thứ nhất của trường A có 12 cách chọn ghế

Chọn học sinh trường B ngồi đối diện học sinh thứ nhất trường A có 6 cách

Chọn học sinh thứ hai trường A có 10 cách chọn ghế

Chọn học sinh trường B ngồi đối diện học sinh thứ hai trường A có 5 cách

Chọn học sinh thứ ba trường A có 8 cách chọn ghế

Chọn học sinh trường B ngồi đối diện học sinh thứ ba trường A có 4 cách

Chọn học sinh thứ tư trường A có 6 cách chọn ghế

Chọn học sinh trường B ngồi đối diện học sinh thứ tư trường A có 3 cách
 Chọn học sinh thứ năm trường A có 4 cách chọn ghế
 Chọn học sinh trường B ngồi đối diện học sinh thứ năm trường A có 2 cách
 Chọn học sinh thứ sáu trường A có 2 cách chọn ghế
 Chọn học sinh trường B ngồi đối diện học sinh thứ sáu trường A có 1 cách chọn ghế
 Vậy có $12.6.10.5.8.4.6.3.4.2.2.1 = 33177600$ cách xếp

DẠNG 4. BÀI TOÁN ĐẾM CÓ YẾU TỐ HÌNH HỌC.

Một số kết quả quan trọng cần lưu ý:

- **KQ 1:** Với n điểm cho trước trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì số đường thẳng được tạo ra là C_n^2 , số véc tơ có điểm đầu và điểm cuối lấy từ n đỉnh là A_n^2 .
- **KQ 2:** Cho đa giác lồi n cạnh, số đường chéo của đa giác là $C_n^2 - n$
- **KQ 3:** Cho đa giác lồi n cạnh, xét các tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác, khi đó
 - Số tam giác có đúng 1 cạnh chung với đa giác là $n(n-4)$
 - Số tam giác có đúng 2 cạnh chung với đa giác là n .
 - Số tam giác không có cạnh chung với đa giác là $C_n^3 - n(n-4) - n$
- **KQ 4:** Cho đa giác đều có $2n$ cạnh, số các tam giác vuông có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác $n.(2n-2)$
- **KQ 5:** Cho đa giác đều có n cạnh, số tam giác nhọn được tạo thành từ 3 trong n đỉnh của đa giác là: $C_n^3 - (\text{số tam giác tù} + \text{số tam giác vuông})$
- **KQ 6:** Cho đa giác đều có n cạnh, số tam giác tù có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác được tính bởi công thức:

$$\text{Nếu } n \text{ chẵn} \longrightarrow n.C_{\frac{n-2}{2}}^2$$

$$\text{Nếu } n \text{ lẻ} \longrightarrow n.C_{\frac{n-1}{2}}^2$$

- **KQ 7:** Cho đa giác lồi n cạnh, xét các tứ giác có 4 đỉnh là các đỉnh của đa giác, khi đó
 - Số tứ giác có đúng 1 cạnh chung với đa giác là $n \times [C_{n-4}^2 - (n-5)] \xrightarrow{\text{viet gon}} A$
 - Số tứ giác có đúng 2 cạnh chung với đa giác là $n(n-5) + \frac{n(n-5)}{2} \longrightarrow B$
 - Số tứ giác có đúng 3 cạnh chung với đa giác là $n \longrightarrow C$
 - Số tứ giác không có cạnh chung với đa giác là $C_n^4 - (A + B + C)$
- **KQ 8:** Cho đa giác đều có $2n$ đỉnh.

Số tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác và tạo thành HÌNH CHỮ NHẬT là C_n^2

- **KQ 9:** Cho đa giác đều có $4n$ đỉnh.

Số tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác và tạo thành HÌNH VUÔNG là n

Ví dụ 1. Cho 10 điểm trong không gian, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.

- a) Có bao nhiêu đường thẳng đi qua từng cặp điểm?
b) Có bao nhiêu vectơ nối từng cặp điểm?
c) Có bao nhiêu tam giác có đỉnh là 3 trong 10 điểm trên?
d) Nếu trong 10 điểm trên không có 4 điểm nào đồng phẳng, thì có bao nhiêu tứ diện được tạo thành?

Lời giải:

- a) Cứ 2 điểm có 1 đường thẳng đi qua nên có C_{10}^2 đường thẳng cần tìm.
b) Vectơ có phân biệt điểm đầu cuối nên với 2 điểm có 2 vectơ nên có A_{10}^2 vectơ.
c) Cứ 3 điểm lập thành một tam giác nên có C_{10}^3 tam giác.
d) Cứ 4 điểm không đồng phẳng thì tạo thành 1 tứ diện nên có C_{10}^4 tứ diện được thiết lập.

Ví dụ 2. Cho đa giác lồi có n cạnh ($n \geq 4$)

- a) Tìm n để đa giác có số đường chéo bằng số cạnh?
b) Giả sử 3 đường chéo cùng đi qua 1 đỉnh thì không đồng quy. Hãy tính số giao điểm (không phải là đỉnh) của các đường chéo ấy?

Lời giải:

- a) Cứ 2 điểm tạo thành 1 đường thẳng gồm đường chéo và cạnh, suy ra số đường chéo là $C_n^2 - n$

$$\text{Suy ra } C_n^2 - n = n \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 2n \Leftrightarrow n = 5$$

- b) Giao điểm của 2 đường chéo của 1 đa giác lồi (không phải là đỉnh) chính là giao điểm của 2 đường chéo một tứ giác mà 4 đỉnh của nó là 4 đỉnh của đa giác. Vậy số giao điểm phải tìm bằng số tứ giác với 4 đỉnh thuộc n đỉnh của đa giác: C_n^4

Ví dụ 3. Cho một đa giác lồi có n – cạnh ($n \in N, b \geq 3$)

- a) Tìm số đường chéo của đa giác. Hãy chỉ ra 1 đa giác có số cạnh bằng số đường chéo?
b) Có bao nhiêu tam giác có đỉnh trùng với đỉnh của đa giác?
c) Có bao nhiêu điểm giữa các đường chéo?

Lời giải:

- a) Cứ 2 điểm tạo thành 1 đường thẳng gồm đường chéo và cạnh, suy ra số đường chéo là $C_n^2 - n$

$$\text{Nếu đa giác có số cạnh bằng số đường chéo thì } C_n^2 - n = n \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 2n \Leftrightarrow n = 5$$

- b) Chọn 3 trong n đỉnh ta thu được $C_n^3 = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}$ tam giác cần lập.

- c) Cứ 4 đỉnh tạo thành 2 đường chéo ứng với 1 giao điểm, vậy có $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$

Ví dụ 4. Tìm số giao điểm tối đa của:

- a) 10 đường thẳng phân biệt.
b) 10 đường tròn phân biệt?
c) 10 đường thẳng và 10 đường tròn trên?

Lời giải:

- a) Cứ 2 đường thẳng phân biệt tạo thành 1 giao điểm. Vậy có $C_{10}^2 = 45$ giao điểm.
b) Cứ 2 đường tròn phân biệt tạo thành 2 giao điểm. Vậy có $2C_{10}^2 = 90$ giao điểm.
c) Cứ 1 đường thẳng và 1 đường tròn tạo thành 2 giao điểm, suy ra $2 \cdot 10 \cdot 10 = 200$ giao điểm đơn. Kết hợp hai câu a và b ta có $200 + 45 + 90 = 335$ giao điểm.

Ví dụ 5. Cho hai đường thẳng song song $(d_1), (d_2)$. Trên (d_1) lấy 17 điểm phân biệt, trên (d_2) lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên (d_1) và (d_2)

Lời giải:

Số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên (d_1) và (d_2) :

TH1: 1 điểm trên đường (d_1) và 2 điểm trên đường (d_2)

$\Rightarrow$ Số tam giác là $C_{17}^1 \cdot C_{20}^2 = 3230$

TH2: 2 điểm trên đường (d_1) và 1 điểm trên đường (d_2)

$\Rightarrow$ Số tam giác là $C_{20}^1 \cdot C_{17}^2 = 2720$

Do đó, tổng số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn là $3230 + 2720 = 5950$

Ví dụ 6. Cho mặt phẳng cho đa giác đều H có 20 cạnh. Xét các tam giác có ba đỉnh được lấy từ các đỉnh của H .

- a) Có tất cả bao nhiêu tam giác như vậy?
b) Có bao nhiêu tam giác có đúng hai cạnh là cạnh của H ?
c) Có bao nhiêu tam giác có đúng một cạnh là cạnh của H ? Có bao nhiêu tam giác không có cạnh nào là cạnh của H ?

Lời giải:

a) Đa giác H có 20 cạnh $\Rightarrow$ có 20 đỉnh

Một tam giác được tạo bởi 3 đỉnh $\Rightarrow$ Có $C_{20}^3 = 1140$ tam giác có ba đỉnh được lấy từ các đỉnh của H .

b) Có bao nhiêu tam giác có đúng hai cạnh là cạnh của H ?

Tam giác có đúng 2 cạnh là cạnh của $H \Rightarrow$ 3 đỉnh của chúng sẽ là 3 đỉnh kề nhau thuộc H .

Chọn 1 đỉnh chung của 2 cạnh là 2 cạnh của đa giác thì chỉ có 1 cách chọn $\Rightarrow$ Có $C_{20}^1 = 20$ đỉnh hay có 20 tam giác có đúng hai cạnh là cạnh của H .

c) Ta sẽ tính qua phần bù:

- Có bao nhiêu tam giác có đúng một cạnh là cạnh của H ?

Để có 1 cạnh là cạnh của H , ta sẽ chọn 2 đỉnh kề nhau trong 20 đỉnh đã cho $\Rightarrow$ Có 20 cách chọn 1 đỉnh còn lại sẽ có 18 đỉnh còn lại trừ đi 2 đỉnh kề ta còn lại 16 đỉnh thỏa mãn

$\Rightarrow$ Có: $20 \cdot 16 = 320$ tam giác có đúng một cạnh là cạnh của H

- Có bao nhiêu tam giác không có cạnh nào là cạnh của H ?

Số tam giác không có cạnh nào của H chính là bằng tổng số tam giác có ba đỉnh được lấy từ các đỉnh của H trừ đi số tam giác có 2 và 1 cạnh là cạnh của H : $1140 - 320 - 20 = 800$

Ví dụ 7. Có 10 điểm $A, B, C, \dots$ trên mặt phẳng trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.

- a) Nối chúng lại ta được bao nhiêu đường thẳng? Trong đó có bao nhiêu đường không đi qua A hay B ?
- b) Có bao nhiêu tam giác đỉnh bởi các điểm trên? Bao nhiêu tam giác chứa điểm A ? Bao nhiêu tam giác chứa cạnh AB ?

Lời giải:

a) Ta xét từng câu hỏi nhỏ:

- Từ 10 điểm đã cho, nối 2 điểm bất kì ta sẽ được 1 đường thẳng $\Rightarrow$ Có $C_{10}^2 = 45$ đường thẳng
- Đường thẳng không đi qua A hay B , tức là các đường thẳng sẽ chỉ được tạo từ 8 điểm $C, D, \dots$

$\Rightarrow$ Có $C_8^2 = 28$ đường thẳng

b) Ta xét từng câu hỏi nhỏ:

- Có bao nhiêu tam giác đỉnh bởi các điểm trên?

Mỗi tam giác có 3 đỉnh, do đó số tam giác được tạo bởi các điểm trong 10 điểm đã cho là $C_{10}^3 = 120$

- Bao nhiêu tam giác chứa điểm A ?

Cố định điểm A . Trong 9 điểm còn lại, lấy 2 điểm để được 1 đoạn thẳng $\Rightarrow$ Có $C_9^2 = 36$ đoạn thẳng, tức là có 36 tam giác chứa điểm A .

- Bao nhiêu tam giác chứa cạnh AB ?

Cố định cạnh AB của tam giác. Khi đó, 1 đỉnh còn lại của tam giác có 8 sự lựa chọn. Do đó, có 8 tam giác chứa cạnh AB .

Ví dụ 8. Có p điểm trong mặt phẳng trong đó có q điểm thẳng hàng, số còn lại không có 3 điểm nào thẳng hàng. Nối p điểm đó lại với nhau. Hỏi:

- a) Có bao nhiêu đường thẳng?
- b) Chúng tạo ra bao nhiêu tam giác?

Lời giải:

a) Từ p điểm trong mặt phẳng ta sẽ lập được $C_p^2 = \frac{p!}{2! \cdot (p-2)!} = \frac{1}{2} p(p-1)$ đường thẳng

Nhưng trong p điểm đã cho lại có q điểm thẳng hàng nên sẽ bị trùng

$$C_q^2 - 1 = \frac{q!}{2! \cdot (q-2)!} - 1 = \frac{1}{2} q(q-1) - 1 \text{ đường thẳng}$$

$\Rightarrow$ Có $\frac{1}{2} (p(p-1) - q(q-1) + 2)$ đường thẳng

b) Từ p điểm trong mặt phẳng ta sẽ lập được $C_p^3 = \frac{p!}{3! \cdot (p-3)!} = \frac{1}{6} p(p-1)(p-2)$ tam giác

Nhưng trong p điểm đã cho lại có q điểm thẳng hàng nên sẽ có

$$C_q^3 = \frac{q!}{3! \cdot (q-3)!} = \frac{1}{6} q(q-1)(q-2) \text{ không là tam giác}$$

$\Rightarrow$ Có $\frac{1}{6} (p(p-1)(p-2) - q(q-1)(q-2))$ tam giác

Ví dụ 9. Cho p điểm trong đó có q điểm cùng nằm trên 1 đường tròn, ngoài ra không có 4 điểm nào đồng

phẳng. Hỏi có bao nhiêu:

- a) Đường tròn, mỗi đường đi qua ba điểm?
b) Tứ diện với các đỉnh thuộc p điểm đó?

Lời giải:

a) Từ p điểm đã cho ta sẽ tạo được C_p^3 đường tròn (mỗi đường đi qua 3 điểm, chưa xét đến điểm cùng nằm 1 đường tròn)

nhưng trong p điểm đã cho lại có q điểm cùng nằm trên 1 đường tròn nên sẽ bị trùng $C_q^3 - 1$ đường tròn

$\Rightarrow$ Có $C_p^3 - C_q^3 + 1$ đường tròn, mỗi đường đi qua 3 điểm

b) Từ p điểm đã cho sẽ tạo được C_p^4 tứ diện (các đỉnh thuộc p điểm, chưa xét đến q điểm cùng nằm 1 đường tròn)

Nhưng trong p điểm đã cho lại có q điểm cùng nằm trên 1 đường tròn nên sẽ có C_q^4 không là tứ diện

$\Rightarrow$ Có $C_p^4 - C_q^4$ tứ diện với các đỉnh thuộc p điểm đã cho

Ví dụ 10. Cho đa giác (H) có n đỉnh ($n \in \mathbb{N}, n > 4$). Biết số các tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của (H) và không có cạnh nào là cạnh của (H) gấp 5 lần số các tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của (H) và có đúng 1 cạnh là cạnh của (H) . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $n \in [4; 12]$

B. $n \in [13; 21]$

C. $n \in [22; 30]$

D. $n \in [31; 38]$

Lời giải:

Số tam giác tạo thành có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác là C_n^3

Số tam giác tạo thành có đúng 2 cạnh là cạnh của đa giác là n .

Số tam giác tạo thành có đúng 1 cạnh là cạnh của đa giác là $n(n-4)$

$\longrightarrow$ số tam giác tạo thành **không** có cạnh nào là cạnh của đa giác là $C_n^3 - n - n(n-4)$

Theo giả thiết, ta có $C_n^3 - n - n(n-4) = 5.n(n-4) \Leftrightarrow \begin{cases} n = 35 \text{ (thỏa mãn)} \\ n = 4n \text{ (loại)} \end{cases}$

Chọn D

Ví dụ 11. Cho một đa giác đều gồm $2n$ đỉnh ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$). Biết rằng số tam giác vuông có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác bằng 112. Tìm n .

A. $n = 4$

B. $n = 5$

C. $n = 8$

D. $n = 10$

Lời giải:

Để ba đỉnh được chọn tạo thành tam giác vuông khi và chỉ khi có hai đỉnh trong ba đỉnh là hai đầu mút của một đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác và đỉnh còn lại là một trong số $(2n-2)$ đỉnh còn lại của đa giác. Đa giác có $2n$ đỉnh nên có $\frac{2n}{2} = n$ đường kính.

- Số cách chọn 1 đường kính là $C_n^1 = n$
- Số cách chọn 1 đỉnh còn lại trong $(2n-2)$ đỉnh là $C_{2n-2}^1 = 2n-2$

Do đó số tam giác vuông là $n(2n-2) \xrightarrow{gt} n(2n-2) = 112 \Rightarrow n = 8$

Chọn C

Ví dụ 12. Cho đa giác đều có 20 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đều, số tam giác tạo thành là tam giác vuông nhưng không phải vuông cân là bao nhiêu?

Lời giải:

- Số tam giác vuông: $n(2n-2) = 10.18 = 180$
 - Số tam giác vuông cân: Cứ mỗi cách chọn 1 đường kính là có 2 tam giác cân (2 điểm tạo nên tam giác cân là giao điểm của đường thẳng qua tam giác vuông góc với đường kính đã chọn với đường tròn). Do đó có 10.2 tam giác vuông cân.
- $\Rightarrow$ Số tam giác vuông nhưng không vuông cân là: $180 - 20 = 160$

Ví dụ 13. Cho đa giác đều có 15 đỉnh. Số tam giác có 3 đỉnh được chọn trong 15 đỉnh của đa giác và có đặc điểm là tam giác cân nhưng không phải tam giác đều là bao nhiêu?

Lời giải:

- Đánh số các đỉnh của đa giác là $A_1; A_2; \dots; A_{15}$
- Cố định 1 đỉnh, giả sử là đỉnh A_1 , khi đó sẽ có tam giác cân nhận A_1 làm đỉnh đó là $\Delta A_1 A_2 A_{15}; \Delta A_1 A_3 A_{14}; \Delta A_1 A_4 A_{13}; \Delta A_1 A_5 A_{12}; \dots; \Delta A_1 A_8 A_9$ (cách nhớ tổng chỉ số của 2 đỉnh còn lại bằng 17), dễ thấy có 7 tam giác như này.

Hoán vị các đỉnh thì số tam giác cân là $15.7 = 105$

- Số tam giác đều có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác là $\frac{15}{3} = 5$ tam giác.
- Tuy nhiên, trong các tam giác cân đã xác định ở trên có cả tam giác đều, do mọi tam giác đều thì đều cân tại 3 đỉnh nên tam giác đều được đếm 3 lần.

Do vậy số tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán là $105 - 15 = 90$

Chú ý: Qua bài toán trên ta có thể mở rộng như sau:

Cho đa giác đều có $3n$ đỉnh (n là số lẻ)

- Số tam giác cân có 3 đỉnh lấy từ các đỉnh của đa giác là $3n. \frac{3n-1}{2}$

- Số tam giác đều có 3 đỉnh lấy từ các đỉnh của đa giác là n

- Số tam giác cân nhưng không đều có 3 đỉnh lấy từ các đỉnh của đa giác là $3n. \frac{3n-1}{2} - n$

Ví dụ 14. Cho đa giác đều 100 đỉnh nội tiếp một đường tròn. Số tam giác tù được tạo thành từ 3 trong 100 đỉnh của đa giác là

A. 44100

B. 58800

C. 78400

D. 117600

Lời giải:

Cách 1: Đánh số các đỉnh là $A_1, A_2, \dots, A_{100}$

Xét đường chéo $A_1 A_{51}$ của đa giác là đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều chia đường tròn ra làm hai phần, mỗi phần có 49 điểm: từ A_2 đến A_{50} và A_{52} đến A_{100}

Khi đó, mỗi tam giác có dạng $A_i A_j A_k$ là tam giác tù nếu A_i và A_j cùng nằm trong nửa đường tròn

- Chọn nửa đường tròn: có 2 cách chọn.
- Chọn hai điểm A_i, A_j là hai điểm tùy ý được lấy từ 49 điểm $A_2, A_3, \dots, A_{50}$ có $C_{49}^2 = 1176$ cách chọn.

Giả sử A_k nằm giữa A_i và A_j thì tam giác $A_i A_j A_k$ tù tại đỉnh A_k . Mà $\Delta A_j A_i A_k = \Delta A_i A_j A_k$ nên kết quả bị lặp hai lần.

- Có 100 cách chọn đỉnh

Vậy số tam giác tù là $\frac{2 \cdot 1176 \cdot 100}{2} = 117600$

Chọn D

Cách 2: Áp dụng công thức giải nhanh ta có $n \cdot C_{\frac{n-2}{2}}^2 = 100 \cdot C_{49}^2 = 117600$

Ví dụ 15. Cho đa giác có 20 đỉnh. Có bao nhiêu tứ giác được tạo thành mà có các đỉnh là các đỉnh của đa giác và có đúng 1 cạnh chung với đa giác?

Lời giải:

Áp dụng công thức giải nhanh: $n \cdot [C_{n-4}^2 - (n-5)] \xrightarrow{n=20} 2100$

Chọn B

Ví dụ 16. Cho đa giác đều có 20 cạnh. Có bao nhiêu hình chữ nhật được tạo thành nhưng không phải là hình vuông, có các đỉnh là đỉnh của đa giác đều đã cho?

Lời giải:

- Số hình chữ nhật được tạo thành (bao gồm cả hình vuông) là $C_{10}^2 = 45$
- Số hình vuông được tạo thành là $\frac{20}{4} = 5$

Vậy số hình chữ nhật thỏa mãn yêu cầu bài toán là $45 - 5 = 40$

Chọn B

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể?

- A. 94109040 B. 94109400 C. 94104900 D. 94410900

Câu 2. Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể nếu biết rằng người giữ vé số 47 được giải nhất?

- A. 944109 B. 941409 C. 941094 D. 941049

Câu 3. Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể nếu biết rằng người giữ vé số 47 trúng một trong bốn giải?

- A. 3766437 B. 3764637 C. 3764367 D. 3764376

Câu 4. Một túi đựng 6 bi trắng, 5 bi xanh. Lấy ra 4 viên bi từ túi đó. Hỏi có bao nhiêu cách lấy mà 4 viên bi lấy ra có đủ 2 màu.

- A. 300 B. 310 C. 320 D. 330

Câu 5. Một nhóm học sinh có 6 bạn nam và 5 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 học sinh trong đó có cả nam và nữ?

- A. 455 B. 7 C. 456 D. 462

Câu 6. Để chào mừng kỷ niệm thành lập Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, nhà trường tổ chức cho học sinh cắm trại. Lớp 10A có 19 học sinh nam và 16 học sinh nữ. Giáo viên cần chọn 5 học sinh để trang trí trại. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 5 học sinh sao cho có ít nhất một học sinh nữ? Biết rằng học sinh nào trong lớp cũng có khả năng trang trí.

- A. C_{19}^5 B. $C_{35}^5 - C_{19}^5$ C. $C_{35}^5 - C_{16}^5$ D. C_{16}^5

Câu 7. Có 10 đội bóng thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt, thắng được 3 điểm, hòa 1 điểm, thua 0 điểm. Kết thúc giải đấu, tổng cộng điểm số của tất cả 10 đội là 130. Hỏi có bao nhiêu trận hòa?

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

Câu 8. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 25 nam và 15 nữ. Giáo viên cần chọn 3 học sinh tham gia vệ sinh công cộng toàn trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh trong đó có nhiều nhất 1 học sinh nam?

- A. 2625 B. 455 C. 2300 D. 3080

Câu 9. Có 12 học sinh giỏi gồm 3 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh trong số học sinh giỏi đó sao cho mỗi khối có ít nhất một học sinh?

- A. 85 B. 58 C. 508 D. 805

Câu 10. Đội học sinh giỏi cấp trường môn tiếng Anh của trường THPT X theo từng khối như sau: khối 10 có 5 học sinh, khối 11 có 5 học sinh và khối 12 có 5 học sinh. Nhà trường cần chọn một đội tuyển gồm 10 học sinh tham gia IOE cấp tỉnh. Tính số cách lập đội tuyển sao cho có học sinh cả 3 khối và có nhiều nhất 2 học sinh khối 10?

- A. 50 B. 500 C. 502 D. 501

Câu 11. Đội văn nghệ của một nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B, và 2 học sinh lớp 12C. Cần chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ đó để biểu diễn trong lễ bế giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn và có ít nhất 2 học sinh lớp 12A?

- A. 80 B. 78 C. 76 D. 98

Câu 12. Một hộp đựng 5 viên bi màu đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi màu xanh. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 4 viên bi trong đó số viên bi đỏ lớn hơn số viên bi vàng?

- A. 654 B. 275 C. 462 D. 357

Câu 13. Trong kho đèn trang trí đang còn 5 bóng đèn loại I, 7 bóng đèn loại II, các bóng đèn đều khác nhau về màu sắc và hình dáng. Lấy ra 5 bóng đèn bất kỳ. Hỏi có bao nhiêu khả năng xảy ra số bóng đèn loại I nhiều hơn số bóng đèn loại II?

- A. 246 B. 3480 C. 3360 D. 245

Câu 14. Trong hộp có 5 quả cầu đỏ và 7 quả cầu xanh kích thước giống nhau. Lấy ngẫu nhiên 5 quả cầu từ hộp. Hỏi có bao nhiêu khả năng lấy được số quả cầu đỏ nhiều hơn số quả cầu xanh?

- A. 245 B. 3480 C. 246 D. 3360

Câu 15. Cho hai dãy ghế được xếp như sau:

Dãy 1	Ghế số 1	Ghế số 2	Ghế số 3	Ghế số 4
Dãy 2	Ghế số 1	Ghế số 2	Ghế số 3	Ghế số 4

Xếp 4 bạn nam và 4 bạn nữ vào hai dãy ghế trên. Hai người được gọi là ngồi đối diện với nhau nếu ngồi ở hai dãy và có cùng số ghế. Có bao nhiêu xếp để bạn nam ngồi đối diện với một bạn nữ?

- A. $4!4!2^4$ B. $4!4!$ C. $4!2$ D. $4!4!2$

Câu 16. Một hộp có 6 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ngẫu nhiên 5 viên bi sao cho có đủ cả ba màu?

- A. 840 B. 3843 C. 2163 D. 3003

Câu 17. Xếp 3 bạn học sinh lớp A, 2 bạn học sinh lớp B, 1 bạn học sinh lớp C thành một hàng dọc. Số cách xếp sao cho hai bạn học sinh cùng lớp không đứng liền nhau là

- A. 72 B. 120 C. 186 D. 160

Câu 18. Từ các số tự nhiên 0, 1, 2, 3, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên không chia hết cho 5 gồm 4 chữ số đôi một khác nhau?

- A. 120 B. 54 C. 72 D. 69

Câu 19. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Từ A lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau và nhỏ hơn 4012?

- A. 180 B. 240 C. 200 D. 220

Câu 20. Với các chữ số 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số đôi một khác nhau trong đó có hai chữ số 3, 6 không đứng cạnh nhau.

- A. 82 B. 120 C. 96 D. 72

Câu 21. Có bao nhiêu chữ số có 4 chữ số khác nhau và khác 0 mà trong đó mỗi số luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ?

- A. $4!C_4^1C_5^1$ B. $3!C_4^2C_5^2$ C. $4!C_4^2C_5^2$ D. $3!C_4^2C_5^2$

- Câu 22.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau sao cho số đó có chứa hai chữ số 2 và 3, đồng thời hai chữ số này đứng cạnh nhau?
- A. 20 B. 16 C. 14 D. 18
- Câu 23.** Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 10 chữ số từ 2 số 0 và 1 sao cho trong đó không có 2 số 1 nào đứng cạnh nhau?
- A. 54 B. 51 C. 59 D. 55
- Câu 24.** Từ các chữ số của tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có ít nhất năm chữ số và các chữ số đôi một phân biệt?
- A. 405 B. 624 C. 312 D. 522
- Câu 25.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau sao cho trong mỗi số đó có một chữ số xuất hiện hai lần, các chữ số còn lại xuất hiện không quá một lần?
- A. 3888 B. 3672 C. 1512 D. 1944
- Câu 26*.** Cho tập hợp $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Gọi M là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau lấy từ S sao cho tổng các chữ số hàng đơn vị, hàng chục và hàng trăm lớn hơn tổng chữ số các hàng còn lại 3 đơn vị. Tính tổng T của các phần tử trong tập hợp M .
- A. $T = 11.003.984$ B. $T = 36.011.952$ C. $T = 12.003.984$ D. $T = 18.005.967$
- Câu 27.** Biển số xe máy tỉnh K gồm 2 dòng.
Dòng thứ nhất là 68XY, trong đó X là một trong 24 chữ cái, Y là một trong 20 chữ số.
Dòng thứ 2 là abc.de, trong đó a, b, c, d, e là chữ số.
Biển số xe được cho là đẹp khi dòng thứ 2 có tổng các chữ số tận cùng bằng 7 và có đúng 4 chữ số giống nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 2 biển số trong các biển đẹp để đem bán đấu giá?
- A. 71994000 B. 4663440 C. 143988000 D. 12000
- Câu 28*.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số $\overline{abcde}$ thỏa mãn $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ hoặc $a \geq b \geq c \geq d \geq e$?
- A. 30240 B. 15120 C. 3279 D. 3280
- Câu 29.** Số giao điểm tối đa của 5 đường tròn phân biệt là?
- A. 10 B. 20 C. 18 D. 22
- Câu 30.** Số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt là
- A. 50 B. 100 C. 120 D. 45
- Câu 31.** Với đa giác lồi 10 cạnh thì số đường chéo là
- A. 90 B. 45 C. 35 D. Một số khác
- Câu 32.** Cho đa giác đều n đỉnh, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$. Tìm n biết rằng đa giác đã cho 135 đường chéo.
- A. $n = 15$ B. $n = 27$ C. $n = 8$ D. $n = 18$
- Câu 33.** Cho 10 điểm trên đường tròn. Có bao nhiêu véc tơ khác véc tơ không tạo nên từ 10 điểm trên?
- A. 20 B. 45 C. 90 D. 30

Câu 34. Cho một đa giác đều $2n$ đỉnh ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$). Tìm n biết số hình chữ nhật được tạo ra từ bốn đỉnh trong số $2n$ đỉnh của đa giác đó là 45.

- A. $n = 12$ B. $n = 45$ C. $n = 9$ D. $n = 10$

Câu 35. Cho 15 điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn. Số tam giác có đỉnh là ba trong số 15 điểm đã cho là

- A. $15!$ B. 15^3 C. C_{15}^3 D. A_{15}^3

Câu 36. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2 . Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác mà có các đỉnh được chọn từ 37 điểm này.

- A. 5690 B. 5960 C. 5950 D. 5590

Câu 37. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2 song song với nhau. Trên d_1 có 10 điểm phân biệt, trên d_2 có 8 điểm phân biệt. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà 3 đỉnh của mỗi tam giác lấy từ 18 điểm đã cho?

- A. 360 B. 280 C. 153 D. 640

Câu 38. Trong mặt phẳng có bao nhiêu hình chữ nhật được tạo thành từ 4 đường thẳng phân biệt song song với nhau và 5 đường thẳng phân biệt vuông góc với 4 đường thẳng song song đó?

- A. 60 B. 48 C. 20 D. 36

Câu 39. Trong mặt phẳng cho tập hợp P gồm 2018 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai đầu mút thuộc P ?

- A. $\frac{2018!}{2016!}$ B. $\frac{2016!}{2!}$ C. $\frac{2018!}{2!}$ D. $\frac{2018!}{2016!.2!}$

Câu 40. Cho 10 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng khác nhau tạo bởi 2 trong 10 điểm nói trên?

- A. 90 B. 20 C. 45 D. Một số khác

Câu 41. Trong mặt phẳng, cho 6 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập điểm đã cho?

- A. 15 B. 20 C. 60 D. Một số khác

Câu 42. Cho 10 điểm phân biệt $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{10}$ trong đó có 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh được lấy trong 10 điểm trên?

- A. 96 tam giác B. 60 tam giác C. 116 tam giác D. 80 tam giác

Câu 43. Cho mặt phẳng chứa đa giác đều H có 20 cạnh. Xét tam giác có 3 đỉnh được lấy từ các đỉnh của H . Hỏi có bao nhiêu tam giác có đúng 1 cạnh của H ?

- A. 1440 B. 320 C. 1120 D. 816

Câu 44. Cho đa giác đều $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{10}$ nối tiếp đường tròn (O) . Tính số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 30 đỉnh của đa giác đó.

- A. 106 B. 105 C. 246 D. 3360

Câu 45. Cho đường tròn tâm O có 12 điểm phân biệt. Từ các điểm đã cho có thể tạo được bao nhiêu tứ giác nội tiếp đường tròn tâm O ?

- A. 3 B. C_{12}^4 C. $4!$ D. A_{12}^4

Câu 46. Cho một đa giác lồi (H) có 10 cạnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó là ba đỉnh (H) nhưng ba cạnh không phải ba cạnh của (H) ?

- A. 40 B. 100 C. 60 D. 50

Câu 47. Một con châu chấu nhảy từ gốc tọa độ là $A(9;0)$ dọc theo trục Ox của hệ trục tọa độ Oxy . Hỏi con châu chấu có bao nhiêu cách nhảy để đến điểm A , biết mỗi lần nó có thể nhảy 1 bước hoặc 2 bước (1 bước có độ dài 1 đơn vị)?

- A. 47 B. 51 C. 55 D. 54

Câu 48. Cho tứ giác $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CA, AD lần lượt lấy 3; 4; 5; 6 điểm phân biệt khác các điểm A, B, C, D sao cho ba điểm trên ba cạnh bất kì không thẳng hàng. Số tam giác phân biệt có các đỉnh là các điểm vừa lấy là

- A. 781 B. 624 C. 816 D. 342

Câu 49. Cho đa giác đều 10 cạnh nội tiếp đường tròn (O) . Hỏi có bao nhiêu hình thang cân có bốn đỉnh là đỉnh của đa giác đều đó?

- A. 80 B. 70 C. 105 D. 210

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1-B	2-C	3-D	4-B	5-A	6-B	7-A	8-D	9-D	10-B
11-B	12-B	13-D	14-C	15-A	16-C	17-A	18-B	19-D	20-D
21-C	22-B	23-B	24-B	25-A	26-B	27-A	28-C	29-B	30-D
31-C	32-D	33-C	34-D	35-C	36C-	37-D	38-A	39-D	40-C
41-B	42-C	43-B	44-B	45-B	46-D	47-C	48-A	49-B	

Câu 1: Mỗi kết quả ứng với một chỉnh hợp chập 4 của 100 phần tử, do đó ta có: $A_{100}^4 = 94109400$ kết quả. **Chọn B**

Câu 2: Vì người giữ vé số 47 trúng giải nhất nên mỗi kết quả ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 99 phần tử, do đó ta có: $A_{99}^3 = 941094$. **Chọn C**

Câu 3: Nếu người giữ vé số 47 trúng một trong bốn giải thì:

- Người giữ vé số 47 có 4 cách chọn giải.
- Ba giải còn lại ứng với mỗi chỉnh hợp chập 3 của 99 phần tử, do đó ta có $A_{99}^3 = 941094$ cách.

Vậy số kết quả bằng $4 \times A_{99}^3 = 4 \times 941094 = 3764376$. **Chọn D**

Câu 4: Để lấy 4 viên bi có đủ cả 2 màu ta xét 3 trường hợp sau

TH1: 1 viên bi trắng và 3 viên bi xanh có: $C_6^1 \cdot C_5^3$

TH2: 2 viên bi trắng và 2 viên bi xanh có: $C_6^2 \cdot C_5^2$

TH3: 3 viên bi trắng và 1 viên bi xanh có: $C_6^3 \cdot C_5^1$

Vậy theo quy tắc cộng có $C_6^1 \cdot C_5^3 + C_6^2 \cdot C_5^2 + C_6^3 \cdot C_5^1 = 310$ cách. **Chọn B**

Câu 5: Chọn ra 5 học sinh trong 11 học sinh có C_{11}^5 cách.

Chọn ra 5 học sinh trong đó tất cả là học sinh nam có C_6^5

Chọn ra 5 học sinh trong đó tất cả là học sinh nữ có C_5^5

Do đó có $C_{11}^5 - C_6^5 - C_5^5 = 455$ cách chọn ra 5 học sinh trong đó có cả nam và nữ. **Chọn A.**

Câu 6: Chọn ra 5 học sinh trong 35 học sinh có C_{35}^5 cách

Chọn ra 5 học sinh sao cho không có học sinh nữ (tức là tất cả đều là học sinh nam) có C_{19}^5 cách.

Vậy có $C_{35}^5 - C_{19}^5$ cách 5 học sinh sao cho có ít nhất một học sinh nữ. **Chọn B**

Câu 7: Gọi x là số trận thắng; y là số trận hòa (x, y là số nguyên dương)

- 10 đội đá vòng tròn sẽ có $C_{10}^2 = 45$ trận đấu $\Rightarrow x + y = 45$ (1)
- Với mỗi trận thắng có 3 điểm; 1 trận hòa có 2 điểm $\Rightarrow 3x + 2y = 130$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\Rightarrow \begin{cases} x + y = 45 \\ 3x + 2y = 130 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 5 \end{cases}$. Vậy có tất cả 5 trận hòa. **Chọn A**

Câu 8: Ta xét các trường hợp sau:

TH1: 3 học sinh được chọn có 1 học sinh nam và 2 học sinh nữ có: $C_{25}^1.C_{15}^2$ cách chọn.

TH2: 3 học sinh được chọn không có học sinh nam và có 3 học sinh nữ có: $C_{25}^0.C_{15}^3$ cách chọn

Vậy theo quy tắc cộng có $C_{25}^1.C_{15}^2 + C_{25}^0.C_{15}^3 = 3080$ cách chọn. **Chọn D**

Câu 9: Chọn ra 6 học sinh bất kỳ có C_{12}^6 cách chọn

Số cách chọn 6 học sinh giỏi từ lớp 12 hoặc 11 có C_7^6

Số cách chọn 6 học sinh giỏi từ lớp 11 hoặc 10 có C_9^6

Số cách chọn 6 học sinh giỏi từ lớp 12 hoặc 10 có C_8^6

Suy ra số cách chọn thỏa mãn yêu cầu là $C_{12}^6 - C_7^6 - C_9^6 - C_8^6 = 805$. **Chọn D**

Câu 10:

TH1: Có đúng 1 học sinh khối 10 có: $5.1.C_5^4 + 5.C_5^4.1 = 50$ cách

TH2: Có đúng 2 học sinh khối 10 có: $C_5^2.C_5^3.C_5^5 + C_5^2.C_5^4.C_5^4 + C_5^2.C_5^5.C_5^3 = 450$

Vậy theo quy tắc cộng có $50 + 450 = 500$ cách. **Chọn B**

Câu 11:

TH1: Có 2 học sinh lớp 12A, 2 học sinh lớp 12B và 1 học sinh lớp 12C có $C_4^2.C_3^2.C_2^1$ cách.

TH2: Có 2 học sinh lớp 12A, 1 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12C có $C_4^2.C_3^1.C_2^2$ cách.

TH3: Có 3 học sinh lớp 12A, 1 học sinh lớp 12B và 1 học sinh lớp 12C có $C_4^3.C_3^1.C_2^1$ cách.

Theo quy tắc cộng có: $C_4^2.C_3^2.C_2^1 + C_4^2.C_3^1.C_2^2 + C_4^3.C_3^1.C_2^1 = 78$ cách. **Chọn B**

Câu 12: Các trường hợp để chọn được 4 viên bi trong đó số bi đỏ lớn hơn số bi vàng là

TH1: Cả 4 viên bi màu đỏ có C_5^4 cách

TH2: Trong 4 viên bi được chọn có 1 bi đỏ và 3 bi xanh số cách là: $C_5^1.C_4^3$ cách chọn

TH3: Trong 4 viên bi được chọn có 3 bi đỏ và 1 bi xanh số cách là: $C_5^3.C_4^1$ cách chọn

TH4: Trong 4 viên bi được chọn có 3 bi đỏ và 1 bi vàng số cách là: $C_5^3.C_3^1$ cách chọn

TH5: Trong 4 viên bi được chọn có 2 bi đỏ và 2 bi xanh số cách là: $C_5^2.C_4^2$ cách chọn

TH6: Trong 4 viên bi được chọn có 2 bi đỏ và 1 bi vàng và 1 bi xanh số cách là: $C_5^2.C_3^1.C_4^1$ cách chọn

Vậy có $C_5^4 + C_5^1.C_4^3 + C_5^3.C_4^1 + C_5^3.C_3^1 + C_5^2.C_4^2 + C_5^2.C_3^1.C_4^1 = 275$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn**

B

Câu 13:

TH1: 3 bóng đèn loại I và 2 bóng đèn loại II $\Rightarrow$ có $C_5^3.C_7^2 = 210$ cách

TH2: 4 bóng đèn loại I và 1 bóng đèn loại II $\Rightarrow$ có $C_5^4.C_7^1 = 35$ cách

TH3: 5 bóng đèn loại I $\Rightarrow$ có $C_5^5 = 1$ cách

Vậy có tất cả $210 + 35 + 1 = 246$ cách. **Chọn D**

Câu 14:

TH1: 3 quả cầu đỏ và 2 quả cầu xanh $\Rightarrow$ có $C_5^3 \cdot C_7^2 = 210$ cách

TH2: 4 quả cầu đỏ và 1 quả cầu xanh $\Rightarrow$ có $C_5^4 \cdot C_7^1 = 35$ cách

TH3: 5 quả cầu đỏ $\Rightarrow$ có $C_5^5 = 1$ cách

Vậy có tất cả $210 + 35 + 1 = 246$ cách. **Chọn C**

Câu 15: Chọn 1 vị trí trong 2 vị trí đối xứng nhau có 2 cách chọn, như vậy có 2^4 cách chọn ghế cho 4 bạn nam.

4 bạn nam này có thể đổi chỗ cho nhau nên có $4!$ cách xếp.

Vậy có $4! \cdot 4! \cdot 2^4$ cách xếp để mỗi bạn nam ngồi đối diện với một bạn nữ. **Chọn A**

Câu 16: Số cách chọn 5 viên bi bất kì trong hộp là C_{15}^5 cách

Số cách chọn 5 viên bi mà trong đó không có viên bi nào màu vàng là C_{11}^5 cách.

Số cách chọn 5 viên bi mà trong đó không có viên bi nào màu đỏ là C_{10}^5 cách

Số cách chọn 5 viên bi mà trong đó không có viên bi nào màu xanh là C_9^5 cách

Vậy có $C_{15}^5 - (C_{11}^5 + C_{10}^5 + C_9^5) = 2163$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C**

Câu 17:

TH1: Xếp 3 học sinh lớp A vào 3 vị trí 1; 3; 5 như sau:

1		3		5	
---	--	---	--	---	--

Sau đó 3 học sinh của hai lớp B và lớp C xếp vào 3 vị trí còn lại.

$\longrightarrow$ có tất cả $3! \cdot 3! = 36$ cách xếp thỏa mãn bài toán.

TH2: Xếp 3 học sinh lớp A vào 3 vị trí 2; 4; 6 như sau:

	2		4		6
--	---	--	---	--	---

Sau đó 3 học sinh của hai lớp B và lớp C xếp vào 3 vị trí còn lại.

$\longrightarrow$ có tất cả $3! \cdot 3! = 36$ cách xếp thỏa mãn bài toán.

Vậy có tất cả $36 + 36 = 72$ cách xếp. **Chọn A**

Câu 18: Số thỏa mãn điều kiện đề bài là $\overline{abcd}$

Vì số này không chia hết cho 5 nên $d = \{1; 2; 3\}$ có 3 cách chọn

Do $a \neq 0$ nên a có 3 cách chọn, khi đó b, c lần lượt có 3 cách chọn và 2 cách chọn.

Vậy có $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 54$ số. **Chọn B**

Câu 19: Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abcd}$ mà $\overline{abcd} < 4012 \Rightarrow a \leq 3$

TH1: Nếu $a = 1$, khi đó số các số chẵn lập được là $1 \cdot 4 \cdot A_5^2 = 80$

TH2: Nếu $a = 2$, khi đó số các số chẵn lập được là $1 \cdot 3 \cdot A_5^2 = 60$

TH3: Nếu $a = 3$, khi đó số các số chẵn lập được là $1.4.A_5^2 = 80$

Vậy có tất cả $80 + 60 + 80 = 220$ số cần tìm. **Chọn D**

Câu 20: Số cách lập các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau là A_5^5 cách

Xét các trường hợp chữ số 3 và 6 đứng cạnh nhau, xếp 2 số này có 2 cách.

Xếp 2 số này và 3 số còn lại thành 1 dãy có $4!$ cách.

Vậy có $2.4!$ cách lập được số có 5 chữ số đôi một khác nhau mà 3 và 6 đứng cạnh nhau.

Do đó có $A_5^5 - 2.4! = 72$ số thỏa mãn. **Chọn D**

Câu 21: Chọn 2 số lẻ trong 5 số lẻ $\longrightarrow$ có C_5^2 cách.

Chọn 2 số chẵn trong 4 số chẵn $\longrightarrow$ có C_4^2 cách

Và 4 số được chọn hoán vị cho nhau $\Rightarrow$ có tất cả $4!C_4^2C_5^2$ số cần tìm. **Chọn C**

Câu 22:

TH1: Số có dạng $\overline{ab32}$ có $2.2.1 = 4$ số.

TH2: Số có dạng $\overline{a320}$ hoặc $\overline{a230}$ có $2.2 = 4$ số.

TH3: Số có dạng $\overline{a324}$ hoặc $\overline{a234}$ có 2 số.

TH4: Số có dạng $\overline{32ab}$ hoặc $\overline{23ab}$ có $2.2.2 = 8$ số

Vậy có $4 + 4 + 2 + 8 = 16$ số. **Chọn B**

Câu 23: Vì không có 2 chữ số 1 đứng cạnh nhau nên có ít nhất 5 chữ số 0

TH1: Có 5 chữ số 0 và 5 chữ số 1 có 1 số là 1010101010

TH2: Có 6 chữ số 0 và 4 chữ số 1: Xét chữ 1 chữ 1 ở đầu có 1 cách, xếp 3 chữ số 1 còn lại vào 6 vị trí xen kẽ 2 chữ số còn lại có C_6^3 cách. Vậy trường hợp này có C_6^3 số

TH3: Có 7 chữ số 0 và 3 chữ số 1 có: C_7^2 cách

TH4: Có 8 chữ số 0 và 2 chữ số 1 có: C_8^1 cách

TH5: Có 9 chữ số 0 và 1 chữ số 1 có 1 số là 1000000000

Vậy có tổng cộng $1 + C_6^3 + C_7^2 + C_8^1 + 1 = 51$ số. **Chọn B**

Câu 24: Số chẵn có 5 chữ số có dạng $\overline{abcde}$

TH1: Với $e = 0$ thì có A_5^4 cách lập

TH2: Với $e = \{2; 4\}$ thì $2.(4.4.3.2) = 192$ cách lập

Số chẵn có 6 chữ số có dạng $\overline{abcdef}$

TH1: Với $e = 0$ thì có A_5^5 cách lập

TH2: Với $e = \{2; 4\}$ thì có $2.(4.4.3.2.1) = 192$ cách lập

Vậy có tổng cộng $A_5^4 + 192 + A_5^5 + 192 = 624$ số. **Chọn B**

Câu 25:

TH1: Nếu chữ số lặp là 0, có C_3^2 cách chọn vị trí chữ số lặp

A_9^2 cách chọn 2 chữ số còn lại suy ra 216 số

TH2: Nếu chữ số lặp không là 0

C_9^1 cách chọn chữ số lặp.

C_4^2 cách chọn vị trí cho chữ số lặp

A_9^2 cách chọn cho 2 chữ số còn lại.

Suy ra có $C_9^1.C_9^2.A_9^2 - C_9^1.C_3^2.C_8^1 = 3672$ số (trừ số có chữ số 0 đứng đầu)

Vậy có $3672 + 216 = 3888$ số. **Chọn A**

Câu 26: Gọi số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $\overline{abcdef}$ với $a, b, c, d, e, f \in S$

Do yêu cầu bài toán nên ta có $a + b + c = 9, d + e + f = 12 \Rightarrow \{a; b; c\} = \{(1; 2; 6); (1; 3; 5); (2; 3; 4)\}$ và $\{d; e; f\} = \{(3; 4; 5); (2; 4; 6); (1; 5; 6)\}$ tương ứng

Xét hai bộ $(1; 2; 6)$ và $(3; 4; 5)$ thì ta lập được $3! \cdot 3! = 36$ số, trong đó các chữ số 1, 2, 6 có mặt ở hàng trăm nghìn $36 : 3 = 12$ lần, hàng chục nghìn 12 lần, hàng nghìn 12 lần và các chữ số 3, 4, 5 cũng có mặt ở hàng trăm, chục, đơn vị 12 lần.

Tổng các số trong trường hợp này là

$$12 \cdot (1 + 2 + 6)10^5 + 12(1 + 2 + 6)10^4 + 12(1 + 2 + 6) \cdot 10^3 + 12(1 + 2 + 6) \cdot 10^2 + 12(1 + 2 + 6) \cdot 10 + 12(1 + 2 + 6) \cdot 1 = 12003984$$

Tương tự ở hai cặp còn lại ta cũng có tổng các số bằng 12003984

Vậy tổng các phần tử của M là $3 \cdot 12003984 = 36011952$. **Chọn B**

Câu 27: Chọn X từ 24 chữ cái và chọn Y từ 10 chữ số, ta có $24 \cdot 10 = 240$ (cách chọn). Chọn 4 chữ số giống nhau từ các chữ số ta có 10 cách chọn. Mỗi bộ gồm 4 chữ số giống nhau, ta có một cách chọn duy nhất 4 chữ số còn lại để tổng các số là số có chữ số tận cùng bằng 8, chẳng hạn: 4 chữ số 0, chữ số còn lại sẽ là 8; 4 chữ số 1, chữ số còn lại sẽ là 4; ...; 4 chữ số 9, chữ số còn lại sẽ là 2). Sắp xếp 5 chữ số vừa chọn có 5 cách xếp. Do đó có tất cả $10 \cdot 5 = 50$ (cách chọn số ở dòng thứ hai). Suy ra có tất cả $240 \cdot 50 = 12000$ (biến số đẹp). Chọn 2 biến số trong các biến số “đẹp” ta có $C_{12000}^2 = 71994000$ (cách). **Chọn A**

Câu 28*: Điều kiện 1: $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ thì $a \neq 0$ nên $a, b, c, d, e \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

TH1: Nếu $a < b < c < d < e$ có C_9^5 số

TH2: Có 1 dấu bằng có C_4^1 cách chọn dấu bằng và có C_9^4 cách chọn 4 số

TH3: Có 2 dấu bằng có C_4^2 cách chọn dấu bằng và có C_9^3 cách chọn 4 số

TH4: Có 3 dấu bằng có C_4^3 cách chọn dấu bằng và có C_9^2 cách chọn 4 số

TH5: Có 4 dấu bằng có C_4^4 cách chọn dấu bằng và có C_9^1 cách chọn 4 số

Vậy ở điều kiện 1 có $C_9^5 + C_4^1.C_9^4 + C_4^2.C_9^3 + C_4^3.C_9^2 + C_4^4.C_9^1 = 1287$ số

Tương tự điều kiện 2 có: $C_{10}^5 + C_4^1.C_{10}^4 + C_4^2.C_{10}^3 + C_4^3.C_{10}^2 = 1992$ số (loại trường hợp 5 số bằng nhau vì trùng điều kiện 1)

Vậy có $1992 + 1287 = 3279$ số

Chọn C

Câu 29: Chọn 2 đường trong bất kì có C_5^2 cách chọn.

Mỗi đường tròn có tối đa 2 giao điểm nên số giao điểm tối đa là $2C_5^2 = 20$. **Chọn B**

Câu 30: Chọn ra 2 đường thẳng bất kì có C_{10}^2 cách chọn.

Hai đường thẳng bất kì có tối đa 1 giao điểm do đó số giao điểm tối đa là $C_{10}^2 = 45$. **Chọn D**

Câu 31: Chọn ra 2 cạnh có $C_{10}^2 = 45$

Trừ đi số các cạnh của đa giác ta được $C_{10}^2 - 10 = 35$ đường chéo. **Chọn C**

Câu 32: Số đường chéo của đa giác n đỉnh là $C_n^2 - n$

Theo giả thiết của bài toán ta có: $C_n^2 - n = 135 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = 135$

$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 135 \Leftrightarrow \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} - 135 = 0 \Leftrightarrow n = 18$. **Chọn D**

Câu 33: Vectơ thì phân biệt điểm đầu và điểm cuối.

Số vectơ được tạo thành từ 10 điểm trên là $A_{10}^2 = 90$. **Chọn C**

Câu 34: Đa giác đều có $2n$ đỉnh thì có n đường chéo đi qua tâm, chọn ra 2 đường chéo bất kì ta được một hình chữ nhật

Số hình chữ nhật là $C_n^2 = 45 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 45 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 45 \Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0$

$\Leftrightarrow n = 10$. **Chọn D**

Câu 35: Số tam giác có 3 đỉnh là ba đỉnh trong số 15 điểm đã cho là C_{15}^3 . **Chọn C**

Câu 36: Chọn ra 3 điểm bất kì từ 37 điểm này có C_{37}^3 cách chọn.

Số điểm thẳng hàng trên đường thẳng d_1 là C_{17}^3

Số điểm thẳng hàng trên đường thẳng d_2 là C_{20}^3

Do đó số tam giác được tạo thành là $C_{37}^3 - C_{17}^3 - C_{20}^3 = 5950$. **Chọn C**

Câu 37: Chọn ra 3 điểm bất kì từ 18 điểm này có C_{18}^3 cách chọn.

Số điểm thẳng hàng trên đường thẳng d_1 là C_{10}^3

Số điểm thẳng hàng trên đường thẳng d_2 là C_8^3

Do đó số tam giác được tạo thành là $C_{18}^3 - C_{10}^3 - C_8^3 = 640$. **Chọn D**

Câu 38: Với mỗi cạnh chọn 2 đường thẳng trong 4 đường thẳng song song và 2 đường thẳng trong 5 đường thẳng phân biệt vuông góc với 4 đường thẳng kia ta được một hình chữ nhật. Do đó số hình chữ nhật tạo thành là $C_4^2.C_5^2 = 60$. **Chọn A**

Câu 39: Chọn ra 2 điểm bất kì từ 2018 điểm phân biệt trên ta được một đoạn thẳng. Số đoạn thẳng tạo thành là $C_{2018}^2 = \frac{2018!}{2!.2016!}$. **Chọn D**

Câu 40: Chọn ra 2 điểm bất kì từ 10 điểm trên ta được một đường thẳng.
Số đường thẳng tạo thành là $C_{10}^2 = 45$. **Chọn C**

Câu 41: Chọn ra 3 điểm bất kì trong 6 điểm trên ta được 1 tam giác.
Số tam giác được tạo thành $C_6^3 = 20$ tam giác. **Chọn B**

Câu 42: Chọn ra 3 điểm từ 10 điểm trên có C_{10}^3 cách chọn.

Chọn ra 3 điểm thẳng hàng từ 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 có C_4^3 cách chọn.

Số tam giác được tạo thành sẽ là $C_{10}^3 - C_4^3 = 116$ tam giác. **Chọn C**

Câu 43: Chọn 1 cạnh của hình H có 20 cách.

Chọn 1 đỉnh không kề 1 trong 2 đỉnh trên có 16 cách chọn.

Do đó số tam giác tạo thành có đúng 1 cạnh của H là $20.16 = 320$ tam giác. **Chọn B**

Câu 44: Đa giác đều 30 cạnh có 15 đường chéo đi qua tâm

Chọn ra 2 đường chéo bất kì đi qua tâm ta được một hình chữ nhật.

Số hình chữ nhật tạo thành là $C_{15}^2 = 105$. **Chọn B**

Câu 45: Chọn ra 4 điểm từ 12 điểm nói trên ta được một tứ giác nội tiếp trong đường tròn tâm (O). Do đó số tứ giác nội tiếp đường tròn là C_{12}^4 . **Chọn B**

Câu 46: Chọn 1 cạnh của hình H có 10 cách.

Chọn 1 đỉnh không kề 1 trong 2 đỉnh trên có 6 cách chọn.

Do đó số tam giác tạo thành có đúng 1 cạnh của H là $10.6 = 60$ tam giác.

Số tam giác có 2 cạnh là 2 cạnh của H là 10 tam giác

Chọn ra 3 điểm bất kỳ có C_{10}^3 cách suy ra số tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán là $C_{10}^3 - 60 - 10 = 50$.

Chọn D

Câu 47: Xét phương trình $2x + y = 9$ với x là số lần nhảy 2 bước, y là số lần nhảy 1 bước.

Phương trình có các nghiệm $(x; y)$ là $(0; 9), (1; 7), (2; 5), (3; 3), (4; 1)$

Với mỗi nghiệm $(x; y)$ ở trên, ta xem mỗi cách nhảy của châu chấu là một hoán vị của x số 2 và y số 1.

Vì x số 2 giống nhau và y số 1 giống nhau nên số cách nhảy tương ứng là $\frac{(x+y)!}{x!.y!} = C_{x+y}^x$

Số các cách để con châu chấu nhảy từ O đến A là: $C_9^0 + C_8^1 + C_7^2 + C_6^3 + C_5^4 = 55$. **Chọn C**

Câu 48: Chọn 3 điểm bất kỳ từ 18 điểm trên có C_{18}^3 cách chọn

Chọn 3 điểm thẳng hàng trên các cạnh AB, BC, CA, AD có $C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3$ cách chọn.

Do đó có $C_{18}^3 - (C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3) = 781$ tam giác. **Chọn A**

Câu 49:

Gọi d là trục đối xứng của hình thang cân. Xét 2 trường hợp

- **TH1:** d đi qua 2 đỉnh của đa giác: Có 5 cách chọn d và số hình thang cân tương ứng với mỗi trục đối xứng là C_4^2 .
- **TH2:** d vuông góc với 2 cạnh đối: có 5 cách. Số hình thang cân tương ứng mỗi trục đối xứng là C_5^2

Lưu ý mỗi hình chữ nhật đã được đếm 2 lần (có C_5^2 hình chữ nhật)

Do đó số hình thang cân là $5(C_4^2 + C_5^2) - C_5^2 = 70$ hình. **Chọn B**