CHỦ ĐỀ 2. TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử F là một nguyên hàm của f trên $[a;b]$. Hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a;b]$ của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx.$

Ta dùng kí hiệu $F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$ để chỉ hiệu số $F(b)-F(a)$. Vậy $\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$.

Nhận xét: Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

Ý nghĩa hình học của tích phân: Nếu hàm số f liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a, x=b.$ Vậy $S=\int_a^b f(x)dx.$

2. Tính chất của tích phân

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ ($a<b<c$)

4. $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$ $(k\in\mathbb{R})$

5. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1. Một số phương pháp tính tích phân

I. Dạng 1: Tính tích phân theo công thức

Ví dụ 1: Tính các tính phân sau:

a) $I=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^3}$.   b) $I=\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$.   c) $I=\int_0^1 \frac{2x+9}{x+3}dx$.   d) $I=\int_0^1 \frac{x}{4-x^2}dx$.

Hướng dẫn giải

a) $I=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^3} = \int_0^1 \frac{d(1+x)}{(1+x)^3} = -\frac{1}{2(1+x)^2}\Bigg|_0^1 = \frac{3}{8}$.

b) $I=\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = \int_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = \left(x-\ln(x+1)\right)\Big|_0^1 = 1-\ln 2$.

c) $I=\int_0^1 \frac{2x+9}{x+3}dx = \int_0^1 \left(2+\frac{3}{x+3}\right)dx = \left(2x+3\ln(x+3)\right)\Big|_0^1 = 3+6\ln 2-3\ln 3$.

d) $I=\int_0^1 \frac{x}{4-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(4-x^2\right)}{4-x^2} = \ln|4-x^2|\Big|_0^1 = \ln\frac{3}{4}$.

Bài tập áp dụng

1) $I=\int_0^1 x^3(x^4-1)^5dx$.

2) $I=\int_0^1 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}+1\right)dx$.

3) $I=\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$.

4) $I=\int_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$.

II. Dạng 2: Dùng tính chất cận trung gian để tính tích phân

Sử dụng tính chất $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 2: Tính tích phân $I=\int_{-2}^{2}|x+1|dx$.

Hướng dẫn giải

Nhận xét: $|x+1|=\begin{cases} x+1, & -1\le x\le 2 \\ -x-1, & -2\le x<-1 \end{cases}$. Do đó

$$I=\int_{-2}^{2}|x+1|dx=\int_{-2}^{-1}|x+1|dx+\int_{-1}^{2}|x+1|dx=-\int_{-2}^{-1}(x+1)dx+\int_{-1}^{2}(x+1)dx=-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-2}^{-1}+\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=5.$$

Bài tập áp dụng

1) $I=\int_{-4}^{3}|x^2-4|dx$.

2) $I=\int_{-1}^{2}|x^3-2x^2-x+2|dx$.

3) $I=\int_0^3|2^x-4|dx$.

4) $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2|\sin x|dx$.

5) $I=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$.

III. Dạng 3: Phương pháp đổi biến số

1) Đổi biến số dạng 1

Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $\alpha\le u(x)\le\beta$. Giả sử có thể viết $f(x)=g(u(x))u'(x), x\in[a;b]$, với g liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$. Khi đó, ta có

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)}g(u)du.$$

Ví dụ 3: Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos xdx$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=\sin x$. Ta có $du=\cos xdx$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow u(0)=0; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

Khi đó $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos xdx=\int_0^1 u^2du=\frac{1}{3}u^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$

Bài tập áp dụng

1) $I=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$.

2) $I=\int_0^1 x\sqrt[3]{x+1}dx$.

3) $I=\int_1^e\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

4) $I=\int_e^{e^2}\frac{dx}{2x\sqrt{2+\ln x}}$.

Dấu hiệu nhận biết và cách tính tính phân

	Dấu hiệu	Có thể đặt	Ví dụ
1	Có $\sqrt{f(x)}$	$t=\sqrt{f(x)}$	$I=\int_0^3\frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}}$. Đặt $t=\sqrt{x+1}$

2	Có $(ax+b)^n$	$t=ax+b$	$I=\int_0^1 x(x+1)^{2016}dx$. Đặt $t=x-1$
3	Có $a^{f(x)}$	$t=f(x)$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\tan x+3}}{\cos^2 x}dx$. Đặt $t=\tan x+3$
4	Có $\frac{dx}{x}$ *và* $\ln x$	$t=\ln x$ *hoặc* biểu thức chứa $\ln x$	$I=\int_1^e \frac{\ln xdx}{x(\ln x+1)}$. Đặt $t=\ln x+1$
5	Có $e^x dx$	$t=e^x$ *hoặc* biểu thức chứa e^x	$I=\int_0^{\ln 2} e^{2x}\sqrt{3e^x+1}dx$. Đặt $t=\sqrt{3e^x+1}$
6	Có $\sin xdx$	$t=\cos x$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos xdx$. Đặt $t=\sin x$
7	Có $\cos xdx$	$t=\sin xdx$	$I=\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{2\cos x+1}dx$ Đặt $t=2\cos x+1$
8	Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$	$t=\tan x$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$ Đặt $t=\tan x$
9	Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$	$t=\cot x$	$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\cot x}}{1-\cos 2x}dx=\int \frac{e^{\cot x}}{2\sin^2 x}dx$. Đặt $t=\cot x$

2) Đổi biến số dạng 2

Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $x=\varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]^{(*)}$ sao cho $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$ và $a\le\varphi(t)\le b$ với mọi $t\in[\alpha;\beta]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Một số phương pháp đổi biến: Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

1. $\sqrt{a^2-x^2}$: đặt $x=|a|\sin t;\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
2. $\sqrt{x^2-a^2}$: đặt $x=\frac{|a|}{\sin t};\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$
3. $\sqrt{x^2+a^2}$: $x=|a|\tan t;\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
4. $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$: đặt $x=a.\cos 2t$

Lưu ý: Chỉ nên sử dụng phép đặt này khi các dấu hiệu 1, 2, 3 đi với x mũ chẵn. Ví dụ, để tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$ thì phải đổi biến dạng 2 còn với tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$ thì nên đổi biến dạng 1.

Ví dụ 4: Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$. b) $I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $x=\sin t$ ta có $dx=\cos tdt$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Vậy $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt=\sin t|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$

b) Đặt $x=\tan t$, ta có $dx=\left(1+\tan^2 t\right)dt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\to t=0\\ x=1\to t=\frac{\pi}{4}\end{cases}$.

Vậy $I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}.$

IV. Dạng 4: Phương pháp tính tích phân từng phần.

Định lí : Nếu $u=u(x)$ và $v=v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx,$$

hay viết gọn là $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$. Các dạng cơ bản: Giả sử cần tính $I=\int_a^b P(x).Q(x)dx$

Dạng hàm	**P(x): Đa thức** **Q(x):** $\sin(kx)$ **hay** $\cos(kx)$	**P(x): Đa thức** **Q(x):** e^{kx}	**P(x): Đa thức** **Q(x):** $\ln(ax+b)$	**P(x): Đa thức** **Q(x):** $\frac{1}{\sin^2 x}$ **hay** $\frac{1}{\cos^2 x}$
Cách đặt	* $u=P(x)$ * dv là Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân	* $u=P(x)$ * dv là Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân	* $u=\ln(ax+b)$ * $dv=P(x)dx$	* $u=P(x)$ * dv là Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân

Thông thường nên chú ý: "Nhất log, nhì đa, tam lượng, tứ mũ".

Ví dụ 5: Tính các tích phân sau : a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx.$ b) $I=\int_0^{e-1} x\ln(x+1)dx$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\sin xdx\end{cases}$ ta có $\begin{cases}du=dx\\ v=-\cos x\end{cases}$.

Do đó $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx=\left(-x\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=0+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$

b) Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ dv=xdx\end{cases}$ ta có $\begin{cases}du=\frac{1}{x+1}dx\\ v=\frac{x^2-1}{2}\end{cases}$

$$I=\int_0^{e-1} x\ln(x+1)dx=\left[\ln(x+1)\frac{x^2-1}{2}\right]\Big|_0^{e-1}-\frac{1}{2}\int_0^{e-1}(x-1)dx=\frac{e^2-2e+2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^{e-1}$$

$$=\frac{e^2-2e+2}{2}-\frac{1}{2}\frac{e^2-4e+3}{2}=\frac{e^2+1}{4}.$$

Bài tập áp dụng

1) $I=\int_0^1(2x+2)e^x dx$. 2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x.\cos xdx$. 3) $I=\int_0^{2\pi}x^2.\sin\frac{x}{2}dx$. 4) $I=\int_0^1(x+1)^2e^{2x}dx$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 1. Cho hai hàm số f, g liên tục trên đoạn $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. **B.** $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

C. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$. **D.** $\int_a^b xf(x)dx = x\int_a^b f(x)dx$.

Câu 2. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và số thực dương a. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào luôn đúng?

A. $\int_a^a f(x)dx = 0$. **B.** $\int_a^a f(x)dx = 1$. **C.** $\int_a^a f(x)dx = -1$. **D.** $\int_a^a f(x)dx = f(a)$.

Câu 3. Tích phân $\int_0^1 dx$ có giá trị bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 4. Cho số thực a thỏa mãn $\int_{-1}^a e^{x+1}dx = e^2 - 1$, khi đó a có giá trị bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 5. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có tích phân trên đoạn $[0;\pi]$ đạt giá trị bằng 0?

A. $f(x) = \cos 3x$. **B.** $f(x) = \sin 3x$.

C. $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$. **D.** $f(x) = \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 6. Trong các tích phân sau, tích phân nào có giá trị **khác** 2?

A. $\int_1^{e^2} \ln x dx$. **B.** $\int_0^1 2dx$. **C.** $\int_0^\pi \sin x dx$. **D.** $\int_0^2 x dx$.

Câu 7. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào thỏa mãn $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-2}^2 f(x)dx$?

A. $f(x) = e^x$. **B.** $f(x) = \cos x$. **C.** $f(x) = \sin x$. **D.** $f(x) = x+1$.

Câu 8. Tích phân $I = \int_2^5 \frac{dx}{x}$ có giá trị bằng

A. $3\ln 3$. **B.** $\frac{1}{3}\ln 3$. **C.** $\ln\frac{5}{2}$. **D.** $\ln\frac{2}{5}$.

Câu 9. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$. **B.** $2\ln 3$. **C.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **D.** $2\ln\frac{1}{3}$.

Câu 10. Nếu $\int_{-2}^0 \left(4 - e^{-x/2}\right)dx = K - 2e$ thì giá trị của K là

A. $12{,}5$. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 11. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2}dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{2\ln 2}{3}$. **B.** $-\frac{2\ln 2}{3}$. **C.** $-2\ln 2$. **D.** $2\ln 2$.

Câu 12. Cho hàm số f và g liên tục trên đoạn $[1;5]$ sao cho $\int_1^5 f(x)dx = 2$ và $\int_1^5 g(x)dx = -4$. Giá trị của $\int_1^5 [g(x) - f(x)]dx$ là

A. -6. **B.** 6. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 13. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 2$ thì tích phân $\int_0^3 [x - 2f(x)]dx$ có giá trị bằng

A. 7. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 5. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 14. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;6]$. Nếu $\int_1^5 f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 f(x)dx = 7$ thì $\int_3^5 f(x)dx$ có giá trị bằng

A. 5. **B.** -5. **C.** 9. **D.** -9.

Câu 15. Trong các phép tính sau đây, phép tính nào **sai**?

A. $\int_1^3 e^x dx = \left(e^x\right)\Big|_1^3$. **B.** $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx = (\ln x)\Big|_{-3}^{-2}$.

C. $\int_{\pi}^{2\pi} \cos x dx = (\sin x)\Big|_{\pi}^{2\pi}$. **D.** $\int_1^2 (x+1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_1^2$.

Câu 16. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ có một nguyên hàm là hàm F trên đoạn $[a;b]$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai** ?

A. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

B. $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a;b)$.

C. $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$.

D. Hàm số G cho bởi $G(x) = F(x) + 5$ cũng thỏa mãn $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

Câu 17. Xét hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và các số thực a, b, c tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx$. **B.** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

C. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$. **D.** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$.

Câu 18. Xét hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu $m \le f(x) \le M \ \forall x \in [a;b]$ thì $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(a-b)$.

B. Nếu $f(x) \geq m\ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq m(b-a)$.

C. Nếu $f(x) \leq M\ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

D. Nếu $f(x) \geq m\ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq m(a-b)$.

Câu 19. Cho hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \in [a;b]$. Xét các khẳng định sau:

I. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

II. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

III. $\int_a^b [f(x).g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)dx$.

IV. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

Trong các khẳng định trên, có bao nhiêu khẳng định **sai**?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 20. Tích phân $\int_0^3 x(x-1)dx$ có giá trị bằng với giá trị của tích phân nào trong các tích phân dưới đây?

A. $\int_0^2 \left(x^2+x-3\right)dx$. **B.** $3\int_0^{3\pi} \sin x dx$. **C.** $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$. **D.** $\int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)dx$.

Câu 21. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$, sao cho $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ thì $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a;b]$.

B. Với mọi hàm số f liên tục trên đoạn $[-3;3]$, luôn có $\int_{-3}^{3} f(x)dx = 0$.

C. Với mọi hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)d(-x)$.

D. Với mọi hàm số f liên tục trên đoạn $[1;5]$ thì $\int_1^5 [f(x)]^2 dx = \left.\frac{[f(x)]^3}{3}\right|_1^5$.

Câu 22. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu f là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ thì $\int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx$.

B. Nếu $\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ thì f là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$.

C. Nếu $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ thì f là hàm số lẻ trên đoạn $[-1;1]$.

D. Nếu $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ thì f là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$.

Câu 23. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y = x^6 \sin^5 x$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó $\int_{1}^{2} x^6 \sin^5 x dx$ có giá trị bằng

A. $F(2)-F(1)$. **B.** $-F(1)$. **C.** $F(2)$. **D.** $F(1)-F(2)$.

Câu 24. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai số thực $a<b$. Nếu $\int_{a}^{b} f(x)dx = \alpha$ thì tích phân $\int_{a/2}^{b/2} f(2x)dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{\alpha}{2}$. **B.** 2α. **C.** α. **D.** 4α.

Câu 25. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y = x^3 \sin^5 x$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó tích phân $\int_{1}^{2} 81x^3 \sin^5 3x dx$ có giá trị bằng

A. $3\left[F(6)-F(3)\right]$. **B.** $F(6)-F(3)$. **C.** $3\left[F(2)-F(1)\right]$. **D.** $F(2)-F(1)$.

Câu 26. Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $\int_{0}^{2} f(x)dx = 6$. Giá trị của tích phân $\int_{0}^{\pi/2} f(2\sin x)\cos x dx$ là

A. -6. **B.** 6. **C.** -3. **D.** 3.

Câu 27. Bài toán tính tích phân $I = \int_{1}^{e} \frac{\sqrt{\ln x+1}\ln x}{x}dx$ được một học sinh giải theo ba bước sau:

I. Đặt ẩn phụ $t = \ln x + 1$, suy ra $dt = \frac{1}{x}dx$ và

x	1	e
t	1	2

II. $I = \int_{1}^{e} \frac{\sqrt{\ln x+1}\ln x}{x}dx = \int_{1}^{2} \sqrt{t}(t-1)dt$

III. $I = \int_{1}^{2} \sqrt{t}(t-1)dt = \left(\sqrt{t^5} - \frac{2}{\sqrt{t}}\right)\Bigg|_1^2 = 1+3\sqrt{2}$.

Học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Bài giải đúng. **B.** Sai từ Bước II. **C.** Sai từ Bước I. **D.** Sai ở Bước III.

Câu 28. Xét tích phân $I = \int_{0}^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx$. Thực hiện phép đổi biến $t = \cos x$, ta có thể đưa I về dạng nào sau đây

A. $I = -\int_{0}^{\pi/4} \frac{2t}{1+t}dt$. **B.** $I = \int_{0}^{\pi/4} \frac{2t}{1+t}dt$. **C.** $I = -\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2t}{1+t}dt$. **D.** $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2t}{1+t}dt$.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Trong các bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào luôn đúng?

A. $\int_a^b |f(x)|dx > \left|\int_a^b f(x)dx\right|$. **B.** $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b |f(x)|dx$.

C. $\int_a^b |f(x)|dx \ge \left|\int_a^b f(x)dx\right|$. **D.** $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b |f(x)|dx$.

Câu 30. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_0^1 \sin(1-x)dx = \int_0^1 \sin xdx$. **B.** $\int_0^1 (1+x)^x dx = 0$.

C. $\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin xdx$. **D.** $\int_{-1}^1 x^{2017}(1+x)dx = \frac{2}{2019}$.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ lẻ và liên tục trên đoạn $[-2;2]$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **luôn đúng**?

A. $\int_{-2}^2 f(x)dx = 2\int_0^2 f(x)dx$. **B.** $\int_{-2}^2 f(x)dx = 0$.

C. $\int_{-2}^2 f(x)dx = 2\int_{-2}^0 f(x)dx$. **D.** $\int_{-2}^2 f(x)dx = -2\int_0^2 f(x)dx$.

Câu 32. Bài toán tính tích phân $I=\int_{-2}^1 (x+1)^2 dx$ được một học sinh giải theo ba bước sau:

I. Đặt ẩn phụ $t=(x+1)^2$, suy ra $dt=2(x+1)dx$,

II. Từ đây suy ra $\frac{dt}{2(x+1)}=dx \Rightarrow \frac{dt}{2\sqrt{t}}=dx$. Đổi cận

x	-2	1
t	1	4

III. Vậy $I=\int_{-2}^1 (x+1)^2 dx = \int_1^4 \frac{t}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_1^4 = \frac{7}{3}$.

Học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Sai từ Bước I. **B.** Sai ở Bước III. **C.** Sai từ Bước II. **D.** Bài giải đúng.

Câu 33. Một học sinh được chỉ định lên bảng làm 4 bài toán tích phân. Mỗi bài giải đúng được 2,5 điểm, mỗi bài giải sai (sai kết quả hoặc sai bước tính nguyên hàm) được 0 điểm. Học sinh đã giải 4 bài toán đó như sau:

Bài	Đề bài	Bài giải của học sinh
1	$\int_0^1 e^{x^2} xdx$	$\int_0^1 e^{x^2} xdx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2} d(x^2) = \frac{e^{x^2}}{2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$
2	$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx$	$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx = \left[\ln\left|x^2-x-2\right|\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 2 = 0$
3	$\int_0^{\pi} \sin 2x\cos xdx$	Đặt $t=\cos x$, suy ra $dt=-\sin xdx$. Khi $x=0$ thì $t=1$; khi $x=\pi$ thì $t=-1$. Vậy $\int_0^{\pi} \sin 2x\cos xdx = 2\int_0^{\pi} \sin x\cos^2 xdx = -2\int_1^{-1} t^2 dt = \frac{2t^3}{3}\Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3}$

4	$\int_1^e \frac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx$	$\int_1^e \frac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx=\int_1^e \left[1+(4-2e)\ln x\right]d(\ln x)$ $=\left[x+(4-2e)\ln^2 x\right]\Big\|_1^e=3-e$

Số điểm mà học sinh này đạt được là bao nhiêu?

A. 5,0 điểm. **B.** 2,5 điểm. **C.** 7,5 điểm. **D.** 10,0 điểm.

Câu 34. Cho hai hàm số liên tục f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi F và G lần lượt là một nguyên hàm của f và g trên đoạn $[a;b]$. Đẳng thức nào sau đây **luôn đúng**?

A. $\int_a^b f(x)G(x)dx=\left[F(x)g(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b F(x)G(x)dx$.

B. $\int_a^b f(x)G(x)dx=\left[F(x)G(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b F(x)g(x)dx$.

C. $\int_a^b f(x)G(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b F(x)g(x)dx$.

D. $\int_a^b f(x)G(x)dx=\left[F(x)G(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b f(x)g(x)dx$.

Câu 35. Tích phân $I=\int_{-2}^0 xe^{-x}dx$ có giá trị bằng

A. $-e^2+1$. **B.** $3e^2-1$. **C.** $-e^2-1$. **D.** $-2e^2+1$.

Câu 36. Cho hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$ và số thực k bất kỳ trong $\mathbb{R}$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A $\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$. **B.** $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

C. $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$. **D.** $\int_a^b xf(x)dx=x\int_a^b f(x)dx$.

Câu 37. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và số thực dương a. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **luôn đúng**?

A. $\int_a^a f(x)dx=1$. **B.** $\int_a^a f(x)dx=0$. **C.** $\int_a^a f(x)dx=-1$. **D.** $\int_a^a f(x)dx=f(a)$.

Câu 38. Tích phân $\int_0^1 dx$ có giá trị bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 39. Cho số thực a thỏa mãn $\int_{-1}^a e^{x+1}dx=e^2-1$, khi đó a có giá trị bằng

A. 0. **B.** -1. **D.** 1. **D.** 2.

Câu 40. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có tích phân trên đoạn $[0;\pi]$ đạt giá trị bằng 0?

A. $f(x)=\cos 3x$. **B.** $f(x)=\sin 3x$.

C. $f(x)=\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$. **D.** $f(x)=\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 41. Tích phân nào trong các tích phân sau có giá trị **khác** 2?

A. $\int_0^\pi \sin xdx$. **B.** $\int_0^1 2dx$. **B.** $\int_1^{e^2}\ln xdx$. **D.** $\int_0^2 xdx$.

Câu 42. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào thỏa mãn $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{2} f(x)dx$?

A. $f(x) = \cos x$. **B.** $f(x) = \sin x$. **C.** $f(x) = e^x$. **D.** $f(x) = x + 1$.

Câu 43. Tích phân $I = \int_{2}^{5} \frac{dx}{x}$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{3}\ln 3$. **B.** $\ln\frac{5}{2}$. **C.** $3\ln 3$. **D.** $\ln\frac{2}{5}$.

Câu 44. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$ có giá trị bằng

A. $2\ln\frac{1}{3}$. **B.** $2\ln 3$. **C.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **D.** $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$.

Câu 45. Nếu $\int_{-2}^{0} \left(4 - e^{-x/2}\right)dx = K - 2e$ thì giá trị của K là

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** $12,5$.

Câu 46. Tích phân $I = \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2 - x - 2}dx$ có giá trị bằng

A. $-2\ln 2$. **B.** $\frac{2\ln 2}{3}$. **C.** $-\frac{2\ln 2}{3}$. **D.** Không xác định.

Câu 47. Cho hàm số f và g liên tục trên đoạn $[1;5]$ sao cho $\int_{1}^{5} f(x)dx = 2$ và $\int_{1}^{5} g(x)dx = -4$. Giá trị của $\int_{1}^{5} \left[g(x) - f(x)\right]dx$ là

A. -2. **B.** 6. **C.** 2. **D.** -6.

Câu 48. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int_{0}^{3} f(x)dx = 2$ thì tích phân $\int_{0}^{3} \left[x - 2f(x)\right]dx$ có giá trị bằng

A. 7. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 5. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 49. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;6]$. Nếu $\int_{1}^{5} f(x)dx = 2$ và $\int_{1}^{3} f(x)dx = 7$ thì $\int_{3}^{5} f(x)dx$ có giá trị bằng

A. -9. **B.** 5. **C.** 9. **D.** -5.

Câu 50. Trong các phép tính sau đây, phép tính nào **sai**?

A. $\int_{1}^{2} (x+1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{1}^{2}$. **B.** $\int_{1}^{3} e^x dx = \left(e^x\right)\Big|_{1}^{3}$.

C. $\int_{\pi}^{2\pi} \cos x dx = (\sin x)\Big|_{\pi}^{2\pi}$. **D.** $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx = (\ln x)\Big|_{-3}^{-2}$.

Câu 51. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ có một nguyên hàm là hàm F trên đoạn $[a;b]$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai** ?

A. $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a;b)$.

B. $\int_a^b f(x)dx = f(b)-f(a)$.

C. $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

D. Hàm số G cho bởi $G(x)=F(x)+5$ cũng thỏa mãn $\int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a)$.

Câu 52. Xét hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và các số thực a, b, c tùy ý. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$.

B. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

C. $\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx$.

D. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$.

Câu 53. Xét hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$.Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu $f(x)\ge m\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge m(a-b)$.

B. Nếu $f(x)\ge m\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge m(b-a)$.

C. Nếu $f(x)\le M\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

D. Nếu $m\le f(x)\le M\ \forall x\in[a;b]$ thì $m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(a-b)$.

Câu 54. Cho hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$ sao cho $g(x)\ne 0$ với mọi $x\in[a;b]$. Một học sinh lên bảng và phát biểu các tính chất sau:

I. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

II. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

III. $\int_a^b [f(x).g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)dx$.

IV. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

Trong số các phát biểu trên, có bao nhiêu phát biểu **sai**?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 55. Tích phân $\int_0^3 x(x-1)dx$ có giá trị bằng với tích phân nào trong các tích phân dưới đây ?

A. $\int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)dx$. **B.** $3\int_0^{3\pi} \sin x dx$. **C.** $\int_0^2 \left(x^2+x-3\right)dx$. **D.** $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$.

Câu 56. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Với mọi hàm số f liên tục trên đoạn $[-3;3]$, luôn có $\int_{-3}^{3} f(x)dx = 0$.

B. Với mọi hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)d(-x)$.

C. Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$, sao cho $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ thì $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a;b]$.

D. Với mọi hàm số f liên tục trên đoạn $[1;5]$ thì $\int_1^5 [f(x)]^2 dx = \left.\dfrac{[f(x)]^3}{3}\right|_1^5$.

Câu 57. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu f là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ thì $\int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx$.

B. Nếu $\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ thì f là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$.

C. Nếu $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ thì f là hàm số lẻ trên đoạn $[-1;1]$.

D. Nếu $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ thì f là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$.

Câu 58. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{\sin x}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó $\int_1^2 \dfrac{\sin x}{x}dx$ có giá trị bằng

A. $F(2) - F(1)$. **B.** $-F(1)$. **C.** $F(2)$. **D.** $F(2) + F(1)$.

Câu 59. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai số thực $a < b$. Nếu $\int_a^b f(x)dx = \alpha$ thì tích phân $\int_{a/2}^{b/2} f(2x)dx$ có giá trị bằng

A. α. **B.** 2α. **C.** $\dfrac{\alpha}{2}$. **D.** 4α.

Câu 60. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{\sin x}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó $\int_1^2 \dfrac{\sin 3x}{x}dx$ có giá trị bằng

A. $F(6) - F(3)$. **B.** $3[F(6) - F(3)]$. **C.** $3[F(2) - F(1)]$. **D.** $F(2) - F(1)$.

Câu 61. Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $\int_0^2 f(x)dx = 6$. Giá trị của $\int_0^{\pi/2} f(2\sin x)\cos x dx$ là

A. 3. **B.** 6. **C.** -3. **D.** -6.

Câu 62. Bài toán tính tích phân $I = \int_1^e \dfrac{\sqrt{\ln x + 1}\ln x}{x}dx$ được một học sinh giải theo ba bước sau:

I. Đặt ẩn phụ $t = \ln x + 1$, suy ra $dt = \dfrac{1}{x}dx$ và

x	1	e
t	1	2

II. $I = \int_1^e \dfrac{\sqrt{\ln x + 1}\ln x}{x}dx = \int_1^2 \sqrt{t}(t-1)dt$

III. $I=\int\limits_1^2 \sqrt{t}\,(t-1)\,dt=\left(\sqrt{t^5}-\frac{2}{\sqrt{t}}\right)\Bigg|_1^2=1+3\sqrt{2}$.

Vậy học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Bài giải đúng. **B.** Sai từ Bước II. **C.** Sai từ Bước I. **D.** Sai ở Bước III.

Câu 63. Xét tích phân $I=\int\limits_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx$. Thực hiện phép đổi biến $t=\cos x$, ta có thể đưa I về dạng nào sau đây

A. $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2t}{1+t}dt$. **B.** $I=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{2t}{1+t}dt$. **C.** $I=-\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2t}{1+t}dt$. **D.** $I=-\int\limits_0^{\pi/4}\frac{2t}{1+t}dt$.

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ bất kỳ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Trong các bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào **luôn đúng**?

A. $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$. **B.** $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \ge \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$.

C. $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx > \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,dx > \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Câu 65. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\limits_0^1 (1+x)^x\,dx=0$. **B.** $\int\limits_0^1 \sin(1-x)dx=\int\limits_0^1 \sin x dx$.

C. $\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=2\int\limits_0^{\pi/2}\sin x dx$. **D.** $\int\limits_{-1}^{1} x^{2017}(1+x)dx=\frac{2}{2019}$.

Câu 66. Cho hàm số $y=f(x)$ lẻ và liên tục trên đoạn $[-2;2]$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **luôn đúng**?

A. $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx=-2\int\limits_0^2 f(x)dx$. **B.** $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx=2\int\limits_0^2 f(x)dx$.

C. $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx=2\int\limits_{-2}^{0} f(x)dx$. **D.** $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx=0$.

Câu 67. Bài toán tính tích phân $I=\int\limits_{-2}^{1}(x+1)^2dx$ được một học sinh giải theo ba bước sau:

I. Đặt ẩn phụ $t=(x+1)^2$, suy ra $dt=2(x+1)dx$,

II. Từ đây suy ra $\frac{dt}{2(x+1)}=dx \Rightarrow \frac{dt}{2\sqrt{t}}=dx$. Bảng giá trị

x	-2	1
t	1	4

III. Vậy $I=\int\limits_{-2}^{1}(x+1)^2dx=\int\limits_1^4\frac{t}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_1^4=\frac{7}{3}$.

Vậy học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Sai ở Bước III. **B.** Sai từ Bước II. **C.** Sai từ Bước I. **D.** Bài giải đúng.

Câu 68. Một học sinh được chỉ định lên bảng làm 4 bài toán tích phân. Mỗi bài giải đúng được 2,5 điểm, mỗi bài giải sai (sai kết quả hoặc sai bước tính nguyên hàm) được 0 điểm. Học sinh đã giải 4 bài toán đó như sau:

Bài	Đề bài	Bài giải của học sinh
1	$\int\limits_0^1 e^{x^2}xdx$	$\int\limits_0^1 e^{x^2}xdx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{x^2}d\left(x^2\right)=\left.\frac{e^{x^2}}{2}\right\|_0^1=\frac{e-1}{2}$
2	$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx$	$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx=\left[\ln\left\|x^2-x-2\right\|\right]_0^1=\ln 2-\ln 2=0$
3	$\int\limits_0^{\pi}\sin 2x\cos xdx$	Đặt $t=\cos x$, suy ra $dt=-\sin xdx$. Khi $x=0$ thì $t=1$; khi $x=\pi$ thì $t=-1$. Vậy $\int\limits_0^{\pi}\sin 2x\cos xdx=2\int\limits_0^{\pi}\sin x\cos^2 xdx=-2\int\limits_1^{-1}t^2dt=\left.\frac{2t^3}{3}\right\|_{-1}^1=\frac{4}{3}$
4	$\int\limits_1^e \frac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx$	$\int\limits_1^e \frac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx=\int\limits_1^e\left[1+(4-2e)\ln x\right]d\left(\ln x\right)$ $=\left[x+(4-2e)\ln^2 x\right]\Big\|_1^e=3-e$

Số điểm mà học sinh này đạt được là bao nhiêu?

A. 7,5 điểm. **B.** 2,5 điểm. **C.** 5,0 điểm. **D.** 10,0 điểm.

Câu 69. Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[a;b]$. Đẳng thức nào sau đây **luôn đúng**?

A. $\int\limits_a^b f(x)G(x)dx=\left[F(x)g(x)\right]\Big|_a^b-\int\limits_a^b F(x)G(x)dx$.

B. $\int\limits_a^b f(x)G(x)dx=\left[F(x)G(x)\right]\Big|_a^b-\int\limits_a^b F(x)g(x)dx$.

C. $\int\limits_a^b f(x)G(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]\Big|_a^b-\int\limits_a^b F(x)g(x)dx$.

D. $\int\limits_a^b f(x)G(x)dx=\left[F(x)G(x)\right]\Big|_a^b-\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$.

Câu 70. Tích phân $I=\int\limits_{-2}^0 xe^{-x}dx$ có giá trị bằng

A. $-2e^2+1$. **B.** $3e^2-1$. **C.** $-e^2+1$. **D.** $-e^2-1$.

Câu 71. Ta đã biết công thức tích phân từng phần $\int\limits_a^b F(x)g(x)dx=\left[F(x)G(x)\right]\Big|_a^b-\int\limits_a^b f(x)G(x)dx$, trong đó F và G là các nguyên hàm của f và g. Trong các biến đổi sau đây, sử dụng tích phân từng phần ở trên, biến đổi nào là **sai**?

A. $\int\limits_1^e(\ln x)xdx=\left.\left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\right|_1^e-\frac{1}{2}\int\limits_1^e xdx$, trong đó $F(x)=\ln x$, $g(x)=x$.

B. $\int\limits_0^1 xe^xdx=\left(xe^x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^xdx$, trong đó $F(x)=x$, $g(x)=e^x$.

C. $\int\limits_0^{\pi}x\sin xdx=\left(x\cos x\right)\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}\cos xdx$, trong đó $F(x)=x$, $g(x)=\sin x$.

D. $\int_0^1 x2^{x+1}dx = \left(x\frac{2^{x+1}}{\ln 2}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2^{x+1}}{\ln 2}dx$, trong đó $F(x)=x$, $g(x)=2^{x+1}$.

Câu 72. Tích phân $\int_0^{\pi} x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{(\pi-2)\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\frac{(\pi-2)\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{(\pi+2)\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\frac{(\pi+2)\sqrt{2}}{2}$.

Câu 73. Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[0;2]$. Biết rằng $F(0)=0$, $F(2)=1$, $G(0)=-2$, $G(2)=1$ và $\int_0^2 F(x)g(x)dx=3$. Tích phân $\int_0^2 f(x)G(x)dx$ có giá trị bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** -2. **D.** -4.

Câu 74. Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[1;2]$. Biết rằng $F(1)=1$, $F(2)=4$, $G(1)=\frac{3}{2}$, $G(2)=2$ và $\int_1^2 f(x)G(x)dx=\frac{67}{12}$. Tích phân $\int_1^2 F(x)g(x)dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{11}{12}$. **B.** $-\frac{145}{12}$. **C.** $-\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{145}{12}$.

Câu 75. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $a<b$ và $\int_a^b x\sin x dx=\pi$, đồng thời $a\cos a=0$ và $b\cos b=-\pi$. Tích phân $\int_a^b \cos x dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{145}{12}$. **B.** π. **C.** $-\pi$. **D.** 0.

Câu 76. Cho tích phân: $I=\int_1^e \frac{\sqrt{1-\ln x}}{2x}dx$.Đặt $u=\sqrt{1-\ln x}$ .Khi đó I bằng

A. $I=\int_1^0 u^2du$. **B.** $I=-\int_1^0 u^2du$. **C.** $I=\int_1^0 \frac{u^2}{2}du$. **D.** $I=-\int_0^1 u^2du$.

Câu 77. Tích phân $I=\int_1^2 \frac{x^2}{x^2-7x+12}dx$ có giá trị bằng

A. $5\ln 2-6\ln 3$. **B.** $1+2\ln 2-6\ln 3$. **C.** $3+5\ln 2-7\ln 3$. **D.** $1+25\ln 2-16\ln 3$.

Câu 78. Tích phân $I=\int_1^2 x^5dx$ có giá trị là:

A. $\frac{19}{3}$. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{21}{2}$.

Câu 79. Tích phân $I=\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^3}$ bằng

A. $-\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** 12.

Câu 80. Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-x)\sin xdx$. Đặt $u=2-x,\ dv=\sin xdx$ thì I bằng

A. $-(2-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.

B. $-(2-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.

C. $(2-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.

D. $(2-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.

Câu 81. Tích phân $\int_0^1\frac{x^7}{(1+x^2)^5}dx$ bằng

A. $\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(t-1)^3}{t^5}dt$. **B.** $\int_1^3\frac{(t-1)^3}{t^5}dt$. **C.** $\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(t-1)^3}{t^4}dt$. **D.** $\frac{3}{2}\int_1^4\frac{(t-1)^3}{t^4}dt$.

Câu 82. Tích phân $I=\int_1^{\sqrt[4]{3}}\frac{1}{x(x^4+1)}dx$ bằng

A. $\ln\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}$.

Câu 83. Cho hai tích phân $I=\int_0^2 x^3dx$, $J=\int_0^2 xdx$ .Tìm mối quan hệ giữa I và J

A. $I.J=8$. **B.** $I.J=\frac{32}{5}$. **C.** $I-J=\frac{128}{7}$. **D.** $I+J=\frac{64}{9}$.

Câu 84. Cho số thực a thỏa mãn $\int_1^a e^{x+1}dx=e^4-e^2$, khi đó a có giá trị bằng

A. -1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 85. Tích phân $\int_0^2 ke^xdx$ (với k là hằng số)có giá trị bằng

A. $k(e^2-1)$. **B.** e^2-1. **C.** $k(e^2-e)$. **D.** e^2-e.

Câu 86. Với hằng số k, tích phân nào sau đây có giá trị khác với các tích phân còn lại ?

A. $\int_0^1 k(\mathrm{e}^2-1)dx$. **B.** $\int_0^2 ke^xdx$. **C.** $\int_0^{\frac{2}{3}}3ke^{3x}dx$. **D.** $\int_0^{\frac{2}{3}}ke^{2x}dx$.

Câu 87. Với số thực k, xét các phát biểu sau:

(I) $\int_{-1}^1 dx=2$; (II) $\int_{-1}^1 kdx=2k$; (III) $\int_{-1}^1 xdx=2x$; (IV) $\int_0^1 3kx^2dx=2k$.

Số phát biểu đúng là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 88. Cho hàm số f và g liên tục trên đoạn $[1;5]$ sao cho $\int_1^5 f(x)dx=-7$ và $\int_1^5 g(x)dx=5$ và $\int_1^5[g(x)-kf(x)]dx=19$ Giá trị của k là:

A. 2. **B.** 6. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 89. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu $\int_1^5 2f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 f(x)dx = 7$ thì $\int_3^5 f(x)dx$ có giá trị bằng:

A. 5. **B.** -6. **C.** 9. **D.** -9.

Câu 90. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 4$ và tích phân $\int_1^2 [kx - f(x)]dx = -1$ giá trị k bằng

A. 7. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 91. Tích phân $\int_1^e (2x-5)\ln x dx$ bằng

A. $-(x^2-5x)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e (x-5)dx$.

B. $(x^2-5x)\ln x\Big|_1^e + \int_1^e (x-5)dx$.

C. $(x^2-5x)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e (x-5)dx$.

D. $(x-5)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e (x^2-5x)dx$.

Câu 92. Tích phân $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos 2x dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{-5\pi}{8}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{3\pi}{8}$. **D.** $\frac{\pi}{8}$.

Câu 93. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1+\cos x} dx$ có giá trị bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 94. Tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x} dx$ có giá trị bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $-\sqrt{2}$.

Câu 95. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \tan x dx$ có giá trị bằng

A $\ln 3 - \frac{3}{5}$. **B.** $\ln 2 - 2$. **C.** $\ln 2 - \frac{3}{4}$. **D.** $\ln 2 - \frac{3}{8}$.

Câu 96. Cho hàm số *f(x)* liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) + f(-x) = \cos^4 x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ là

A. -2. **B.** $\frac{3\pi}{16}$. **C.** $\ln 2 - \frac{3}{4}$. **D.** $\ln 3 - \frac{3}{5}$.

Câu 97. Nếu $\int_{-2}^{0} (5 - e^{-x})dx = K - e^2$ thì giá trị của K là:

A. 11. **B.** 9. **C.** 7. **D.** $12{,}5$.

Câu 98. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+3\cos x}.\sin x dx$.Đặt $u = \sqrt{3\cos x + 1}$ .Khi đó I bằng

A. $\frac{2}{3}\int_1^3 u^2du$.　　B. $\frac{2}{3}\int_0^2 u^2du$.　　C. $\frac{2}{9}u^3\Big|_1^2$.　　D. $\int_1^3 u^2du$.

Câu 99. Tích phân $I=\int_1^e \frac{\sqrt{8\ln x+1}}{x}dx$ bằng

A. -2.　　B. $\frac{13}{6}$.　　C. $\ln 2-\frac{3}{4}$.　　D. $\ln 3-\frac{3}{5}$.

Câu 100. Tích phân $\int_{-1}^5 \left|x^2-2x-3\right|dx$ có giá trị bằng

A. 0.　　B. $\frac{64}{3}$.　　C. 7.　　D. $12{,}5$.

Câu 101. Tìm a để $\int_1^2 (3-ax)dx=-3$?

A. 2.　　B. 9.　　C. 7.　　D. 4.

Câu 102. Nếu $\int_2^5 k^2\left(5-x^3\right)dx=-549$ thì giá trị của k là:

A. ± 2　　B. 2.　　C. -2 .　　D. 5.

Câu 103. Tích phân $\int_2^3 \frac{x^2-x+4}{x+1}dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}+6\ln\frac{4}{3}$.　　B. $\frac{1}{2}+6\ln\frac{4}{3}$.　　C. $\frac{1}{2}-\ln\frac{4}{3}$.　　D. $\frac{1}{2}+\ln\frac{4}{3}$.

Câu 104. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ là

A. 2.　　B. -7.　　C. 7.　　D. -2.

Câu 105. Tìm m để $\int_m^2 (3-2x)^4dx=\frac{122}{5}$?

A. 0.　　B. 9.　　C. 7.　　D.2.

4.2 TÍCH PHÂN

I. VẬN DỤNG THẤP

Câu 106. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ là

A. $\frac{\pi}{6}$.　　B. $\frac{\pi}{4}$.　　C. $\frac{\pi}{3}$.　　D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 107. Giá trị của tích phân $I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ là

A $I=\frac{\pi}{2}$.　　B. $I=\frac{3\pi}{4}$.　　C. $I=\frac{\pi}{4}$.　　D. $I=\frac{5\pi}{4}$.

Câu 108. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ là

A. $I=\frac{5\pi}{12}$.　　B. $I=\frac{\pi}{6}$.　　C. $I=\frac{3\pi}{12}$.　　D. $I=\frac{\pi}{12}$.

Câu 109. Tích phân $I=\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+5}dx$ có giá trị là

A. $\frac{4}{3}\sqrt{6}-\frac{10}{9}\sqrt{3}$. **B.** $\frac{4}{3}\sqrt{7}-\frac{10}{9}\sqrt{5}$. **C.** $\frac{4}{3}\sqrt{6}-\frac{10}{9}\sqrt{5}$. **D.** $\frac{2}{3}\sqrt{6}-\frac{10}{9}\sqrt{5}$.

Câu 110. Tích phân $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$ có giá trị là

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** π.

Câu 111. Tích phân $I=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$ có giá trị là

A. $\frac{3\sqrt{2}-1}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}-1}{2}$.

Câu 112. Tích phân $I=\int_{-1}^0 x\sqrt[3]{x+1}dx$ có giá trị là

A. $-\frac{9}{28}$. **B.** $-\frac{3}{28}$. **C.** $\frac{3}{28}$. **D.** $\frac{9}{28}$.

Câu 113. Giá trị của tích phân $I=2\int_0^1 \frac{x^2dx}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ là

A. $\frac{16-10\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{16-11\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{16-10\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{16-11\sqrt{2}}{3}$.

Câu 114. Giá trị của tích phân $I=\int_0^1 x^5\left(1-x^3\right)^6dx$ là

A. $\frac{1}{167}$. **B.** $\frac{1}{168}$. **C.** $\frac{1}{166}$. **D.** $\frac{1}{165}$.

Câu 115. Giá trị của tích phân $I=\int_0^3 \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x+1}}dx$ là

A. $\frac{53}{5}$. **B.** $\frac{54}{5}$. **C.** $\frac{52}{5}$. **D.** $\frac{51}{5}$.

Câu 116. Giá trị của tích phân $I=\int_0^1 \sqrt{\frac{3-x}{1+x}}dx$ là

A. $\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}+2$. **B.** $\frac{\pi}{3}-\sqrt{2}+2$. **C.** $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+2$. **D.** $\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}+2$.

Câu 117. Giá trị của tích phân $\int_0^1 (2x+1)^5 dx$ là

A. $30\frac{1}{3}$. **B.** $60\frac{1}{3}$. **C.** $60\frac{2}{3}$. **D.** $30\frac{2}{3}$.

Câu 118. Giá trị của tích phân $\int_0^1 \frac{4x+2}{x^2+x+1}dx$ là

A. $\ln 2$. **B.** $\ln 3$. **C.** $2\ln 2$. **D.** $2\ln 3$.

Câu 119. Giá trị của tích phân $\int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^2}$ là

A. $\frac{1}{2}$.　　B. $\frac{1}{3}$.　　C. $\frac{1}{4}$.　　D. $\frac{2}{3}$.

Câu 120. Giá trị của tích phân $\int_0^3 \frac{x-3}{3.\sqrt{x+1}+x+3}dx$ **là**

A. $3+3\ln\frac{3}{2}$.　　B. $3+6\ln\frac{3}{2}$.　　B. $-3+6\ln\frac{3}{2}$.　　D. $-3+3\ln\frac{3}{2}$.

Câu 121. Giá trị của tích phân: $\mathrm{I}=\int_0^4 \frac{x+1}{\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}dx$ là

A. $2\ln 2-\frac{1}{2}$.　　**B.** $2\ln 2-\frac{1}{3}$.　　C. $2\ln 2-\frac{1}{4}$.　　**D.** $\ln 2-\frac{1}{2}$.

Câu 122. Giá trị của tích phân: $I=\int_0^1 \frac{(7x-1)^{99}}{(2x+1)^{101}}dx$ là

A. $\frac{1}{900}\left[2^{100}-1\right]$.　　**B.** $\frac{1}{900}\left[2^{101}-1\right]$.　　**C.** $\frac{1}{900}\left[2^{99}-1\right]$.　　**D.** $\frac{1}{900}\left[2^{98}-1\right]$.

Câu 123. Tích phân $I=\int_1^2 \frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}}dx$ có giá trị là

A. $\frac{1}{2002.2^{1001}}$.　　**B.** $\frac{1}{2001.2^{1001}}$.　　**C.** $\frac{1}{2001.2^{1002}}$.　　**D.** $\frac{1}{2002.2^{1002}}$.

Câu 124. Giá trị của tích phân $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos(3x-\frac{2\pi}{3})dx$ là

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　**B.** $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.　　**C.** $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.　　**D.** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 125. Giá trị của tích phân $\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\cos 2x dx$ là

A. $\frac{\pi}{6}$.　　**B.** $\frac{\pi}{8}$.　　**C.** $\frac{\pi}{4}$.　　**D.** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 126. Giá trị của tích phân: $I=\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ là

A. $\frac{\pi^2}{2}$.　　**B.** $\frac{\pi^2}{6}$.　　**C.** $\frac{\pi^2}{8}$.　　**D.** $\frac{\pi^2}{4}$.

Câu 127. Giá trị tích phân $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4 x+1\right)\cos x dx$ là

A. $\frac{2}{5}$.　　**B.** $\frac{3}{5}$.　　**C.** $\frac{4}{5}$.　　**D.** $\frac{6}{5}$.

Câu 128. Giá trị tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx$ là

A. $\frac{3}{2}\ln 2$.　　**B.** $\frac{1}{2}\ln 3$.　　C. $\ln 2$.　　**D.** $\frac{1}{2}\ln 2$.

Câu 129. Giá trị tích phân $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$ là

A. $\frac{2}{3}\ln 2$. **B.** $\frac{2}{3}\ln 4$. **C.** $\frac{1}{3}\ln 4$. **D.** $\frac{1}{3}\ln 2$.

Câu 130. Giá trị của tích phân $I=2\int_{1}^{2}\sqrt[6]{1-\cos^3 x}.\sin x.\cos^5 xdx$ là

A. $\frac{21}{91}$. **B.** $\frac{12}{91}$. **C.** $\frac{21}{19}$. **D.** $\frac{12}{19}$.

Câu 131. Giá trị của tích phân $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$ là

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{5}{8}$. **D.** $\frac{7}{8}$.

Câu 132. Giá trị của tích phân $\mathrm{I}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{(\sin x+\ \cos x)^3}$ là

A $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 133. Giá trị của tích phân $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\sin^2 xdx$ là

A. $I=\frac{\pi}{32}$. **B.** $I=\frac{\pi}{16}$. **C.** $I=\frac{\pi}{8}$. **D.** $I=\frac{\pi}{4}$.

Câu 134. Giá trị của tích phân $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 x+\cos^4 x)(\sin^6 x+\cos^6 x)dx$ là

A. $I=\frac{32}{128}\pi$. **B.** $I=\frac{33}{128}\pi$. **C.** $I=\frac{31}{128}\pi$. **D.** $I=\frac{30}{128}\pi$.

Câu 135. Giá trị của tích phân $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\sqrt{\sin^6 x+\cos^6 x}}dx$ là

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 136. Giá trị của tích phân $I=\int_{0}^{\pi}\frac{xdx}{\sin x+1}$ là

A. $I=\frac{\pi}{4}$. **B.** $I=\frac{\pi}{2}$. **C.** $I=\frac{\pi}{3}$. **D.** $I=\pi$.

Câu 137. Giá trị của tích phân $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2007}x}{\sin^{2007}x+\cos^{2007}x}dx$ là

A. $I=\frac{\pi}{2}$. **B.** $I=\frac{\pi}{4}$. **C.** $I=\frac{3\pi}{4}$. **D.** $I=\frac{5\pi}{4}$.

Câu 138. Giá trị của tích phân $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{11}xdx$ là

A. $\dfrac{250}{693}$. **B.** $\dfrac{254}{693}$. **C.** $\dfrac{252}{693}$. **D.** $\dfrac{256}{693}$.

Câu 139. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx$ là

A. $\dfrac{67\pi}{512}$. **B.** $\dfrac{61\pi}{512}$. **C.** $\dfrac{63\pi}{512}$. **D.** $\dfrac{65\pi}{512}$.

Câu 140. Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 \dfrac{dx}{1+e^x}$ là

A. $\ln\left(\dfrac{2e}{e+1}\right)$. **B.** $\ln\left(\dfrac{e}{e+1}\right)$. **C.** $2\ln\left(\dfrac{e}{e+1}\right)$. **D.** $2\ln\left(\dfrac{2e}{e+1}\right)$.

Câu 141. Giá trị của tích phân $I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \dfrac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ là

A. $\dfrac{5}{3}$. **B.** $\dfrac{10}{3}$. **C.** $\dfrac{20}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 142. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ là

A. $\dfrac{4-\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{4-\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{5-\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{5-\pi}{2}$.

Câu 143. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\ln 3} \dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^3} dx$ là

A. $2\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}-1$. **C.** $\sqrt{2}-2$. **D.** $2\sqrt{2}-2$.

Câu 144. Giá trị của tích phân $I = \int_e^{e^2} \dfrac{dx}{x\ln x}$ là

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 2$. **D.** $2\ln 2$.

Câu 145. Giá trị của tích phân: $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \dfrac{e^{2x}dx}{e^x - 1 + \sqrt{e^x - 2}}$ là

A. $2\ln 2 - 1$. **B.** 2ln3 – 1. **C.** $\ln 3 - 1$. **D.** $\ln 2 - 1$.

Câu 146. Cho $M = \int_0^{\ln 2} \dfrac{2e^{3x} + e^{2x} - 1}{e^{3x} + e^{2x} - e^x + 1} dx$. Giá trị của e^M là

A. $\dfrac{7}{4}$. **B.** $\dfrac{9}{4}$. **C.** $\dfrac{11}{4}$. **D.** $\dfrac{5}{4}$.

Câu 147. $I = \int_1^e \dfrac{\ln x\sqrt[3]{2+\ln^2 x}}{x} dx$.

A $\dfrac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^5} - \sqrt[3]{2^5}\right]$. **B.** $\dfrac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^5} - \sqrt[3]{2^4}\right]$. **C.** $\dfrac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^4} - \sqrt[3]{2^5}\right]$. **D.** $\dfrac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^4} - \sqrt[3]{2^4}\right]$.

Câu 148. Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ là

A. $I = \dfrac{\pi}{8}\ln 3$. **B.** $I = \dfrac{\pi}{4}\ln 2$. **C.** $I = \dfrac{\pi}{8}\ln 3$. **D.** $I = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$.

Câu 149. Cho hàm số *f(x)* liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(-x)+2f(x)=\cos x$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ là

A. $I=\frac{1}{3}$. **B.** $I=\frac{4}{3}$. **C.** $I=\frac{2}{3}$. **D.** $I=1$.

II. VẬN DỤNG CAO

Câu 150. Tìm hai số thực A,B sao cho $f(x)=A\sin\pi x+B$, biết rằng $f'(1)=2$ và $\int\limits_0^2 f(x)dx=4$.

A. $\begin{cases}A=-2\\B=-\frac{2}{\pi}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}A=2\\B=-\frac{2}{\pi}\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}A=-2\\B=\frac{2}{\pi}\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}A=-\frac{2}{\pi}\\B=2\end{cases}$.

Câu 151. Giá trị của *a* để đẳng thức $\int\limits_1^2\left[a^2+(4-4a)x+4x^3\right]dx=\int\limits_2^4 2xdx$ là đẳng thức đúng

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 152. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^a\frac{dx}{x^2+a^2}$ $(a>0)$ là

A. $\frac{\pi}{4a}$. **B.** $\frac{\pi^2}{4a}$. **C.** $-\frac{\pi^2}{4a}$. **D.** $-\frac{\pi}{4a}$.

Câu 153. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx$ là

A. $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{4\pi}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{-\pi}{\sqrt{2}}$.

Câu 154. Cho $I=\int\limits_x^1\frac{dt}{1+t^2}$. Tích phân nào sau đây có giá trị bằng với giá trị của tích phân đã cho.

A. $-\int\limits_1^x\frac{dt}{1+t^2}$. **B.** $\int\limits_1^x\frac{dt}{1+t^2}$. **C.** $\int\limits_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}$. **D.** $-\int\limits_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}$.

Câu 155. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 x}\ln(\sin x)dx$ là

A $-\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$. **B.** $\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

C. $-\sqrt{3}\ln 2-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **D.** $-\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

Câu 156. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^2\min\left\{1,x^2\right\}dx$ là

A. 4. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $-\frac{3}{4}$.

Câu 157. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-8}^{-3}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}dx$ là

A. $\ln\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $-\ln 2$. **D.** $2\ln 2$.

Câu 158. Biết $I=\int\limits_1^a \frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx=\frac{1}{2}+\ln 2$. Giá trị của a là

A. 2. **B.** $\ln 2$. **C.** π. **D.** 3.

Câu 159. Cho $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{3\sin x+1}dx$, $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{(\sin x+2)^2}dx$. Khẳng định nào sau đây là **sai** ?

A. $I_1=\frac{14}{9}$. **B.** $I_1>I_2$. **B.** $I_2=2\ln\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$. **D.** $I_2=2\ln\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$.

Câu 160. Tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn $\int\limits_0^m(2x+5)dx=6$ là

A. $m=1,m=-6$. **B.** $m=-1,m=-6$. **C.** $m=-1,m=6$. **D.** $m=1,m=6$.

Câu 161. Cho hàm số $h(x)=\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}$. Tìm để $h(x)=\frac{a\cos x}{(2+\sin x)^2}+\frac{b\cos x}{2+\sin x}$ và tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}h(x)dx$

A. $a=-4,\ b=2;\ I=\frac{2}{3}+2\ln\frac{3}{2}$. **B.** $a=4,\ b=-2;\ I=-\frac{2}{3}-2\ln\frac{3}{2}$.

C. $a=2,\ b=4;\ I=-\frac{1}{3}+4\ln\frac{3}{2}$. **D.** $a=-2,\ b=4;\ I=\frac{1}{3}+4\ln\frac{3}{2}$.

Câu 162. Giá trị trung bình của hàm số $y=f(x)$ trên $[a;b]$, kí hiệu là $m(f)$ được tính theo công thức $m(f)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$. Giá trị trung bình của hàm số $f(x)=\sin x$ trên $[0;\pi]$ là

A. $\frac{4}{\pi}$. **B.** $\frac{3}{\pi}$. **C.** $\frac{1}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

Câu 163. Cho ba tích phân $I=\int\limits_0^1\frac{dx}{3x+1}$, $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin^4 x-\cos^4 x)dx$ và $K=\int\limits_{-1}^2(x^2+3x+1)dx$. Tích phân nào có giá trị bằng $\frac{21}{2}$?

A. *K*. **B.** *I*. **C.** *J*. **D.** *J* và *K*.

Câu 164. Với $0<a<1$, giá trị của tích phân sau $\int\limits_0^a\frac{dx}{x^2-3x+2}dx$ là:

A. $\ln\left|\frac{a-2}{2a-1}\right|$. **B.** $\ln\left|\frac{a-2}{a-1}\right|$. **C.** $\ln\left|\frac{a-2}{2(a-1)}\right|$. **D.** $\ln\left|\frac{a-2}{2a+1}\right|$.

Câu 165. Cho $2\sqrt{3}m-\int\limits_0^1\frac{4x^3}{(x^4+2)^2}dx=0$. Khi đó giá trị của $144m^2-1$ bằng

A. $\frac{-2}{3}$. **B.** $4\sqrt{3}-1$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 166. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm liên tục trên $(a;b)$, đồng thời thỏa mãn $f(a)=f(b)$. Lựa chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\int\limits_a^b f'(x).e^{f(x)}dx=2$. **B.** $\int\limits_a^b f'(x).e^{f(x)}dx=1$.

C. $\int_a^b f'(x).e^{f(x)}dx = -1$.　　**D.** $\int_a^b f'(x).e^{f(x)}dx = 0$.

Câu 167. Kết quả phép tính tích phân $I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ có dạng $I = a\ln 3 + b\ln 5\ (a, b \in \mathbb{Z})$. Khi đó $a^2 + ab + 3b^2$ có giá trị là

A. 1.　　**B.** 5.　　**C.** 0.　　**D.** 4.

Câu 168. Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)^n \sin x dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{2n}$.　　**B.** $\frac{1}{n-1}$.　　**C.** $\frac{1}{n+1}$.　　**D.** $\frac{1}{n}$.

Câu 169. Với $n \in \mathbb{N}, n > 1$, giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\sin x}}{\sqrt[n]{\cos x} + \sqrt[n]{\sin x}} dx$ là

A. $-\frac{\pi}{4}$.　　**B.** $\frac{\pi}{4}$.　　**C.** $\frac{3\pi}{4}$.　　**D.** $-\frac{3\pi}{4}$.

Câu 170. Giá trị của tích phân $\int_0^{2017\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$ là

A. $3034\sqrt{2}$.　　**B.** $-4043\sqrt{2}$.　　**C.** $3043\sqrt{2}$.　　**D.** $4034\sqrt{2}$.

Câu 171. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{(1+\sin x)^{1+\cos x}}{1+\cos x}\right) dx$ là

A. $2\ln 3 - 1$.　　**B.** $-2\ln 2 - 1$.　　**C.** $2\ln 2 - 1$.　　**D.** $-2\ln 3 - 1$.

Câu 172. Có mấy giá trị của b thỏa mãn $\int_0^b (3x^2 - 12x + 11)dx = 6$

A. 4.　　**B.** 2.　　**C.** 1.　　**D.** 3.

Câu 173. Biết rằng $\int_0^b 6dx = 6$ và $\int_0^a xe^x dx = a$. Khi đó biểu thức $b^2 + a^3 + 3a^2 + 2a$ có giá trị bằng

A. 5.　　**B.** 4.　　**C.** 7.　　**D.** 3.

Câu 174. Biết rằng $\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = A$, $\int_0^{b\pi} 2dx = B$ (với $a, b > 0$). Khi đó giá trị của biểu thức $4aA + \frac{B}{2b}$ bằng

A. 2π.　　**B.** π.　　**C.** 3π.　　**D.** 4π.

C. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	A	B	A	A	A	C	D	C	D	B	A	D	B	B	C	C	D	B	C

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	A	A	A	B	D	D	D	C	B	B	C	A	B	C	D	B	D	C	A

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
C	B	B	C	B	C	D	D	D	D	B	A	A	C	D	B	A	A	C	A

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A	D	A	B	A	D	B	C	B	D	C	D	C	A	D	B	D	A	C	B

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A	D	A	B	A	D	B	C	B	D	C	D	C	A	D	B	D	D	C	A

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A	D	A	B	A	D	B	C	B	D	C	D	C	A	D	B	A	C	B	B

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
D	A	B	A	A	A	C	D	C	D	B	A	D	B	B	C	C	D	B	C

121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
C	A	A	A	B	D	D	D	C	B	B	C	A	B	C	D	B	D	C	A

141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
C	B	B	C	B	C	D	D	C	D	B	A	A	C	D	B	A	A	C	A

161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174						
A	D	A	B	A	D	B	C	B	D	C	D	C	A						

II – HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hai hàm số f, g liên tục trên đoạn $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$. **B.** $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

C. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$. **D.** $\int\limits_a^b xf(x)dx = x\int\limits_a^b f(x)dx$.

Câu 2. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và số thực dương a. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào luôn đúng?

A. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$. **B.** $\int\limits_a^a f(x)dx = 1$. **C.** $\int\limits_a^a f(x)dx = -1$. **D.** $\int\limits_a^a f(x)dx = f(a)$.

Câu 3. Tích phân $\int\limits_0^1 dx$ có giá trị bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 4. Cho số thực a thỏa mãn $\int\limits_{-1}^a e^{x+1}dx = e^2 - 1$, khi đó a có giá trị bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_{-1}^{a} e^{x+1}dx = e^{x+1}\Big|_{-1}^{a} = e^{a+1} - e$. Vậy yêu cầu bài toán tương đương

$$e^{a+1} - 1 = e^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1.$$

Câu 5. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có tích phân trên đoạn $[0;\pi]$ đạt giá trị bằng 0?

A. $f(x) = \cos 3x$. **B.** $f(x) = \sin 3x$.

C. $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$. **D.** $f(x) = \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Tính tích phân cho từng hàm số trong các đáp án:

- $\int_{0}^{\pi} \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x\Big|_{0}^{\pi} = 0$,
- $\int_{0}^{\pi} \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_{0}^{\pi} = 2$,
- $\int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)dx = 4\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi} = 2\left(\sqrt{2} - 2\right)$,
- $\int_{0}^{\pi} \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)dx = -4\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi} = 2\sqrt{2}$.

Vậy chọn $f(x) = \cos 3x$.

Câu 6. Trong các tích phân sau, tích phân nào có giá trị **khác** 2?

A. $\int_{1}^{e^2} \ln x dx$. **B.** $\int_{0}^{1} 2dx$. **C.** $\int_{0}^{\pi} \sin x dx$. **D.** $\int_{0}^{2} x dx$.

Hướng dẫn giải

Dù giải bằng máy tính hay làm tay, ta không nên thử tính lần lượt từng đáp án từ A đến D, mà nên chọn các tích phân đơn giản để thử trước**C.** Ví dụ

- $\int_{0}^{1} 2dx = 2x\big|_{0}^{1} = 2$,
- $\int_{0}^{2} x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} = 2$
- $\int_{0}^{\pi} \sin x dx = -\cos x\big|_{0}^{\pi} = 2$,

nên nhận $\int_{1}^{e^2} \ln x dx$.

Câu 7. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào thỏa mãn $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{2} f(x)dx$?

A. $f(x) = e^x$. **B.** $f(x) = \cos x$. **C.** $f(x) = \sin x$. **D.** $f(x) = x + 1$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Phương pháp tự luận

Tính lần lượt từng tích phân (cho đến khi nhận được kết quả đúng), ta được:

- $\int_{-1}^{1} \sin x dx = -\cos x\big|_{-1}^{1} = 0 = \int_{-2}^{2} \sin x dx$ → nhận,

- $\int_{-1}^{1} \cos x dx = \sin x|_{-1}^{1} = 2\sin 1$, và $\int_{-2}^{2} \cos x dx = \sin x|_{-2}^{2} = 2\sin 2$ → loại,
- $\int_{-1}^{1} e^x dx = e^x|_{-1}^{1} = e - e^{-1}$, và $\int_{-2}^{2} e^x dx = e^x|_{-2}^{2} = e^2 - e^{-2}$ → loại,
- $\int_{-1}^{1} (x+1)dx = \left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 2$, và $\int_{-2}^{2} (x+1)dx = \left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_{-2}^{2} = 4$ → loại.

Vậy ta nhận đáp án $f(x) = \sin x$.

Cách 2: Phương pháp tự luận

Ta đã biết nếu f là hàm số lẻ và liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ với mọi số thực a. Trong các lựa chọn ở đây, chỉ có hàm số $y = f(x) = \sin x$ là lẻ, nên đó là đáp án của bài toán.

Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả
$\int_{-1}^{1} \sin x dx - \int_{-2}^{2} \sin x dx$	0
$\int_{-1}^{1} \cos x dx - \int_{-2}^{2} \cos x dx$	$\neq 0$
$\int_{-1}^{1} e^x dx - \int_{-2}^{2} e^x dx$	$\neq 0$
$\int_{-1}^{1} (x+1)dx - \int_{-2}^{2} (x+1)dx$	$\neq 0$

Vậy ta nhận đáp án $f(x) = \sin x$.

Câu 8. Tích phân $I = \int_{2}^{5} \frac{dx}{x}$ có giá trị bằng

A. $3\ln 3$. **B.** $\frac{1}{3}\ln 3$. **C.** $\ln\frac{5}{2}$. **D.** $\ln\frac{2}{5}$.

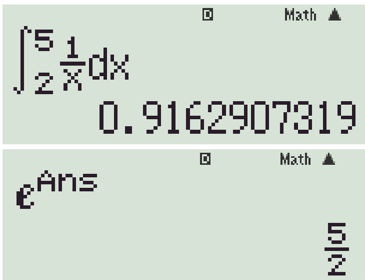
Hướng dẫn giải

Cách 1: Phương pháp tự luận

$$I = \int_{2}^{5} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{2}^{5} = \ln 5 - \ln 2 = \ln\frac{5}{2}.$$

Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị 0,91629...



Bước 2: Lấy $e^{0,91629...}$ cho kết quả $\frac{5}{2}$ → chọn $\ln\frac{5}{2}$.

Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả	Phép tính	Kết quả

$\int_2^5 \frac{dx}{x} - \ln\frac{5}{2}$	0
$\int_2^5 \frac{dx}{x} - \frac{1}{3}\ln 3$	$\neq 0$

$\int_2^5 \frac{dx}{x} - 3\ln 3$	$\neq 0$
$\int_2^5 \frac{dx}{x} - \ln\frac{2}{5}$	$\neq 0$

→ chọn $\ln\frac{5}{2}$.

Câu 9. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$. **B.** $2\ln 3$. **C.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **D.** $2\ln\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Phương pháp tự luận

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cot\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}\right) dx$$

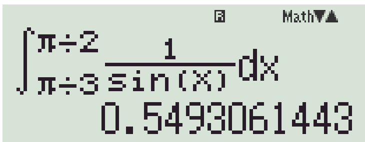
$$= \left[\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right] - \left[\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

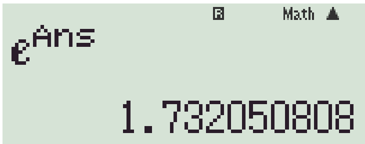
$$= \ln\sqrt{3}.$$

Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị $0,549306...$



Bước 2: Lấy $e^{0,549306...}$ cho kết quả $1,732050808... \approx \sqrt{3}$ → chọn $\frac{1}{2}\ln 3$.



Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - \frac{1}{2}\ln 3$	0
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - 2\ln 3$	$\neq 0$

Phép tính	Kết quả
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - 2\ln\frac{1}{3}$	$\neq 0$
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$	$\neq 0$

→ chọn $\frac{1}{2}\ln 3$.

Nhận xét: Ở bài này cách làm bằng máy tính có vẻ nhanh hơn.

Câu 10. Nếu $\int\limits_{-2}^{0}\left(4-e^{-x/2}\right)dx = K-2e$ thì giá trị của K là

A. $12,5$. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 10.

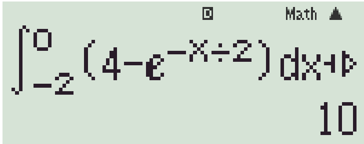
Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

$$K=\int\limits_{-2}^{0}\left(4-e^{-x/2}\right)dx+2e=\left(4x+2e^{-x/2}\right)\Big|_{-2}^{0}+2e=2-\left(-8+2e\right)+2e=10.$$

Phương pháp trắc nghiệm

Dùng máy tính tính $\int\limits_{-2}^{0}\left(4-e^{-x/2}\right)dx+2e$ như hình bên, thu được giá trị $K=10$.



Câu 11. Tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x-2}dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{2\ln 2}{3}$. **B.** $-\frac{2\ln 2}{3}$. **C.** $-2\ln 2$. **D.** $2\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

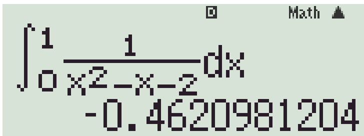
$$\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x-2}dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{(x-2)(x+1)}dx=\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{1}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right]dx=\frac{1}{3}\left[\ln|x-2|-\ln|x+1|\right]\Big|_{0}^{1}=-\frac{2\ln 2}{3}.$$

Học sinh có thể áp dụng công thức $\int\frac{1}{(x-a)(x-b)}dx=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$ để giảm **một** bước tính:

$$I=\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x-2}dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{(x-2)(x+1)}dx=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Bigg|_{0}^{1}=-\frac{2\ln 2}{3}.$$

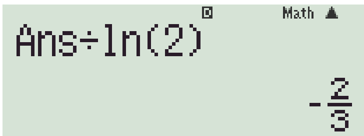
Phương pháp **trắc nghiệm**

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị $-0.4620981...$



Bước 2: Loại đáp án dương $\frac{2\ln 2}{3}$ và loại đáp án nhiễu "Không xác định".

Bước 3: Chia giá trị $-0.4620981...$ cho $\ln 2$, nhận được $-\frac{2}{3}$



→ chọn $-\frac{2\ln 2}{3}$.

Câu 12. Cho hàm số f và g liên tục trên đoạn $[1;5]$ sao cho $\int\limits_{1}^{5}f(x)dx=2$ và $\int\limits_{1}^{5}g(x)dx=-4$. Giá trị của $\int\limits_{1}^{5}\left[g(x)-f(x)\right]dx$ là

A. -6. **B.** 6. **C.** 2. **D.** -2.

Hướng dẫn giải

$$\int\limits_{1}^{5}\left[g(x)-f(x)\right]dx=\int\limits_{1}^{5}g(x)dx-\int\limits_{1}^{5}f(x)dx=-4-2=-6.$$

Câu 13. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 2$ thì tích phân $\int_0^3 [x-2f(x)]dx$ có giá trị bằng

A. 7. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 5. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^3 [x-2f(x)]dx = \int_0^3 xdx - 2\int_0^3 f(x)dx = \frac{9}{2} - 2\times 2 = \frac{1}{2}.$$

Câu 14. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;6]$. Nếu $\int_1^5 f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 f(x)dx = 7$ thì $\int_3^5 f(x)dx$ có giá trị bằng

A. 5. **B.** -5. **C.** 9. **D.** -9.

Hướng dẫn giải

$$\int_3^5 f(x)dx = \int_3^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = -\int_1^3 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = -7 + 2 = -5.$$

Câu 15. Trong các phép tính sau đây, phép tính nào **sai**?

A. $\int_1^3 e^x dx = \left(e^x\right)\Big|_1^3$.

B. $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx = (\ln x)\Big|_{-3}^{-2}$.

C. $\int_{\pi}^{2\pi} \cos xdx = (\sin x)\Big|_{\pi}^{2\pi}$.

D. $\int_1^2 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_1^2$.

Hướng dẫn giải

Phép tính $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx = (\ln x)\Big|_{-3}^{-2}$ là sai. Phép tính đúng là $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx = \left(\ln|x|\right)\Big|_{-3}^{-2}$.

Câu 16. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ có một nguyên hàm là hàm F trên đoạn $[a;b]$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai** ?

A. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

B. $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a;b)$.

C. $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$.

D. Hàm số G cho bởi $G(x) = F(x) + 5$ cũng thỏa mãn $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

Câu 17. Xét hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và các số thực a, b, c tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx$.

B. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

C. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$.

D. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$.

Câu 18. Xét hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu $m \le f(x) \le M \ \forall x \in [a;b]$ thì $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(a-b)$.

B. Nếu $f(x) \ge m \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge m(b-a)$.

C. Nếu $f(x) \le M \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

D. Nếu $f(x) \ge m \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge m(a-b)$.

Hướng dẫn giải

Mệnh đề "Nếu $f(x) \ge m \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge m(a-b)$" sai, mệnh đề đúng phải là

"Nếu $f(x) \ge m \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge m(b-a)$".

Câu 19. Cho hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$ sao cho $g(x) \ne 0$ với mọi $x \in [a;b]$. Xét các khẳng định sau:

I. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

II. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

III. $\int_a^b [f(x).g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)dx$.

IV. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

Trong các khẳng định trên, có bao nhiêu khẳng định **sai**?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Các công thức $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ và $\int_a^b [f(x).g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)dx$ là sai.

Câu 20. Tích phân $\int_0^3 x(x-1)dx$ có giá trị bằng với giá trị của tích phân nào trong các tích phân dưới đây?

A. $\int_0^2 (x^2+x-3)dx$. **B.** $3\int_0^{3\pi} \sin x dx$. **C.** $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$. **D.** $\int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)dx$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

Tính rõ từng phép tính tích phân để tìm ra kết quả đúng (chỉ tính đến khi nhận được kết quả đúng thì dừng lại):

- $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx = \left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^{\ln\sqrt{10}} = \frac{e^{2\ln\sqrt{10}}-1}{2} = \frac{9}{2}$,
- $3\int_0^{3\pi}\sin x dx = -3\cos x|_0^{3\pi} = 6$,
- $\int_0^2 (x^2+x-3)\,dx = \left.\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3x\right)\right|_0^2 = \frac{8}{3}+2-6 = -\frac{4}{3}$,
- $\int_0^{\pi}\cos(3x+\pi)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+\pi)|_0^{\pi} = \frac{1}{3}(\sin 4\pi - \sin\pi) = 0$.

Vậy chọn $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$.

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập các phép tính sau vào máy tính để thu kết quả:

Phép tính	Kết quả
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$	0
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{3\pi}\sin x dx$	$-\frac{3}{2}$
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^2 (x^2+x-3)\,dx$	$\frac{35}{6}$
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{\pi}\cos(3x+\pi)dx$	$\frac{9}{2}$

Vậy chọn $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$.

Câu 21. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$, sao cho $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ thì $f(x)\ge 0 \ \forall x\in[a;b]$.

B. Với mọi hàm số f liên tục trên đoạn $[-3;3]$, luôn có $\int_{-3}^{3} f(x)dx = 0$.

C. Với mọi hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)d(-x)$.

D. Với mọi hàm số f liên tục trên đoạn $[1;5]$ thì $\int_1^5 [f(x)]^2\,dx = \left.\frac{[f(x)]^3}{3}\right|_1^5$.

Hướng dẫn giải

Vì $d(-x) = (-1)dx$ nên $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = \int_b^a f(x)(-1)dx = \int_b^a f(x)d(-x)$.

Câu 22. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu f là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ thì $\int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx$.

B. Nếu $\int\limits_{-1}^{0} f(x)dx = \int\limits_{0}^{1} f(x)dx$ thì f là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$.

C. Nếu $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ thì f là hàm số lẻ trên đoạn $[-1;1]$.

D. Nếu $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ thì f là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$.

Hướng dẫn giải

- Hàm số $y = x^3 - \frac{x}{2}$ thỏa $\int\limits_{-1}^{0} f(x)dx = \int\limits_{0}^{1} f(x)dx$ và $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = 0$, nhưng nó là hàm lẻ trên $[-1;1]$.
- Hàm số $y = x^2 - \frac{1}{3}$ thỏa $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = 0$, nhưng nó làm hàm chẵn trên $[-1;1]$.
- Còn khi f là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ thì $f(x) = f(-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$ và suy ra

$$\int\limits_{0}^{1} f(x)dx = -\int\limits_{0}^{1} f(x)(-1)dx = -\int\limits_{0}^{1} f(x)d(-x) = -\int\limits_{0}^{1} f(-x)d(-x) = -\int\limits_{0}^{-1} f(t)dt = \int\limits_{-1}^{0} f(t)dt.$$

Câu 23. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y = x^6 \sin^5 x$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó $\int\limits_{1}^{2} x^6 \sin^5 xdx$ có giá trị bằng

A. $F(2) - F(1)$.　　**B.** $-F(1)$.　　**C.** $F(2)$.　　**D.** $F(1) - F(2)$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$, trong đó F là một nguyên hàm của f trên đoạn $[a;b]$, ta có $\int\limits_{1}^{2} x^6 \sin^5 xdx = F(2) - F(1)$.

Câu 24. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai số thực $a < b$. Nếu $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \alpha$ thì tích phân $\int\limits_{a/2}^{b/2} f(2x)dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{\alpha}{2}$.　　**B.** 2α.　　**C.** α.　　**D.** 4α.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$ và

x	$a/2$	$b/2$
t	a	b

Vậy $\int\limits_{a/2}^{b/2} f(2x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{a/2}^{b/2} f(2x)2dx = \frac{1}{2}\int\limits_{a}^{b} f(t)dt = \frac{\alpha}{2}$.

Phương pháp trắc nghiệm

Phương pháp tự luận tốt hơn cả, nhưng nếu học sinh không nắm rõ, có thể thay f bởi một hàm số đơn giản, xác định trên $[0;1]$ và tính toán.

Ví dụ $f(x)=x$ với $x\in[0;1]$. Khi đó

$$\alpha=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},$$

suy ra

$$\int_0^{1/2} f(2x)dx=\int_0^{1/2} 2xdx=\frac{1}{4}=\frac{\alpha}{2}.$$

Câu 25. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y=x^3\sin^5 x$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó tích phân $\int_1^2 81x^3\sin^5 3xdx$ có giá trị bằng

A. $3\left[F(6)-F(3)\right]$. **B.** $F(6)-F(3)$. **C.** $3\left[F(2)-F(1)\right]$. **D.** $F(2)-F(1)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=3x\Rightarrow dt=3dx$ và đổi cận

x	1	2
t	3	6

Vậy $\int_1^2 81x^3\sin^5 3xdx=\int_1^2 (3x)^3(\sin^5 3x)3dx=\int_3^6 t^3\sin^5 tdt=F(6)-F(3)$.

Câu 26. Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $\int_0^2 f(x)dx=6$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\pi/2} f(2\sin x)\cos xdx$ là

A. -6. **B.** 6. **C.** -3. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=2\sin x\Rightarrow dt=2\cos xdx$ và

x	0	$\pi/2$
t	0	2

Vậy $\int_0^{\pi/2} f(2\sin x)\cos xdx=\int_0^2 \frac{f(t)}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=3$.

Câu 27. Bài toán tính tích phân $I=\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x+1}\ln x}{x}dx$ được một học sinh giải theo ba bước sau:

I. Đặt ẩn phụ $t=\ln x+1$, suy ra $dt=\frac{1}{x}dx$ và

x	1	e
t	1	2

II. $I=\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x+1}\ln x}{x}dx=\int_1^2 \sqrt{t}(t-1)dt$

III. $I=\int_1^2 \sqrt{t}(t-1)dt=\left(\sqrt{t^5}-\frac{2}{\sqrt{t}}\right)\Big|_1^2=1+3\sqrt{2}$.

Học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Bài giải đúng. **B.** Sai từ Bước II. **C.** Sai từ Bước I. **D.** Sai ở Bước III.

Hướng dẫn giải

Bước III sai. Phép tính đúng là $I=\int_1^2 \sqrt{t}(t-1)dt=\left(\frac{2}{5}\sqrt{t^5}-\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right)\Big|_1^2=\frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{15}$.

Câu 28. Xét tích phân $I=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx$. Thực hiện phép đổi biến $t=\cos x$, ta có thể đưa I về dạng nào sau đây

A. $I=-\int_0^{\pi/4}\frac{2t}{1+t}dt$. **B.** $I=\int_0^{\pi/4}\frac{2t}{1+t}dt$. **C.** $I=-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2t}{1+t}dt$. **D.** $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2t}{1+t}dt$.

Hướng dẫn giải

Ta có $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$. Khi $x=0$ thì $t=1$, khi $x=\frac{\pi}{3}$ thì $t=\frac{1}{2}$. Vậy

$$I=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\pi/3}\frac{2\sin x\cos x}{1+\cos x}dx=-\int_1^{1/2}\frac{2t}{1+t}dt=\int_{1/2}^{1}\frac{2t}{1+t}dt.$$

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Trong các bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào luôn đúng?

A. $\int_a^b|f(x)|dx>\left|\int_a^b f(x)dx\right|$. **B.** $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b|f(x)|dx$.

C. $\int_a^b|f(x)|dx\ge\left|\int_a^b f(x)dx\right|$. **D.** $\int_a^b f(x)dx>\int_a^b|f(x)|dx$.

Câu 30. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_0^1\sin(1-x)dx=\int_0^1\sin xdx$. **B.** $\int_0^1(1+x)^x dx=0$.

C. $\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=2\int_0^{\pi/2}\sin xdx$. **D.** $\int_{-1}^{1}x^{2017}(1+x)dx=\frac{2}{2019}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Tính trực tiếp các tích phân

- Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx\Rightarrow\int_0^1\sin(1-x)dx=-\int_1^0\sin tdt=\int_0^1\sin tdt$
- Đặt $t=\frac{x}{2}\Rightarrow dt=\frac{1}{2}dx\Rightarrow\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=\int_0^{\pi/2}2\sin tdt$
- $\int_{-1}^{1}x^{2017}(1+x)dx=\left(\frac{x^{2018}}{2018}+\frac{x^{2019}}{2019}\right)\Big|_{-1}^{1}=\left(\frac{1^{2018}}{2018}+\frac{1^{2019}}{2019}\right)-\left(\frac{(-1)^{2018}}{2018}+\frac{(-1)^{2019}}{2019}\right)=\frac{2}{2019}$

Vậy $\int_0^1(1+x)^x dx=0$ sai.

Cách 2: Nhận xét tích phân

Ta thấy $(1+x)^x\ge 1$ với mọi $x\in[0;1]$ nên $\int_0^1(1+x)^x dx\ge\int_0^1 1dx=1$, vậy "$\int_0^1(1+x)^x dx=0$" là khẳng định sai.

Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm

Nhập các phép tính sau vào máy tính để thu kết quả:

Phép tính	Kết quả
$\int_0^1(1+x)^x dx$	>0

$\int_0^1 \sin(1-x)dx - \int_0^1 \sin x dx$	0
$\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}dx - 2\int_0^{\pi/2} \sin x dx$	0
$\int_{-1}^{1} x^{2017}(1+x)dx - \frac{2}{2019}$	0

suy ra $\int_0^1 (1+x)^x dx = 0$ là khẳng định sai.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ lẻ và liên tục trên đoạn $[-2;2]$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **luôn đúng**?

A. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_0^2 f(x)dx$.

B. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$.

C. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_{-2}^{0} f(x)dx$.

D. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = -2\int_0^2 f(x)dx$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

Với hàm số f bất kỳ và số thực dương a, ta luôn nằm lòng 2 tính chất sau đây:

- Nếu f là hàm số lẻ trên đoạn $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$,
- Nếu f là hàm số chẵn trên đoạn $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Vậy trong bài này ta chọn $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$.

Phương pháp trắc nghiệm

Nếu học sinh không nắm rõ hai tính chất kể trên, có thể thay f bởi một hàm số đơn giản, xác định trên $[-2;2]$ và tính toán. Ví dụ $f(x) = x$ với $x \in [-2;2]$. Khi đó

- $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$,
- $\int_{-2}^{2} f(x)dx \neq 2\int_0^2 f(x)dx$,
- $\int_{-2}^{2} f(x)dx \neq 2\int_{-2}^{0} f(x)dx$,
- $\int_{-2}^{2} f(x)dx \neq -2\int_0^2 f(x)dx$.

Vậy chọn $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$.

Câu 32. Bài toán tính tích phân $I = \int_{-2}^{1} (x+1)^2 dx$ được một học sinh giải theo ba bước sau:

I. Đặt ẩn phụ $t = (x+1)^2$, suy ra $dt = 2(x+1)dx$,

II. Từ đây suy ra $\frac{dt}{2(x+1)} = dx \Rightarrow \frac{dt}{2\sqrt{t}} = dx$. Đổi cận

x	-2	1
t	1	4

III. Vậy $I = \int_{-2}^{1} (x+1)^2 dx = \int_1^4 \frac{t}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_1^4 = \frac{7}{3}$.

Học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Sai từ Bước I. **B.** Sai ở Bước III. **C.** Sai từ Bước II. **D.** Bài giải đúng.

Hướng dẫn giải

Khi đặt $t=(x+1)^2$ với $-2\le x\le 1$ thì không suy ra $\sqrt{t}=x+1$ được, vì $x+1$ có thể bị âm khi $-2\le x\le -1$.

Câu 33. Một học sinh được chỉ định lên bảng làm 4 bài toán tích phân. Mỗi bài giải đúng được 2,5 điểm, mỗi bài giải sai (sai kết quả hoặc sai bước tính nguyên hàm) được 0 điểm. Học sinh đã giải 4 bài toán đó như sau:

Bài	Đề bài	Bài giải của học sinh
1	$\int_0^1 e^{x^2}xdx$	$\int_0^1 e^{x^2}xdx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}d\left(x^2\right)=\left.\frac{e^{x^2}}{2}\right\|_0^1=\frac{e-1}{2}$
2	$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx$	$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx=\left[\ln\left\|x^2-x-2\right\|\right]_0^1=\ln 2-\ln 2=0$
3	$\int_0^\pi \sin 2x\cos xdx$	Đặt $t=\cos x$, suy ra $dt=-\sin xdx$. Khi $x=0$ thì $t=1$; khi $x=\pi$ thì $t=-1$. Vậy $\int_0^\pi \sin 2x\cos xdx=2\int_0^\pi \sin x\cos^2 xdx=-2\int_1^{-1}t^2dt=\left.\frac{2t^3}{3}\right\|_{-1}^1=\frac{4}{3}$
4	$\int_1^e \frac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx$	$\int_1^e \frac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx=\int_1^e\left[1+(4-2e)\ln x\right]d\left(\ln x\right)$ $=\left[x+(4-2e)\ln^2 x\right]_1^e=3-e$

Số điểm mà học sinh này đạt được là bao nhiêu?

A. 5,0 điểm. **B.** 2,5 điểm. **C.** 7,5 điểm. **D.** 10,0 điểm.

Hướng dẫn giải

Bài toán 2 giải sai. Cách giải đúng là

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx=\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)}dx=\left.\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\right|_0^1=-\frac{2}{3}\ln 2$$

Bài toán 4 ra kết quả đúng, nhưng cách tính nguyên hàm sai hoàn toàn. Lời giải đúng là:

$$\int_1^e \frac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx=\int_1^e\left[1+(4-2e)\ln x\right]d\left(\ln x\right)=\left[\ln x+(2-e)\ln^2 x\right]_1^e=3-e$$

Kinh nghiệm

Kết quả đúng thì chưa chắc bài giải đúng.

Câu 34. Cho hai hàm số liên tục f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi F và G lần lượt là một nguyên hàm của f và g trên đoạn $[a;b]$. Đẳng thức nào sau đây **luôn đúng**?

A. $\int_a^b f(x)G(x)dx=\left[F(x)g(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b F(x)G(x)dx$.

B. $\int_a^b f(x)G(x)dx=\left[F(x)G(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b F(x)g(x)dx$.

C. $\int_a^b f(x)G(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b F(x)g(x)dx$.

D. $\int_a^b f(x)G(x)dx=\left[F(x)G(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b f(x)g(x)dx$.

Câu 35. Tích phân $I=\int\limits_{-2}^{0} xe^{-x}dx$ có giá trị bằng

A. $-e^2+1$. **B.** $3e^2-1$. **C.** $-e^2-1$. **D.** $-2e^2+1$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

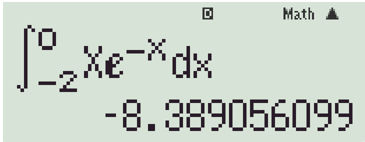
Sử dụng tích phân từng phần, ta được

$$I=\int\limits_{-2}^{0} xe^{-x}dx$$

$$=-\int\limits_{-2}^{0} xd\left(e^{-x}\right)=-\left[\left(xe^{-x}\right)\Big|_{-2}^{0}-\int\limits_{-2}^{0} e^{-x}dx\right]=-\left(xe^{-x}\right)\Big|_{-2}^{0}+\int\limits_{-2}^{0} e^{-x}dx=-\left(xe^{-x}\right)\Big|_{-2}^{0}-\left(e^{-x}\right)\Big|_{-2}^{0}=-e^2-1.$$

Phương pháp trắc nghiệm

Dùng máy tính tính $\int\limits_{-2}^{0} xe^{-x}dx$ như hình bên, thu được kết quả như hình bên. Loại được đáp án $3e^2-1$. Sau đó thử từng đáp án còn lại để tìm ra kết quả.



Câu 36. Cho hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$ và số thực k bất kỳ trong $\mathbb{R}$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_a^b g(x)dx$. **B.** $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx$.

C. $\int\limits_a^b kf(x)dx=k\int\limits_a^b f(x)dx$. **D.** $\int\limits_a^b xf(x)dx=x\int\limits_a^b f(x)dx$.

Câu 37. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và số thực dương a. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **luôn đúng**?

A. $\int\limits_a^a f(x)dx=1$. **B.** $\int\limits_a^a f(x)dx=0$. **C.** $\int\limits_a^a f(x)dx=-1$. **D.** $\int\limits_a^a f(x)dx=f(a)$.

Câu 38. Tích phân $\int\limits_0^1 dx$ có giá trị bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 39. Cho số thực a thỏa mãn $\int\limits_{-1}^{a} e^{x+1}dx=e^2-1$, khi đó a có giá trị bằng

A. 0. **B.** -1. **D.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $\int\limits_{-1}^{a} e^{x+1}dx=e^{x+1}\Big|_{-1}^{a}=e^{a+1}-e$. Vậy yêu cầu bài toán tương đương

$$e^{a+1}-1=e^2-1 \Leftrightarrow a=1.$$

Câu 40. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có tích phân trên đoạn $[0;\pi]$ đạt giá trị bằng 0?

A. $f(x)=\cos 3x$. **B.** $f(x)=\sin 3x$.

C. $f(x)=\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$. **D.** $f(x)=\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Tính tích phân cho từng hàm số trong các đáp án:

- $\int_0^{\pi} \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x\Big|_0^{\pi} = 0$
- $\int_0^{\pi} \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\pi} = 2$
- $\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)dx = 4\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 2\left(\sqrt{2}-2\right)$
- $\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)dx = -4\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 2\sqrt{2}$.

Vậy chọn $f(x) = \cos 3x$.

Câu 41. Tích phân nào trong các tích phân sau có giá trị **khác** 2 ?

A. $\int_0^{\pi} \sin x dx$. **B.** $\int_0^{1} 2dx$. **B.** $\int_1^{e^2} \ln x dx$. **D.** $\int_0^{2} x dx$.

Câu 42. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào thỏa mãn $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{2} f(x)dx$?

A. $f(x) = \cos x$. **B.** $f(x) = \sin x$. **C.** $f(x) = e^x$. **D.** $f(x) = x+1$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Tính lần lượt từng tích phân (cho đến khi nhận được kết quả đúng), ta được:

- $\int_{-1}^{1} \sin x dx = -\cos x\Big|_{-1}^{1} = 0 = \int_{-2}^{2} \sin x dx$ → nhận,
- $\int_{-1}^{1} \cos x dx = \sin x\Big|_{-1}^{1} = 2\sin 1$, và $\int_{-2}^{2} \cos x dx = \sin x\Big|_{-2}^{2} = 2\sin 2$ → loại,
- $\int_{-1}^{1} e^x dx = e^x\Big|_{-1}^{1} = e - e^{-1}$, và $\int_{-2}^{2} e^x dx = e^x\Big|_{-2}^{2} = e^2 - e^{-2}$ → loại,
- $\int_{-1}^{1} (x+1)dx = \frac{(x+1)^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 2$, và $\int_{-2}^{2} (x+1)dx = \frac{(x+1)^2}{2}\Big|_{-2}^{2} = 4$ → loại.

Vậy ta nhận đáp án $f(x) = \sin x$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả
$\int_{-1}^{1} \sin x dx - \int_{-2}^{2} \sin x dx$	0
$\int_{-1}^{1} \cos x dx - \int_{-2}^{2} \cos x dx$	$\neq 0$
$\int_{-1}^{1} e^x dx - \int_{-2}^{2} e^x dx$	$\neq 0$
$\int_{-1}^{1} (x+1)dx - \int_{-2}^{2} (x+1)dx$	$\neq 0$

Vậy ta nhận đáp án $f(x) = \sin x$.

Câu 43. Tích phân $I=\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{x}$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{3}\ln 3$. **B.** $\ln\frac{5}{2}$. **C.** $3\ln 3$. **D.** $\ln\frac{2}{5}$.

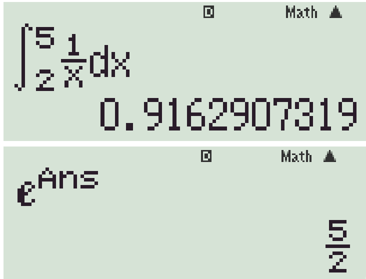
Hướng dẫn giải

[Cách 1: Phương pháp tự luận]

$$I=\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_{2}^{5}=\ln 5-\ln 2=\ln\frac{5}{2}.$$

[Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị $0,91629...$



Bước 2: Lấy $e^{0,91629...}$ cho kết quả $\frac{5}{2}$ → chọn $\ln\frac{5}{2}$.

[Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm]

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả
$\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{x}-\ln\frac{5}{2}$	0
$\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{x}-\frac{1}{3}\ln 3$	$\neq 0$

Phép tính	Kết quả
$\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{x}-3\ln 3$	$\neq 0$
$\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{x}-\ln\frac{2}{5}$	$\neq 0$

→ chọn $\ln\frac{5}{2}$.

Câu 44. Tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$ có giá trị bằng

A. $2\ln\frac{1}{3}$. **B.** $2\ln 3$. **C.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **D.** $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

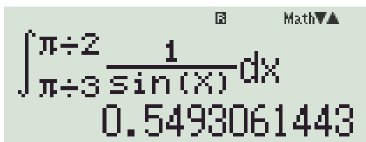
[Cách 1: Phương pháp tự luận]

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cot\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}\right)dx.$$

$$=\left[\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\left[\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right]-\left[\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=\ln\sqrt{3}.$$

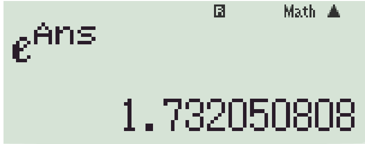
[Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị $0,549306...$



Bước 2: Lấy $e^{0,549306...}$ cho kết quả $1,732050808...\approx\sqrt{3}$ →

chọn $\frac{1}{2}\ln 3$.



[Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm]

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - \frac{1}{2}\ln 3$	0
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - 2\ln 3$	$\neq 0$

Phép tính	Kết quả
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - 2\ln\frac{1}{3}$	$\neq 0$
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$	$\neq 0$

→ chọn $\frac{1}{2}\ln 3$.

Nhận xét: Ở bài này cách làm bằng máy tính có vẻ nhanh hơn.

Câu 45. Nếu $\int_{-2}^{0}\left(4-e^{-x/2}\right)dx = K-2e$ thì giá trị của K là

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** $12{,}5$.

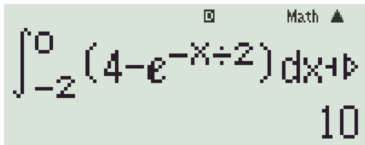
Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$K=\int_{-2}^{0}\left(4-e^{-x/2}\right)dx+2e=\left(4x+2e^{-x/2}\right)\Big|_{-2}^{0}+2e=2-(-8+2e)+2e=10.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dùng máy tính tính $\int_{-2}^{0}\left(4-e^{-x/2}\right)dx+2e$ như hình bên, thu được giá trị $K=10$.



Câu 46. Tích phân $I=\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x-2}dx$ có giá trị bằng

A. $-2\ln 2$. **B.** $\frac{2\ln 2}{3}$. **C.** $-\frac{2\ln 2}{3}$. **D.** Không xác định.

Hướng dẫn giải

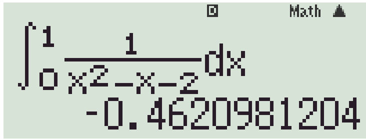
[Phương pháp tự luận]

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x-2}dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{(x-2)(x+1)}dx=\frac{1}{3}\int_{0}^{1}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right]dx=\frac{1}{3}\left[\ln|x-2|-\ln|x+1|\right]\Big|_{0}^{1}=-\frac{2\ln 2}{3}.$$

Học sinh có thể áp dụng công thức $\int\frac{1}{(x-a)(x-b)}dx=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$ để giảm **một** bước tính: $I=\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x-2}dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{(x-2)(x+1)}dx=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Big|_{0}^{1}=-\frac{2\ln 2}{3}$

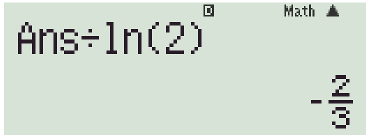
[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị $-0.4620981...$



Bước 2: Loại đáp án dương $\frac{2\ln 2}{3}$ và loại đáp án nhiễu "Không xác định".

Bước 3: Chia giá trị $-0.4620981...$ cho $\ln 2$, nhận được $-\frac{2}{3}$



→ chọn $-\frac{2\ln 2}{3}$.

Câu 47. Cho hàm số f và g liên tục trên đoạn $[1;5]$ sao cho $\int\limits_1^5 f(x)dx = 2$ và $\int\limits_1^5 g(x)dx = -4$. Giá trị của $\int\limits_1^5 \left[g(x) - f(x)\right]dx$ là

A. -2. **B.** 6. **C.** 2. **D.** -6.

Hướng dẫn giải

$$\int\limits_1^5 \left[g(x) - f(x)\right]dx = \int\limits_1^5 g(x)dx - \int\limits_1^5 f(x)dx = -4 - 2 = -6.$$

Câu 48. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int\limits_0^3 f(x)dx = 2$ thì tích phân $\int\limits_0^3 \left[x - 2f(x)\right]dx$ có giá trị bằng

A. 7. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 5. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\int\limits_0^3 \left[x - 2f(x)\right]dx = \int\limits_0^3 xdx - 2\int\limits_0^3 f(x)dx = \frac{9}{2} - 2\times 2 = \frac{1}{2}.$$

Câu 49. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;6]$. Nếu $\int\limits_1^5 f(x)dx = 2$ và $\int\limits_1^3 f(x)dx = 7$ thì $\int\limits_3^5 f(x)dx$ có giá trị bằng

A. -9. **B.** 5. **C.** 9. **D.** -5.

Hướng dẫn giải

$$\int\limits_3^5 f(x)dx = \int\limits_3^1 f(x)dx + \int\limits_1^5 f(x)dx = -\int\limits_1^3 f(x)dx + \int\limits_1^5 f(x)dx = -7 + 2 = -5.$$

Câu 50. Trong các phép tính sau đây, phép tính nào **sai**?

A. $\int\limits_1^2 (x+1)\,dx = \left.\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\right|_1^2$. **B.** $\int\limits_1^3 e^x dx = \left.\left(e^x\right)\right|_1^3$.

C. $\int\limits_\pi^{2\pi} \cos xdx = \left.(\sin x)\right|_\pi^{2\pi}$. **D.** $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx = \left.(\ln x)\right|_{-3}^{-2}$.

Hướng dẫn giải

Phép tính $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx = \left.(\ln x)\right|_{-3}^{-2}$ là sai. Phép tính đúng là $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx = \left.\left(\ln|x|\right)\right|_{-3}^{-2}$.

Câu 51. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ có một nguyên hàm là hàm F trên đoạn $[a;b]$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai** ?

A. $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in(a;b)$.

B. $\int\limits_a^b f(x)dx=f(b)-f(a)$.

C. $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

D. Hàm số G cho bởi $G(x)=F(x)+5$ cũng thỏa mãn $\int\limits_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)$.

Câu 52. Xét hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và các số thực a, b, c tùy ý. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx-\int\limits_c^b f(x)dx$.

B. $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$.

C. $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_c^b f(x)dx-\int\limits_c^a f(x)dx$.

D. $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx-\int\limits_b^c f(x)dx$.

Câu 53. Xét hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$.Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu $f(x)\ge m\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx\ge m(a-b)$.

B. Nếu $f(x)\ge m\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx\ge m(b-a)$.

C. Nếu $f(x)\le M\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

D. Nếu $m\le f(x)\le M\ \forall x\in[a;b]$ thì $m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M(a-b)$.

Hướng dẫn giải

Mệnh đề "Nếu $f(x)\ge M\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx\ge M(a-b)$" sai, mệnh đề đúng phải là

"Nếu $f(x)\ge M\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx\ge M(b-a)$".

Câu 54. Cho hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$ sao cho $g(x)\ne 0$ với mọi $x\in[a;b]$. Một học sinh lên bảng và phát biểu các tính chất sau:

I. $\int\limits_a^b[f(x)+g(x)]dx=\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_a^b g(x)dx$.

II. $\int\limits_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int\limits_a^b f(x)dx-\int\limits_a^b g(x)dx$.

III. $\int\limits_a^b[f(x).g(x)]dx=\int\limits_a^b f(x)dx.\int\limits_a^b g(x)dx$.

IV. $\int\limits_a^b\frac{f(x)}{g(x)}dx=\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx}$.

Trong số các phát biểu trên, có bao nhiêu phát biểu **sai**?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Các phát biểu $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ và $\int_a^b [f(x).g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)dx$ là sai.

Câu 55. Tích phân $\int_0^3 x(x-1)dx$ có giá trị bằng với tích phân nào trong các tích phân dưới đây ?

A. $\int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)dx$. **B.** $3\int_0^{3\pi} \sin xdx$. **C.** $\int_0^2 (x^2+x-3)dx$. **D.** $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Tính rõ từng phép tính tích phân để tìm ra kết quả đúng (Chỉ tính đến khi nhận được kết quả đúng thì dừng lại):

- $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx = \left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^{\ln\sqrt{10}} = \frac{e^{2\ln\sqrt{10}}-1}{2} = \frac{9}{2}$,
- $3\int_0^{3\pi} \sin xdx = -3\cos x|_0^{3\pi} = 6$,
- $\int_0^2 (x^2+x-3)dx = \left.\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3x\right)\right|_0^2 = \frac{8}{3}+2-6 = -\frac{4}{3}$,
- $\int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+\pi)|_0^{\pi} = \frac{1}{3}(\sin 4\pi - \sin\pi) = 0$.

Vậy chọn $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập các phép tính sau vào máy tính để thu kết quả:

Phép tính	Kết quả
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$	0
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{3\pi} \sin xdx$	$-\frac{3}{2}$
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^2 (x^2+x-3)dx$	$\frac{35}{6}$
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)dx$	$\frac{9}{2}$

Vậy chọn $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$.

Câu 56. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Với mọi hàm số f liên tục trên đoạn $[-3;3]$, luôn có $\int_{-3}^3 f(x)dx = 0$.

B. Với mọi hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)d(-x)$.

C. Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$, sao cho $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ thì $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a;b]$.

D. Với mọi hàm số f liên tục trên đoạn $[1;5]$ thì $\int_1^5 [f(x)]^2 dx = \left.\frac{[f(x)]^3}{3}\right|_1^5$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Vì } d(-x) = (-1)dx \text{ nên } \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = \int_b^a f(x)(-1)dx = \int_b^a f(x)d(-x).$$

Câu 57. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu f là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ thì $\int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx$.

B. Nếu $\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ thì f là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$.

C. Nếu $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ thì f là hàm số lẻ trên đoạn $[-1;1]$.

D. Nếu $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ thì f là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$.

Hướng dẫn giải

- Hàm số $y = x^3 - \frac{x}{2}$ thỏa $\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ và $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$, nhưng nó là hàm lẻ trên $[-1;1]$.
- Hàm số $y = x^2 - \frac{1}{3}$ thỏa $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$, nhưng nó làm hàm chẵn trên $[-1;1]$.
- Còn khi f là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ thì $f(x) = f(-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$ và suy ra

$$\int_0^1 f(x)dx = -\int_0^1 f(x)(-1)dx = -\int_0^1 f(x)d(-x)$$
$$= -\int_0^1 f(-x)d(-x) = -\int_0^{-1} f(t)dt = \int_{-1}^0 f(t)dt.$$

Câu 58. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{\sin x}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}dx$ có giá trị bằng

A. $F(2) - F(1)$. **B.** $-F(1)$. **C.** $F(2)$. **D.** $F(2) + F(1)$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, trong đó F là một nguyên hàm của f trên đoạn $[a;b]$, ta có $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}dx = F(2) - F(1)$.

Câu 59. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai số thực $a<b$. Nếu $\int_a^b f(x)dx=\alpha$ thì tích phân $\int_{a/2}^{b/2} f(2x)dx$ có giá trị bằng

A. α. **B.** 2α. **C.** $\frac{\alpha}{2}$. **D.** 4α.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Đặt $t=2x \Rightarrow dt=2dx$ và

x	$a/2$	$b/2$
t	a	b

Vậy $\int_{a/2}^{b/2} f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_{a/2}^{b/2} f(2x)2dx=\frac{1}{2}\int_a^b f(t)dt=\frac{\alpha}{2}$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Phương pháp tự luận tốt hơn cả, nhưng nếu học sinh không nắm rõ, có thể thay f bởi một hàm số đơn giản, xác định trên $[0;1]$ và tính toán.

Ví dụ $f(x)=x$ với $x\in[0;1]$. Khi đó $\alpha=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$

suy ra $\int_0^{1/2} f(2x)dx=\int_0^{1/2} 2xdx=\frac{1}{4}=\frac{\alpha}{2}$.

Câu 60. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{\sin x}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó $\int_1^2 \frac{\sin 3x}{x}dx$ có giá trị bằng

A. $F(6)-F(3)$. **B.** $3\left[F(6)-F(3)\right]$. **C.** $3\left[F(2)-F(1)\right]$. **D.** $F(2)-F(1)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=3x \Rightarrow dt=3dx$ và

x	1	2
t	3	6

Vậy $\int_1^2 \frac{\sin 3x}{x}dx=\int_1^2 \frac{\sin 3x}{3x}3dx=\int_3^6 \frac{\sin t}{t}dt=F(6)-F(3)$.

Câu 61. Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $\int_0^2 f(x)dx=6$. Giá trị của $\int_0^{\pi/2} f(2\sin x)\cos xdx$ là

A. 3. **B.** 6. **C.** -3. **D.** -6.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=2\sin x \Rightarrow dt=2\cos xdx$ và

x	0	$\pi/2$
t	0	2

Vậy $\int_0^{\pi/2} f(2\sin x)\cos xdx=\int_0^2 \frac{f(t)}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=3$.

Câu 62. Bài toán tính tích phân $I=\int\limits_1^e \frac{\sqrt{\ln x+1}\ln x}{x}dx$ được một học sinh giải theo ba bước sau:

I. Đặt ẩn phụ $t=\ln x+1$, suy ra $dt=\frac{1}{x}dx$ và

x	1	e
t	1	2

II. $I=\int\limits_1^e \frac{\sqrt{\ln x+1}\ln x}{x}dx=\int\limits_1^2 \sqrt{t}(t-1)dt$

III. $I=\int\limits_1^2 \sqrt{t}(t-1)dt=\left(\sqrt{t^5}-\frac{2}{\sqrt{t}}\right)\Big|_1^2=1+3\sqrt{2}$.

Vậy học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Bài giải đúng. **B.** Sai từ Bước II. **C.** Sai từ Bước I. **D.** Sai ở Bước III.

Hướng dẫn giải

Bước III sai. Phép tính đúng là $I=\int\limits_1^2 \sqrt{t}(t-1)dt=\left(\frac{2}{5}\sqrt{t^5}-\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right)\Big|_1^2=\frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{15}$.

Câu 63. Xét tích phân $I=\int\limits_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx$. Thực hiện phép đổi biến $t=\cos x$, ta có thể đưa I về dạng nào sau đây

A. $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2t}{1+t}dt$. **B.** $I=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{2t}{1+t}dt$. **C.** $I=-\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2t}{1+t}dt$. **D.** $I=-\int\limits_0^{\pi/4}\frac{2t}{1+t}dt$.

Hướng dẫn giải

Ta có $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$. Khi $x=0$ thì $t=1$, khi $x=\frac{\pi}{3}$ thì $t=\frac{1}{2}$. Vậy

$$I=\int\limits_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx=\int\limits_0^{\pi/3}\frac{2\sin x\cos x}{1+\cos x}dx=-\int\limits_1^{1/2}\frac{2t}{1+t}dt=\int\limits_{1/2}^1\frac{2t}{1+t}dt.$$

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ bất kỳ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Trong các bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào **luôn đúng**?

A. $\int\limits_a^b f(x)dx\ge\int\limits_a^b |f(x)|dx$. **B.** $\int\limits_a^b |f(x)|dx\ge\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$.

C. $\int\limits_a^b |f(x)|dx>\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)dx>\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Câu 65. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\limits_0^1 (1+x)^x dx=0$. **B.** $\int\limits_0^1 \sin(1-x)dx=\int\limits_0^1 \sin xdx$.

C. $\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=2\int\limits_0^{\pi/2}\sin xdx$. **D.** $\int\limits_{-1}^1 x^{2017}(1+x)dx=\frac{2}{2019}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1: Tính trực tiếp các tích phân]

- Đặt $t=1-x \Rightarrow dt=-dx \Rightarrow \int_0^1 \sin(1-x)dx = -\int_1^0 \sin t dt = \int_0^1 \sin t dt$

- Đặt $t=\frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}dx \Rightarrow \int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}dx = \int_0^{\pi/2} 2\sin t dt$

- $\int_{-1}^{1} x^{2017}(1+x)dx = \left(\frac{x^{2018}}{2018}+\frac{x^{2019}}{2019}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(\frac{1^{2018}}{2018}+\frac{1^{2019}}{2019}\right)-\left(\frac{(-1)^{2018}}{2018}+\frac{(-1)^{2019}}{2019}\right)=\frac{2}{2019}$

Vậy $\int_0^1 (1+x)^x dx = 0$ sai.

[Cách 2: Nhận xét tích phân]

Ta thấy $(1+x)^x \geq 1$ với mọi $x\in[0;1]$ nên $\int_0^1 (1+x)^x dx \geq \int_0^1 1dx = 1$, vậy "$\int_0^1 (1+x)^x dx = 0$" là khẳng định sai.

[Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập các phép tính sau vào máy tính để thu kết quả:

Phép tính	Kết quả
$\int_0^1 (1+x)^x dx$	>0
$\int_0^1 \sin(1-x)dx - \int_0^1 \sin xdx$	0
$\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}dx - 2\int_0^{\pi/2} \sin xdx$	0
$\int_{-1}^{1} x^{2017}(1+x)dx - \frac{2}{2019}$	0

suy ra $\int_0^1 (1+x)^x dx = 0$ là khẳng định sai.

Câu 66. Cho hàm số $y=f(x)$ lẻ và liên tục trên đoạn $[-2;2]$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **luôn đúng**?

A. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = -2\int_0^2 f(x)dx$.

B. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_0^2 f(x)dx$.

C. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_{-2}^{0} f(x)dx$.

D. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Với hàm số f bất kỳ và số thực dương a, ta luôn nằm lòng 2 tính chất sau đây:

- Nếu f là hàm số lẻ trên đoạn [-$a;a$] thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$,

- Nếu f là hàm số chẵn trên đoạn [-$a;a$] thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Vậy trong bài này ta chọn $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nếu học sinh không nắm rõ hai tính chất kể trên, có thể thay f bởi một hàm số đơn giản, xác định trên $[-2;2]$ và tính toán. Ví dụ $f(x)=x$ với $x\in[-2;2]$. Khi đó

- $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$,
- $\int_{-2}^{2} f(x)dx \neq 2\int_{0}^{2} f(x)dx$,
- $\int_{-2}^{2} f(x)dx \neq 2\int_{-2}^{0} f(x)dx$,
- $\int_{-2}^{2} f(x)dx \neq -2\int_{0}^{2} f(x)dx$.

Vậy chọn $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$.

Câu 67. Bài toán tính tích phân $I=\int_{-2}^{1}(x+1)^2dx$ được một học sinh giải theo ba bước sau:

I. Đặt ẩn phụ $t=(x+1)^2$, suy ra $dt=2(x+1)dx$,

II. Từ đây suy ra $\frac{dt}{2(x+1)}=dx \Rightarrow \frac{dt}{2\sqrt{t}}=dx$. Bảng giá trị

x	-2	1
t	1	4

III. Vậy $I=\int_{-2}^{1}(x+1)^2dx=\int_{1}^{4}\frac{t}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_1^4=\frac{7}{3}$.

Vậy học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Sai ở Bước III. **B.** Sai từ Bước II. **C.** Sai từ Bước I. **D.** Bài giải đúng.

Hướng dẫn giải

Khi đặt $t=(x+1)^2$ với $-2\le x\le 1$ thì không suy ra $\sqrt{t}=x+1$ được, vì $x+1$ có thể bị âm khi $-2\le x\le -1$.

Câu 68. Một học sinh được chỉ định lên bảng làm 4 bài toán tích phân. Mỗi bài giải đúng được 2,5 điểm, mỗi bài giải sai (sai kết quả hoặc sai bước tính nguyên hàm) được 0 điểm. Học sinh đã giải 4 bài toán đó như sau:

Bài	Đề bài	Bài giải của học sinh
1	$\int_0^1 e^{x^2}xdx$	$\int_0^1 e^{x^2}xdx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}d\left(x^2\right)=\frac{e^{x^2}}{2}\Big\|_0^1=\frac{e-1}{2}$
2	$\int_0^1\frac{1}{x^2-x-2}dx$	$\int_0^1\frac{1}{x^2-x-2}dx=\left[\ln\left\|x^2-x-2\right\|\right]\Big\|_0^1=\ln 2-\ln 2=0$
3	$\int_0^{\pi}\sin 2x\cos xdx$	Đặt $t=\cos x$, suy ra $dt=-\sin xdx$. Khi $x=0$ thì $t=1$; khi $x=\pi$ thì $t=-1$. Vậy $\int_0^{\pi}\sin 2x\cos xdx=2\int_0^{\pi}\sin x\cos^2 xdx=-2\int_1^{-1}t^2dt=\frac{2t^3}{3}\Big\|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}$
4	$\int_1^e\frac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx$	$\int_1^e\frac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx=\int_1^e\left[1+(4-2e)\ln x\right]d\left(\ln x\right)$ $=\left[x+(4-2e)\ln^2 x\right]\Big\|_1^e=3-e$

Số điểm mà học sinh này đạt được là bao nhiêu?

A. 7,5 điểm. **B.** 2,5 điểm. **C.** 5,0 điểm. **D.** 10,0 điểm.

Hướng dẫn giải

Bài toán 2 giải sai. Cách giải đúng là

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)}dx = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Bigg|_0^1 = -\frac{2}{3}\ln 2$$

Bài toán 4 ra kết quả đúng, nhưng cách tính nguyên hàm sai hoàn toàn. Cách tính đúng là:

$$\int_1^e \frac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx = \int_1^e [1+(4-2e)\ln x]\,d(\ln x) = \left[\ln x + (2-e)\ln^2 x\right]\Big|_1^e = 3-e$$

[Kinh nghiệm]

Kết quả đúng thì chưa chắc bài giải đúng.

Câu 69. Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[a;b]$. Đẳng thức nào sau đây **luôn đúng**?

A. $\int_a^b f(x)G(x)dx = [F(x)g(x)]\Big|_a^b - \int_a^b F(x)G(x)dx$.

B. $\int_a^b f(x)G(x)dx = [F(x)G(x)]\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)dx$.

C. $\int_a^b f(x)G(x)dx = [f(x)g(x)]\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)dx$.

D. $\int_a^b f(x)G(x)dx = [F(x)G(x)]\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Câu 70. Tích phân $I = \int_{-2}^0 xe^{-x}dx$ có giá trị bằng

A. $-2e^2+1$. **B.** $3e^2-1$. **C.** $-e^2+1$. **D.** $-e^2-1$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

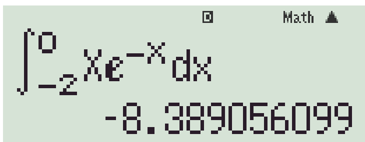
Sử dụng tích phân từng phần, ta được

$$I = \int_{-2}^0 xe^{-x}dx$$

$$= -\int_{-2}^0 x\,d\left(e^{-x}\right) = -\left[\left(xe^{-x}\right)\Big|_{-2}^0 - \int_{-2}^0 e^{-x}dx\right] = -\left(xe^{-x}\right)\Big|_{-2}^0 + \int_{-2}^0 e^{-x}dx = -\left(xe^{-x}\right)\Big|_{-2}^0 - \left(e^{-x}\right)\Big|_{-2}^0 = -e^2-1.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dùng máy tính tính $\int_{-2}^0 xe^{-x}dx$ như hình bên, thu được kết quả như hình bên. Loại được đáp án $3e^2-1$. Sau đó thử từng đáp án còn lại để tìm ra kết quả.



Câu 71. Ta đã biết công thức tích phân từng phần $\int_a^b F(x)g(x)dx = [F(x)G(x)]\Big|_a^b - \int_a^b f(x)G(x)dx$, trong đó F và G là các nguyên hàm của f và g. Trong các biến đổi sau đây, sử dụng tích phân từng phần ở trên, biến đổi nào là **sai**?

A. $\int_1^e (\ln x)x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Bigg|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$, trong đó $F(x)=\ln x$, $g(x)=x$.

B. $\int_0^1 xe^x dx = \left(xe^x\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$, trong đó $F(x)=x$, $g(x)=e^x$.

C. $\int\limits_0^\pi x\sin x dx = (x\cos x)\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \cos x dx$, trong đó $F(x) = x$, $g(x) = \sin x$.

D. $\int\limits_0^1 x2^{x+1}dx = \left(x\dfrac{2^{x+1}}{\ln 2}\right)\Bigg|_0^1 - \int\limits_0^1 \dfrac{2^{x+1}}{\ln 2}dx$, trong đó $F(x) = x$, $g(x) = 2^{x+1}$.

Câu 72. Tích phân $\int\limits_0^\pi x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)dx$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{(\pi-2)\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\dfrac{(\pi-2)\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{(\pi+2)\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\dfrac{(\pi+2)\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

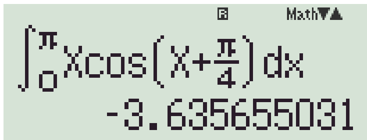
Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int\limits_0^\pi x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \left[x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\Bigg|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \pi\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\Bigg|_0^\pi$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{2}}{2} + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{(\pi+2)\sqrt{2}}{2}.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dùng máy tính tính $\int\limits_0^\pi x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)dx$ như hình bên, thu được kết quả như hình bên. Loại được các đáp án dương $\dfrac{(\pi+2)\sqrt{2}}{2}$ và $\dfrac{(\pi-2)\sqrt{2}}{2}$. Sau đó thử từng đáp án còn lại để tìm ra kết quả.



Câu 73. Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[0;2]$. Biết rằng $F(0) = 0$, $F(2) = 1$, $G(0) = -2$, $G(2) = 1$ và $\int\limits_0^2 F(x)g(x)dx = 3$. Tích phân $\int\limits_0^2 f(x)G(x)dx$ có giá trị bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** -2. **D.** -4.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int\limits_0^2 f(x)G(x)dx = \left[F(x)G(x)\right]\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 F(x)g(x)dx = F(2)G(2) - F(0)G(0) - \int\limits_0^2 F(x)g(x)dx$$

$$= 1\times 1 - 0\times(-2) - 3 = -2.$$

Câu 74. Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[1;2]$. Biết rằng $F(1) = 1$, $F(2) = 4$, $G(1) = \dfrac{3}{2}$, $G(2) = 2$ và $\int\limits_1^2 f(x)G(x)dx = \dfrac{67}{12}$. Tích phân $\int\limits_1^2 F(x)g(x)dx$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{11}{12}$. **B.** $-\dfrac{145}{12}$. **C.** $-\dfrac{11}{12}$. **D.** $\dfrac{145}{12}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int\limits_1^2 F(x)g(x)dx = \left[F(x)G(x)\right]\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 f(x)G(x)dx = F(2)G(2) - F(1)G(1) - \int\limits_1^2 f(x)G(x)dx$$

$$= 4\times 2 - 1\times\frac{3}{2} - \frac{67}{12} = \frac{11}{12}.$$

Câu 75. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $a<b$ và $\int_a^b x\sin xdx=\pi$, đồng thời $a\cos a=0$ và $b\cos b=-\pi$. Tích phân $\int_a^b \cos xdx$ có giá trị bằng

A. $\frac{145}{12}$. **B.** π. **C.** $-\pi$. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int_a^b x\sin xdx=-\left[x\cos x\right]_a^b+\int_a^b \cos xdx \Rightarrow \int_a^b \cos xdx=\left[x\cos x\right]_a^b+\int_a^b x\sin xdx$$

$$=b\cos b-a\cos a+\pi=-\pi-0+\pi=0.$$

Câu 76. Cho tích phân: $I=\int_1^e \frac{\sqrt{1-\ln x}}{2x}dx$. Đặt $u=\sqrt{1-\ln x}$. Khi đó I bằng

A. $I=\int_1^0 u^2du$. **B.** $I=-\int_1^0 u^2du$. **C.** $I=\int_1^0 \frac{u^2}{2}du$. **D.** $I=-\int_0^1 u^2du$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Đặt $u=\sqrt{1-\ln x}\Rightarrow u^2=1-\ln x \Rightarrow \frac{dx}{x}=-2udu$. Với $x=1\Rightarrow u=1, x=e\Rightarrow u=0$.

Khi đó $I=-\int_1^0 u^2du$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Bấm máy tính để tính $\int_1^e \frac{\sqrt{1-\ln x}}{2x}dx$

Bước 2: Bấm SHIFT STO A để lưu vào biến **A.**

Bước 3: Bấm $A-\left(-\int_1^0 u^2du\right)=0$. Vậy đáp án là **A.**

Câu 77. Tích phân $I=\int_1^2 \frac{x^2}{x^2-7x+12}dx$ có giá trị bằng

A. $5\ln 2-6\ln 3$. **B.** $1+2\ln 2-6\ln 3$. **C.** $3+5\ln 2-7\ln 3$. **D.** $1+25\ln 2-16\ln 3$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $I=\int_1^2\left(1+\frac{16}{x-4}-\frac{9}{x-3}\right)dx=\left(x+16\ln|x-4|-9\ln|x-3|\right)\Big|_1^2=1+25\ln 2-16\ln 3$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bấm máy tính $\int_1^2 \frac{x^2}{x^2-7x+12}dx-(1+25\ln 2-16\ln 3)$ được đáp số là 0.

Câu 78. Tích phân $I=\int_1^2 x^5dx$ có giá trị là:

A. $\frac{19}{3}$. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{21}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $I=\int_1^2 x^5dx=\left.\frac{x^6}{6}\right|_1^2=\frac{21}{2}$.

Câu 79. Tích phân $I=\int_0^1\frac{xdx}{(x+1)^3}$ bằng

A. $-\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** 12.

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{x}{(x+1)^3}=\frac{x+1-1}{(x+1)^3}=(x+1)^{-2}-(x+1)^{-3}\Rightarrow I=\int_0^1\left[(x+1)^{-2}-(x+1)^{-3}\right]dx=\frac{1}{8}$.

Câu 80. Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-x)\sin xdx$. Đặt $u=2-x,\ dv=\sin xdx$ thì I bằng

A. $-(2-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.

B. $-(2-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.

C. $(2-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.

D. $(2-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases}u=2-x\\dv=\sin xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-dx\\v=-\cos x\end{cases}$. Vậy $I=-(2-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.

Câu 81. Tích phân $\int_0^1\frac{x^7}{(1+x^2)^5}dx$ bằng

A. $\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(t-1)^3}{t^5}dt$. **B.** $\int_1^3\frac{(t-1)^3}{t^5}dt$. **C.** $\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(t-1)^3}{t^4}dt$. **D.** $\frac{3}{2}\int_1^4\frac{(t-1)^3}{t^4}dt$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=1+x^2\Rightarrow dt=2xdx$. Vậy $I=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(t-1)^3}{t^5}dt=\frac{1}{4}.\frac{1}{2^5}=\frac{1}{128}$.

Câu 82. Tích phân $I=\int_1^{\sqrt[4]{3}}\frac{1}{x(x^4+1)}dx$ bằng

A. $\ln\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx$. Vậy $I=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}$.

Câu 83. Cho hai tích phân $I=\int_0^2 x^3dx$, $J=\int_0^2 xdx$ .Tìm mối quan hệ giữa I và J

A. $I.J=8$. **B.** $I.J=\frac{32}{5}$. **C.** $I-J=\frac{128}{7}$. **D.** $I+J=\frac{64}{9}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int_0^2 x^3dx=4$ và $J=\int_0^2 xdx=2$, suy ra $I.J=8$.

Câu 84. Cho số thực a thỏa mãn $\int_1^a e^{x+1}dx = e^4 - e^2$, khi đó a có giá trị bằng

A. -1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $\int_1^a e^{x+1}dx = e^{x+1}\Big|_1^a = e^{a+1} - e^2 = e^4 - e^2 \Rightarrow a = 3$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Thế từng đáp án vào và bấm máy

$\int_1^3 e^{x+1}dx - \left(e^4 - e^2\right) = 0$ $\int_1^{-1} e^{x+1}dx - \left(e^4 - e^2\right) \approx -53,5981$

$\int_1^0 e^{x+1}dx - \left(e^4 - e^2\right) \approx -51,8798$ $\int_1^2 e^{x+1}dx - \left(e^4 - e^2\right) \approx -34,5126$.

Câu 85. Tích phân $\int_0^2 ke^x dx$ (với k là hằng số)có giá trị bằng

A. $k(e^2 - 1)$. **B.** $e^2 - 1$. **C.** $k(e^2 - e)$. **D.** $e^2 - e$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_0^2 ke^x dx = ke^x\Big|_0^\pi = k(\mathrm{e}^2 - 1)$.

Câu 86. Với hằng số k, tích phân nào sau đây có giá trị khác với các tích phân còn lại ?

A. $\int_0^1 k(\mathrm{e}^2 - 1)dx$. **B.** $\int_0^2 ke^x dx$. **C.** $\int_0^{\frac{2}{3}} 3ke^{3x}dx$. **D.** $\int_0^{\frac{2}{3}} ke^{2x}dx$.

Hướng dẫn giải

Ta có ◆ $\int_0^{\frac{2}{3}} ke^{2x}dx = \frac{k}{2}e^{2x}\Big|_0^{\frac{2}{3}} = \frac{k}{2}(\mathrm{e}^{\frac{4}{3}} - 1)$ ◆ $\int_0^2 ke^x dx = ke^x\Big|_0^\pi = k(\mathrm{e}^2 - 1)$

◆ $\int_0^{\frac{2}{3}} 3ke^{3x}dx = ke^{3x}\Big|_0^{\frac{2}{3}} = k(\mathrm{e}^2 - 1)$ ◆ $\int_0^1 k(\mathrm{e}^2 - 1)dx = kx(\mathrm{e}^2 - 1)\Big|_0^1 = k(\mathrm{e}^2 - 1)$.

Câu 87. Với số thực k, xét các phát biểu sau:

(I) $\int_{-1}^1 dx = 2$; (II) $\int_{-1}^1 kdx = 2k$; (III) $\int_{-1}^1 xdx = 2x$; (IV) $\int_0^1 3kx^2dx = 2k$.

Số phát biểu đúng là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

(III): sai

Câu 88. Cho hàm số f và g liên tục trên đoạn $[1;5]$ sao cho $\int_1^5 f(x)dx = -7$ và $\int_1^5 g(x)dx = 5$ và $\int_1^5 \left[g(x) - kf(x)\right]dx = 19$ Giá trị của k là:

A. 2. **B.** 6. **C.** 2. **D.** -2.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_1^5 \left[g(x) - kf(x)\right]dx = 19 \Leftrightarrow \int_1^5 g(x)dx - k\int_1^5 f(x)dx = 19 \Leftrightarrow 5 - k(-7) = 19 \Leftrightarrow k = 2$.

Câu 89. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu $\int_1^5 2f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 f(x)dx = 7$ thì $\int_3^5 f(x)dx$ có giá trị bằng:

A. 5. **B.** -6. **C.** 9. **D.** -9.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $\int_3^5 f(x)dx = \int_3^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = -\int_1^3 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = -7 + \frac{2}{2} = -6$.

Câu 90. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 4$ và tích phân $\int_1^2 [kx - f(x)]dx = -1$ giá trị k bằng

A. 7. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 5. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_1^2 [kx - f(x)]dx = -1 \Leftrightarrow k\int_1^2 xdx - \int_1^2 f(x)dx = k\frac{3}{2} - 4 = -1 \Leftrightarrow k = 2$.

Câu 91. Tích phân $\int_1^e (2x-5)\ln x dx$ bằng

A. $-(x^2-5x)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e (x-5)dx$.

B. $(x^2-5x)\ln x\Big|_1^e + \int_1^e (x-5)dx$.

C. $(x^2-5x)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e (x-5)dx$.

D. $(x-5)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e (x^2-5x)dx$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (2x-5)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x^2 - 5x \end{cases}$. Vậy $\int_1^e (2x-5)\ln x dx = (x^2-5x)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e (x-5)dx$.

Câu 92. Tích phân $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos 2x dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{-5\pi}{8}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{3\pi}{8}$. **D.** $\frac{\pi}{8}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)\cos 2x dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2x + \cos 4x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Chuyển chế độ radian: SHIFT MODE 4.

Bấm máy $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos 2x dx - \frac{\pi}{8} = 0$. Vậy đáp án là $\frac{\pi}{8}$.

Câu 93. Tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx$ có giá trị bằng

A. 4. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 1.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}=\frac{4\sin^3 x(1-\cos x)}{\sin^2 x}=4\sin x-4\sin x\cos x=4\sin x-2\sin 2x$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\sin x-2\sin 2x)dx=2.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Chuyển chế độ radian: SHIFT MODE 4

Bấm máy tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx-2=0$. Vậy đáp án là 2.

Câu 94. Tích phân $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}dx$ có giá trị bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B**. $3\sqrt{2}$. **C**. $\sqrt{2}$. **D**. $-\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}dx=\int\limits_0^{2\pi}\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|dx=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\left|\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$$

$$=\sqrt{2}\left[\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx-\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx\right]=4\sqrt{2}$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bấm máy tính $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}dx-4\sqrt{2}$ được đáp số là 0. Vậy đáp án là $4\sqrt{2}$.

Câu 95. Tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\tan xdx$ có giá trị bằng

A $\ln 3-\frac{3}{5}$. **B**. $\ln 2-2$. **C**. $\ln 2-\frac{3}{4}$. **D**. $\ln 2-\frac{3}{8}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x.\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos x}dx$. Đặt $t=\cos x\Rightarrow I=-\int\limits_1^{\frac{1}{2}}\frac{1-u^2}{u}du=\ln 2-\frac{3}{8}$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bấm máy tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\tan xdx-\left(\ln 2-\frac{3}{8}\right)$ được đáp số là 0. Vậy đáp án là $\ln 2-\frac{3}{8}$.

Câu 96. Cho hàm số *f(x)* liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)+f(-x)=\cos^4 x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân

$I=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$ là

A. -2. **B**. $\frac{3\pi}{16}$. **C**. $\ln 2-\frac{3}{4}$. **D**. $\ln 3-\frac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Đặt $x=-t \Rightarrow \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-t)(-dt) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx$

$\Rightarrow 2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x)+f(-x)\right]dx = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 xdx \quad \Rightarrow I = \frac{3\pi}{16}$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bấm máy tính $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 xdx - \frac{3\pi}{16}$ được đáp số là 0. Vậy đáp án là $\frac{3\pi}{16}$.

Câu 97. Nếu $\int_{-2}^{0}\left(5-e^{-x}\right)dx = K-e^2$ thì giá trị của K là:

A. 11. **B.** 9. **C.** 7. **D.** $12,5$.

Hướng dẫn giải

$K = \int_{-2}^{0}\left(5-e^{-x}\right)dx + e^2 = \left(5x+e^{-x}\right)\Big|_{-2}^{0} + e^2 = 11$.

Câu 98. Cho tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+3\cos x}.\sin xdx$.Đặt $u=\sqrt{3\cos x+1}$ .Khi đó I bằng

A. $\frac{2}{3}\int_{1}^{3} u^2 du$. **B.** $\frac{2}{3}\int_{0}^{2} u^2 du$. **C.** $\frac{2}{9}u^3\Big|_{1}^{2}$. **D.** $\int_{1}^{3} u^2 du$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=\sqrt{3\cos x+1} \Rightarrow 2udu = -3\sin xdx$. Khi $x=0 \Rightarrow u=2;\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=1$.

Khi đó $I = \frac{2}{3}\int_{1}^{2} u^2 du = \frac{2}{9}u^3\Big|_{1}^{2}$.

Câu 99. Tích phân $I = \int_{1}^{e} \frac{\sqrt{8\ln x+1}}{x}dx$ bằng

A. -2. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\ln 2 - \frac{3}{4}$. **D.** $\ln 3 - \frac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Đặt $t=\sqrt{8\ln x+1} \Rightarrow tdt = \frac{4}{x}dx$. Với $x=1 \Rightarrow t=1,\ x=e \Rightarrow t=3$. Vậy $I=\frac{1}{4}\int_{1}^{3} t^2 dt = \frac{t^3}{12}\Big|_{1}^{3} = \frac{13}{6}$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bấm máy tính $I = \int_{1}^{e} \frac{\sqrt{8\ln x+1}}{x}dx$ được đáp số là $\frac{13}{6}$. Vậy đáp án là $\frac{13}{6}$.

Câu 100. Tích phân $\int_{-1}^{5} \left|x^2-2x-3\right| dx$ có giá trị bằng

A. 0. **B.** $\frac{64}{3}$. **C.** 7. **D.** $12,5$.

Hướng dẫn giải

$$\int_{-1}^{5}\left|x^2-2x-3\right|dx=\int_{-1}^{5}\left|(x-3)(x+1)\right|dx=-\int_{-1}^{3}\left(x^2-2x-3\right)dx+\int_{3}^{5}\left(x^2-2x-3\right)dx$$

$$=-\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Bigg|_{-1}^{3}+\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Bigg|_{3}^{5}=\frac{64}{3}.$$

Câu 101. Tìm a để $\int_{1}^{2}(3-ax)dx=-3$?

A. 2. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

$$\int_{1}^{2}(3-ax)dx=-3\Leftrightarrow\left[3x-\frac{a}{2}x^2\right]\Bigg|_{1}^{2}=-3\Leftrightarrow a=4.$$

Câu 102. Nếu $\int_{2}^{5}k^2\left(5-x^3\right)dx=-549$ thì giá trị của k là:

A. ±2 **B.** 2. **C.** -2 . **D.** 5.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$\int_{2}^{5}k^2\left(5-x^3\right)dx=-549\Leftrightarrow k^2\left(5x-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{2}^{5}=-549\Leftrightarrow k^2=\frac{-549}{\frac{-549}{4}}=4\Leftrightarrow k=\pm2.$$

Câu 103. Tích phân $\int_{2}^{3}\frac{x^2-x+4}{x+1}dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}+6\ln\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}+6\ln\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}-\ln\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}+\ln\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$\int_{2}^{3}\frac{x^2-x+4}{x+1}dx=\int_{2}^{3}\left(x-2+\frac{6}{x+1}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-2x+6\ln|x+1|\right)\Bigg|_{2}^{3}=\frac{1}{2}+6\ln\frac{4}{3}.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Bấm máy tính để tính $\int_{2}^{3}\frac{x^2-x+4}{x+1}dx$

Bước 2: Bấm SHIFT STO A để lưu vào biến **A.**

Bước 3: Bấm $A-\left(\frac{1}{2}+6\ln\frac{4}{3}\right)=0$. Vậy đáp án là $\frac{1}{2}+6\ln\frac{4}{3}$.

Câu 104. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos2x}$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$ là

A. 2. **B.** -7. **C.** 7. **D.** -2.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$ (1)

Tính $I_1=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx$. Đặt $x=-t \Rightarrow dx=-dt \Rightarrow I_1=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)dt=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx$.

Thay vào (1), ta được $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(-x)+f(x)\right]dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\left(1+\cos 2x\right)}=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos x\right|dx=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=2$.

Câu 105. Tìm m để $\int\limits_{m}^{2}(3-2x)^4dx=\frac{122}{5}$?

A. 0. **B.** 9. **C.** 7. **D.**2.

Hướng dẫn giải

$A=\int\limits_{m}^{2}(3-2x)^4dx=-\frac{1}{10}(3-2x)^5\Big|_m^2=-\frac{1}{10}\left[(3-4)^5-(3-2m)^5\right]=\frac{122}{5}\Rightarrow m=0$.

4.3 TÍCH PHÂN

I. VẬN DỤNG THẤP

Câu 106. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ là

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\cos tdt$. Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=0,\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

Vậy $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}dt=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{\left|\cos t\right|}dt=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}dt=t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{6}$.

Câu 107. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$ là

A $I=\frac{\pi}{2}$. **B.** $I=\frac{3\pi}{4}$. **C.** $I=\frac{\pi}{4}$. **D.** $I=\frac{5\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\tan t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=(\tan^2 x+1)dt$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0,\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$, suy ra $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 t+1}{1+\tan^2 t}dt=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{4}$.

Câu 108. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{0}^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ là

A. $I=\frac{5\pi}{12}$. **B.** $I=\frac{\pi}{6}$. **C.** $I=\frac{3\pi}{12}$. **D.** $I=\frac{\pi}{12}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int\limits_{0}^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int\limits_{0}^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{1+(x+1)^2}$. Đặt $x+1=\tan t$

Câu 109. Tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}x^2\sqrt{x^3+5}dx$ có giá trị là

A. $\frac{4}{3}\sqrt{6}-\frac{10}{9}\sqrt{3}$. **B.** $\frac{4}{3}\sqrt{7}-\frac{10}{9}\sqrt{5}$. **C.** $\frac{4}{3}\sqrt{6}-\frac{10}{9}\sqrt{5}$. **D.** $\frac{2}{3}\sqrt{6}-\frac{10}{9}\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $t=x^3+5 \Rightarrow dt=3x^2dx$. Khi $x=0$ thì $t=5$; khi $x=1$ thì $t=6$.

Vậy $I=\int\limits_0^1 x^2\sqrt{x^3+5}dx=\int\limits_5^6\sqrt{t}\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int\limits_5^6(t)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{3}\frac{(t)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_5^6=\frac{2}{9}t\sqrt{t}\Bigg|_5^6=\frac{4}{3}\sqrt{6}-\frac{10}{9}\sqrt{5}$.

Câu 110. Tích phân $\int\limits_0^2\sqrt{4-x^2}dx$ có giá trị là

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** π.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=2\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Khi x = 0 thì t = 0. Khi $x=2$ thì $t=\frac{\pi}{2}$.

Từ $x=2\sin t \Rightarrow dx=2\cos tdt$

Vậy $\int\limits_0^2\sqrt{4-x^2}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos tdt=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\pi$.

Câu 111. Tích phân $I=\int\limits_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$ có giá trị là

A. $\frac{3\sqrt{2}-1}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}-1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow x^2=t^2-1\Rightarrow dx=\frac{tdt}{x}$.

Vậy $I=\int\limits_1^{\sqrt{2}}t^2dt=\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

Câu 112. Tích phân $I=\int\limits_{-1}^0 x\sqrt[3]{x+1}dx$ có giá trị là

A. $-\frac{9}{28}$. **B.** $-\frac{3}{28}$. **C.** $\frac{3}{28}$. **D.** $\frac{9}{28}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt[3]{x+1}\Rightarrow t^3=x+1\Rightarrow dx=3t^2dt$.

Vậy $I=\int\limits_0^1 3t^3\left(t^3-1\right)dt=3\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{9}{28}$.

Câu 113. Giá trị của tích phân $I=2\int\limits_0^1\frac{x^2dx}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ là

A. $\frac{16-10\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{16-11\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{16-10\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{16-11\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2tdt=dx$.

Ta có $I=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{\left(t^2-1\right)^2}{t^3}.2tdt=2\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2dt=2\left(\frac{t^3}{3}-2t-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{16-11\sqrt{2}}{3}$

Câu 114. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^1 x^5\left(1-x^3\right)^6dx$ là

A. $\frac{1}{167}$. **B.** $\frac{1}{168}$. **C.** $\frac{1}{166}$. **D.** $\frac{1}{165}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=1-x^3\Rightarrow dt=-3x^2dx\Rightarrow dx=\frac{-dt}{3x^2}$, ta có

$$I=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 t^6(1-t)dt=\frac{1}{3}\int\limits_0^1\left(t^6-t^7\right)dt=\frac{1}{3}\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^8}{8}\right)=\frac{1}{168}.$$

Câu 115. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^3\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x+1}}dx$ là

A. $\frac{53}{5}$. **B.** $\frac{54}{5}$. **C.** $\frac{52}{5}$. **D.** $\frac{51}{5}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\sqrt{x+1}=t\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow dx=2tdt$. Khi x = 0 ⇒ t = 1, x = 3 ⇒ t = 2.

Vậy $I=\int\limits_1^2\frac{2\left(t^2-1\right)^2+\left(t^2-1\right)-1}{t}2tdt=2\int\limits_1^2\left(2t^4-3t^2\right)dt=\left(\frac{4t^5}{5}-2t^3\right)\Bigg|_1^2=\frac{128}{5}-\frac{4}{5}-16+2=\frac{54}{5}$.

Câu 116. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^1\sqrt{\frac{3-x}{1+x}}dx$ là

A. $\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}+2$. **B.** $\frac{\pi}{3}-\sqrt{2}+2$. **C.** $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+2$. **D.** $\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}+2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{\frac{3-x}{1+x}}\Rightarrow I=8\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{t^2dt}{(t^2+1)^2}$; đặt $t=\tan u$.... ĐS: $I=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+2$.

<u>Chú ý:</u> Phân tích $I=\int\limits_0^1\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{1+x}}dx$, rồi đặt $t=\sqrt{1+x}$ sẽ tính nhanh hơn.

Câu 117. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1(2x+1)^5dx$ là

A. $30\frac{1}{3}$. **B.** $60\frac{1}{3}$. **C.** $60\frac{2}{3}$. **D.** $30\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=2x+1$ khi $x=0$ thì $u=1$. Khi $x=1$ thì $u=3$

Ta có: $du=2dx\Rightarrow dx=\frac{du}{2}$.

Do đó: $\int\limits_0^1(2x+1)^5dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^3u^5du=\frac{u^6}{12}\Bigg|_1^3=\frac{1}{12}(3^6-1)=60\frac{2}{3}$.

Câu 118. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1\frac{4x+2}{x^2+x+1}dx$ là

A. $\ln 2$. **B.** $\ln 3$. **C.** $2\ln 2$. **D.** $2\ln 3$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u = x^2 + x + 1$. Khi $x = 0$ thì $u = 1$. Khi $x = 1$ thì $u = 3$.

Ta có: $du = (2x+1)dx$.

Do đó: $\int_0^1 \frac{4x+2}{x^2+x+1}dx = \int_1^3 \frac{2du}{u} = 2\ln|u|\Big|_1^3 = 2(\ln 3 - \ln 1) = 2\ln 3$.

Câu 119. Giá trị của tích phân $\int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^2}$ là

A $\frac{1}{2}$. **B**. $\frac{1}{3}$. **C**. $\frac{1}{4}$. **D**. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u = 2x - 1$. Khi $x = 1$ thì $u = 1$. Khi $x = 2$ thì $u = 3$.

Ta có $du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$.

Do đó $\int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2u}\Big|_1^3 = -\frac{1}{2}(\frac{1}{3} - 1) = \frac{1}{3}$.

Câu 120. Giá trị của tích phân $\int_0^3 \frac{x-3}{3.\sqrt{x+1}+x+3}dx$ **là**

A. $3 + 3\ln\frac{3}{2}$. B. $3 + 6\ln\frac{3}{2}$. B. $-3 + 6\ln\frac{3}{2}$. D. $-3 + 3\ln\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow u^2 - 1 = x \Rightarrow 2udu = dx$; đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = 3 \Rightarrow u = 2 \end{cases}$

Ta có

$$\int_0^3 \frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}dx = \int_1^2 \frac{2u^3 - 8u}{u^2 + 3u + 2}du = \int_1^2 (2u - 6)du + 6\int_1^2 \frac{1}{u+1}du$$

$$= \left(u^2 - 6u\right)\Big|_1^2 + 6\ln|u+1|\Big|_1^2 = -3 + 6\ln\frac{3}{2}.$$

Câu 121. Giá trị của tích phân: $I = \int_0^4 \frac{x+1}{\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}dx$ là

A. $2\ln 2 - \frac{1}{2}$. **B**. $2\ln 2 - \frac{1}{3}$. **C**. $2\ln 2 - \frac{1}{4}$. **D**. $\ln 2 - \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = 1 + \sqrt{1+2x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{1+2x}} \Rightarrow dx = (t-1)dt$ và $x = \frac{t^2 - 2t}{2}$

Đổi cận:

x	0	4
t	2	4

Ta có

$$I = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{(t^2 - 2t + 2)(t-1)}{t^2}dt = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{t^3 - 3t^2 + 4t - 2}{t^2}dt = \frac{1}{2}\int_2^4 \left(t - 3 + \frac{4}{t} - \frac{2}{t^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2} - 3t + 4\ln|t| + \frac{2}{t}\right)\Bigg| = 2\ln 2 - \frac{1}{4}$$

Câu 122. Giá trị của tích phân: $I=\int_0^1 \frac{(7x-1)^{99}}{(2x+1)^{101}}dx$ là

A. $\frac{1}{900}\left[2^{100}-1\right]$. **B.** $\frac{1}{900}\left[2^{101}-1\right]$. **C.** $\frac{1}{900}\left[2^{99}-1\right]$. **D.** $\frac{1}{900}\left[2^{98}-1\right]$.

Hướng dẫn giải

$$I=\int_0^1\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{99}\frac{dx}{(2x+1)^2}=\frac{1}{9}\int_0^1\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{99}d\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{100}\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{100}\Bigg|_0^1=\frac{1}{900}[2^{100}-1]$$

Câu 123. Tích phân $I=\int_1^2\frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}}dx$ có giá trị là

A. $\frac{1}{2002.2^{1001}}$. **B.** $\frac{1}{2001.2^{1001}}$. **C.** $\frac{1}{2001.2^{1002}}$. **D.** $\frac{1}{2002.2^{1002}}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int_1^2\frac{x^{2004}}{x^3(1+x^2)^{1002}}.dx=\int_1^2\frac{1}{x^3\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{1002}}.dx$. Đặt $t=\frac{1}{x^2}+1\Rightarrow dt=-\frac{2}{x^3}dx$.

Câu 124. Giá trị của tích phân $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\cos(3x-\frac{2\pi}{3})dx$ là

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=3x-\frac{2\pi}{3}$. Khi $x=\frac{\pi}{3}$ thì $u=\frac{\pi}{3}$, khi $x=\frac{2\pi}{3}$ thì $u=\frac{4\pi}{3}$.

Ta có $du=3dx\Rightarrow dx=\frac{du}{3}$.

Do đó:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\cos(3x-\frac{2\pi}{3})dx=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\cos u du=\frac{1}{3}\sin u\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}=\frac{1}{3}\left(\sin\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 125. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos 2x dx$ là

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{\pi}{8}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\cos 2x dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2x+\cos 4x)dx$$

$$=\frac{1}{4}(x+\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{8}$$

Câu 126. Giá trị của tích phân: $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ là

A. $\dfrac{\pi^2}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi^2}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi^2}{8}$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{4}$.

Hướng dẫn giải

$$x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt\Rightarrow I=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-I$$

$$\Rightarrow 2I=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt=-\pi\int_0^{\pi}\frac{d(\cos t)}{1+\cos^2 t}=\pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow I=\frac{\pi^2}{4}$$

Câu 127. Giá trị tích phân $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4 x+1\right)\cos xdx$ là

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{6}{5}$.

Hướng dẫn giải

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4 x+1\right)\cos xdx=\left(\frac{1}{5}\sin^5 x+\sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{6}{5}$$

Câu 128. Giá trị tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx$ là

A. $\dfrac{3}{2}\ln 2$. **B.** $\dfrac{1}{2}\ln 3$. **C.** $\ln 2$. **D.** $\dfrac{1}{2}\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{1+\sin 2x}\Rightarrow t^2=1+\sin 2x\Rightarrow 2tdt=2\cos 2xdx$

$$\Rightarrow dx=\frac{tdt}{t\left(\cos x-\sin x\right)}\Rightarrow I=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{t}dt=\ln|t|\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\ln(\sqrt{2})=\frac{1}{2}\ln 2$$

Câu 129. Giá trị tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$ là

A. $\dfrac{2}{3}\ln 2$. **B.** $\dfrac{2}{3}\ln 4$. **C.** $\dfrac{1}{3}\ln 4$. **D.** $\dfrac{1}{3}\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=1+3\cos x\Rightarrow dt=-3\sin xdx\Rightarrow dx=\dfrac{-dt}{3\sin x}\Rightarrow I=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_1^4\frac{1}{t}dt=\frac{\ln|t|}{3}=\frac{1}{3}\ln 4$

Câu 130. Giá trị của tích phân $I=2\int_1^2\sqrt[6]{1-\cos^3 x}.\sin x.\cos^5 xdx$ là

A. $\dfrac{21}{91}$. **B.** $\dfrac{12}{91}$. **C.** $\dfrac{21}{19}$. **D.** $\dfrac{12}{19}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt[6]{1-\cos^3 x}\Leftrightarrow t^6=1-\cos^3 x\Rightarrow 6t^5dt=3\cos^2 x\sin xdx$

$$\Rightarrow dx=\frac{2t^5dt}{\cos^2 x\sin x}\Rightarrow I=2\int_0^1 t^6\left(1-t^6\right)dt=2\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^{13}}{13}\right)\Bigg|_0^1=\frac{12}{91}$$

Câu 131. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$ là

A. $\frac{1}{8}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{5}{8}$. D. $\frac{7}{8}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\tan x+1)^3\cos^2 x}dx$. Đặt $t=\tan x+1$

Câu 132. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{(\sin x+\cos x)^3}$ là

A $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Đặt: $x=\frac{\pi}{2}-u\Rightarrow dx=-du$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=0$.

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)du}{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right]^3}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{(\sin x+\cos x)^3}$

Vậy: $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\left.\frac{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

Câu 133. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\sin^2 xdx$ là

A. $I=\frac{\pi}{32}$. B. $I=\frac{\pi}{16}$. C. $I=\frac{\pi}{8}$. D. $I=\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\sin^2 xdx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^2 2xdx=\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)dx+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\sin^2 2xdx$

$=\left.\left(\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{\sin^3 2x}{24}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{32}$.

Câu 134. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 x+\cos^4 x)(\sin^6 x+\cos^6 x)dx$ là

A. $I=\frac{32}{128}\pi$. B. $I=\frac{33}{128}\pi$. C. $I=\frac{31}{128}\pi$. D. $I=\frac{30}{128}\pi$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $(\sin^4 x+\cos^4 x)(\sin^6 x+\cos^6 x)=\frac{33}{64}+\frac{7}{16}\cos 4x+\frac{3}{64}\cos 8x\Rightarrow I=\frac{33}{128}\pi$.

Câu 135. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\sqrt{\sin^6 x+\cos^6 x}}dx$ là

A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{5}{3}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}}dx$. Đặt $t=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x \Rightarrow \mathrm{I}=\int\limits_1^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt=\frac{4}{3}\sqrt{t}\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{2}{3}$.

Câu 136. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{\pi}\frac{xdx}{\sin x+1}$ là

A. $I=\frac{\pi}{4}$. **B.** $I=\frac{\pi}{2}$. **C.** $I=\frac{\pi}{3}$. **D.** $I=\pi$.

Hướng dẫn giải

Đặt: $x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt$ Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\pi,\ x=\pi\Rightarrow t=0$

$$\Rightarrow I=-\int\limits_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)dt}{\sin(\pi-t)+1}=\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{\sin t+1}-\frac{t}{\sin t+1}\right)dt=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{\sin t+1}-I\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{\sin t+1}$$

$$=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)^2}=\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{\cos^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{d\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi}=\pi.$$

Tổng quát: $\int\limits_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}f(\sin x)dx$.

Câu 137. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2007}x}{\sin^{2007}x+\cos^{2007}x}dx$ là

A. $I=\frac{\pi}{2}$. **B.** $I=\frac{\pi}{4}$. **C.** $I=\frac{3\pi}{4}$. **D.** $I=\frac{5\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{x}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$. Vậy

$$I=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^{2007}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^{2007}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos^{2007}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2007}t}{\sin^{2007}t+\cos^{2007}t}dx=J\ (1).$$

Mặt khác $I+J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $I=\frac{\pi}{4}$.

Tổng quát: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\frac{\pi}{4},n\in\mathbb{Z}^+$.

Câu 138. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{11}xdx$ là

A. $\frac{250}{693}$. **B.** $\frac{254}{693}$. **C.** $\frac{252}{693}$. **D.** $\frac{256}{693}$.

Hướng dẫn giải

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{11}xdx=\frac{10!!}{11!!}=\frac{2.4.6.8.10}{1.3.5.7.9.11}=\frac{256}{693}$.

Câu 139. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} xdx$ là

A. $\frac{67\pi}{512}$. B. $\frac{61\pi}{512}$. C. $\frac{63\pi}{512}$. D. $\frac{65\pi}{512}$.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} xdx = \frac{9!!}{10!!}.\frac{\pi}{2} = \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}.\frac{\pi}{2} = \frac{63\pi}{512}$$

Công thức Walliss (dùng cho trắc nghiệm):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, \text{ nếu n lẻ} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}.\frac{\pi}{2}, \text{nếu n chẵn} \end{cases}.$$

Trong đó: n!! đọc là **n walliss** và được định nghĩa dựa vào n lẻ hay chẵn.

Chẳng hạn:

$0!! = 1;\ 1!! = 1;\ 2!! = 2;\ 3!! = 1.3;\ 4!! = 2.4;\ 5!! = 1.3.5;$

$6!! = 2.4.6;\ 7!! = 1.3.5.7;\ 8!! = 2.4.6.8;\ 9!! = 1.3.5.7.9;\ 10!! = 2.4.6.8.10$.

Câu 140. Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$ là

A. $\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$. B. $\ln\left(\frac{e}{e+1}\right)$. C. $2\ln\left(\frac{e}{e+1}\right)$. D. $2\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$.

Hướng dẫn giải

Vì $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} \Rightarrow I = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{d\left(1+e^x\right)}{1+e^x} = 1 - \ln\left|1+e^x\right|\Big|_0^1 = 1 - \ln(1+e) + \ln 2 = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$

Câu 141. Giá trị của tích phân $I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ là

A. $\frac{5}{3}$. B. $\frac{10}{3}$. C. $\frac{20}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{e^x - 1} \Leftrightarrow t^2 = e^x - 1 \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{e^x} \Rightarrow I = 2\int_1^2 \left(t^2+1\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Big|_1^2 = \frac{20}{3}$

Câu 142. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$ là

A. $\frac{4-\pi}{3}$. B. $\frac{4-\pi}{2}$. C. $\frac{5-\pi}{3}$. D. $\frac{5-\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow t^2 = e^x - 1 \Rightarrow 2tdt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{e^x} = \frac{2tdt}{t^2+1}$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1}dt = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = \frac{4-\pi}{2}$$

Câu 143. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^3}dx$ là

A. $2\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}-1$. **C.** $\sqrt{2}-2$. **D.** $2\sqrt{2}-2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{e^x+1} \Leftrightarrow t^2=e^x+1 \Leftrightarrow 2tdt=e^x dx \Rightarrow dx=\dfrac{2tdt}{e^x} \Rightarrow I=2\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\dfrac{tdt}{t^3}=-2.\dfrac{1}{t}\Big|_{\sqrt{2}}^{2}=\sqrt{2}-1$

Câu 144. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{e}^{e^2}\dfrac{dx}{x\ln x}$ là

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 2$. **D.** $2\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\ln x$; $x=e \Rightarrow t=1,\ x=e^2 \Rightarrow t=2 \ \Rightarrow I=\int\limits_{1}^{2}\dfrac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_1^2=\ln 2$.

Câu 145. Giá trị của tích phân: $I=\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}\dfrac{e^{2x}dx}{e^x-1+\sqrt{e^x-2}}$ là

A. $2\ln 2-1$. **B.** $2\ln 3-1$. **C.** $\ln 3-1$. **D.** $\ln 2-1$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{e^x-2}$, Khi $x=\ ln2 \Rightarrow t\ =\ 0;\ x=\ ln3 \Rightarrow\ t=1; e^x\ =\ t^2+\ 2 \Rightarrow\ e^x dx\ =\ 2tdt$

$$\mathrm{I}=2\int\limits_0^1\frac{(t^2+2)tdt}{t^2+t+1}=2\int\limits_0^1(t-1+\frac{2t+1}{t^2+t+1})dt=2\int\limits_0^1(t-1)dt+2\int\limits_0^1\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}$$

$$=(t^2-2t)\Big|_0^1+2\ln(t^2+t+1)\Big|_0^1=2\ln 3-1.$$

Câu 146. Cho $M=\int\limits_0^{\ln 2}\dfrac{2e^{3x}+e^{2x}-1}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}dx$. Giá trị của e^M là

A. $\dfrac{7}{4}$. **B.** $\dfrac{9}{4}$. **C.** $\dfrac{11}{4}$. **D.** $\dfrac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

$$M=\int\limits_0^{\ln 2}\frac{2e^{3x}+e^{2x}-1}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}dx=\int\limits_0^{\ln 2}\frac{3e^{3x}+2e^{2x}-e^x-(e^{3x}+e^{2x}-e^x+1)}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}dx$$

$$=\int\limits_0^{\ln 2}\left(\frac{3e^{3x}+2e^{2x}-e^x}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}-1\right)dx=\ln\left(e^{3x}+e^{2x}-e^x+1\right)\Big|_0^{\ln 2}-x\Big|_0^{\ln 2}=\ln\frac{11}{4}\Rightarrow e^M=\frac{11}{4}$$

Câu 147. $I=\int\limits_1^e\dfrac{\ln x\sqrt[3]{2+\ln^2 x}}{x}dx$.

A $\dfrac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^5}-\sqrt[3]{2^5}\right]$. **B.** $\dfrac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^5}-\sqrt[3]{2^4}\right]$. **C.** $\dfrac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{2^5}\right]$. **D.** $\dfrac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{2^4}\right]$.

Hướng dẫn giải

$$I=\int\limits_1^e\frac{\ln x\sqrt[3]{2+\ln^2 x}}{x}dx=\int\limits_1^e\ln x\sqrt[3]{2+\ln^2 x}\,d\left(\ln x\right)=\frac{1}{2}\int\limits_1^e\left(2+\ln^2 x\right)^{\frac{1}{3}}d\left(2+\ln^2 x\right)$$

$$=\frac{3}{8}.\sqrt[3]{\left(2+\ln^2 x\right)^4}\Bigg|_1^e=\frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{2^4}\right]$$

Câu 148. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ là

A. $I=\dfrac{\pi}{8}\ln 3$. **B.** $I=\dfrac{\pi}{4}\ln 2$. **C.** $I=\dfrac{\pi}{8}\ln 3$. **D.** $I=\dfrac{\pi}{8}\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\tan t\Rightarrow dx=(1+\tan^2 t)dt$. Đổi biến: $x=0\Rightarrow t=0,\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan t)}{1+\tan^2 t}\left(1+\tan^2 t\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt.$$

Đặt $t=\frac{\pi}{4}-u\Rightarrow dt=-du$; Đổi cận: $t=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{4}$, $\mathrm{t}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=0$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right]du$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right)du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2du-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan u\right)du=\frac{\pi}{4}\ln 2-I.$$

Vậy $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

Câu 149. Cho hàm số *f(x)* liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(-x)+2f(x)=\cos x$. Giá trị của tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$ là

A. $I=\frac{1}{3}$. **B.** $I=\frac{4}{3}$. **C.** $I=\frac{2}{3}$. **D.** $I=1$.

Hướng dẫn giải

Xét tích phân $J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(-x)dx$. Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$.

Đổi cận: $x=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}$.

Suy ra: $J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(-x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}f(t)dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=I$.

Do đó: $3I=J+2I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(-x)+2f(x)\right]dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=2$.

Vậy $I=\frac{2}{3}$.

II. VẬN DỤNG CAO

Câu 150. Tìm hai số thực A,B sao cho $f(x)=A\sin\pi x+B$, biết rằng $f'(1)=2$ và $\int_0^2 f(x)dx=4$.

A. $\begin{cases}A=-2\\ B=-\frac{2}{\pi}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}A=2\\ B=-\frac{2}{\pi}\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}A=-2\\ B=\frac{2}{\pi}\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}A=-\frac{2}{\pi}\\ B=2\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

$f(x)=A\sin\pi x+B\Rightarrow f'(x)=A\cos\pi x$

$f'(1)=2\Rightarrow A\pi\cos\pi=2\Rightarrow A=-\dfrac{2}{\pi}$

$\int\limits_0^2 f(x)dx=4\Rightarrow\int\limits_0^2(A\sin\pi x+B)dx=4\Rightarrow-\dfrac{A}{\pi}\cos 2\pi+2B+\dfrac{A}{\pi}\cos 0=4\Rightarrow B=2$

Câu 151. Giá trị của a để đẳng thức $\int\limits_1^2\left[a^2+(4-4a)x+4x^3\right]dx=\int\limits_2^4 2xdx$ là đẳng thức đúng

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

$12=\int\limits_1^2\left[a^2+(4-4a)x+4x^3\right]dx=\left[a^2x+(2-2a)x^2+x^4\right]\Big|_1^2\Rightarrow a=3.$

Câu 152. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^a\dfrac{dx}{x^2+a^2}\ (a>0)$ là

A. $\dfrac{\pi}{4a}$. **B.** $\dfrac{\pi^2}{4a}$. **C.** $-\dfrac{\pi^2}{4a}$. **D.** $-\dfrac{\pi}{4a}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=a\tan t;\ t\in\left(\dfrac{\pi}{2};-\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=a(1+\tan^2 t)dt$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=a\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$.

Vậy $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{a(1+\tan^2 t)}{a^2\tan^2 t+a^2}dt=\dfrac{1}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\dfrac{\pi}{4a}$.

Câu 153. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx$ là

A. $\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{4\pi}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{-\pi}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$. Đổi cận : $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

Vậy $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx=\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\dfrac{dt}{\sqrt{3-2t^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\dfrac{dt}{\sqrt{\dfrac{3}{2}-t^2}}$.

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cos u\ \Rightarrow\ dt=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\sin udu$. Đổi cận : $\begin{cases}t=0\rightarrow u=\dfrac{\pi}{2}\\ t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow u=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$, suy ra

$I=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\dfrac{dt}{\sqrt{\dfrac{3}{2}-t^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin udu}{\sqrt{\dfrac{3}{2}\left(1-\cos^2 u\right)}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}du=\dfrac{1}{\sqrt{2}}u\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$

Câu 154. Cho $I=\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}$. Tích phân nào sau đây có giá trị bằng với giá trị của tích phân đã cho.

A. $-\int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$. **B.** $\int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$. **C.** $\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$. **D.** $-\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=\frac{1}{t}\Rightarrow t=\frac{1}{u}\Rightarrow dt=-\frac{1}{u^2}du$. Đổi cận $t=x\Rightarrow u=\frac{1}{x};t=1\Rightarrow u=1$

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}=\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{-\frac{1}{u^2}du}{1+\frac{1}{u^2}}=\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{-du}{u^2+1}=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{u^2+1}\Rightarrow \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$$

Câu 155. Giá trị của tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}\ln(\sin x)dx$ là

A $-\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$. **B.** $\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

C. $-\sqrt{3}\ln 2-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **D.** $-\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} u=\ln(\sin x)\Rightarrow du=\cot^2 x dx \\ dv=\frac{1}{\sin^2 x}dx\Rightarrow v=-\cot x \end{cases}$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}\ln(\sin x)dx=-\cot x\ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 x dx$$

$$=\left(\sqrt{3}\ln\frac{1}{2}-\cot x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=-\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

Câu 156. Giá trị của tích phân $I=\int_0^2 \min\left\{1,x^2\right\}dx$ là

A. 4. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $-\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Xét hiệu số $1-x^2$ trên đoạn $[0;2]$ để tìm $\min\left\{1,x^2\right\}$.

Vậy $I=\int_0^2 \min\left\{1,x^2\right\}dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2+x\Big|_1^2=\frac{4}{3}$.

Câu 157. Giá trị của tích phân $I=\int_{-8}^{-3} \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}dx$ là

A. $\ln\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $-\ln 2$. **D.** $2\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{1-x}\Rightarrow x=1-t^2\Rightarrow dx=-2tdt$. Đổi cận $\begin{cases}x=-8\Rightarrow t=3\\x=-3\Rightarrow t=2\end{cases}$.

Vậy $I=\int_{-8}^{-3}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}dx=\int_3^2\frac{-2tdt}{\left(1-t^2\right)t}=2\int_2^3\frac{tdt}{\left(1-t^2\right)t}=2\int_2^3\frac{dt}{1-t^2}=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Big|_2^3=\ln\frac{2}{3}$.

Câu 158. Biết $I=\int_1^a\frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx=\frac{1}{2}+\ln 2$. Giá trị của a là

A. 2. **B.** $\ln 2$. **C.** π. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

$I=\int_1^a\frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx=\frac{1}{2}+\ln 2=\int_1^a xdx-2\int_1^a\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{1}{2}+\ln 2$

$=\left(\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-2\left(\frac{1}{a}\ln a+\frac{1}{a}-1\right)=\frac{1}{2}+\ln 2\Rightarrow a=2$

HD casio: Nhập $\int_1^2\frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx-\frac{1}{2}-\ln 2=0$ nên $a=2$.

Câu 159. Cho $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{3\sin x+1}dx$, $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{(\sin x+2)^2}dx$. Khẳng định nào sau đây là **sai** ?

A. $I_1=\frac{14}{9}$. **B.** $I_1>I_2$. **B.** $I_2=2\ln\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$. **D.** $I_2=2\ln\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{3\sin x+1}dx=\int_1^4\frac{\sqrt{t}}{3}dt=\frac{14}{9}$

$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{(\sin x+2)^2}dx=2\int_2^3\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=2\ln\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$

Câu 160. Tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn $\int_0^m\left(2x+5\right)dx=6$ là

A. $m=1,m=-6$. **B.** $m=-1,m=-6$. **C.** $m=-1,m=6$. **D.** $m=1,m=6$.

Hướng dẫn giải

$\int_0^m\left(2x+5\right)dx=6\Rightarrow(x^2+5x)\Big|_0^m=6\Rightarrow m^2+5m-6=0\Rightarrow m=1,\ m=-6.$

Hướng dẫn casio: Thay $m=1$ và $m=-6$ vào thấy thỏa mãn.

Câu 161. Cho hàm số $h(x)=\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}$. Tìm để $h(x)=\frac{a\cos x}{(2+\sin x)^2}+\frac{b\cos x}{2+\sin x}$ và tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(x)dx$

A. $a=-4,\ b=2;\ I=\frac{2}{3}+2\ln\frac{3}{2}$. **B.** $a=4,\ b=-2;\ I=-\frac{2}{3}-2\ln\frac{3}{2}$.

C. $a=2,\ b=4;\ I=-\frac{1}{3}+4\ln\frac{3}{2}$. **D.** $a=-2,\ b=4;\ I=\frac{1}{3}+4\ln\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Sử dụng đồng nhất thức, ta thấy

$$h(x)=\frac{a\cos x}{(2+\sin x)^2}+\frac{b\cos x}{2+\sin x}=\frac{a\cos x+b\cos x(2+\sin x)}{(2+\sin x)^2}=\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{b}{2}=1\\ a+2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\ b=2\end{cases}.$$

Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-4\cos x}{(2+\sin x)^2}+\frac{2\cos x}{2+\sin x}\right)dx=\left(-\frac{4}{2+\sin x}+2\ln|2+\sin x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=-\frac{4}{3}+2\ln 3+2-2\ln 2=\frac{2}{3}+2\ln\frac{3}{2}.$

Câu 162. Giá trị trung bình của hàm số $y=f(x)$ trên $[a;b]$, kí hiệu là $m(f)$ được tính theo công thức $m(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Giá trị trung bình của hàm số $f(x)=\sin x$ trên $[0;\pi]$ là

A. $\frac{4}{\pi}$. **B.** $\frac{3}{\pi}$. **C.** $\frac{1}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

Hướng dẫn giải

$m(f)=\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{2}{\pi}.$

Câu 163. Cho ba tích phân $I=\int_0^1\frac{dx}{3x+1}$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)dx$ và $K=\int_{-1}^2\left(x^2+3x+1\right)dx$. Tích phân nào có giá trị bằng $\frac{21}{2}$?

A. *K*. **B.** *I*. **C.** *J*. **D.** *J* và *K*.

Hướng dẫn giải

$I=\int_0^1\frac{dx}{3x+1}=\frac{1}{3}\ln|3x+1|\Big|_0^1=\frac{1}{4}\ln 4$

$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\frac{1}{2}$

$K=\int_{-1}^2\left(x^2+3x+1\right)dx=\frac{21}{2}.$

Câu 164. Với $0<a<1$, giá trị của tích phân sau $\int_0^a\frac{dx}{x^2-3x+2}dx$ là:

A. $\ln\left|\frac{a-2}{2a-1}\right|$. **B.** $\ln\left|\frac{a-2}{a-1}\right|$. **C.** $\ln\left|\frac{a-2}{2(a-1)}\right|$. **D.** $\ln\left|\frac{a-2}{2a+1}\right|$.

Hướng dẫn giải

$\int_0^a\frac{dx}{x^2-3x+2}=\int_0^a\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_0^a=\ln\left|\frac{a-2}{a-1}\right|$

Câu 165. Cho $2\sqrt{3}m-\int_0^1\frac{4x^3}{(x^4+2)^2}dx=0$. Khi đó giá trị của $144m^2-1$ bằng

A. $\frac{-2}{3}$. **B.** $4\sqrt{3}-1$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$2\sqrt{3}.m-\int_0^1\frac{d(x^4+2)}{(x^4+2)^2}=0\Leftrightarrow 2\sqrt{3}.m+\frac{1}{(x^4+2)}\Big|_0^1=0\Leftrightarrow 2\sqrt{3}m+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{12\sqrt{3}}.$$

Vậy $144m^2-1=144\left(\frac{1}{12\sqrt{3}}\right)^2-1=\frac{-2}{3}$.

Câu 166. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm liên tục trên $(a;b)$, đồng thời thỏa mãn $f(a)=f(b)$. Lựa chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\int_a^b f'(x).e^{f(x)}dx=2$. **B.** $\int_a^b f'(x).e^{f(x)}dx=1$.

C. $\int_a^b f'(x).e^{f(x)}dx=-1$. **D.** $\int_a^b f'(x).e^{f(x)}dx=0$.

Hướng dẫn giải

$$\int_a^b e^{f(x)}f'(x)dx=\int_a^b e^{f(x)}d(f(x))=e^{f(x)}\Big|_a^b=e^{f(b)}-e^{f(a)}=0.$$

Câu 167. Kết quả phép tính tích phân $I=\int_1^5\frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ có dạng $I=a\ln 3+b\ln 5\ (a,b\in\mathbb{Z})$. Khi đó $a^2+ab+3b^2$ có giá trị là

A. 1. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Ta có $I=\int_1^5\frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}=2\int_2^4\frac{1}{t^2-1}dt=\int_2^4\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\ln 3-\ln 5$,

suy ra $a=2,b=-1$. Vậy $a^2+ab+3b^2=4-2+3=5$.

Câu 168. Với $n\in\mathbb{N},n\ge 1$, tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^n\sin xdx$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{2n}$. **B.** $\frac{1}{n-1}$. **C.** $\frac{1}{n+1}$. **D.** $\frac{1}{n}$.

Hướng dẫn giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^n\sin xdx=\int_0^1 t^n dt=\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}.$$

Câu 169. Với $n\in\mathbb{N},n>1$, giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[n]{\sin x}}{\sqrt[n]{\cos x}+\sqrt[n]{\sin x}}dx$ là

A. $-\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{3\pi}{4}$. **D.** $-\frac{3\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow dx=-dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\sin x}}{\sqrt[n]{\cos x}+\sqrt[n]{\sin x}}dx = 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

Câu 170. Giá trị của tích phân $\int_0^{2017\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx$ là

A. $3034\sqrt{2}$. **B.** $-4043\sqrt{2}$. **C.** $3043\sqrt{2}$. **D.** $4034\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Do hàm số $f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}$ là hàm liên tục và tuần hoàn với chu kì $T=\pi$ nên ta có

$$\int_0^{T} f(x)dx = \int_T^{2T} f(x)dx = \int_{2T}^{3T} f(x)dx = ... = \int_{(n-1)T}^{nT} f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{nT} f(x)dx = \int_0^{T} f(x)dx + \int_T^{2T} f(x)dx + ... + \int_{(n-1)T}^{nT} f(x)dx = n\int_0^{T} f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{2017\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx = 2017\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx = 2017\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x dx = 4034\sqrt{2}$$

Câu 171. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{(1+\sin x)^{1+\cos x}}{1+\cos x}\right)dx$ là

A. $2\ln 3-1$. **B.** $-2\ln 2-1$. **C.** $2\ln 2-1$. **D.** $-2\ln 3-1$.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\ln(1+\sin x)^{1+\cos x} - \ln(1+\cos x)\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)\ln(1+\sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\cos x)dx$$

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t \Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}; x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=0$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\cos x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin x)dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)\ln(1+\sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ln(1+\sin x)dx = 2\ln 2-1$$

Câu 172. Có mấy giá trị của b thỏa mãn $\int_0^{b} (3x^2-12x+11)dx = 6$

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^{b} (3x^2-12x+11)dx = \left(x^3-6x^2+11x\right)\Big|_0^b = b^3-6b^2+11b-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=2 \\ b=3 \end{array}\right..$$

Câu 173. Biết rằng $\int_0^{b} 6dx = 6$ và $\int_0^{a} xe^x dx = a$. Khi đó biểu thức $b^2+a^3+3a^2+2a$ có giá trị bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

+Ta có $\int_0^b 6dx = 6 \Rightarrow b = 1$.

+Tính $\int_0^a xe^x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$. Khi đó, $\int_0^a xe^x dx = xe^x \Big|_0^a - \int_0^a e^x dx = e^a - e^a + 1 = a \Rightarrow a = 1$.

Vậy $b^2 + a^3 + 3a^2 + 2a = 7$.

Câu 174. Biết rằng $\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = A$, $\int_0^{b\pi} 2dx = B$ (với $a, b > 0$). Khi đó giá trị của biểu thức $4aA + \frac{B}{2b}$ bằng

A. 2π . **B.** π . **C.** 3π . **D.** 4π .

Hướng dẫn giải

+Tính $\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2}$

Đặt $t = a\tan x;\ a \in \left(\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = a(1 + \tan^2 t)dt$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 0;\ x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$. Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a(1 + \tan^2 t)}{a^2 \tan^2 t + a^2} dt = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4a}$

+Tính: $\int_0^{b\pi} 2dx = 2b\pi$, suy ra $\frac{B}{2b} = \pi$.