

CHỦ ĐỀ 3: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

1. Định nghĩa

Cho hàm số xác định trên D

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x) \leq M; \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}, \text{ ta kí hiệu } M = \max_{x \in D} f(x)$$

Chú ý: Nếu $f(x) \leq M; \forall x \in D$ thì ta chưa thể suy ra $M = \max_{x \in D} f(x)$

- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x) \geq M; \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}, \text{ ta kí hiệu } M = \min_{x \in D} f(x)$$

Chú ý: Nếu $f(x) \geq M; \forall x \in D$ thì ta chưa thể suy ra $M = \min_{x \in D} f(x)$

2. Các phương pháp tìm GTLN, GTNN của hàm số

Phương pháp chung:

Để tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên D , ta tính y' , tìm các điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu hoặc không tồn tại và lập bảng biến thiên. Từ bảng biến thiên ta suy ra GTLN, GTNN của hàm số.

❖ **Chú ý:**

- Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn tăng hoặc giảm trên $[a; b]$.

Thì ta có $\max_{[a; b]} f(x) = \{f(a); f(b)\}$ và $\min_{[a; b]} f(x) = \{f(a); f(b)\}$

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì luôn có GTLN, GTNN trên đoạn đó và để tìm GTLN, GTNN ta làm như sau:

- Tính y' và tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ mà tại đó y' triệt tiêu hoặc không tồn tại.
- Tính các giá trị $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n)$. Khi đó

$$+) \max_{[a; b]} f(x) = \{f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(a); f(b)\}$$

$$+) \min_{[a; b]} f(x) = \{f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(a); f(b)\}$$

- Nếu hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn trên chu kỳ T để tìm GTLN, GTNN của nó trên D ta chỉ cần tìm GTLN, GTNN trên một đoạn thuộc D có độ dài bằng T .
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D . Khi đặt ẩn phụ $t = u(x)$, ta tìm được $t \in E$ với $\forall x \in D$, ta có $y = g(t)$ thì Max, Min của hàm f trên D chính là Max, Min của hàm g trên E .
- Khi bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất mà không nói trên tập nào thì ta hiểu là tìm GTLN, GTNN trên tập xác định của hàm số.
- Ngoài phương pháp khảo sát để tìm Max, Min ta có thể dùng phương pháp miền giá trị hoặc bất đẳng thức để tìm Max, Min

❖ **Ta cần phân biệt hai khái niệm cơ bản**

- Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D với cực đại của hàm số.
- Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D với cực tiểu của hàm số.

3. Tìm tập giá trị của hàm số

Phương pháp chung:

Việc tìm tập giá trị của hàm số chính là việc đi tìm giá trị nhỏ nhất, kí hiệu là m và giá trị lớn nhất, kí hiệu là M . Khi đó, tập giá trị của hàm số là $T = [m; M]$.

4. Phương pháp tìm GTLN, GTNN của hàm số hai biến (bài toán cực trị)

🌈 Các bài toán hai biến (yêu cầu: tìm GTLN, GTNN hoặc tìm tập giá trị).

- Sử dụng phương pháp thế $y = h(x)$ từ giả thiết vào biểu thức P cần tìm cực trị, khi đó $P = f(x)$ với $x \in [a; b] \rightarrow$ đưa về tìm GTLN, GTNN của bài toán một biến.
- Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản (có thể dùng để giải quyết các bài toán một biến)
- Bất đẳng thức AM – GM cho hai số thực không âm

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

- Bất đẳng thức Bunhiacopxki cho các số thực a, b, c, d

$$(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2). \text{ Dấu "}" xảy ra khi } \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

🚩 Một số bổ đề cơ bản dùng trong các bài toán hai biến

- $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \leq \frac{(x^2+y^2)}{2}$ và $x^2+xy+y^2 \geq \frac{3}{4}(x+y)^2$
- $x^3+y^3 \geq \frac{(x+y)(x^2+y^2)}{2} \geq \frac{(x+y)^3}{4} \geq xy(x+y)$
- Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân số $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

DẠNG 1: TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT – GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

Ví dụ 1: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[0;2]$ là

- A. 0. B. 3. C. 5. D. 7.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 5$ trên $[0;2]$, có $f'(x) = 3x^2 - 3$

$$\text{Phương trình } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 3x^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Tính $f(0) = 5; f(1) = 3; f(2) = 7$. Vậy $\min_{[0;2]} f(x) = f(1) = 3$.

Ví dụ 2: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ trên đoạn $[0;2]$ là

- A. 64. B. 1. C. 0. D. 9.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ trên $[0;2]$, có $f'(x) = 4x^3 - 4x$

$$\text{Phương trình } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 4x^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Tính $f(0) = 1; f(1) = 0; f(2) = 9$. Vậy $\max_{[0;2]} f(x) = f(2) = 9$.

Ví dụ 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$ là

- A. 7. B. 6. C. $\frac{19}{3}$ D. $\frac{13}{3}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Cần nhớ công thức đạo hàm:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Cách 1: Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ trên $[2;4]$, có $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Tính $f(2) = 7; f(3) = 6; f(4) = \frac{19}{3}$. Vậy $\min_{[2;4]} f(x) = f(3) = 6$.

Cách 2: Sử dụng công cụ **TABLE (MODE 7)**

Bước 1: Bấm tổ hợp phím MODE 7

Bước 2: Nhập $f(X) = \frac{X^2+3}{X-1}$

Sau đó ấn phím = (nếu có $g(X)$ thì ấn tiếp phím =) sau đó nhập $\begin{cases} Star = 2 \\ End = 4 \\ Step = 0.2 \end{cases}$

(**Chú ý:** Thường ta chọn $Step = \frac{End - Start}{10}$)

Bước 3: Tra bảng nhận được và tìm GTNN:

X	F(X)
1	7
2	6.5333
3	6.2571
4	6.1
5	6.0222
6	6.0181
7	6.0666
8	6.1384
9	6.2285
10	6.3333

X	F(X)
1	7
2	6.5333
3	6.2571
4	6.1
5	6.0222
6	6.0181
7	6.0666
8	6.1384
9	6.2285
10	6.3333

Dựa vào bảng giá trị ở trên, ta thấy $\min_{[2;4]} f(x) = f(3) = 6$.

Ví dụ 4: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

Giá trị của $3M + m$ bằng

A. 0.

B. -4.

C. -2.

D. 1.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{x-3}$ trên $[0;2]$ có $f'(x) = -\frac{8}{(x-3)^2} < 0$

$$\text{Suy ra } f(x) \text{ là hàm số nghịch biến trên } (0;2) \Rightarrow \begin{cases} \min_{[0;2]} f(x) = f(2) = -5 \\ \max_{[0;2]} f(x) = f(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } M = \frac{1}{3} \Rightarrow 3M = 3; m = -5 \rightarrow 3M + m = -2$$

Ví dụ 5: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{3x - 2x - x^2}$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Cần nhớ công thức đạo hàm:

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Điều kiện xác định: $3 - 2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ trên $[-3;1]$, có $f'(x) = \frac{-2 - 2x}{2\sqrt{3 - 2x - x^2}} = -\frac{x+1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$;

$$\text{Phương trình } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 1 \\ x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

Tính $f(-3) = 0; f(-1) = 2; f(1) = 0$. Vậy $\max_{[-3;1]} f(x) = f(-1) = 2$.

Ví dụ 6: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\sqrt{1-x^2}$. Giá trị của $M - 2m$ bằng

- A. 0. B. $-\frac{1}{2}$. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Điều kiện xác định: $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Xét hàm số $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ trên $[-1;1]$, có $f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\text{Phương trình } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 1-2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$$\text{Tính } f(-1) = f(1) = 0; f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}; f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m = \min_{[-1;1]} f(x) = -\frac{1}{2} \\ M = \max_{[-1;1]} f(x) = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow M - 2m = \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

Ví dụ 7: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$. Giá trị của $M - 2m^2$ bằng

A. -2.

B. 2.

C. 0.

D. -1.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \text{ trên } [-1;1], \text{ có } f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}};$$

$$\text{Phương trình } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0. \text{ Tính } f(-1) = f(1) = \sqrt{2}; f(0) = 2$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m = \min_{[-1;1]} f(x) = \sqrt{2} \\ M = \max_{[-1;1]} f(x) = 2 \end{cases} \rightarrow M - 2m^2 = 2 - 2 \cdot 2 = -2$$

Ví dụ 8: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} - 2\sqrt{-x^2+4x-3}$ là

A. 0.

B. $-\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}, \text{ ta có } t' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}; t' = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Tính } t(1) = t(3) = \sqrt{2}; t(2) = 2 \longrightarrow \sqrt{2} \leq t \leq 2$$

$$\text{Khi đó } t^2 = 2 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} = 2 + 2\sqrt{-x^2+4x-3} \Leftrightarrow 2\sqrt{-x^2+4x-3} = t^2 - 2$$

$$\text{Do đó } y = f(t) = t - (t^2 - 2) = -t^2 + t + 2$$

$$\text{Xét } f(t) = -t^2 + t + 2 \text{ trên } [\sqrt{2}; 2] \longrightarrow \max_{[\sqrt{2}; 2]} f(t) = \sqrt{2}. \text{ Vậy } \max_{[1;3]} y = \sqrt{2}$$

Ví dụ 9: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos^3 x - \frac{9}{2}\cos^2 x + 3\cos x + \frac{1}{2}$ là

A. -9.

B. 1.

C. $-\frac{3}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Đặt $t = \cos x \in [-1; 1]$, khi đó $y = f(t) = 2t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 3t + \frac{1}{2}$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 3t + \frac{1}{2}$ trên $[-1; 1]$, có $f'(t) = 8t^2 - 9t + 3 > 0, \forall t$

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(-1; 1) \Rightarrow \min_{[-1; 1]} f(t) = f(-1) = 1$.

Ví dụ 10: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^3 x + \cos 2x + \sin x + 3$ là

A. 0.

B. 5.

C. 4.

D. $\frac{112}{27}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Cần nhớ công thức lượng giác:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

Ta có $y = \sin^3 x + 1 - 2\sin^2 x + \sin x + 3 = \sin^3 x - 2\sin^2 x + \sin x + 4$

Đặt $t = \sin x \in [-1; 1]$, khi đó $y = f(t) = t^3 - 2t^2 + t + 4$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t^2 + t + 4$ trên $[-1; 1]$, có $f'(t) = 3t^2 - 4t + 1$;

$$\text{Phương trình } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq t \leq 1 \\ 3t^2 - 4t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Tính $f(-1) = 0; f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{112}{27}; f(1) = 4$. Vậy $y_{\max} = \frac{112}{27}$.

Ví dụ 11: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = |-x^2 - 4x + 5|$ trên đoạn $[-6; 6]$

A. 110.

B. 9.

C. 55.

D. 7.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Xét hàm số $g(x) = -x^2 - 4x + 5$ liên tục trên đoạn $[-6; 6]$

Đạo hàm $g'(x) = -2x - 4 \rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \in [-6; 6]$

$$\text{Lại có } g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-6; 6] \\ x = -5 \in [-6; 6] \end{cases}$$

$$\text{Tính } \begin{cases} g(-6) = -7 \\ g(-2) = 9 \\ g(6) = -55 \\ g(1) = g(-5) = 0 \end{cases} \rightarrow \max_{[-6;6]} f(x) = \max_{[-6;6]} \{|g(-6)|; |g(-2)|; |g(6)|; |g(1)|; |g(-5)|\} = 55.$$

Nhận xét: bài này rất dễ sai lầm vì không để ý hàm trị tuyệt đối không âm.

Ví dụ 12: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = |x^2 - 3x + 2| - x$ trên đoạn $[-4;4]$

A. 2.

B. 17.

C. 34.

D. 68.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;4]$

▪ Nếu $x \in [1;2]$ thì $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ nên suy ra $f(x) = -x^2 + 2x - 2$

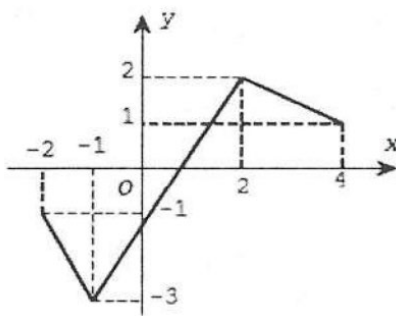
Đạo hàm $f'(x) = -2x + 2 \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [1;2]$. Ta có $\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = -2 \end{cases}$

▪ Nếu $x \in [-4;1] \cup [2;4]$ thì $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ nên suy ra $f(x) = x^2 - 4x + 2$

Đạo hàm $f'(x) = 2x - 4 \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in [-4;1] \cup [2;4]$. Ta có $\begin{cases} f(-4) = 34 \\ f(1) = -1 \\ f(2) = -2 \\ f(4) = 2 \end{cases}$

So sánh hai trường hợp, ta được $\max_{[-4;4]} f(x) = f(-4) = 34$.

Ví dụ 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-2;4]$?



A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. $|f(0)|$.

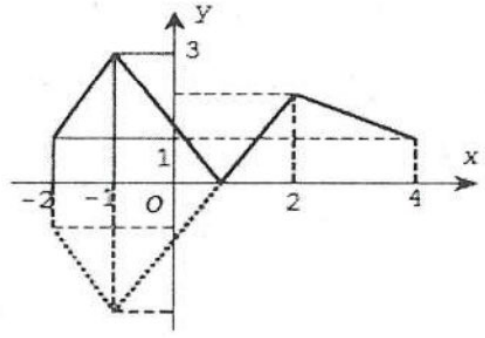
Lời giải

Đáp án: Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$

Ta suy ra đồ thị hàm số $|f(x)|$ trên $[-2;4]$ như hình vẽ.

Do đó $\max_{[-2;4]} |f(x)| = 3$ tại $x = -1$



Ví dụ 14: Cho $(P): y = x^2$ và $A\left(-2; \frac{1}{2}\right)$. Gọi M là điểm bất kì thuộc (P) . Khoảng cách MA bé nhất là

A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Vì M thuộc parabol $(P) \Rightarrow M(m; m^2) \Rightarrow \overline{AM} = \left(m+2; m^2 - \frac{1}{2}\right)$

Suy ra $MA^2 = |\overline{AM}|^2 = (m+2)^2 + \left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = m^4 + 4m + \frac{17}{4}$

Xét hàm số $f(m) = m^4 + 4m + \frac{17}{4}$, có $f'(m) = 4m^3 + 4; f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Do đó $\min f(m) = f(-1) = 1 - 4 + \frac{17}{4} = \frac{5}{4} \rightarrow MA_{\min} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 15: Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-1;1]$ thỏa mãn $f(x) > 0, g(x) > 0, \forall x \in [-1;1]$ và $f'(x) \geq g'(x) \geq 0, \forall x \in [-1;1]$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ của hàm số $h(x) = 2f(x).g(x) - g^2(x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m = h(-1)$.

B. $m = h(0)$.

C. $m = \frac{h(-1) + h(1)}{2}$.

D. $m = h(1)$.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Ta có $h'(x) = 2.[f'(x).g(x) + f(x).g'(x)] - 2g'(x).g(x); \forall x \in [-1;1]$

Suy ra $h(x) = 2.g(x).[f'(x) - g'(x)] + 2f(x).g'(x) \geq 0$ vì $f'(x) - g'(x) \geq 0$

Do đó $h(x)$ là hàm số đồng biến trên $[-1;1] \Rightarrow \min_{[-1;1]} h(x) = h(-1)$.

DẠNG 2: BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

Ví dụ 1: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = -x^2 + 4x - m$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;3]$

bằng 10.

A. $m = 3$.

B. $m = -6$.

C. $m = -7$.

D. $m = -8$.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Xét hàm số $f(x) = -x^2 + 4x - m$ trên $[-1; 3]$, có $f'(x) = -2x + 4$

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ -2x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Tính $f(-1) = -5 - m$; $f(2) = 4 - m$; $f(3) = 3 - m$

Suy ra $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(2) = 4 - m = 10 \Rightarrow m = -6$

Ví dụ 2: Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + a$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 0.

A. $a = 2$.

B. $a = 6$.

C. $a = 0$.

D. $a = 4$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Xét hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + a$ trên $[-1; 1]$, có $f'(x) = -3x^2 - 6x$

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -3x^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$

Tính $f(-1) = -2 + a$; $f(0) = a$; $f(1) = -4 + a$

Suy ra $\min_{[-1; 1]} f(x) = f(1) = -4 + a = 0 \Rightarrow a = 4$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = -x^3 + mx^2 - (m^2 + m + 1)x$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng -6 . Tính tổng các phần tử của S .

A. 0.

B. 4.

C. -4 .

D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Ta có $f'(x) = -3x^2 + 2mx - m^2 - m - 1$; $\forall x \in \mathbb{R}$. Mà $\Delta' = -2m^2 - 3m - 3 < 0$; $\forall m \in \mathbb{R}$

Suy ra $y' < 0$; $\forall x \in [-1; 1]$. Do đó hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-1; 1) \Rightarrow \min_{[-1; 1]} y = y(1) = -6$

Lại có $y(1) = -2 - m^2 \rightarrow -2 - m^2 = -6 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$. Vậy $\sum m = 0$.

Ví dụ 4: Biết hàm số $y = (x + m)^3 + (x + n)^3 - x^3$ với m, n là tham số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(m^2 + n^2) - m - n$ bằng

A. 4.

B. $\frac{1}{4}$.

C. - 16.

D. $-\frac{1}{16}$.**Lời giải****Đáp án: Chọn D**

$$\text{Ta có } y' = 3(x+m)^2 + 3(x+n)^2 - 3x^2 = 3[x^2 + 2(m+n)x + m^2 + n^2]$$

$$\text{Hàm số đã cho đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = (m+n)^2 - m^2 - n^2 \leq 0 \Leftrightarrow mn \leq 0$$

$$\text{Lại có } P = 4(m^2 + n^2) - (m+n) = 4(m+n)^2 - 8mn - (m+n) \geq 4(m+n)^2 - (m+n)$$

$$= 4(m+n)^2 - 2.2(m+n) \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \left[2(m+n) - \frac{1}{4}\right]^2 - \frac{1}{16} \geq -\frac{1}{16} \Rightarrow P_{\min} = -\frac{1}{16}$$

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Tìm giá trị lớn nhất của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng - 2.

A. $m = -4$.B. $m = 5$.C. $m = 4$.D. $m = 1$.**Lời giải****Đáp án: Chọn C**

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{x-m^2}{x+8} \text{ trên } [0;3], \text{ có } f'(x) = \frac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0; \forall x \in [0;3]$$

$$\text{Suy ra } f(x) \text{ là hàm số đồng biến trên } (0;3) \rightarrow \min_{[0;3]} f(x) = f(0) = -\frac{m^2}{8}$$

$$\text{Theo bài ta, ta có } \min_{[0;3]} f(x) = -2 \Leftrightarrow -\frac{m^2}{8} = -2 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m_{\max} = 4$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $0 < m \leq 2$.B. $2 < m \leq 4$.C. $m \leq 0$.D. $m > 4$.**Lời giải****Đáp án: Chọn D**

$$\text{Xét hàm số } y = \frac{x+m}{x+1} \text{ trên } [1;2], \text{ có } f'(x) = \frac{1-m}{(x+1)^2}; \forall x \in [1;2]$$

$$\text{Do đó } \min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = f(1) + f(2) = \frac{1+m}{2} + \frac{2+m}{3} = \frac{16}{3} \Rightarrow m = 5$$

Ví dụ 7: Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m}{x+2}$ (với m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc đoạn $[-10;10]$ thỏa mãn $\max_{[0;1]} y \geq 2 \min_{[0;1]} y$?

A. 5.

B. 11.

C. 16.

D. 6.

Lời giải**Đáp án: Chọn B**

Xét hàm số $f(x) = \frac{x-m}{x+2}$ trên $[0;1]$. Có $f'(x) = \frac{m+2}{(x+2)^2}; \forall x \in [0;1]$

▪ **TH1.** Với $m > -2$ suy ra $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến trên $(0;1)$

Do đó $\max_{[0;1]} f(x) = f(1) = \frac{1-m}{3}; \min_{[0;1]} f(x) = f(0) = -\frac{m}{2}$

Theo bài ra, ta có $\frac{1-m}{3} \geq 2\left(-\frac{m}{2}\right) \Leftrightarrow 1-m \geq -3m \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$

Kết hợp với $m \in [-10;10]$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 11 giá trị nguyên m

▪ **TH2.** Với $m < -2$ suy ra $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $(0;1)$

Do đó $\max_{[0;1]} f(x) = f(0) = -\frac{m}{2}; \min_{[0;1]} f(x) = f(1) = \frac{1-m}{3}$

Theo bài ra, ta có $-\frac{m}{2} \geq 2\left(\frac{1-m}{3}\right) \Leftrightarrow -3m \geq 4-4m \Leftrightarrow m \geq 4$ (vô lý)

Vậy có tất cả 11 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu.

Ví dụ 8: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - m^2 - 2}{x - m}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng -1 .

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải**Đáp án: Chọn C**

Ta có $f'(x) = \frac{1 \cdot (-m) - 1 \cdot (-m^2 - 2)}{(x-m)^2} = \frac{m^2 - m + 2}{(x-m)^2} > 0; \forall x \neq m$

Với $x = m \notin [0;4] \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases}$, ta được $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $(0;4)$

Suy ra $\max_{[0;4]} f(x) = f(4) = \frac{2-m^2}{4-m}$. Theo bài ra, ta có $\frac{2-m^2}{4-m} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện: $\begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases} \rightarrow m = -3$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d, a \neq 0$ có $\min_{(-\infty;0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. $8a + d$.B. $d - 16a$.C. $d - 11a$.D. $2a + d$.**Lời giải**

Đáp án: Chọn B

Ta có $\min_{(-\infty;0)} f(x) = f(-2) \longrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a < 0$

Lại có $f'(x) = 3ax^2 + c$ mà $\min_{(-\infty;0)} f(x) = f(-2) \Rightarrow f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 12a + c = 0$

Do đó $f(x) = ax^3 + cx + d = ax^3 - 12ax + d$

Xét hàm số $f(x) = ax^3 - 12ax + d$ trên $[1;3]$, có $f'(x) = 3ax^2 - 12a$;

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 3ax^2 - 12a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Tính $f(1) = d - 11a$; $f(2) = d - 16a$; $f(3) = d - 9a$. Vậy $\max_{[1;3]} f(x) = d - 16a$.

Ví dụ 10: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c, a \neq 0$ có $\min_{(-\infty;0)} f(x) = f(-1)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số

$y = f(x)$ trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ bằng

- A. $8a + c$. B. $c - \frac{7a}{16}$. C. $c + \frac{9a}{16}$. D. $c - a$.

Lời giải**Đáp án: Chọn D**

Ta có $\min_{(-\infty;0)} f(x) = f(-1) \longrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$

Lại có $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ mà $\min_{(-\infty;0)} f(x) = f(-1) \Rightarrow f'(-1) = 0 \Leftrightarrow b = -2a$

Do đó $f(x) = ax^4 + bx^2 + c = ax^4 - 2ax^2 + c$

Xét hàm số $f(x) = ax^4 - 2ax^2 + c$ trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ có $f'(x) = 4ax^3 - 4ax$

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ 4ax^3 - 4ax = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ x(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Tính $f\left(\frac{1}{2}\right) = c - \frac{7a}{16}$; $f(1) = c - a$; $f(2) = 8a + 2$. Vậy $\min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = f(1) = c - a$.

Ví dụ 11: Hỏi tập hợp nào dưới đây chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^4 - 2x^2 + m|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 5?

- A. $(-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$. B. $(-5; -2)$. C. $(-4; -1) \cup (5; +\infty)$. D. $(-4; -3)$.

Lời giải**Đáp án: Chọn B**

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + m$ trên $[0;2]$, có $f'(x) = 4x^3 - 4x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Tính $|f(0)| = |m|; |f(1)| = |m-1|; |f(2)| = |m+8|$ suy ra $\max_{[1;2]} y = \{|m-1|; |m+8|\}$

▪ **TH1.** Nếu $\max_{[1;2]} y = |m-1| \longrightarrow \begin{cases} |m-1| = 5 \\ |m-1| \geq |m+8| \end{cases} \Leftrightarrow m = -4$

▪ **TH2.** Nếu $\max_{[1;2]} y = |m+8| \longrightarrow \begin{cases} |m+8| = 5 \\ |m+8| \geq |m-1| \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$

Vậy có 2 giá trị m cần tìm và thuộc khoảng $(-5; -2)$.

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x) = |2x^3 - 3x^2 + m|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để $\min_{[-1;3]} f(x) \leq 3$?

A. 4.

B. 8.

C. 13.

D. 39.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Xét hàm số $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$ trên $[-1;3]$, có $g'(x) = 6x^2 - 6x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Tính $\begin{cases} f(-1) = |m-5|; f(0) = |m| \\ f(1) = |m-1|; f(3) = |m+27| \end{cases}$. Khi đó $\min_{[-1;3]} f(x) = \{|m-5|; |m+27|\}$

▪ **TH1.** Nếu $\min_{[-1;3]} f(x) = |m-5| \Leftrightarrow |m-5| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq m-5 \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 8$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \longrightarrow m = \{2; 3; 4; \dots; 8\}$. Thử lại $\Rightarrow$ có 6 giá trị nguyên âm m cần tìm.

▪ **TH2.** Nếu $\min_{[-1;3]} f(x) = |m+27| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+27| \leq \{|m-5|; |m|; |m-1|\} \\ |m+27| \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -30 \leq m \leq -24$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z}$ suy ra có 7 giá trị nguyên m cần tìm.

Vậy có tất cả 13 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 13: Cho hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ (với m là tham số thực). Hỏi $\max_{[1;2]} y$ có giá trị nhỏ nhất là?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$ trên $[1;2]$, có $f'(x) = 3x^2 - 6x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Tính $|f(0)| = |m|; |f(1)| = |m-2|; |f(2)| = |m-4|$ suy ra $\max_{[1;2]} y = \{|m|; |m-4|\}$

- **TH1.** Nếu $\max_{[1;2]} y = |m| \longrightarrow |m| \geq |m-4| \Leftrightarrow m \geq 2 \longrightarrow |m| \geq 2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = 2$

- **TH2.** Nếu $\max_{[1;2]} y = |m-4| \longrightarrow |m-4| \leq |m| \Leftrightarrow m \leq 2 \longrightarrow m-4 \leq -2 \Leftrightarrow |m-4| \geq 2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = 2$. Vậy $\max_{[1;2]} y$ có giá trị nhỏ nhất là 2.

Ví dụ 14: Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có giá trị lớn nhất trên $[-3;2]$ bằng 150?

- A. 2. B. 0. C. 6. D. 4.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Xét hàm số $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$ trên $[-3;2]$ có $g'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$$\text{Phương trình } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Tính } \begin{cases} f(-1) = |m-5|; f(0) = |m| \\ f(-3) = |m+243|; f(2) = |m-32| \end{cases}. \text{ Khi đó } \max_{[-3;2]} f(x) = \{|m-32|; |m+243|\}$$

- **TH1.** Nếu $\max_{[-3;2]} f(x) = |m+243| \Leftrightarrow \begin{cases} |m-32| \leq |m+243| \\ |m+243| = 150 \end{cases} \Leftrightarrow m = -93$

- **TH2.** Nếu $\max_{[-3;2]} f(x) = |m-32| \Leftrightarrow \begin{cases} |m-32| \geq |m+243| \\ |m-32| = 150 \end{cases} \Leftrightarrow m = -118$

Vậy có tất cả 2 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 15: Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in [-3;3]$ sao cho $M \leq 2m$

- A. 6. B. 5. C. 7. D. 3.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Xét hàm số $u(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ trên $[0;2]$, có $u'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

Phương trình $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0;1;2\}$. Khi đó $u(0) = u(2) = a; u(1) = a+1$

$$\text{Suy ra } \max_{[0;2]} f(x) = \{|a|; |a+1|\} \text{ và } \min_{[0;2]} f(x) = \{|a|; |a+1|\}$$

- **TH1.** Với $a = 0$, ta thấy $\begin{cases} \min_{[0;2]} f(x) = 0 \\ \max_{[0;2]} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = 0 \end{cases} \text{ (không TMĐK)}$

▪ **TH2.** Với $a > 0$, ta có $\begin{cases} \min_{[0;2]} f(x) = |a| \\ \max_{[0;2]} f(x) = |a+1| \end{cases}$ mà $M \leq 2m \Rightarrow |a+1| \leq 2|a| \Leftrightarrow a \geq 1$

Kết hợp với điều kiện $a \in [-3;3]$ và $a \in \mathbb{Z} \longrightarrow \{1;2;3\}$

▪ **TH3.** Với $a < 0$, ta có $\begin{cases} \min_{[0;2]} f(x) = |a+1| \\ \max_{[0;2]} f(x) = |a| \end{cases}$ mà $M \leq 2m \Rightarrow |a| \leq 2|a+1| \Leftrightarrow a \geq -2$

Kết hợp $a \in [-3;3]$ và $a \in \mathbb{Z} \longrightarrow \{-3;-2\}$

Vậy có 5 giá trị nguyên của a .

Ví dụ 16*: Cho hàm số $f(x) = |x^3 + ax^2 + bx + c|$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1;3]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất, tính giá trị của biểu thức $ab + bc + ca$

A. - 6. B. 0. C. - 12. D. - 18.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Đặt $t = \frac{x-1}{2} \in [-1;1] \Rightarrow t = \cos x \Rightarrow x = 2 \cos x + 1$

Khi đó $f(x) = |(2 \cos x + 1)^3 + a.(2 \cos x + 1)^2 + b.(2 \cos x + 1) + c|$
 $= |8 \cos^3 x + (12 + 4a). \cos^2 x + (6 + 4a + 2b). \cos x + a + b + c + 1|$

Suy ra $\frac{f(x)}{2} = |4 \cos^3 x + (6 + 2a). \cos^2 x + (3 + 2a + b). \cos x + \frac{a + b + c + 1}{2}|$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{2} \leq |4 \cos^3 x - 3 \cos x| = |\cos 3x| \leq 1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 6 + 2a = 0 \\ 3 + 2a + b = -3 \\ a + b + c + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}$

DẠNG 3: BÀI TOÁN THỰC TẾ ỨNG DỤNG MIN – MAX

Ví dụ 1: Người ta tiêm một loại thuốc vào mạch máu ở cánh tay phải của một bệnh nhân. Sau thời gian là t giờ, nồng độ thuốc hấp thu trong máu của bệnh nhân đó được xác định theo công thức $C(t) = \frac{0,28t}{t^2 + 4} (0 < t < 24)$. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì nồng độ thuốc hấp thu trong máu của bệnh nhân đó là cao nhất?

A. 24 giờ. B. 4 giờ. C. 2 giờ. D. 1 giờ.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Yêu cầu bài toán: Tìm giá trị của $t \in (0; 24)$ để $C(t) = \frac{0,28t}{t^2 + 4}$ đạt giá trị lớn nhất

Xét hàm số $C(t) = \frac{0,28t}{t^2 + 4}$ trên $(0; 24)$, có $C'(t) = \frac{0,28(t^2 + 4) - 0,28t \cdot 2t}{(t^2 + 4)^2} = \frac{-0,28t^2 + 1,12}{(t^2 + 4)^2}$

Phương trình $C'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 24 \\ -0,28t^2 + 1,12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$. Tính $C(2) = 0,07$

Suy ra $\max_{(0;24)} C(t) = C(2) = 0,07$. Vậy sau 2 giờ thì nồng độ hấp thu là cao nhất.

Ví dụ 2: Người ta giới thiệu một loại thuốc kích thích sự sinh sản của một loại vi khuẩn. Sau ít phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$). Hỏi sau bao nhiêu phút thì số vi khuẩn lớn nhất?

A. 10 phút. B. 20 phút. C. 30 phút. D. 15 phút.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Yêu cầu bài toán: Tìm giá trị của $t \in [0; 30]$ để $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ đạt giá trị lớn nhất

Xét hàm số $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ trên $[0; 3]$, có $N'(t) = 60t - 3t^2$

Phương trình $N'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 30 \\ 60t - 3t^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 20$. Tính $\begin{cases} N(0) = N(30) = 1000 \\ N(20) = 5000 \end{cases}$

Suy ra $\max_{[0;30]} N(t) = N(20) = 5000$. Vậy sau 20 phút thì số vi khuẩn là lớn nhất.

Ví dụ 3: Ông A muốn mua một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích bằng 100m^2 để làm khu vườn. Hỏi người đó phải mua mảnh đất có kích thước như thế nào để chi phí xây dựng bờ rào là ít tốn kém nhất?

A. 10m x 10m. B. 4m x 25m. C. 5m x 20m. D. 25m x 8m.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Yêu cầu bài toán: Cho diện tích và tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi hình chữ nhật

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng, chiều dài của hình chữ nhật

Diện tích hình chữ nhật là $S = xy = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}$

Chu vi hình chữ nhật (bờ rào mảnh đất) là $C = 2x + 2y = 2x + \frac{200}{x}$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi, ta có $2x + \frac{200}{x} \geq 2\sqrt{2 \cdot \frac{200}{x}} = 40 \Rightarrow C_{\min} = 40$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2x = \frac{200}{x} \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 10 \Rightarrow y = 10$

Ví dụ 4: Một công ty muốn thiết kế một loại hộp có dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông sao cho

thể tích khối hộp được tạo thành là 8dm^3 và diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất. Độ dài cạnh đáy của mỗi hộp muốn thiết kế là

- A. $2\sqrt[3]{2}\text{dm}$. B. 2dm . C. 4dm . D. $2\sqrt{2}\text{dm}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Gọi h, x lần lượt là chiều cao và độ dài cạnh đáy của hình hộp chữ nhật

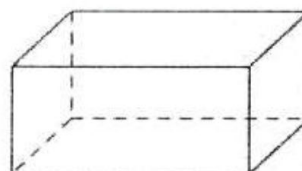
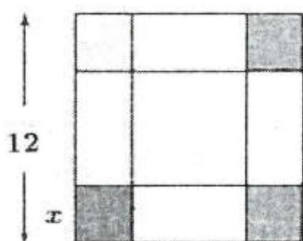
Thể tích khối hộp chữ nhật là $V = Bh = x^2h = 8 \Leftrightarrow h = \frac{8}{x^2}$

Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là $S_{tp} = S_{xq} + S_d = 4hx + 2x^2 = 2x^2 + \frac{32}{x}$

Ta có $2x^2 + \frac{32}{x} = 2x^2 + \frac{16}{x} + \frac{16}{x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{16}{x} \cdot \frac{16}{x}} = 24 \Rightarrow S_{\min} = 24$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2x^2 = \frac{16}{x} \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

Ví dụ 5: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm . Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh $x\text{ cm}$, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



- A. $x = 4$. B. $x = 3$. C. $x = 2$. D. $x = 1$.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Khi cắt và gấp tấm nhôm, ta được hình hộp chữ nhật có chiều cao x ; đáy là hình vuông cạnh

$12 - 2x \Rightarrow$ Thể tích khối hộp chữ nhật là $V = Bh = x.(12 - 2x)(12 - 2x)$

Cách 1. Khảo sát hàm số $f(x) = x.(12 - 2x).(12 - 2x)$ trên $(0; 6) \longrightarrow \max_{(0;6)} f(x)$

Cách 2. Ta có $4x(12 - 2x).(12 - 2x) \leq \frac{(4x + 12 - 2x + 12 - 2x)^3}{27} = 512 \Rightarrow V \leq 128$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $4x = 12 - 2x \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2$.

Ví dụ 6: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ hộp là ít nhất (diện tích toàn phần của lon là nhỏ nhất). Bán kính đáy vỏ lon là bao nhiêu khi ta muốn có thể tích lon là 314 cm^3 ?

A. $R = \sqrt[3]{\frac{314}{\pi}}$.

B. $R = \sqrt[3]{\frac{628}{\pi}}$.

C. $R = 942\sqrt[3]{2\pi}$.

D. $R = \sqrt[3]{\frac{314}{2\pi}}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Gọi R , h lần lượt là bán kính đáy, chiều cao của lon sữa

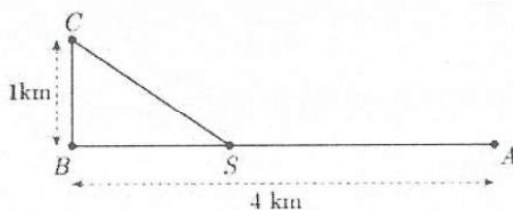
Thể tích của lon sữa hình trụ là $V = \pi R^2 h = 314 \Leftrightarrow h = \frac{314}{\pi R^2}$

Diện tích nguyên liệu làm vỏ hộp (S_p hình trụ) là $S_p = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R^2 + \frac{628}{R}$

Ta có $2\pi R^2 + \frac{628}{R} = 2\pi R^2 + \frac{314}{R} + \frac{314}{R} \geq 3\sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \frac{314}{R} \cdot \frac{314}{R}} = 3\sqrt[3]{2 \cdot (314)^2 \pi}$

Dấu bằng xảy ra khi $2\pi R^2 = \frac{314}{R} \Leftrightarrow R^3 = \frac{314}{2\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{314}{2\pi}}$

Ví dụ 7: Một đường dây điện được nối từ nhà máy điện trên đất liền ở vị trí A đến vị trí C một hòn đảo. Khoảng cách ngắn nhất từ C đến đất liền là $BC = 1km$, khoảng cách từ A đến B là $4 km$. Người ta chọn một vị trí điểm S nằm giữa A và B để mắc đường dây điện đi từ A đến S, rồi từ S đến C như hình vẽ dưới đây. Chi phí mỗi km dây điện trên đất liền là 3000 USD, mỗi km trên điện đặt ngầm dưới biển mất 5000 USD, Hỏi điểm S phải cách A bao nhiêu km để chi phí mắc đường dây điện ít nhất?



A. $\frac{5}{2} km$.

B. $2 km$.

C. $\frac{13}{4} km$.

D. $\frac{7}{2} km$

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Đặt $SA = x (km; 0 \leq x \leq 4)$, ta có $SA + SB = AB \Rightarrow SB = 4 - x (km)$

Tam giác SBC vuông tại B, có $SC = \sqrt{SB^2 + BC^2} = \sqrt{1 + (4 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 17}$

Do đó, số tiền để mắc dây điện trên đất liền là $T_1 = 3000 \times SA = 3000x$

Số tiền để mắc dây điện ngầm dưới biển là $T_2 = 5000 \times SC = 5000\sqrt{x^2 - 8x + 17}$

Suy ra tổng số tiền mắc dây điện là $T = T_1 + T_2 = 3000x + 5000\sqrt{x^2 - 8x + 17}$

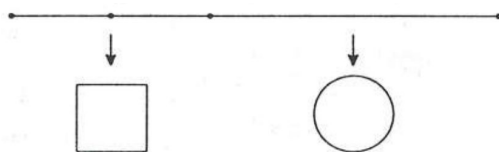
Xét hàm số $f(x) = 3x + 5\sqrt{x^2 - 8x + 17}$ trên $[0;4]$, có $f'(x) = 3 + \frac{5x - 20}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}}$

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 - 8x + 17} = 20 - 5x \Leftrightarrow x = \frac{13}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được $\min_{[0;4]} f(x) = f\left(\frac{13}{4}\right) = 16$

Vậy số tiền ít nhất là $T = 100.16 = 16000 \text{ USD}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{13}{4}$

Ví dụ 8: Một sợi dây kim loại dài 60 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r . Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Gọi x là độ dài của đoạn dây cuộn thành hình tròn ($0 < x < 60$)

Suy ra chiều dài đoạn còn lại là $60 - x$

Chu vi đường tròn: $2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi} \rightarrow$ Diện tích hình tròn: $S_1 = \pi r^2 = \frac{x^2}{4\pi}$

Diện tích hình vuông: $S_2 = \left(\frac{60-x}{4}\right)^2$

Tổng diện tích hai hình: $S = \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{60-x}{4}\right)^2 = \frac{(4+\pi)x^2 - 120\pi x + 3600\pi}{16\pi}$

Đạo hàm: $S' = \frac{(4+\pi)x - 60\pi}{8\pi}$; $S' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{60\pi}{4+\pi}$; $S'' = \frac{4+\pi}{8\pi} > 0$

Suy ra hàm S chỉ có một cực trị và là cực tiểu tại $x = \frac{60\pi}{4+\pi}$

Do đó S đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{60\pi}{4+\pi}$

Với $x = \frac{60\pi}{4+\pi} \rightarrow r = \frac{30}{(4+\pi)}$ và $a = \frac{240}{(4+\pi).4} \rightarrow \frac{a}{r} = \frac{240}{120} = 2$

Ví dụ 9: Doanh nghiệp Alibaba cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là $x^3 + 2x$ (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y - 27y^2$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp Alibaba cần sử dụng máy A làm việc

trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? (Biết rằng A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày).

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 4.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Tổng số tiền hai máy làm được là $T = T_A + T_B = x^3 - 27y^2 + 2x + 326y$

Theo bài ra, ta có $x + y = 10; y \leq 6$ nên $y = 10 - x$ và $4 \leq x \leq 10$

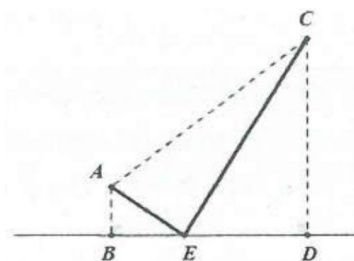
Suy ra $T = x^3 - 27(10 - x)^2 + 2x + 326(10 - x) = x^3 - 27x^2 + 216x + 560$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 27x^2 + 216x + 560$ trên $[4; 10]$, có $f'(x) = 3(x^2 - 18x + 72)$

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6 \longrightarrow \max_{[4; 10]} f(x) = f(6) = 1100$

Vậy $x = 6$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 10: Có hai cây cột dựng đứng trên mặt đất lần lượt là $AB = 1m$, $CD = 4m$ và đỉnh của hai cột là hai điểm A và C cách nhau $5m$. Người ta chọn một vị trí trên mặt đất (nằm giữa B, D) để giăng dây nối đến hai đỉnh cột để trang trí như mô hình bên. Tính độ dài ngắn nhất của đoạn dây?



A. $\sqrt{41}$.

B. $\sqrt{37}$.

C. $\sqrt{29}$.

D. $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

▪ **Cách 1:** Đặt $BE = x$ với $x > 0$. Ta có $BD = \sqrt{5^2 - (4 - 1)^2} = 4$ nên $ED = BD - BE = 4 - x$

Lại có $AE + EC = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(4 - x)^2 + 16}$. Đặt $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 8x + 32}, x > 0$

Ta có $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 32}}; \forall x > 0$

Giải phương trình $f'(x) = 0$, ta thu được $x = \frac{4}{5}$ và tìm được $\min f(x) = \sqrt{41}$

▪ **Cách 2:** Gọi H là điểm đối xứng với A qua B và K là điểm đối xứng với C qua D

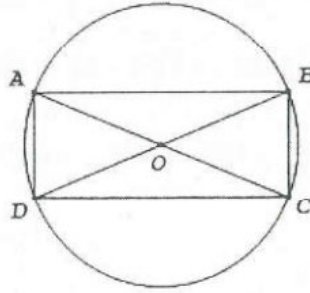
Và I là hình chiếu của A lên CD. Khi đó AHKC là hình thang cân và $AG = \sqrt{AC^2 - GC^2} = 4$

Ta thấy $EC = EK$ nên $AE + EC = AE + EK$

Để $\{AE + EC\}_{\min}$ khi và chỉ khi $\{AE + EK\}_{\min}$ và điều đó có nghĩa là A, E, K thẳng hàng.

Vì thế $AK = \sqrt{KG^2 + AG^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$. Hay độ dài ngắn nhất của đoạn dây chính bằng $\sqrt{41}$

Ví dụ 11: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 961 m^2 , người ta muốn mở rộng thêm 4 phần đất sao cho tạo thành hình tròn ngoại tiếp mảnh vườn. Biết tâm hình tròn trùng với tâm của hình chữ nhật (xem hình minh họa). Tính diện tích nhỏ nhất $S_{\min}$ của 4 phần đất được mở rộng



- A. $S_{\min} = 961\pi - 961$. B. $S_{\min} = 1922\pi - 961$. C. $S_{\min} = 1892\pi - 946$. D. $S_{\min} = 480,5\pi - 961$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

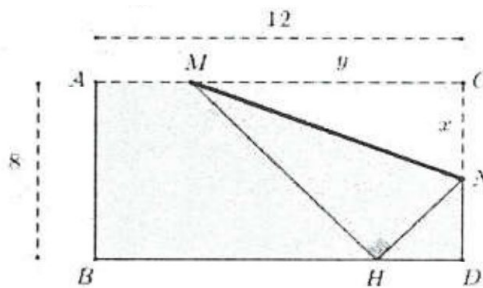
Gọi $x \text{ (m)}, y \text{ (m)}$ ($x > 0, y > 0$) lần lượt là hai kích thước mảnh vườn hình chữ nhật;

$R \text{ (m)}$ là bán kính hình tròn ngoại tiếp mảnh vườn $\longrightarrow R^2 = OB^2 = \frac{x^2 + y^2}{4}$

Theo đề bài, ta có $xy = 961 \text{ m}^2$. Diện tích 4 phần đất mở rộng: $S = S_{\text{tròn}} - S_{ABCD} = \pi R^2 - xy$

$$= \pi \cdot \frac{(x^2 + y^2)}{4} - xy \stackrel{\text{Cosine}}{\geq} \pi \cdot \frac{2xy}{4} - xy = 480,5\pi - 961$$

Ví dụ 12: Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài 12 cm và chiều rộng 8 cm . Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm đáy dưới như hình vẽ. Để độ dài nếp gấp là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?



- A. 6. B. $6\sqrt{5}$. C. $6\sqrt{2}$. D. $6\sqrt{3}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Đặt $CN = x \text{ (cm)}$ và $MC = y \text{ (cm)}$

Độ dài đường gấp khúc cần tìm chính là độ dài đoạn thẳng $MN = \sqrt{x^2 + y^2}$

Để thấy $MHNC$ là hình thoi nên $MC = MH = y, NC = NH = x$

Gọi K là hình chiếu của M xuống $BD \Rightarrow MK = 8 \Rightarrow HK = \sqrt{y^2 - 64}$

$$\text{Mà } HD = \sqrt{HN^2 - ND^2} = \sqrt{x^2 - (8-x)^2} = \sqrt{16x - 64} = 4\sqrt{x-4}$$

$$\Rightarrow KD = y = HK + HD = \sqrt{y^2 - 64} + 4\sqrt{x-4} \Leftrightarrow y - \sqrt{y^2 - 64} = 4\sqrt{x-4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{64}{y + \sqrt{y^2 - 64}} = 4\sqrt{x-4} \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2 - 64} = \frac{16}{\sqrt{x-4}}$$

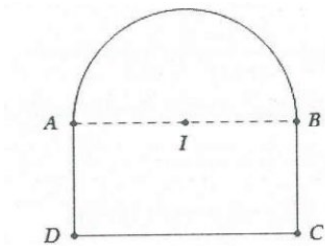
$$\text{Khi đó } 2y = \frac{16}{\sqrt{x-4}} + 4\sqrt{x-4} \Leftrightarrow y = \frac{8 + 2(x-4)}{\sqrt{x-4}} = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}$$

$$\text{Do đó } MN^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{4x^2}{x-4}. \text{ Đặt } f(x) = x^2 + \frac{4x^2}{x-4} \text{ với } 8 > x > 4$$

$$\text{Có } f'(x) = 2x + 4 - \frac{64}{(x-4)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-4)^2 = 32 \Leftrightarrow x = 6$$

$$\text{Suy ra } \min_{(4;8)} f(x) = f(6) = 108 \Rightarrow MN_{\min}^2 = 108 \Rightarrow MN_{\min} = 6\sqrt{3}$$

Ví dụ 13: Một cửa sổ có hình dạng như hình bên, bao gồm: một hình chữ nhật ghép với nửa hình tròn có tâm nằm trên cạnh của hình chữ nhật. Biết rằng tổng độ dài đường viền cho phép của cửa sổ là $4m$. Hỏi **diện tích lớn nhất** của cửa sổ là bao nhiêu?



A. $S = \frac{4}{4 + \pi}.$

B. $S = \frac{8}{4 + \pi}.$

C. $S = \frac{4}{8 + \pi}.$

D. $S = \frac{8}{8 + \pi}.$

Lời giải

Đáp án: Chọn B

$$\text{Gọi } \begin{cases} AD = BC = x \\ AI = IB = R \end{cases} \Rightarrow C_{hcn} = CD + 2BC = 2(R + x); C_{hcn} = \pi R$$

$$\text{Suy ra } \pi R + 2(R + x) = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4 - (\pi + 2)R}{2}$$

$$\text{Và } S_{hcn} = AB \cdot BC = 2Rx; S_{hcn} = \frac{\pi R^2}{2}$$

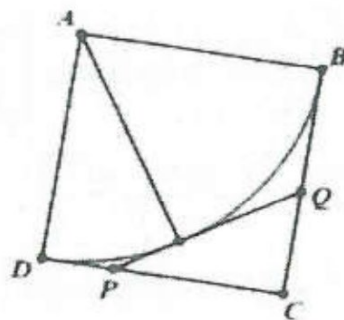
Tổng diện tích của cửa sổ là

$$S = 2Rx + \frac{\pi R^2}{2} = 2R \cdot \frac{4 - (\pi + 2)R}{2} + \frac{\pi R^2}{2} = R[4 - (\pi + 2)R] + \frac{\pi R^2}{2}$$

$$= 4R - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)R^2 = \frac{8}{4 + \pi} - \left(\sqrt{\frac{8}{4 + \pi}} - R\sqrt{2 + \frac{\pi}{2}}\right)^2 \leq \frac{8}{4 + \pi}$$

Do đó diện tích lớn nhất của cửa sổ là $S = \frac{8}{4 + \pi}$

Ví dụ 14: Cho hình vuông $ABCD$ độ dài cạnh bằng $2m$ như hình vẽ. Lấy hai điểm P, Q (thay đổi) lần lượt nằm trên hai cạnh DC, CB sao cho PQ luôn tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AB . Tìm giá trị nhỏ nhất độ dài đoạn thẳng PQ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



A. 1,08 m.

B. 1,32 m.

C. 1,66 m.

D. 1,54 m.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Đặt $\widehat{DAP} = x$, ta có $\widehat{DAP} + \widehat{BAQ} = \frac{1}{2}\widehat{A} = 45^\circ$ suy ra $\widehat{BAQ} = 45^\circ - x$

Khi đó $PQ = AD \tan x + AB \tan(45^\circ - x) = 2 \left(\tan x + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right) = 2 \cdot \frac{\tan^2 x + 1}{\tan x + 1}$

Đặt $t = \tan x$ ($0 < t < 1$), ta được $PQ = \frac{2t^2 + 2}{t + 1}$

Xét $f(t) = \frac{t^2 + 1}{t + 1}$ trên $(0; 1)$, có $f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 1}{(t + 1)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1 + \sqrt{2}$

Suy ra hàm số $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t = -1 + \sqrt{2}$. Vậy $PQ_{\min} \approx 1,66$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 7x + 1$ trên đoạn $[-2; 1]$

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	-		+	0	-
y	5			4	-1

The graph shows a function $y = f(x)$ with the following key points and behavior:

- As $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow 5$.
- Local minimum at $x = -1$, $y = -2$.
- Local maximum at $x = 2$, $y = 4$.
- As $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow -1$.

Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất bằng -2 .

B. Hàm số có hai điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5 và giá trị nhỏ nhất bằng -2 .

Câu 3: Hàm số $y = (4 - x^2)^2 + 1$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 1]$ là

A. 10.

B. 12.

C. 14.

D. 17.

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[2; 4]$ là

A. $\min y = 3.$
[2;4]

B. $\min y = 7.$
[2;4]

C. $\min y = 5.$
[2;4]

D. $\min y = 0.$
[2;4]

Câu 5: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{-x^2 - 4}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$

A. $-2.$

B. $-4.$

C. $-\frac{25}{6}.$

D. $-5.$

Câu 6: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[-1; 4]$ là

A. 3.

B. $-1.$

C. $-4.$

D. 1.

Câu 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$ là

A. $-3.$

B. $-2.$

C. 0.

D. 2.

Câu 8: Hàm số $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại duy nhất điểm x_0 . Tìm x_0

A. $x_0 = 2.$

B. $x_0 = 0.$

C. $x_0 = 1.$

D. $x_0 = \frac{1}{2}.$

Câu 9: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(3 - 2x)^2$ trên $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. 0. D. 1.

Câu 10: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

- A. -3. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 11: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ trên đoạn $[-4; -2]$ là

- A. $\min_{[-4; -2]} y = -7$. B. $\min_{[-4; -2]} y = -\frac{19}{3}$. C. $\min_{[-4; -2]} y = -8$. D. $\min_{[-4; -2]} y = -6$.

Câu 12: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 1 + x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[-3; -1]$ bằng

- A. 5. B. -4. C. -6. D. -5.

Câu 13: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$.

Tính giá trị $M - m$

- A. $M - m = -\frac{9}{4}$. B. $M - m = 3$. C. $M - m = \frac{9}{4}$. D. $M - m = \frac{1}{4}$.

Câu 14: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2;3]$

- A. $m = \frac{51}{4}$. B. $m = \frac{49}{4}$. C. $m = 13$. D. $m = \frac{51}{2}$.

Câu 15: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $[1;3]$ là

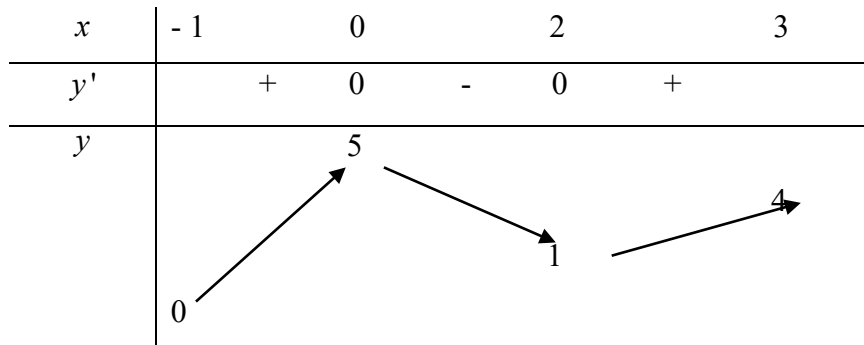
- A. $\max_{[1;3]} f(x) = -6$. B. $\max_{[1;3]} f(x) = \frac{13}{27}$. C. $\max_{[1;3]} f(x) = 0$. D. $\max_{[1;3]} f(x) = 5$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y				

- A. Hàm số có hai điểm cực trị. B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 3.
C. Hàm số có một điểm cực trị. D. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Câu 17: Hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong đoạn $[-1;3]$ cho trong hình bên. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$. Tìm mệnh đề đúng?



- A. $M = f(-1)$. B. $M = f(3)$. C. $M = f(2)$. D. $M = f(0)$.

Câu 18: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$ trên $[-1;1]$. Khi đó giá trị của m là

- A. $m = \frac{2}{3}$. B. $m = 4$. C. $m = -4$. D. $m = -\frac{2}{3}$.

Câu 19: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$ đạt được tại x_0 . Giá trị x_0 bằng

- A. 1. B. 2. C. - 2. D. - 1.

Câu 20: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 7x$ trên đoạn $[0;4]$ bằng

- A. - 259. B. 68. C. 0. D. - 4.

Câu 21: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ trên $[-4;4]$

- A. $m = -211$. B. $m = 11$. C. $m = -121$. D. $m = -70$.

Câu 22: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$ trên đoạn $[-1;2]$ là

- A. - 5. B. - 6. C. $-\frac{14}{3}$. D. 4.

Câu 23: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 4x^2 - 5$ trên đoạn $[-2;3]$ là

- A. - 5. B. - 1. C. - 197. D. - 50.

Câu 24: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -2x^4 + 4x^2 + 5$ trên $[-2;1]$

- A. 5. B. 7. C. - 16. D. - 11.

Câu 25: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 2\sin^2 x - \sin 2x + 11$

- A. $M = 12 - \sqrt{2}$. B. $M = 10 + \sqrt{2}$. C. $M = 12 + \sqrt{2}$. D. $M = 10 - \sqrt{2}$.

Câu 26: Trong các hàm số sau, hàm số nào không có giá trị nhỏ nhất?

- A. $y = \frac{x-2}{x+1}$. B. $y = x^4 + 2x$. C. $y = x^3 + 2x + 3$. D. $y = \sqrt{2x-1}$.

Câu 27: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ trên đoạn $[-1;1]$. Giá trị của M, m là

- A. $M = \frac{5}{3}, m = -3$. B. $M = \frac{2}{3}, m = -2$. C. $M = \frac{5}{3}, m = -2$. D. $M = \frac{5}{3}, m = 1$.

Câu 28: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x}{x+2}$ trên đoạn $[1;4]$

- A. $\max_{[1;4]} f(x) = 1$. B. $\max_{[1;4]} f(x) = \frac{2}{3}$. C. $\max_{[1;4]} f(x) = 1$. D. Không tồn tại.

Câu 29: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn $[-1;1]$. Khi đó $M - m$ bằng

- A. 9. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 30: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4;4]$. Giá trị của M và m lần lượt là

- A. $M = 40; m = -41$. B. $M = 15; m = -41$. C. $M = 40; m = 8$. D. $M = 40; m = -8$.

Câu 31: Xét hàm số $y = x + 1 - \frac{3}{x+2}$ trên đoạn $[-1;1]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có cực trị trên khoảng $(-1;1)$
 B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$
 C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$ và đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$
 D. Hàm số nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$

Câu 32: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4 \sin x - 5$

- A. -20. B. -8. C. -9. D. 0.

Câu 33: Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$

- A. $T = [1;9]$. B. $T = [2\sqrt{2};4]$. C. $T = (1;9)$. D. $T = [0;2\sqrt{2}]$.

Câu 34: Một tạp chí bán được 25 nghìn đồng một cuốn. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, ...) được cho bởi công thức $C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 11000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 6 nghìn đồng. Các khoản thu khi bán tạp chí bao gồm tiền bán tạp chí và 100 triệu đồng nhận được từ quảng cáo. Giả sử số cuốn in ra đều được bán hết. Tính số tiền lãi lớn nhất có thể có được khi bán tạp chí.

- A. 100.250.000 đồng. B. 100.000.000 đồng. C. 100.500.000 đồng. D. 71.000.000 đồng

Câu 35: Công ty xe khách Thiên Ân dự định tăng giá vé trên mỗi hành khách. Hiện tại giá vé là 50.000 VNĐ một khách và có 10.000 khách trong một tháng. Nhưng nếu tăng giá vé thêm 1.000 VNĐ một khách

thì số khách sẽ giảm đi 50 người mỗi tháng. Hỏi công ty sẽ tăng giá vé là bao nhiêu đối với một khách để có lợi nhuận lớn nhất?

- A. 50.000 VNĐ. B. 15.000 VNĐ. C. 35.000 VNĐ. D. 75.000 VNĐ.

Câu 36: Ông A dự định sử dụng hết $6,5m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. $2,26m^3$. B. $1,61m^3$. C. $1,33m^3$. D. $1,50m^3$.

Câu 37: Ông A sử dụng hết $5m^2$ kính để làm bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. $0,96m^3$. B. $1,01m^3$. C. $1,51m^3$. D. $1,33m^3$.

Câu 38: Ông A sử dụng hết $6,7m^2$ kính để làm bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. $1,57m^3$. B. $1,11m^3$. C. $1,23m^3$. D. $2,48m^3$.

Câu 39: Đợt nộp hồ sơ dự thi tốt nghiệp THPT quốc gia thường kéo dài 1 tháng (30 ngày). Nhà trường nhận thấy số lượng hồ sơ mà học sinh nộp tính theo ngày thứ t được cho công thức $S(t) = \frac{1}{50}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 36t - 270$ (hồ sơ) với $1 \leq t \leq 30$. Hỏi trong 30 ngày đó thì ngày thứ mấy có số lượng hồ sơ nộp nhiều nhất?

- A. 15. B. 16. C. 20. D. 25.

Câu 40: Bác Tô có một cái ao có diện tích $50m^2$ để nuôi cá. Vụ vừa qua bác nuôi với mật độ 20 con/ m^2 và thu được tất cả 1,5 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá thu được bác ấy cứ giảm đi 8 con/ m^2 thì tương ứng sẽ có mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm 0,5 kg. Hỏi vụ tới bác phải mua bao nhiêu con cá giống để đạt được tổng khối lượng cá thành phẩm cao nhất? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi)

- A. 1100 con. B. 1000 con. C. 500 con. D. 502 con.

Câu 41: Người ta muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, tiền chi phí xây bể là 500.000 đồng/ m^2 . Xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí sẽ thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để xây bể là bao nhiêu?

- A. 168 triệu đồng. B. 54 triệu đồng. C. 108 triệu đồng. D. 90 triệu đồng.

Câu 42: Người ta muốn xây một chiếc bể chứa nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}m^3$. Biết đáy hồ là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây

là 100.000 đồng/ m^2 . Tìm kích thước của hồ để chi phí thuê nhân công ít nhất. Khi đó chi phí thuê nhân công là

- A. 15 triệu đồng. B. 11 triệu đồng. C. 13 triệu đồng. D. 17 triệu đồng.

Câu 43: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất

- A. $x = 8$. B. $x = 10$. C. $x = 15$. D. $x = 7$.

Câu 44: Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $200m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chi phí để xây bể là 300 nghìn đồng/ m^2 (chi phí được tính theo diện tích xung quanh, không tính chiều dày của đáy và thành bể). Hãy xác định chi phí thấp nhất để xây bể (làm tròn đến đơn vị triệu đồng)

- A. 75 triệu đồng. B. 51 triệu đồng. C. 36 triệu đồng. D. 46 triệu đồng.

Câu 45: Một sợi dây kim loại dài 60 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn đường kính r . Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ nào sau đây đúng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 46: Tìm trên mỗi nhánh của đồ thị (C): $y = \frac{4x-9}{x-3}$ các điểm $M_1; M_2$ để độ dài M_1M_2 đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất đó bằng:

- A. $2\sqrt{5}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{6}$. D. $3\sqrt{2}$.

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$				$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x+3)$ trên đoạn $[0;2]$

- A. 64. B. 65. C. 66. D. 67.

Câu 48: Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề **đúng**

- A. $M = m + \frac{3}{2}$. B. $M = \frac{3}{2}m$. C. $M = m + 1$. D. $M = m + \frac{2}{3}$.

Câu 49: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2}$ nhỏ hơn 2.

- A. 5. B. 3. C. 4. D. 6.

Câu 50: Gọi T là tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{\cos x + 3}$. Giá trị của T bằng bao nhiêu?

- A. $T = \sqrt{13}$. B. $T = \frac{\sqrt{113} - 3}{8}$. C. $T = \frac{3}{4}$. D. $T = -\frac{3}{4}$.

Câu 51: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

- A. $M = 2; m = \frac{1}{2^{2018}}$. B. $M = 1; m = \frac{1}{2^{2019}}$. C. $M = 1, m = 0$. D. $M = 1; m = \frac{1}{2^{2018}}$.

Câu 52: Hàm số $y = \frac{2x - m}{x + 1}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 1]$ bằng 1 khi

- A. $m = 1$. B. $m = 1$ và $m = 0$. C. $m \in \emptyset$. D. $m = 0$.

Câu 53: Cho hàm số $y = \frac{mx + 1}{2x - 1}$ (m là tham số, $m \neq -2$). Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[1; 3]$. Khi đó có bao nhiêu giá trị của m để $ab = \frac{1}{5}$.

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 54: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $\max_{[-2; 1]}(x^4 - 6mx^2 + m^2) = 16$. Số phần tử của S là?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 55: Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $\frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 1]$

- A. $m \geq 3$. B. $m \leq \frac{7}{2}$. C. $m \geq \frac{7}{2}$. D. $m \leq 3$.

Câu 56: Gọi m là giá trị để hàm số $y = \frac{x - m^2}{x + 8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0; 3]$ bằng -2 . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $3 < m < 5$. B. $m^2 \neq 16$. C. $|m| < 5$. D. $|m| = 5$.

Câu 57: Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 2.

- A. $m = 2$. B. $m = \frac{31}{27}$. C. $m > \frac{3}{2}$. D. $m = 1$.

Câu 58: Tìm tất cả các giá trị của $m > 0$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[m+1; m+2]$ luôn bé hơn 3.

- A. $m \in (0; 2)$. B. $m \in (0; 1)$. C. $m \in (1; +\infty)$. D. $m \in (0; +\infty)$.

Câu 59: Cho hàm số $y = x^3 + 3x + m$ (1), với m là tham số thực. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số (1) trên $[0; 1]$ bằng 4.

- A. $m = 4$. B. $m = -1$. C. $m = 0$. D. $m = 8$.

Câu 60: Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên $[0; 3]$ bằng 20. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $0 < m \leq 2$. B. $4 < m \leq 8$. C. $2 < m \leq 4$. D. $m > 8$.

Câu 61: Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+4}$ (m là tham số). Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ bằng -2 . Khi đó m thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(12; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(5; 12)$. D. $(0; 5)$.

Câu 62: Gọi S là tổng tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x - m + 1$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 1]$ bằng 9. Giá trị của S bằng

- A. $S = 5$. B. $S = -1$. C. $S = -5$. D. $S = 1$.

Câu 63: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2; 3]$ bằng $\frac{5}{6}$.

- A. $m = 3$ hoặc $m = \frac{2}{5}$. B. $m = 2$ hoặc $m = \frac{2}{5}$. C. $m = 3$ hoặc $m = \frac{3}{5}$. D. $m = 3$.

Câu 64: Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = 4\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2x - x^2$. Tính tích các nghiệm của phương trình $f(x) = M$.

- A. 2. B. 0. C. -1 . D. 1.

Câu 65: Tập hợp nào sau đây chứa tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 5?

- A. $(-6; -3) \cup (0; 2)$. B. $(-4; 3)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-5; -2) \cup (0; 3)$.

Câu 66: Gọi S tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng 4?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 67: Tập hợp nào dưới đây chứa được tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^4 - 8x^2 - m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 14?

A. $(-\infty; -5) \cup (-3; +\infty)$. B. $(-5; -2)$. C. $(-7; 1)$ D. $(-4; 2)$.

Câu 68: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - 9x + m|$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng 16. Số phần tử của S là

A. 0. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 69: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x + 1} \right|$ trên $[1; 2]$ bằng 2. Số phần tử của S là

A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 70: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. -210. B. -195. C. 105. D. 300.

Câu 71: Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-3; 3]$ sao cho $M \leq 2m$?

A. 3. B. 7. C. 6. D. 5.

Câu 72: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| \sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right|$

A. $\sqrt{2} - 1$. B. $2\sqrt{2} + 1$. C. $\sqrt{2} + 1$. D. $2\sqrt{2} - 1$.

Câu 73: Cho hàm số $f(x) = |8x^4 + ax^2 + b|$, trong đó a, b là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1. Hãy chọn khẳng định đúng?

A. $a < 0, b < 0$. B. $a > 0, b > 0$. C. $a < 0, b > 0$. D. $a > 0, b < 0$.

Câu 74: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x) = 2\sqrt{(x-1)(3-x)} - 2(\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})$ lần lượt là m, M . Tính $S = m + M$.

A. $S = -2 - 2\sqrt{2}$. B. $S = -5$. C. $S = -3 - 2\sqrt{2}$. D. $S = 1$.

Câu 75: Xét các số thực x, y không âm thỏa mãn điều kiện $x + y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x^2y^2 - 4xy$

A. $\min S = -3$. B. $\min S = -4$. C. $\min S = 0$. D. $\min S = 1$.

Câu 76: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2x + y = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức

$$P = \frac{2}{x} + \frac{1}{4y}$$

A. $P_{\min} = \frac{34}{5}$. B. $P_{\min} = \frac{65}{4}$. C. $P_{\min}$ không tồn tại. D. $P_{\min} = 5$.

Câu 77: Cho x, y là hai số thực tùy ý thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{y^2}{x+2}$.

- A. $4 - 2\sqrt{3}$. B. $\frac{8}{15}$. C. $\frac{21}{40}$. D. $5 - 2\sqrt{5}$.

Câu 78: Cho hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m thỏa mãn $f(x) \leq m$ với mọi $x \in [-1; 1]$

- A. $m \geq \sqrt{2}$. B. $m < 0$. C. $m = \sqrt{2}$. D. $m < \sqrt{2}$.

Câu 79: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2(\sqrt{3 - x} + \sqrt{y + 3})$. Tìm giá trị của biểu thức $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy$.

- A. $\min P = -80$. B. $\min P = -91$. C. $\min P = -83$. D. $\min P = -63$.

Câu 80: Biết rằng bất phương trình $m(|x| + \sqrt{1 - x^2} + 1) \leq 2\sqrt{x^2 - x^4} + \sqrt{x^2} + \sqrt{1 - x^2} + 2$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \in (-\infty; a\sqrt{2} + b]$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của $T = a + b$

- A. $T = 3$. B. $T = 2$. C. $T = 0$. D. $T = 1$.

Câu 81: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ và $\log(11 - 2x - y) = 2y + 4x - 1$. Xét biểu thức $P = 16yx^2 - 2x(3y + 2) - y + 5$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của P . Khi đó giá trị của $T = (4m + M)$ bằng bao nhiêu?

- A. 16. B. 18. C. 17. D. 19.

Câu 82: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x - y)^2$

- A. $\max P = 8$. B. $\max P = 16$. C. $\max P = 12$. D. $\max P = 4$.

Câu 83: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\log(x + 2y) = \log(x) + \log(y)$. Khi đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{1 + 2y} + \frac{4y^2}{1 + x} \text{ là:}$$

- A. 6. B. $\frac{32}{5}$. C. $\frac{31}{5}$. D. $\frac{29}{5}$.

Câu 84: Cho $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$ thỏa mãn $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) \text{ bằng}$$

- A. -10 . B. $-\frac{21}{4}$. C. $-\frac{23}{4}$. D. $\frac{23}{4}$.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Chọn C

$$y' = 3x^2 - 4x - 7; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{7}{3}(l) \end{cases}. \text{ Ta có } y(-2) = -1; y(-1) = 5; y(1) = -7$$

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số là 5.

Câu 2: Chọn A

Đồ thị hàm số có giá trị lớn nhất là 5 nên đáp án A sai.

Câu 3: Chọn D

$$\text{Đặt } t = x^2 \Rightarrow t \in [0; 1]. \text{ Khi đó } y = (4 - t)^2 + 1 = t^2 - 8t + 17$$

$$\text{Ta có } y' = 2t - 8 < 0 \Rightarrow \max y = y(0) = 17$$

Câu 4: Chọn B

$$y' = 3x^2 - 3 > 0 \Rightarrow \min = y(2) = 7$$

Câu 5: Chọn B

$$y' = -1 + \frac{4}{x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(l) \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{25}{6}; y(2) = -4; y(4) = -5 \Rightarrow \max = -4$$

Câu 6: Chọn B

$$y' = 3x^2 - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y(-1) = 3; y(1) = -1; y(4) = 53 \Rightarrow \min = -1$$

Câu 7: Chọn B

$$\text{Ta có } y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow \text{hàm số đồng biến} \Rightarrow \min = y(0) = -2$$

Câu 8: Chọn C

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{1 - (1 - x)^2} \leq 1 \text{ khi } x = 1$$

Câu 9: Chọn D

$$y' = 12x^2 - 24x + 9; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}(l) \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{16}; y\left(\frac{1}{2}\right) = 2; y(1) = 1 \Rightarrow \min = 1$$

Câu 10: Chọn C

$$y' = 3x^2 - 4x - 4; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{2}{3}(l) \end{cases}$$

Ta có $y(1) = 0; y(2) = -3; y(3) = 2 \Rightarrow \max = 2$

Câu 11: Chọn A

$$y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(l) \\ x = -3 \end{cases}$$

Ta có $y(-4) = -\frac{19}{3}; y(-3) = -6; y(-2) = -7 \Rightarrow \min = -7$

Câu 12: Chọn B

$$y' = 1 - \frac{4}{x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(l) \\ x = -2 \end{cases}$$

Ta có $y(-3) = -\frac{10}{3}; y(-2) = -3; y(-1) = -4 \Rightarrow \min = -4$.

Câu 13: Chọn C

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow M = f(3) = \frac{5}{4}, m = f(0) = -1 \Rightarrow M - m = \frac{9}{4}.$$

Câu 14: Chọn A

$$y' = 4x^3 - 2x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Ta có $y(-2) = 25; y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4}; y(0) = 13; y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4}; y(3) = 85 \Rightarrow \min = \frac{51}{4}$

Câu 15: Chọn B

$$y' = 3x^2 - 16x + 16; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4(l) \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Ta có $y(1) = 0; y\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{13}{27}; y(3) = -6 \Rightarrow \max = \frac{13}{27}$

Câu 16: Chọn A

Hàm số có 2 điểm cực trị

Câu 17: Chọn D

Ta có $M = f(0)$

Câu 18: Chọn C

$$y' = \frac{-7}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in (-1; 1) \Rightarrow m = y(1) = -4$$

Câu 19: Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} x \in (-1; 2) \\ y' = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \longrightarrow \begin{cases} y(-1) = 15 \\ y(2) = 6 \\ y(1) = -5 \end{cases}$$

Câu 20: Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} x \in (0; 4) \\ y' = 3x^2 + 4x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \longrightarrow \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(4) = 68 \\ y(1) = -4 \end{cases}$$

Câu 21: Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} x \in (-4; 4) \\ y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y(-4) = -70 \\ y(4) = -14 \\ y(3) = -21 \\ y(-1) = 11 \end{cases}$$

Câu 22: Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} x \in (-1; 2) \\ y' = 4x^3 - 12x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y(-1) = -1 \\ y(2) = -4 \\ y(0) = 4 \\ y(\sqrt{3}) = -5 \end{cases}$$

Câu 23: Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} x \in (-2; 3) \\ f'(x) = -4x^3 + 8x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y(-2) = -5 \\ y(3) = -50 \\ y(0) = -5 \\ y(\pm\sqrt{2}) = -1 \end{cases}$$

Câu 24: Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} x \in (-2; 1) \\ y' = -8x^3 + 8x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \longrightarrow \begin{cases} y(-2) = -11 \\ y(1) = 7 \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

Câu 25: Chọn C

$$y = 1 - \cos 2x - \sin 2x + 11 = 12 - (\sin 2x + \cos 2x) \leq 12 + \sqrt{1^2 + 1^2} = 12 + \sqrt{2}$$

Câu 26: Chọn A

Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất không có giá trị nhỏ nhất trên TXĐ của nó.

Câu 27: Chọn D

$$y' = \frac{1}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in (-1; 1) \Rightarrow M = y(1) = \frac{5}{3}; m = y(-1) = 1$$

Câu 28: Chọn B

$$f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in (1; 4) \Rightarrow \max_{[1;4]} f(x) = y(4) = \frac{2}{3}$$

Câu 29: Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} 5-4x \geq 5-4=1 \\ 5-4x \leq 5+4=9 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq y \leq 3 \Rightarrow M-m=3-1=2$$

Câu 30: Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} x \in (-4; 4) \\ y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y(-4) = -41 \\ y(4) = 15 \\ y(3) = 8 \\ y(-1) = 40 \end{cases}$$

Câu 31: Chọn C

$$y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in (-1; 1) \Rightarrow \min_{[-1;2]} y = y(-1); \max_{[-1;2]} y = y(1)$$

Câu 32: Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} y = (\sin x - 2)^2 - 9 \\ -3 \leq \sin x - 2 \leq -1 \end{cases} \Rightarrow y \geq 1 - 8 = -8$$

Câu 33: Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} y^2 = 8 + 2\sqrt{(x-1)(9-x)} \geq 8 \\ y \leq \sqrt{2(x-1+9-x)} = 4 \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{2} \leq y \leq 4$$

Câu 34: Chọn A

Tổng số tiền thu được khi bán x cuốn tạp chí là $2,5x + 10000$ (vạn đồng)

Chi phí sản xuất x cuốn tạp chí là $T(x) = C(x) + 0,6x$ (vạn đồng)

Lãi thu được $\pi = 2,5x + 10000 - 0,0001x^2 - 0,4x - 11000 = -0,0001x^2 + 2,1x - 1000 = f(x)$

$$f'(x) = -0,0003x^2 + 2,1 = 0 \Leftrightarrow x = 10500 \Rightarrow \text{Max} f(x) = f(10500) = 10025 \text{ (vạn đồng)}$$

Câu 35: Chọn D

Giả sử công ty tăng vé thêm x nghìn VNĐ thì số lượng khách sẽ giảm đi $50x$ người.

Khi đó doanh thu của công ty là: $T = (50 + x) \cdot (10000 - 50x) = 50(50 + x)(200 - x)$ (với $0 < x < 200$)

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức: } ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \Rightarrow (50+x)(200-x) \leq \left(\frac{50+x+200-x}{2} \right)^2 = 15625$$

Do đó $T_{\max} \Leftrightarrow 50 + x = 200 - x \Leftrightarrow x = 75$ nghìn VNĐ

Vậy công ty sẽ tăng giá vé thêm 75 nghìn VNĐ

Câu 36: Chọn D

Gọi chiều rộng, chiều dài, chiều cao của bể cá lần lượt là $x, 2x, y$ ($x, y > 0$)

Diện tích phần lấp kính là: $S = 2x^2 + 2xy + 2.2xy = 2x^2 + 6xy = 6,5 \Leftrightarrow xy = \frac{6,5 - 2x^2}{6} > 0$

$$\Leftrightarrow x < \sqrt{\frac{6,5}{2}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Thể tích của bể cá là: $V = 2x^3 = 2x \cdot \frac{6,5 - 2x^2}{6} = \frac{-4x^3 + 13x}{6}$ với $0 < x < \frac{\sqrt{13}}{2}$

Ta có: $V'(x) = \frac{-12x^2 + 13}{6} = 0 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{\frac{13}{12}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{39}}{6}$

Mặt khác $V(0) = V\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right) = 0; V\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right) = \frac{13\sqrt{39}}{6} \approx 1,5m^3$

Vậy $V_{\max} \approx 1,5m^3$

Câu 37: Chọn B

Gọi chiều rộng, chiều dài, chiều cao của bể cá lần lượt là $x, 2x, y$ ($x, y > 0$)

Diện tích phần lấp kính là: $S = 2x^2 + 2xy + 2.2xy = 2x^2 + 6xy = 5 \Leftrightarrow xy = \frac{5 - 2x^2}{6} > 0 \Rightarrow x < \sqrt{\frac{5}{2}}$

Thể tích của bể cá là: $V = 2x^3 = 2x \cdot \frac{5 - 2x^2}{6} = \frac{-2x^3 + 5x}{3}$ với $0 < x < \sqrt{\frac{5}{2}}$

Ta có: $V'(x) = \frac{-6x^2 + 5}{3} = 0 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{\frac{5}{6}}$

Mặt khác $V(0) = V\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = 0; V\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right) = \frac{5\sqrt{30}}{27} \approx 1,01m^3$

Vậy $V_{\max} \approx 1,01m^3$

Câu 38: Chọn A

Gọi chiều rộng, chiều dài, chiều cao của bể cá lần lượt là $x, 2x, y$ ($x, y > 0$)

Diện tích phần lấp kính là: $S = 2x^2 + 2xy + 2.2xy = 2x^2 + 6xy = 6,7 \Leftrightarrow xy = \frac{6,7 - 2x^2}{6} > 0$

$\Rightarrow x < \sqrt{\frac{6,7}{2}}$. Thể tích của bể cá là: $V = 2x^3 = 2x \cdot \frac{6,7 - 2x^2}{6} = \frac{-2x^3 + 6,7x}{3}$ với $0 < x < \sqrt{\frac{6,7}{2}}$

Ta có: $V'(x) = \frac{-6x^2 + 6,7}{3} = 0 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{\frac{6,7}{6}}$

Mặt khác $V(0) = V\left(\sqrt{\frac{6,7}{2}}\right) = 0; V\left(\sqrt{\frac{6,7}{6}}\right) \approx 1,57m^3$

Vậy $V_{\max} \approx 1,57m^3$

Câu 39: Chọn C

Xét hàm số $S(t) = \frac{1}{50}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 36t - 270$ với $1 \leq t \leq 30$

$$\text{Ta có: } S'(t) = \frac{3t^2}{50} - 3t + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 30 \\ t = 20 \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } S(1) = -\frac{5887}{25}, S(20) = 10, S(30) = 0$$

Từ đó suy ra ngày thứ 20 có số lượng hồ sơ nhiều nhất.

Câu 40: Chọn A

$$\text{Vụ đầu tiên cân nặng trung bình của mỗi con cá là: } \frac{1500}{50 \cdot 20} = 1,5 \text{ kg}$$

Giả sử vụ sau bác Tôm giảm đi $8x \text{ con/m}^2$ thì tương ứng mỗi con cá trung bình tăng thêm $0,5x \text{ kg}$. (Quy ước $x > 0$ là giảm, nếu $x < 0$ là tăng)

$$\text{Khi đó số kg cá bác Tôm thu được là: } 50 \cdot (20 - 8x) \cdot (1,5 + 0,5x) = 25(20 - 8x)(3 + x)$$

$$= 25(-8x^2 - 4x + 60) \text{ lớn nhất } \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{-16} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Khi đó cần tăng } 8 \cdot \frac{1}{4} = 2 \text{ con/m}^2$$

$$\text{Vậy vụ tới bác Tôm cần phải nuôi } (20 + 2) \cdot 50 = 1100 \text{ con}$$

Câu 41: Chọn C

$$\text{Chi phí xây hồ là } 500.000 \text{ đồng/m}^2 = 0,5 \text{ triệu đồng/m}^2$$

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật đáy bể là $x \text{ (m)}$ suy ra chiều dài của hình chữ nhật là $2x \text{ (m)}$

$$\text{Gọi } h \text{ là chiều cao của bể nên ta có } V = S \cdot h = 2x^2 \cdot h = 288 \Rightarrow x^2 \cdot h = 144 \Leftrightarrow h = \frac{144}{x^2}$$

$$\text{Diện tích của bể là } S = 2 \cdot h \cdot x + 2 \cdot 2h \cdot x + 2x^2 = 2x^2 + 6 \cdot hx = 2x^2 + 6 \cdot \frac{144}{x^2} \cdot x = 2x^2 + \frac{864}{x}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có } 2x^2 + \frac{500}{x} = 2x^2 + \frac{432}{x} + \frac{432}{x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{432}{x} \cdot \frac{432}{x}} = 216$$

$$\text{Dấu = xảy ra khi } 2x^2 = \frac{432}{x} \Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow \text{chi phí thấp nhất thuê nhân công là } 216 \cdot 0,5 = 108 \text{ triệu đồng.}$$

Câu 42: Chọn A

$$\text{Chi phí xây hồ là } 100.000 \text{ đồng/m}^2 = 0,1 \text{ triệu đồng/m}^2$$

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật đáy bể là $x \text{ (m)}$ suy ra chiều dài của hình chữ nhật là $2x \text{ (m)}$

$$\text{Gọi } h \text{ là chiều cao của bể nên ta có } V = S \cdot h = 2x^2 \cdot h = \frac{500}{3} \Rightarrow x^2 \cdot h = \frac{250}{3} \Leftrightarrow h = \frac{250}{3x^2}$$

$$\text{Diện tích của bể là } S = 2 \cdot h \cdot x + 2 \cdot 2h \cdot x + 2x^2 = 2x^2 + 6 \cdot hx = 2x^2 + 6 \cdot \frac{250}{3x^2} \cdot x = 2x^2 + \frac{500}{x}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có $2x^2 + \frac{500}{x} = 2x^2 + \frac{250}{x} + \frac{250}{x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{250}{x} \cdot \frac{250}{x}} = 150$

Dấu = xảy ra khi $2x^2 = \frac{250}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{125} \Rightarrow$ chi phí thấp nhất thuê nhân công là $150 \cdot 0,1 = 15$ triệu đồng.

Câu 43: Chọn B

Xét $G(x)$ trên đoạn $[0;15]$

Ta có: $G(x) = 0,035(15x^2 - x^3) \Rightarrow G'(x) = 0,035(30x - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases}$

Mặt khác $G(0) = G(15) = 0, G(10) = 17,5 \Rightarrow \underset{[0;15]}{Max} G(x) = 17,5 \Leftrightarrow x = 10$

Câu 44: Chọn B

Chi phí xây hồ là $300.000 \text{ đồng/m}^2 = 0,3 \text{ triệu đồng/m}^2$

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật đáy bể là $x \text{ (m)}$ suy ra chiều dài của hình chữ nhật là $2x \text{ (m)}$

Gọi h là chiều cao của bể nên ta có $V = S.h = 2x^2.h = 200 \Rightarrow x^2.h = 200 \Leftrightarrow h = \frac{100}{x^2}$

Diện tích của bể là $S = 2.h.x + 2.2.h.x + 2x^2 = 2x^2 + 6h.x = 2x^2 + 6 \cdot \frac{100}{x^2}x = 2x^2 + \frac{600}{x}$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$S = 2x^2 + \frac{600}{x} = 2x^2 + \frac{300}{x} + \frac{300}{x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{300}{x} \cdot \frac{300}{x}} = 3\sqrt[3]{300^2 \cdot 2} = S_{\min}$

Dấu = xảy ra khi $2x^2 = \frac{300}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{150} \Rightarrow$ chi phí thấp nhất thuê nhân công là $S_{\min} \cdot 0,3 \approx 50,8$ triệu đồng.

Câu 45: Chọn B

Đoạn thứ nhất có độ dài là $4a$ và đoạn thứ 2 có độ dài là $2\pi r$

Ta có $4a + 2\pi r = 60 \Rightarrow a = \frac{30 - \pi r}{2}$, tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là

$S = a^2 + \pi r^2 = \left(\frac{30 - \pi r}{2}\right)^2 + \pi r^2 = f(r)$

Ta có: $f'(r) = 2\left(\frac{30 - \pi r}{2}\right) \cdot \frac{-\pi}{2} + 2\pi r = \frac{-30\pi + \pi^2 r + 4\pi r}{2} = 0 \Leftrightarrow r = \frac{30}{\pi + 4}$

Khi đó $S = f(r)$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow r = \frac{30}{\pi + 4}$. Suy ra $\frac{a}{r} = \frac{30 - \pi r}{2} : \frac{30}{\pi + 4} = 2$

Câu 46: Chọn C

$y = \frac{4x - 9}{x - 3} = \frac{4(x - 3) + 3}{x - 3} = 4 + \frac{3}{x - 3}$

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 3$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ lần lượt là 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C) ta có: $x_1 < 3 < x_2$

$$\text{Đặt } x_1 = 3 - a, x_2 = 3 + b (a, b > 0) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4 - \frac{3}{a} \\ y_2 = 4 + \frac{3}{b} \end{cases} \Rightarrow AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$= (a + b)^2 + 9 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 = (a + b)^2 \left(1 + \frac{9}{(ab)^2} \right)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (a + b)^2 \geq 4ab \\ 1 + \frac{9}{a^2 b^2} \geq 2\sqrt{\frac{9}{a^2 b^2}} = \frac{6}{ab} \end{cases} \Rightarrow AB^2 \geq 4ab \cdot \frac{6}{ab} = 24 \Rightarrow AB \geq 2\sqrt{6}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \frac{9}{ab} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 3$$

Câu 47: Chọn C

Dựa vào BBT ta có: $y' = kx(x+1)(x-1) = kx(x^2 - 1) = k(x^3 - x)$

$$\text{Suy ra } y = k \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) + 3 \text{ do } y(0) = 3$$

$$\text{Mặt khác } y(1) = 2 \Rightarrow k \cdot \frac{-1}{4} + 3 = 2 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow y = x^4 - 2x^2 + 3$$

$$\text{Đặt } g(x) = f(x+3) \Rightarrow g'(x) = f'(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = -1 \\ x+3 = 0 \\ x+3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Suy ra $g'(x)$ vô nghiệm trên đoạn $[0; 2]$

$$\text{Mặt khác } g(0) = f(3) = 66, g(2) = f(5) = 578 \Rightarrow \min_{[0; 2]} f(x+3) = 66$$

Câu 48: Chọn B

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow t \in [0; 1]$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1} \Rightarrow f'(t) = \frac{t^2+t+1 - (2t+1)(t+1)}{(t^2+t+1)^2} = \frac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2} \leq 0 \quad (\forall t \in [0; 1])$$

$$\text{Mặt khác } g(0) = 1; f(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow M = 1, m = \frac{2}{3} \Rightarrow M = \frac{3}{2}m$$

Câu 49: Chọn A

$$y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2} \Leftrightarrow m \sin x + 1 = y \cos x + 2y \Leftrightarrow m \sin x - y \cos x = 2y - 1 (*)$$

$$\text{Phương trình } (*) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow m^2 + y^2 \geq (2y - 1)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0 (1)$$

$$\text{Ta có } \Delta_y = 4 - 3(1 - m^2) = 3m^2 + 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{3m^2 + 1}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{3m^2 + 1}}{3}$$

$$\text{Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số là } \frac{2 + \sqrt{3m^2 + 1}}{3}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow \frac{2 + \sqrt{3m^2 + 1}}{3} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{3m^2 + 1} < 4 \Leftrightarrow m^2 < 5 \Leftrightarrow -\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$$

$$\text{Kết hợp } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-2; -1; 0; 1; 2\} \Rightarrow \text{có 5 giá trị của } m$$

Câu 50: Chọn D

$$y = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{\cos x + 3} \Leftrightarrow 2 \sin x + 3 \cos x = y \cos x + 3y \Leftrightarrow 2 \sin x + (3 - y) \cos x = 3y \quad (*)$$

$$\text{Phương trình } (*) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow 2^2 + (3 - y)^2 \geq 9y^2 \Leftrightarrow 8y^2 + 6y - 13 \leq 0$$

$$\frac{-3 - \sqrt{113}}{8} \leq y \leq \frac{-3 + \sqrt{113}}{8} \Rightarrow T = \frac{-3}{4}$$

Câu 51: Chọn A

$$\text{Xét hàm số } y = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x$$

$$\text{Do } \sin^{2018} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \cos^{2018} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x \Rightarrow \text{Hàm số tuần hoàn với chu kỳ } \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ta xét hàm số } y = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x \text{ trên đoạn } \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{Ta có: } y' = 2018 \cdot \sin^{2017} x \cdot \cos x - 2018 \cos^{2017} x \cdot \sin x = 2018 \sin x \cos x (\sin^{2016} x - \cos^{2016} x)$$

$$\text{Khi đó: } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \sin^2 x = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow x = \left\{ 0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\text{Lại có: } y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2^{1009}} + \frac{1}{2^{1009}} = \frac{1}{2^{1008}}$$

$$\text{Do đó } M = 2, m = \frac{1}{2^{2018}}$$

Câu 52: Chọn D

$$\text{Ta có } y' = \frac{2 + m}{(x + 1)^2}. \text{ Hàm số luôn đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến trên đoạn } [0; 1])$$

$$\text{Yêu cầu bài toán thỏa mãn } \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2 + m > 0 \\ y(1) = \frac{2 - m}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0 \\ \begin{cases} 2 + m < 0 \\ y(0) = -m = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Câu 53: Chọn B

Hàm số $y = \frac{mx+1}{2x-1}$ luôn đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến trên đoạn $[1;3]$ với $m \neq -2$)

$$\text{Do đó } ab = y(1).y(3) = \frac{m+1}{1} \cdot \frac{3m+1}{5} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow (m+1)(3m+1) = 1 \Leftrightarrow 3m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Câu 54: Chọn A

$$\text{Xét hàm số } y = x^4 - 6mx^2 + m^2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 12mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 3m \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } y(-2) = 16 - 24m + m^2; y(1) = 1 - 6m + m^2, y(0) = m^2$$

$$\blacksquare \text{ TH1: Với } m \leq 0 \Rightarrow \max_{[-2;1]} y = y(-2) = m^2 + 16 - 24m = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 24 \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp } m \leq 0 \Rightarrow m = 0$$

$\blacksquare \text{ TH2:}$ Dựa vào dạng đồ thị hàm bậc 4 trùng phương có hệ số $a = 1 > 0$ suy ra với $3m > 0$ thì

$$\begin{cases} \text{Max}_{[-2;1]} y = y(0) \\ \text{Max}_{[-2;1]} y = y(-2) \end{cases}$$

$$+) \text{ Với } \text{Max}_{[-2;1]} y = y(0) = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4 \xrightarrow{m > 0} m = 4 \Rightarrow y(-2) = -64 < 16 \Rightarrow m = 4 \text{ là một giá trị cần tìm.}$$

$$+) \text{ Với } \text{Max}_{[-2;1]} y = y(-2) = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 24 \end{cases} \xrightarrow{m > 0} m = 24 \Rightarrow y(0) = 576 > 16 \Rightarrow \text{Loại } m = 24$$

Vậy $m = 0, m = 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 55: Chọn A

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} \text{ với } x \in [0;1]$$

$$\text{Ta có: } g(x) = \frac{x^2 + 3x + 2 + 1}{x + 1} = x + 2 + \frac{1}{x + 1} \Rightarrow g'(x) = 1 - \frac{1}{(x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2(I) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } g(0) = 3, g(1) = \frac{7}{2} \Rightarrow \text{Max}_{[0;1]} g(x) = \frac{7}{2}, \text{Min}_{[0;1]} g(x) = 3$$

$$\text{Ta có: } \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} \geq m (\forall x \in [0;1]) \Leftrightarrow \text{Min}_{[0;1]} g(x) \geq m \Leftrightarrow m \leq 3$$

Câu 56: Chọn C

$$y' = \frac{8 + m^2}{(x + 8)^2} > 0 \text{ với mọi } x \in [0;3] \Rightarrow \text{Hàm số đồng biến trên đoạn } [0;3]$$

$$\text{Khi đó } \text{Min}_{[0;3]} y = y(0) = \frac{-m^2}{8} = -2 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow |m| = 4$$

Câu 57: Chọn D

Ta có
$$\begin{cases} y(0) = 6 \\ y(3) = 33 - 27m \end{cases}$$

Mặt khác $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases} \Rightarrow y(2m) = -4m^2 + 6$

TH1: $33 - 27m = 2 \Leftrightarrow m = \frac{31}{27} \Rightarrow \begin{cases} 2m \in [0; 3] \\ y(2m) = \frac{530}{729} < 2 \end{cases}$ (loại)

TH2: $\begin{cases} -4m^2 + 6 = 2 \\ 2m \in [0; 3] \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow y(3) = 9 > 2$ (thỏa mãn)

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 58: Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 3 = 0$

Do $x \in [m+1; m+2]$ và $m > 0$ nên $y' = 3(x^2 - 1) > 0 \forall x \in [m+1; m+2]$

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên đoạn $[m+1; m+2]$

Ta có: $\min_{[m+1; m+2]} y < 3 \Leftrightarrow y(m+1) < 3 \Leftrightarrow (m+1)^3 - 3(m+1) + 1 < 3 \Leftrightarrow m^3 + 3m^2 - 4 < 0$

$\Leftrightarrow (m-1)(m+2)^2 < 0 \Leftrightarrow m < 1$

Câu 59: Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 + 3 > 0 (\forall x \in [0; 4])$ do đó hàm số đã cho đồng biến trên đoạn $[0; 1]$

Do đó $\max_{[0; 1]} y = y(1) = m + 4 = 4 \Leftrightarrow m = 0$

Câu 60: Chọn C

$y' = m - \frac{36}{(x+1)^2} = \frac{m(x+1)^2 - 36}{(x+1)^2}$ và $y(0) = 36 \neq 20$

TH1: Phương trình $y' = 0$ không có nghiệm $x \in [0; 3]$ (khi này hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng $[0; 3]$)

Do $y(0) = 36 > 20$ nên bắt buộc trong trường hợp này hàm số phải nghịch biến trên khoảng $[0; 3]$

Nếu $y' < 0 (\forall x \in [0; 3]) \Rightarrow \min_{[0; 3]} y = y(3) = 3m + 9 = 20 \Leftrightarrow m = \frac{11}{3}$

Thay $m = \frac{11}{3} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{108}{11}$ có nghiệm $x \in [0; 3]$ nên loại trường hợp này

TH2: Phương trình $y' = 0$ có nghiệm $x \in [0; 3]$

Khi đó $m > 0$ ta có: $mx + \frac{36}{x+1} = m(x+1) + \frac{36}{x+1} - m \geq 12\sqrt{m} - m$

$$\text{Đầu bằng xảy ra} \Leftrightarrow m(x+1) = \frac{36}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{36}{m}$$

Bài toán thỏa mãn khi $12\sqrt{m} - m = 20$ và phương trình $(x+1)^2 = \frac{36}{m}$ có nghiệm $x \in [0;3]$

$$\text{Giải } 12\sqrt{m} - m = 20 \Leftrightarrow m - 12\sqrt{m} + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m} = 10 \\ \sqrt{m} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 100 \\ m = 4 \end{cases}$$

Để phương trình $(x+1)^2 = \frac{36}{m}$ có nghiệm $x \in [0;3]$ thì $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 61: Chọn C

Ta có $y' = \frac{4+m}{(x+4)^2}$. Hàm số luôn đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến trên đoạn $[0;3]$)

$$\text{Yêu cầu bài toán thỏa mãn} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 4+m > 0 \\ y(0) = \frac{-m}{4} = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} 4+m < 0 \\ y(3) = \frac{3-m}{7} = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m = 8$$

Câu 62: Chọn B

$y' = 3x^2 + m^2 + 1 > 0 (\forall x \in [0;1])$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $[0;1]$

Khi đó $\underset{[0;1]}{Max} y = y(1) = 1 + m^2 + 1 - m + 1 = m^2 - m + 3 = 9 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Rightarrow m_1 + m_2 = 1$

Câu 63: Chọn D

$y' = \frac{m^3 - 1}{(x+m^2)^2}$. Hàm số luôn đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến trên đoạn $[-2;3]$)

$$\text{Yêu cầu bài toán thỏa mãn} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m^3 - 1 > 0 \\ y(3) = \frac{3m+1}{3+m^2} = \frac{5}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} m^3 - 1 < 0 \\ y(0) = \frac{1}{m^2} = \frac{5}{6} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m > 1 \\ 5m^2 + 15 = 18m + 6 \end{cases} \\ \begin{cases} m > 1 \\ m = \pm \sqrt{\frac{5}{6}} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

Câu 64: Chọn C

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 3} = \sqrt{(x-1)^2 + 2} \Rightarrow t \in [\sqrt{2}; +\infty), x^2 - 2x = t^2 - 3$

Khi đó xét hàm số $f(t) = 4t - t^2 + 3$ với $t \in [\sqrt{2}; +\infty)$

Ta có: $f(t) = -(t-2)^2 + 7 \leq 7$ với mọi $t \in [\sqrt{2}; +\infty)$

Do đó $f(x) = M \Leftrightarrow f(t) = 7 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 = -1$

Câu 65: Chọn D

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x + m$ trên $[-1; 2]$, $f'(x) = 2x - 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Tính $f(-1) = m + 3$; $f(1) = m - 1$; $f(2) = m \longrightarrow \max_{[-1; 2]} y = \{|m + 3|; |m - 1|\}$

TH1: Với $\max_{[-1; 2]} y = |m + 3| \longrightarrow \begin{cases} |m + 3| = 5 \\ |m + 3| \geq |m - 1| \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

TH2: Với $\max_{[-1; 2]} y = |m - 1| \longrightarrow \begin{cases} |m - 1| = 5 \\ |m + 3| \leq |m - 1| \end{cases} \Leftrightarrow m = -4$

Vậy $m = 2$; $m = -4$ là hai giá trị cần tìm

Câu 66: Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2x + m - 4$ trên $[-2; 1]$, $f'(x) = 2x + 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Tính $f(-2) = m - 4$; $f(-1) = m - 5$; $f(1) = m - 1 \longrightarrow \max_{[-2; 1]} y = \{|m - 5|; |m - 1|\}$

TH1: Với $\max_{[-2; 1]} y = |m - 5| \longrightarrow \begin{cases} |m - 5| = 4 \\ |m - 5| \geq |m - 1| \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

TH2: Với $\max_{[-2; 1]} y = |m - 1| \longrightarrow \begin{cases} |m - 1| = 4 \\ |m - 5| \leq |m - 1| \end{cases} \Leftrightarrow m = 5$

Vậy $m = 1$; $m = 5$ là hai giá trị cần tìm.

Câu 67: Chọn A

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 8x^2 + m$ trên $[0; 3]$, có $f'(x) = 4x^3 - 16x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Tính $f(0) = -m$; $f(2) = -16 - m$; $f(3) = -9 - m \longrightarrow \max_{[0; 3]} y = \{|m + 16|; |m|\}$

TH1: Với $\max_{[0; 3]} y = |m + 16| \longrightarrow \begin{cases} |m + 16| = 14 \\ |m + 16| \geq |m| \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$

TH2: Với $\max_{[0; 3]} y = |m| \longrightarrow \begin{cases} |m| = 14 \\ |m + 16| \leq |m| \end{cases} \Leftrightarrow m = -14$

Vậy $m = -2$; $m = -14$ là hai giá trị cần tìm.

Câu 68: Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ trên $[-2; 4]$, có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Tính $f(-2) = m - 2$; $f(2) = m - 27$; $f(3) = m - 20 \longrightarrow \max_{[-2; 4]} y = \{|m - 27|; |m - 2|\}$

TH1: Với $\max_{[-2; 4]} y = |m - 27| \longrightarrow \begin{cases} |m - 27| = 16 \\ |m - 27| \geq |m - 2| \end{cases} \Leftrightarrow m = 11$

TH2: Với $\max_{[-2;4]} y = |m-2| \longrightarrow \begin{cases} |m-2| = 16 \\ |m-27| \leq |m-2| \end{cases} \Leftrightarrow m = 18$

Vậy $m = 11, m = 18$ là hai giá trị cần tìm.

Câu 69: Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 + mx + m}{x+1}$ trên $[1;2]$, có $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} > 0; \forall x \neq -1$

Tính $f(1) = \frac{2m+1}{2}; f(2) = \frac{3m+4}{3} \longrightarrow \max_{[1;2]} y = \left\{ \left| \frac{2m+1}{2} \right|; \left| \frac{3m+4}{3} \right| \right\}$

TH1: Với $\max_{[1;2]} y = \left| \frac{2m+1}{2} \right| \longrightarrow \begin{cases} \left| \frac{2m+1}{2} \right| = 2 \\ \left| \frac{2m+1}{2} \right| \geq \left| \frac{3m+4}{3} \right| \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}$

TH2: Với $\max_{[1;2]} y = \left| \frac{3m+4}{3} \right| \longrightarrow \begin{cases} \left| \frac{3m+4}{3} \right| = 2 \\ \left| \frac{2m+1}{2} \right| \leq \left| \frac{3m+4}{3} \right| \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$

Vậy $m = -\frac{5}{2}; m = \frac{2}{3}$ là giá trị cần tìm.

Câu 70: Chọn A

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m$ trên $[0;2]$, có $\begin{cases} f'(x) = x^3 - 19x + 30 \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$

Tính $f(0) = m; f(2) = m + 26 \Rightarrow \max_{[0;2]} y = \max_{[0;2]} \{|m|; |m+26|\}$

- Với $\max_{[0;2]} y = |m| \Rightarrow \begin{cases} |m| \leq 20 \\ |m| \geq |m+26| \end{cases} \longrightarrow m = \{-20; -19; -18; \dots; -13\}$

- Với $\max_{[0;2]} y = |m+26| \Rightarrow \begin{cases} |m+26| \leq 20 \\ |m| \leq |m+26| \end{cases} \longrightarrow m = \{-13; -12; -11; \dots; -6\}$

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m là -210 .

Câu 71: Chọn D

Xét hàm số $u(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ trên $[0;2]$, có $u'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

Phương trình $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{0; 1; 2\}$. Khi đó $u(0) = u(2) = a; u(1) = a+1$

Suy ra $\max_{[0;2]} f(x) = \{|a|; |a+1|\}$ và $\min_{[0;2]} f(x) = \{|a|; |a+1|\}$

TH1: Với $a = 0$, ta thấy $\begin{cases} \min_{[0;2]} f(x) = 0 \\ \max_{[0;2]} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = 0 \end{cases}$ (không TMĐK)

TH2: Với $a > 0$, ta thấy $\begin{cases} \min_{[0;2]} f(x) = |a| \\ \max_{[0;2]} f(x) = |a+1| \end{cases}$ mà $M \leq 2m \Rightarrow |a+1| \leq 2|a| \Leftrightarrow a \geq 1$

Kết hợp điều kiện $a \in [-3; 3]$ và $a \in \mathbb{Z} \longrightarrow a = \{1; 2; 3\}$

TH3: Với $a < 0$, ta có $\begin{cases} \min_{[0;2]} f(x) = |a+1| \\ \max_{[0;2]} f(x) = |a| \end{cases}$ mà $M \leq 2m \Rightarrow |a| \leq 2|a+1| \Leftrightarrow a \leq -2$

Kết hợp điều kiện $a \in [-3; 3]$ và $a \in \mathbb{Z} \longrightarrow a = \{-3; -2\}$

Vậy có 5 giá trị nguyên của a .

Câu 72: Chọn D

Ta có $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$ nên $y = \left| \sin x + \cos x + \frac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x \cdot \cos x} \right|$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ nên $\sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

Do đó $y = \left| t + \frac{2(1+t)}{t^2 - 1} \right| = \left| t + \frac{2}{t-1} \right| \longrightarrow \min_{[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]} y = 2\sqrt{2} - 1$

Câu 73: Chọn C

Xét $\begin{cases} g(x) = 8x^4 + ax^2 + b \\ h(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow k(x) = g(x) - h(x) = (a+8)x^2 + b-1$

Theo giả thiết, ta có $\max_{[-1;1]} |g(x)| = 1 \Rightarrow |g(x)| \leq 1, \forall x \in [-1;1] \Rightarrow g(x) \in [-1;1]$

Khi đó $k(-1) \leq 0, k\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq 0, k(0) \leq 0, k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq 0$ và $k(1) \leq 0$

Suy ra $k(x) = 0$ có 4 nghiệm trên đoạn $[-1;1]$ mà $k(x)$ là đa thức bậc 2 $\Rightarrow k(x) \equiv 0$

Vậy $a = -8, b = 1$

Câu 74: Chọn B

Ta có $(\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})^2 = 2 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} \geq \sqrt{2}$

$\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} \leq \sqrt{2(x-1+3-x)} = 2$

$\longrightarrow t = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} \in [\sqrt{2}; 2] \longrightarrow g(t) = t^2 - 2 - 2t = (t-1)^2 - 3 \geq -3 \Rightarrow m = -3$

$g(t) = t(t-2) - 2 \leq -2 \Rightarrow M = -2 \Rightarrow S = -5$

Câu 75: Chọn A

Ta có $S = x^2(2-x)^2 - 4x(2-x) = (x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) = f(x), x \in [0; 2]$

$$f'(x) = 2(x^2 - 2x)(2x - 2) + 4(2x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\longrightarrow f(0) = 0; f(2) = 0; f(1) = -3 \Rightarrow \min S = -3$$

Câu 76: Chọn D

$$P \cdot \frac{5}{4} = (2x + y) \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{4y} \right) = \frac{17}{4} + \frac{x}{2y} + \frac{2y}{x} \geq \frac{17}{4} + 2 = \frac{25}{4} \Rightarrow P \geq 5$$

Câu 77: Chọn A

$$A = \frac{1-x^2}{x+2} = f(x), x \in [-1; 1] \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x(x+2) - (1-x^2)}{(x+2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3} - 2 \longrightarrow f(-1) = f(1) = 0; f(\sqrt{3} - 2) = 4 - 2\sqrt{3}$$

Câu 78: Chọn A

$$f(x) \leq \sqrt{2[x^2 + (1-x^2)]} = \sqrt{2} \longrightarrow m \geq \sqrt{2}$$

Câu 79: Chọn C

Ta có $x + y > 0$

$$(x+y)^2 = 4(x+y) + 8\sqrt{(x-3)(y+3)} \geq 4(x+y) \Rightarrow x+y \geq 4$$

$$x+y \leq 2\sqrt{2(x-3+y+3)} = 2\sqrt{2(x+y)} \Rightarrow x+y \leq 8$$

$$(x+3)(y+3) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq -3(x+y) - 9$$

$$\Rightarrow P = 4(x+y)^2 + 7xy \geq 4t^2 - 21t - 63 = f(t); t = x+y \in [4; 8] \Rightarrow P_{\min} = f(7) = -83$$

Câu 80: Chọn D

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2} + \sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{2(x^2 + 1-x^2)} = \sqrt{2}$$

$$t^2 = 1 + \sqrt{x^2(1-x^2)} \geq 1 \Rightarrow t \geq 1 \Rightarrow m \leq \frac{t^2 - 1 + t + 2}{t+1} = t + \frac{1}{t+1} = f(t); t \in [1; \sqrt{2}]$$

$$\Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)^2} > 0, \forall x \in (1; \sqrt{2}) \Rightarrow f(t) \leq f(\sqrt{2}) = -1 + 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 2, b = -1$$

Câu 81: Chọn A

$$\text{Ta có } 11 - 2x - y = 10^{2(2x+y)-1} \longrightarrow t = 2x + y \Rightarrow 10^{2t-1} + t = 11$$

$$\text{Hàm đồng biến } \Rightarrow t = 1 \Rightarrow y = 1 - 2x \Rightarrow P = 16x^2(1-2x) - 2x(3-6x+2) + 2x - 1 + 5$$

$$\Rightarrow P = -32x^3 + 28x^2 - 8x + 4 = f(x); x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow f'(x) = -96x^2 + 56x - 8 \Rightarrow x = \frac{1}{3}; x = \frac{1}{4}$$

$$\longrightarrow f(0) = 4; f\left(\frac{1}{2}\right) = 3; f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{88}{27}; f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{4} \Rightarrow M = 4; m = 3$$

Câu 82: Chọn C

$$\text{Ta có } \frac{P}{4} = \frac{(x-y)^2}{x^2+2xy+3y^2} = \frac{(t-1)^2}{t^2+2t+3} = f(t)$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{2(t-1)(t^2+2t+3) - (t-1)^2(2t+2)}{(t^2+2t+3)^2} = 0$$

$$\longrightarrow t^2+2t+3 = (t-1)(t+1) = t^2-1 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow P_{\max} = 4f(-2) = 12$$

Câu 83: Chọn B

$$\text{Ta có } x+2y=xy \geq 2\sqrt{2xy} \Rightarrow xy \geq 8 \Rightarrow x+2y \geq 8$$

$$\longrightarrow P \geq \frac{(x+2y)^2}{(1+2y)+(1+x)} = \frac{(x+2y)^2}{x+2y+2} \geq \frac{8^2}{8+2} = \frac{32}{5}$$

Câu 84: Chọn C

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 = (a+b)\left(1 + \frac{2}{ab}\right) = a+b + \frac{2}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = 2\sqrt{2\left(2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \Rightarrow t \geq \frac{5}{2} \longrightarrow P = 4(t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18 = f(t)$$

$$f'(t) = 12t^2 - 18t - 12 = 0 > 0, \forall t > \frac{5}{2} \Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{23}{4}$$