

BÀI TẬP VD - VDC**GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ, GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ VÀ HÀM SỐ LIÊN TỤC**

- Strong Team Toán VD - VDC -

I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Gọi S là tập hợp các tham số nguyên a thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{n+2} + a^2 - 4a \right) = 0$. Tổng các phần tử của S bằng:

- A.** 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 2. Tìm tất cả giá trị nguyên của a thuộc $(0; 2020)$ để $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} \leq \frac{1}{16}$.

- A.** 2019. **B.** 2018. **C.** 2017. **D.** 2016.

Câu 3. Cho $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an^2 - n)(2n - 1)}{(1 + bn^2)(5 - 3n)} = 3$ với $a, b \neq 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** $a = -\frac{9b}{2}$. **B.** $b = -9a$. **C.** $a = 9b$. **D.** $b = -3a$.

Câu 4. Cho $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an^2 + 1} + \sqrt{an^2 + 5}}{1 - 4n} = -5$ với $a > 0$. Tính giá trị biểu thức $P = a + \sqrt{a}$.

- A.** 90. **B.** 110. **C.** 100. **D.** 10.

Câu 5. Cho dãy số $u_1 = \frac{3}{2}$ và $u_{n+1} = \frac{3u_n}{(n+2)u_n + 3}$. Giới hạn của dãy số $x_n = \sum_{i=1}^n u_i$ bằng:

- A.** $\lim x_n = 6$. **B.** $\lim x_n = 11$. **C.** $\lim x_n = \frac{11}{6}$. **D.** $\lim x_n = \frac{11}{3}$.

Câu 6. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 2020 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 5}{2(u_n + 2)}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây **sai** về dãy $\{u_n\}$?

- A.** $\{u_n\}$ là dãy số giảm. **B.** $\{u_n\}$ bị chặn dưới. **C.** $\lim u_n = \frac{5}{4}$. **D.** $\lim u_n = 1$.

Câu 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức:

$$\begin{cases} u_1 = 2021 \\ u_{n+1} = \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right] u_n + \frac{2020}{(n+1)^2}, \forall n \geq 1 \end{cases} \text{ Khi đó } \lim u_n \text{ bằng:}$$

- A. 2020. B. $\frac{2021}{2}$. C. 4041. D. $\frac{4041}{2}$.

Câu 8. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,11272727\dots$ được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$, trong đó a và b là các số nguyên dương. Tính $5a - b$.

- A. 120. B. -430. C. 430. D. -120.

Câu 9. Cho dãy số (u_n) với $u_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$. Tính $\lim u_n$.

- A. $-\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{4}$.
C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 10. Thả một quả bóng cao su từ độ cao $60m$ so với mặt đất, mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{3}$ độ cao lần rơi trước. Biết rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt đất. Tổng độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A. (113m;115m). B. (115m;117m). C. (117m;119m). D. (119m;121m).

Câu 11. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC .

Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng x và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}x^2$. B. $\sqrt{3}x^2$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2$.

Câu 12. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC . Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 6 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn nội tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$?

- A. $S = \frac{15\pi}{4}$. B. $S = 4\pi$. C. $S = \frac{9\pi}{2}$. D. $S = 5\pi$.

Câu 13. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1} \end{cases}; \forall n \geq 1$$

Tổng $S = \frac{1-u_1}{u_1} + \frac{1-u_2}{u_2} + \frac{1-u_3}{u_3} + \dots + \frac{1-u_n}{u_n} + \dots$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A.** $(2;3)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 14. Từ độ cao $63(m)$ của tháp nghiêng Pi-sa ở Italia, người ta thả một quả bóng cao su xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được ngay trước đó. Tính độ dài hành trình của quả bóng từ thời điểm ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất biết quả bóng chỉ rơi xuống và nảy lên theo chiều thẳng đứng.

- A.** $63(m)$. **B.** $\frac{63}{10}(m)$. **C.** $126(m)$. **D.** $77(m)$.

Câu 15. Cho dãy số (u_n) sao cho $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = u_{n-1} - n, (n \geq 2) \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

- A.** $-\infty$. **B.** 0 . **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $-\infty$.

Câu 16. Có bao nhiêu số nguyên $a \in (0;100)$ để $\lim(a^n + \sin n) = +\infty$?

- A.** 99 . **B.** 98 . **C.** 50 . **D.** 0 .

Câu 17. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{11}{3.5} + \frac{11}{5.7} + \dots + \frac{11}{(2n-1)(2n+1)}$. Khi đó $\lim u_n$ bằng:

- A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{11}{2}$. **C.** $\frac{11}{3}$. **D.** $\frac{11}{6}$.

Câu 18. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(3n+1)(1-8n)}{\sqrt[3]{n^3+3n-9}}$. Khi đó $\lim u_n$ bằng:

- A.** $-\infty$. **B.** -1 . **C.** $+\infty$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Câu 19. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n(u_n+5)(u_n^2+5u_n+8)+16}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Đặt $v_n = \sum_{i=1}^n \frac{n}{u_i+3}$, hãy tính $\lim v_n$.

- A.** $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 20. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2021 \\ u_{n+2} + u_n = 2(u_{n+1} + 1010), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

- A.** 1010 . **B.** -1010 . **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 21. Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1} \quad (n \geq 1) \end{cases}$.

Đặt $\frac{y_n}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2}$ với $n = 1, 2, \dots$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

- A.** $+\infty$ **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 22. Gọi a, b là các giá trị để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1}, & x < -1 \\ x + 1, & x \geq -1 \end{cases}$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới -1 . Tính $a - b$?

- A.** 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 23. Cho $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + mx)^n - (1 + nx)^m}{x^2} = 15$, $n + m = 11$, $n, m \in \mathbb{N}$. Khi đó n bằng:

- A.** 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 24. Tính $A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{2x+1} \cdot \sqrt[3]{3x+1} \cdot \sqrt[4]{4x+1} - 1}{x} \right)$.

- A.** $A = 2$. **B.** $A = 1$. **C.** $A = 9$. **D.** $A = 3$

Câu 25. Tính $L = \lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2} \right)$.

- A.** $L = \frac{176}{27}$. **B.** $L = \frac{176}{27}$. **C.** $L = \frac{102}{27}$. **D.** $L = \frac{112}{27}$.

Câu 26. Cho $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = 10$. Tính $T = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{4f(x) + 7} - \sqrt{f(x) + 4}}{x^2 + x - 2}$.

- A.** $\frac{5}{81}$. **B.** $-\frac{5}{81}$. **C.** $\frac{40}{81}$. **D.** $-\frac{5}{9}$.

Câu 27. Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2ax^2 + 30} - bx - 5}{x^3 - 3x + 2} = c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tính giá trị $P = a^2 + b^2 + 36c$.

- A.** 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 25.

Câu 28. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{9x+4} - \sqrt[3]{4x^2+8}}{\sin x} \right)$.

- A.** $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** Không tồn tại. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 29. Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 3} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + x - 3} \right) = -\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.

- A.** $a + b = 5$. **B.** $a + b = 6$. **C.** $a + b = 4$. **D.** $a + b = 7$.

Câu 30. Cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \sin \left(\frac{1}{3x} \right) \right) = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a - b$.

- A.** $a - b = -6$. **B.** $a - b = -4$. **C.** $a - b = -2$. **D.** $a + b = 0$.

Câu 31. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + 3x + 1} - x}{\sqrt{x^2 + x + 2} + 2x} = \frac{1}{3}$. Giá trị a là:

- A.** -4 . **B.** 1 . **C.** 2 . **D.** 4 .

Câu 32. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 + 5x^2} - \sqrt{4x^2 - 3x} \right) = \frac{a}{b}$ (phân số tối giản). Tính $P = 2a - 3b$.

- A.** $P = -7$. **B.** $P = -10$.
C. $P = -20$. **D.** $P = -2$.

Câu 33. Cho giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5 \sin 2x + 7 \cos^2 x}{2x^2 + 2} = \frac{a}{b}$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó $a - b$ là:

- A.** 0 . **B.** $-\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** 1 .

Câu 34. Cho β là một góc cho trước (đơn vị radian). Giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin^3 \frac{\beta}{3} + 3 \cdot \sin^3 \frac{\beta}{3^2} + 3^2 \cdot \sin^3 \frac{\beta}{3^3} + \dots + 3^{x-1} \cdot \sin^3 \frac{\beta}{3^x} \right) = \frac{a - \sin b}{c}. \text{ Tính } T = a - b + 3c.$$

- A.** $T = -12$. **B.** $T = -8$. **C.** $T = 8$. **D.** $T = 12$

Câu 35. Cho các số thực a, b, c với $a > 0$ thỏa mãn $c^2 + a = 2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx - cx} \right) = -3$. Tính $P = a + b + 5c$.

- A.** $P = -28$ **B.** $P = 0$ **C.** $P = 28$ **D.** $P = 1$.

Câu 36. Giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x \right)$ bằng:

- A.** $I = -\infty$. **B.** $I = \frac{1}{4}$. **C.** $I = -\frac{1}{4}$. **D.** $I = +\infty$.

Câu 37. Giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{1 - x^2}$ bằng:

- A.** $I = -1$. **B.** $I = -\infty$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = +\infty$.

Câu 38. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-2} \right)$ là:

- A.** -11 . **B.** 0 . **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 39. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2}{(x+1)^3}$ là:

- A.** 2 . **B.** 1 . **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 40. Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{x - 1} = 5$ và $g(x) = \sqrt{f(x) + 6} - 2\sqrt[3]{f(x) - 2}$.

Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x}-1)g(x)}$.

- A.** $+\infty$. **B.** $-\frac{5}{12}$. **C.** $\frac{5}{12}$. **D.** $-\infty$.

Câu 41. Cho a và b là các số nguyên dương. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + ax} + \sqrt[3]{8x^3 + 2bx^2 + 3} \right) = \frac{7}{3}$. Khi đó a và b thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

- A.** $a + 2b = 33$. **B.** $a + 2b = 35$. **C.** $a + 2b = 36$. **D.** $a + 2b = 34$.

Câu 42. Biết giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - x^2} + \sqrt{4x^2 + 3x} \right) = -\frac{a}{b}$ với a, b là số tự nhiên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.

- A.** 7 **B.** 11 **C.** 9 **D.** 13

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2, & x > 1 \\ 3x^2 + 6, & x < 1 \\ 4a^2 + 5, & x = 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

- A.** 1. **B.** ± 1 . **C.** -1. **D.** ± 2 .

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{a\sqrt{5x+1} - 2a\sqrt[3]{2x+2}}{x-3}, & x \neq 3 \\ 2x+1, & x = 3 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 3$.

- A.** 20. **B.** 22. **C.** 23. **D.** 24.

Câu 45. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{2-x} & \text{khi } x > 2 \\ mx & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$.

- A.** $m = \frac{1}{3}$. **B.** $m = -\frac{1}{3}$. **C.** $m = \frac{2}{3}$. **D.** $m = -\frac{2}{3}$.

Câu 46. Tích tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 3x^2 - x + 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m^2x - 3mx - 2021 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

liên tục tại $x_0 = 1$ bằng?

- A.** 2021. **B.** -2021. **C.** -2020. **D.** 2022.

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{4x^3-3x+1} & \text{khi } x \neq \frac{1}{2} \\ \frac{c}{2} & \text{khi } x = \frac{1}{2} \end{cases}, (a, b, c \in \mathbb{R})$. Biết hàm số liên tục tại $x_0 = \frac{1}{2}$.

Tính $S = abc$.

A. $S = -36$.

B. $S = 18$.

C. $S = 36$.

D. $S = -18$.

Câu 48. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{6x-3}-ax-b}{x^2-4x+4} & \text{khi } x \neq 2 \\ -\frac{1}{6} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $S = a^2 + b^2$ khi hàm số liên tục tại $x = 2$.

A. $S = 2$.

B. $S = 1$.

C. $S = 4$.

D. $S = 8$.

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^{2020} + x - 2}{\sqrt{2021x+1} - \sqrt{x+2021}} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Khi hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ thì $a = \frac{m}{1010} \sqrt{n}$ trong đó m và n là hai số nguyên tố cùng nhau. Tính $2n - m$.

A. 2021.

B. 2020.

C. 2022.

D. 2023.

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^3-x+6}} & \text{khi } x \neq 3, x > -2 \\ m + \sqrt{3} & \text{khi } x = 3, m \in \mathbb{R} \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = 3$.

A. $m = \sqrt{3}$.

B. $m = -\sqrt{3}$.

C. $m = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

D. $m = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 51. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 5x}{5x} & \text{khi } x \neq 0 \\ a + 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

A. $a = 1$.

B. $a = -1$.

C. $a = -2$.

D. $a = 2$.

Câu 52. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - (ax-b)}{(x-1)^2} & \text{khi } x \neq 1 \\ c & \text{khi } x = 1 \end{cases}$, với $a > 0$. Biết hàm số liên tục trên tập xác định. Tính giá trị biểu thức $T = 2a - b + 8c$?

A. $T = -1$.

B. $T = 0$.

C. $T = -2\sqrt{2}$.

D. $T = \sqrt{2}$.

Câu 53. Cho a, b là các tham số thực sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{khi } |x| \leq \frac{\pi}{3} \\ ax + b & \text{khi } |x| > \frac{\pi}{3} \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $a + 2b$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 54. Phương trình nào dưới đây luôn có nghiệm với mọi m ?

A. $(m-1)x^3 + 2x^2 + 1 = 0$

B. $mx^5 + x^4 + 3 = 0$.

C. $(m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 + 1 = 0.$

D. $(m^2 + m + 5)x^7 + x^5 - 1 = 0.$

Câu 55. Phương trình $x^5 - 5x^4 + 4x - 1 = 0$ có ít nhất bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; 5)$?

A. Một.

B. Hai.

C. Ba.

D. Vô nghiệm.

Câu 56. Phương trình nào sau đây luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

A. $(m - 1)x^5 + x^2 - x + 1 = 0.$

B. $mx^5 + 2x^4 + 1 = 0.$

C. $(m^2 - 4)x^5 + mx^2 + 2 = 0.$

D. $(m^2 - 1)x^5 + 4x + 2 = 0.$

Câu 57. Phương trình nào sau đây có đúng một nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.

A. $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0.$

B. $x^5 - 3x^4 + x - 3 = 0.$

C. $x^4 - 2x^2 + 1 = 0.$

D. $x^5 + 2x + 1 = 0.$

Câu 58. Trong các phương trình sau, phương trình nào có đúng 5 nghiệm phân biệt.

A. $2\sqrt{2 - 3x} = x^3 + 2020x - 4.$

B. $x^5 + 2020x - 1 = 0.$

C. $x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x - 2}.$

D. $x^5 - 9x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 12x + 1 = 0.$

Câu 59. Số nghiệm ít nhất có thể của phương trình $m(x - 1)(x^3 - 4x) + x^3 - 3x + 1 = 0$ (m là tham số) là:

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Câu 60. Trong các phương trình sau, phương trình nào có đúng 5 nghiệm phân biệt?

A. $x^5 + 3x + 1 = 0.$

B. $\sqrt{x^5 + 2x^3 + 15x^2 + 14x + 2} = 3x^2 + x + 1.$

C. $x^3 + 2x = 4 + 3\sqrt{3 - 2x}.$

D. $2x + 6\sqrt[3]{1 - x} = 3.$

Câu 61. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $(m^2 - 5m + 4)x^5 + 2x^2 + 1 = 0$ có nghiệm.

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}.$

B. $m \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty).$

C. $m \in \{1; 4\}.$

D. $m \in \mathbb{R}.$

II. BẢNG ĐÁP ÁN

1A	2D	3A	4B	5D	6C	7D	8D	9A	10D	11A	12B	13D	14D	15D
16B	17D	18A	19D	20C	21A	22D	23D	24D	25D	26B	27B	28D	29D	30C
31D	32D	33D	34D	35B	36D	37B	38D	39D	40D	41C	42B	43B	44D	45B
46C	47A	48A	49D	50D	51B	52D	53B	54D	55C	56D	57D	58D	59B	60B
61A														

III. LỜI GIẢI CHI TIẾT

Dạng toán 1. Giới hạn hữu hạn của dãy số.

Câu 1. Gọi S là tập hợp các tham số nguyên a thỏa mãn $\lim \left(\frac{3n+2}{n+2} + a^2 - 4a \right) = 0$. Tổng các phần tử của S bằng:

A. 4.**B.** 3.**C.** 5.**D.** 2.**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \lim \left(\frac{3n+2}{n+2} + a^2 - 4a \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim \left(3 - \frac{4}{n+2} + a^2 - 4a \right) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \{1; 3\} \Rightarrow 1 + 3 = 4.$$

Câu 2. Tìm tất cả giá trị nguyên của a thuộc $(0; 2020)$ để $\lim \sqrt{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} \leq \frac{1}{16}$.

A. 2019.**B.** 2018.**C.** 2017.**D.** 2016.**Lời giải**

Ta có:

$$\lim \sqrt{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} = \lim \sqrt{\frac{1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4^a}} = \sqrt{\frac{1}{4^a}} = \sqrt{\frac{1}{(2^a)^2}} = \frac{1}{2^a}.$$

$$\text{Do đó, } \frac{1}{2^a} \leq \frac{1}{16} \Leftrightarrow 2^a \geq 16 = 2^4 \Leftrightarrow a \geq 4.$$

$$\text{Mà } \begin{cases} a \in (0; 2020) \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}. \text{ Do đó } a \in \{4, 5, 6, \dots, 2019\}.$$

Vậy có 2016 giá trị nguyên của a thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 3. Cho $\lim \frac{(an^2 - n)(2n - 1)}{(1 + bn^2)(5 - 3n)} = 3$ với $a, b \neq 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a = -\frac{9b}{2}$.**B.** $b = -9a$.**C.** $a = 9b$.**D.** $b = -3a$.**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \lim \frac{(an^2 - n)(2n - 1)}{(1 + bn^2)(5 - 3n)} = \lim \frac{\left(a - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n^2} + b\right)\left(\frac{5}{n} - 3\right)} = -\frac{2a}{3b}.$$

Suy ra: $-\frac{2a}{3b} = 3 \Rightarrow a = -\frac{9b}{2}$.

Câu 4. Cho $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an^2+1} + \sqrt{an^2+5}}{1-4n} = -5$ với $a > 0$. Tính giá trị biểu thức $P = a + \sqrt{a}$.

A. 90.

B. 110.

C. 100.

D. 10.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an^2+1} + \sqrt{an^2+5}}{1-4n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2\left(a + \frac{1}{n^2}\right)} + \sqrt{n^2\left(a + \frac{5}{n^2}\right)}}{1-4n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{a + \frac{1}{n^2}} + n\sqrt{a + \frac{5}{n^2}}}{n\left(\frac{1}{n} - 4\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{a + \frac{5}{n^2}}}{\frac{1}{n} - 4} = -\frac{2\sqrt{a}}{4} = -\frac{\sqrt{a}}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{-\sqrt{a}}{2} = -5 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 10 \Leftrightarrow a = 100$.

Vậy $P = a + \sqrt{a} = 100 + 10 = 110$.

Câu 5. Cho dãy số $u_1 = \frac{3}{2}$ và $u_{n+1} = \frac{3u_n}{(n+2)u_n + 3}$. Giới hạn của dãy số $x_n = \sum_{i=1}^n u_i$ bằng:

A. $\lim x_n = 6$.

B. $\lim x_n = 11$.

C. $\lim x_n = \frac{11}{6}$.

D. $\lim x_n = \frac{11}{3}$.

Lời giải

Đặt $v_n = \frac{1}{u_n}$

Ta có $v_1 = \frac{1}{u_1} = \frac{2}{3}$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{(n+2)u_n + 3}{3u_n} = \frac{n+2}{3} + \frac{1}{u_n} = v_n + \frac{n+2}{3}$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} v_1 = \frac{2}{3} \\ v_2 = v_1 + 1 \\ v_3 = v_2 + \frac{4}{3} \\ \dots \\ v_n = v_{n-1} + \frac{n+1}{3} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế các phương trình trên ta có

$$v_n = \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \dots + \frac{n+1}{3} = \frac{2+3+4+5+\dots+(n+1)}{3} = \frac{n(2+n+1)}{3 \cdot 2} = \frac{n(n+3)}{6}$$

Suy ra dãy số (v_n) có số hạng tổng quát $v_n = \frac{n(n+3)}{6}$

$$\Rightarrow u_n = \frac{6}{n(n+3)}$$

$$\Rightarrow x_n = \sum_{i=1}^n \frac{6}{i(i+3)}$$

Vì

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} &= \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n+3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{11n^3 + 48n^2 + 49n}{6(n^3 + 6n^2 + 11n + 6)} \end{aligned}$$

$$\text{nên } x_n = \sum_{i=1}^n \frac{6}{i(i+3)} = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{11n^3 + 48n^2 + 49n}{6(n^3 + 6n^2 + 11n + 6)} = \frac{11n^3 + 48n^2 + 49n}{3(n^3 + 6n^2 + 11n + 6)}$$

$$\text{Suy ra } \lim x_n = \lim \left(\frac{11n^3 + 48n^2 + 49n}{3(n^3 + 6n^2 + 11n + 6)} \right) = \lim \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{11 + \frac{48}{n} + \frac{49}{n^2}}{1 + \frac{6}{n} + \frac{11}{n^2} + \frac{6}{n^3}} \right) = \frac{11}{3}$$

$$\text{Vậy } \lim x_n = \frac{11}{3}.$$

Câu 6. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 2020 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 5}{2(u_n + 2)} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Khẳng định nào sau đây **sai** về dãy

$\{u_n\}$:

A. $\{u_n\}$ là dãy số giảm. **B.** $\{u_n\}$ bị chặn dưới. **C.** $\lim u_n = \frac{5}{4}$. **D.** $\lim u_n = 1$.

Lời giải

+ Dễ thấy $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, do đó $\{u_n\}$ bị chặn dưới.

$$+ \text{ Xét } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 5}{2(u_n + 2)} - u_n = \frac{-u_n^2 - 4u_n + 5}{2(u_n + 2)} = \frac{(-u_n + 1)(u_n + 5)}{2(u_n + 2)}$$

$$+ \text{ Lại có } u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 5}{2(u_n + 2)} = \frac{1}{2} \left(u_n + 2 + \frac{9}{u_n + 2} \right) - 2 \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{9} - 2 = 1 \Rightarrow u_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N},$$

+ Giả sử $u_n = 1 \Leftrightarrow \frac{u_{n-1}^2 + 5}{2(u_{n-1} + 2)} = 1 \Leftrightarrow u_{n-1}^2 - 2u_{n-1} + 1 = 0 \Leftrightarrow u_{n-1} = 1$, hay mọi số hạng đều bằng 1, vô

lý. Vậy $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$

+ Do đó $u_{n+1} - u_n < 0 \forall n \in \mathbb{N}$, hay $\{u_n\}$ là dãy số giảm.

+ Vì $\{u_n\}$ là dãy số giảm, bị chặn dưới nên $\{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim u_n = a$, ta có

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 5}{2(u_n + 2)} \Rightarrow a = \frac{a^2 + 5}{2(a + 2)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -5(\text{loại}) \end{cases}. \text{ Vậy } \lim u_n = 1. \text{ Chọn C}$$

Câu 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức:

$$\begin{cases} u_1 = 2021 \\ u_{n+1} = \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] u_n + \frac{2020}{(n+1)^2}; \forall n \geq 1 \end{cases}. \text{ Khi đó } \lim u_n \text{ bằng:}$$

A. 2020.

B. $\frac{2021}{2}$.

C. 4041.

D. $\frac{4041}{2}$.

Lời giải

Ta có:

$$u_{n+1} - 2020 = \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] u_n + \frac{2020}{(n+1)^2} - 2020 = u_n - 2020 - \frac{u_n - 2020}{(n+1)^2}.$$

Đặt: $v_n = u_n - 2020$.

Ta có:

$$v_1 = 1$$

$$v_{n+1} = v_n - \frac{1}{(n+1)^2} v_n = \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] v_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} v_n, \forall n \geq 1$$

Do đó:

$$\begin{aligned} v_n \cdot v_{n-1} \cdot v_{n-2} \cdots v_2 &= \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} v_{n-1} \cdot \frac{n(n-2)}{(n-1)^2} v_{n-2} \cdot \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)^2} v_{n-3} \cdots \frac{3 \cdot 1}{2^2} v_1 \\ &= \frac{n+1}{2n} v_{n-1} \cdot v_{n-2} \cdot v_{n-3} \cdots v_1 \end{aligned}$$

$$\text{Hay } v_n = \frac{n+1}{2n} v_1 \Rightarrow u_n = v_n + 2020 = \frac{4041n+1}{2n}; \forall n \geq 1.$$

$$\text{Vậy } \lim u_n = \lim \frac{4041n+1}{2} = \frac{4041}{2}.$$

Dạng toán 2. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.

Câu 8. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,11272727\dots$ được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$, trong đó a và b là các số nguyên dương. Tính $5a - b$.

A. 120.**B.** -430.**C.** 430.**D.** -120.**Lời giải**

Ta có:

$$0,112727\dots = \frac{11}{100} + \frac{27}{10^4} + \frac{27}{10^6} + \dots = \frac{11}{100} + \frac{\frac{27}{10^4}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{31}{275}.$$

Vậy $a = 31, b = 275$. Do đó $5a - b = 5 \cdot 31 - 275 = -120$.

Câu 9. Cho dãy số (u_n) với $u_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$. Tính $\lim u_n$.

A. $-\frac{1}{4}$.**B.** $\frac{1}{4}$.**C.** $\frac{1}{2}$.**D.** $-\frac{1}{2}$.**Lời giải**

u_n là tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có $u_1 = -\frac{1}{3}$ và $q = -\frac{1}{3}$.

$$\text{Do đó } u_n = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right).$$

$$\text{Suy ra } \lim u_n = \lim \left[-\frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \right] = -\frac{1}{4}.$$

Câu 10. Thả một quả bóng cao su từ độ cao $60m$ so với mặt đất, mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{3}$ độ cao lần rơi trước. Biết rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt đất.

Tổng độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. (113 m; 115 m).**B.** (115 m; 117 m).**C.** (117 m; 119 m).**D.** (119 m; 121 m).**Lời giải**

Ta có tổng độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất bằng tổng quãng đường bóng nảy lên và quãng đường bóng rơi xuống.

+) Vì mỗi lần bóng nảy lên bằng $\frac{1}{3}$ lần nảy trước nên ta có tổng quãng đường bóng nảy lên là

$$S_1 = 60 \cdot \frac{1}{3} + 60 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 60 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + 60 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots = 60 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 30.$$

+) Tổng quãng đường bóng rơi xuống là

$$S_2 = 60 + 60 \cdot \frac{1}{3} + 60 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 60 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + 60 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots = 60 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 90.$$

Vậy tổng độ dài hành trình của quả bóng là $S = S_1 + S_2 = 30 + 90 = 120(m)$.

Câu 11. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC .

Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng x và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}x^2$. **B.** $\sqrt{3}x^2$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2$.

Lời giải

Với $n=1$ thì tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng x nên diện tích tam giác $A_1B_1C_1$ là $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

Với $n=2$ thì tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{x}{2}$ nên diện tích tam giác $A_2B_2C_2$ là $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^2$

.....

Như vậy tam giác đều $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $\frac{x}{2^{n-1}}$ nên diện tích tam giác $A_nB_nC_n$ là $S_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)^2$

Khi đó ta được dãy $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ và công bội $q = \frac{1}{4}$.

Do đó tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2$.

Câu 12. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC . Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 6 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn nội tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$?

A. $S = \frac{15\pi}{4}$. **B.** $S = 4\pi$. **C.** $S = \frac{9\pi}{2}$. **D.** $S = 5\pi$.

Lời giải

Ta có dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ là các tam giác đều.

Đặt $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ lần lượt là độ dài cạnh của các tam giác đều trên.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều thứ n bằng $a_n \times \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Với $n=1$ thì tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng 6 nên đường tròn nội tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ có bán kính $R_1 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow S_1 = \pi \left(6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2$.

Với $n=2$ thì tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{6}{2} = 3$ nên đường tròn nội tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ có bán kính $R_2 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow S_2 = \pi \left(6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2$.

Với $n=3$ thì tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $\frac{3}{2}$ nên đường tròn nội tiếp tam giác $A_3B_3C_3$ có bán kính $R_3 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow S_3 = \pi \left(6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2$.

.....

Như vậy tam giác đều $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $6 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ nên đường tròn nội tiếp tam giác $A_nB_nC_n$ có bán kính $R_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow S_n = \pi \left(6 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2$.

Khi đó ta được dãy $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = S_1 = 3\pi$ và công bội $q = \frac{1}{4}$.

Do đó tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \frac{u_1}{1-q} = 4\pi$.

Câu 13. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1} \end{cases}; \forall n \geq 1$$

Tổng $S = \frac{1-u_1}{u_1} + \frac{1-u_2}{u_2} + \frac{1-u_3}{u_3} + \dots + \frac{1-u_n}{u_n} + \dots$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2} \right)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Ta có: $S = \left(\frac{1}{u_1} - 1 \right) + \left(\frac{1}{u_2} - 1 \right) + \left(\frac{1}{u_3} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{1}{u_n} - 1 \right) + \dots$

Gọi (y_n) là dãy số được xác định bởi $y_n = \frac{1}{u_n} - 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{y_n + 1}$.

Thay vào công thức truy hồi của dãy (u_n) ta được:

$$\frac{1}{y_{n+1}+1} = \frac{\frac{2}{y_n+1}}{\frac{1}{y_n+1}+1} = \frac{2}{y_n+2} \Rightarrow y_{n+1}+1 = \frac{1}{2}(y_n+2) \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n.$$

Suy ra (y_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn có $y_1 = \frac{1}{u_1} - 1 = \frac{-1}{2}$ và $q = \frac{1}{2}$.

$$\text{Khi đó: } S = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n + \dots = \frac{y_1}{1-q} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = -1. \text{ Hay } S \in (-2; 0).$$

Câu 14. Từ độ cao $63(m)$ của tháp nghiêng Pi-sa ở Italia, người ta thả một quả bóng cao su xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được ngay trước đó. Tính độ dài hành trình của quả bóng từ thời điểm ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất biết quả bóng chỉ rơi xuống và nảy lên theo chiều thẳng đứng.

- A.** $63(m)$. **B.** $\frac{63}{10}(m)$. **C.** $126(m)$. **D.** $77(m)$.

Lời giải

Ta thấy:

Ban đầu bóng cao 63m nên chạm đất lần 1 bóng di chuyển quãng đường $S_1 = 63(m)$.

Từ lúc chạm đất lần một đến chạm đất lần hai bóng di chuyển được quãng đường là $S_2 = 2S_1 \cdot \frac{1}{10} = 2 \cdot 63 \cdot \frac{1}{10} = \frac{63}{5}$ (do độ cao lần hai bằng $\frac{1}{10}$ độ cao ban đầu).

Từ lúc chạm đất lần hai đến chạm đất lần ba bóng di chuyển được quãng đường là $S_3 = S_2 \cdot \frac{1}{10}$ (do độ cao lần ba bằng $\frac{1}{10}$ độ cao lần hai)... Cứ tiếp tục như vậy kéo dài ra vô tận thì ta có được tổng quãng đường mà bóng cao su đã di chuyển là

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots = S_1 + S_2 + S_2 \cdot \frac{1}{10} + S_2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \dots = S_1 + S_2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 63 + \frac{63}{5} \cdot \frac{10}{9} = 77(m).$$

Vậy quãng đường di chuyển của bóng là $77m$.

Dạng toán 3. Giới hạn vô cực của dãy số.

Câu 15. Cho dãy số (u_n) sao cho $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = u_{n-1} - n, (n \geq 2) \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

- A.** $-\infty$. **B.** 0 . **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

$$\text{Ta có : } \begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = u_{n-1} - n \quad (n \geq 2) \end{cases}.$$

$$\Rightarrow u_2 = u_1 - 2; u_3 = u_2 - 3, \dots, u_n = u_{n-1} - n \Rightarrow u_n = u_1 - (2 + 3 + 4 + \dots + n) = \sqrt{2} - \frac{(n-1)(2+n)}{2}.$$

$$\Rightarrow \lim u_n = -\infty.$$

Câu 16. Có bao nhiêu số nguyên $a \in (0; 100)$ để $\lim (a^n + \sin n) = +\infty$.

A. 99.

B. 98.

C. 50.

D. 0.

Lời giải

$$\lim (a^n + \sin n) = \lim a^n \left(1 + \frac{\sin n}{a^n} \right).$$

$$\text{Khi } a > 1 \text{ ta có } \begin{cases} \left| \frac{\sin n}{a^n} \right| \leq \left(\frac{1}{a} \right)^n \\ \lim \left(\frac{1}{a} \right)^n = 0; \lim a^n = +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{\sin n}{a^n} = 0 \Rightarrow \lim (a^n + \sin n) = \lim a^n \left(1 + \frac{\sin n}{a^n} \right) = +\infty.$$

$$\text{Khi } a = 1 \text{ ta có } a^n + \sin n = 1 + \sin n \leq 2.$$

$$\text{Khi } 0 < a < 1 \Rightarrow \lim a^n = 0 \Rightarrow \lim (a^n + \sin n) \text{ không thể là } +\infty.$$

Kết luận có $a \in \{2; 3; 4; \dots; 99\}$ nên có 98 số nguyên tìm được.

Câu 17. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{11}{3.5} + \frac{11}{5.7} + \dots + \frac{11}{(2n-1)(2n+1)}$. Khi đó $\lim u_n$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{11}{2}$.

C. $\frac{11}{3}$.

D. $\frac{11}{6}$.

Lời giải

$$u_n = \frac{11}{3.5} + \frac{11}{5.7} + \dots + \frac{11}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

$$= \frac{11}{2} \cdot \left(\frac{5-3}{3.5} + \frac{7-5}{5.7} + \dots + \frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n-1) \cdot (2n+1)} \right)$$

$$= \frac{11}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{11}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

$$\lim u_n = \lim \frac{11}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{11}{6}.$$

Câu 18. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(3n+1)(1-8n)}{\sqrt[3]{n^3+3n-9}}$. Khi đó $\lim u_n$ bằng:

- A.** $-\infty$. **B.** -1 . **C.** $+\infty$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\lim u_n = \frac{(3n+1)(1-8n)}{\sqrt[3]{n^3+3n-9}} = \lim \frac{-24n^2-5n+1}{\sqrt[3]{n^3+3n-9}} = \lim \frac{\frac{-24n^2-5n+1}{n^2}}{\sqrt[3]{\frac{n^3+3n-1}{n^6}}} = \lim \frac{-24-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}+\frac{5}{n^5}-\frac{1}{n^6}}} = -\infty.$$

Câu 19. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n(u_n+5)(u_n^2+5u_n+8)+16}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Đặt $v_n = \sum_{i=1}^n \frac{n}{u_i+3}$, hãy tính $\lim v_n$.

- A.** $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{u_n(u_n+5)(u_n^2+5u_n+8)+16} = \sqrt{(u_n^2+5u_n)(u_n^2+5u_n+8)+16} \\ &= \sqrt{(u_n^2+5u_n)^2+8(u_n^2+5u_n)+16} = \sqrt{(u_n^2+5u_n+4)^2} = u_n^2+5u_n+4. \end{aligned}$$

Suy ra $u_{n+1}+2 = u_n^2+5u_n+6 = (u_n+2)(u_n+3)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}+2} = \frac{1}{(u_n+2)(u_n+3)} = \frac{1}{u_n+2} - \frac{1}{u_n+3} \Leftrightarrow \frac{1}{u_n+3} = \frac{1}{u_n+2} - \frac{1}{u_{n+1}+2}.$$

$$\text{Do đó } v_n = \sum_{i=1}^n \frac{n}{u_i+3} = \sum_{i=1}^n n \cdot \left(\frac{1}{u_i+2} - \frac{1}{u_{i+1}+2} \right) = n \cdot \left(\frac{1}{u_1+2} - \frac{1}{u_{n+1}+2} \right) = n \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{u_{n+1}+2} \right).$$

Mặt khác, từ $u_{n+1} = u_n^2+5u_n+4$ ta suy ra $u_{n+1} > 5u_n$ ta có

$$\begin{cases} u_2 > 5u_1 \\ u_3 > 5u_2 \\ u_4 > 5u_3 \Rightarrow u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \dots u_n > 5^{n-1} u_1 u_2 \cdot u_3 \dots u_{n-1} \Leftrightarrow u_n > 5^{n-1} u_1 \Rightarrow \lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{u_{n+1}+2} = 0. \\ \dots \\ u_n > 5u_{n-1} \end{cases}$$

Từ đó ta có $\lim v_n = \lim n \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{u_{n+1} + 2} \right) = +\infty$.

Câu 20. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2021 \\ u_{n+2} + u_n = 2(u_{n+1} + 1010), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. 1010.

B. -1010.

C. $+\infty$.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2021 & (1) \\ u_{n+2} + u_n = 2(u_{n+1} + 1010) & (2) \end{cases} \quad (n \geq 1).$$

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Ta có $(2) \Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 2020 \Leftrightarrow v_{n+1} = v_n + 2020$.

Suy ra (v_n) lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = 2020$ và công sai $d = 2020$.

Nên $v_n = 2020 + (n-1) \cdot 2020 = 2020n$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } u_n &= (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1) + u_1 \\ &= v_{n-1} + v_{n-2} + \dots + v_1 + u_1 = 2020((n-1) + (n-2) + \dots + 1) + 1 \\ &= 2020 \frac{n(n-1)}{2} + 1 = 1010n(n-1) + 1 = 1010n^2 - 1010n + 1. \end{aligned}$$

Do đó: $\lim u_n = \lim(1010n^2 - 1010n + 1) = \lim n^2(1010 - \frac{1010}{n} + \frac{1}{n^2})$.

Ta có $\lim n^2 = +\infty$ và $\lim(1010 - \frac{1010}{n} + \frac{1}{n^2}) = 1010 > 0$

Vậy $\lim u_n = +\infty$.

Câu 21. Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1} \end{cases} \quad (n \geq 1)$.

Đặt $\frac{y_n}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2}$ với $n = 1, 2, \dots$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

A. $+\infty$

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\sqrt{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1} = \sqrt{(x_n^2+3x_n)(x_n^2+3x_n+2)+1} = |x_n^2+3x_n+1| \quad (1)$$

Vì $x_1 = 1 > 0 \Rightarrow x_n > 0, \forall n = 1, 2, \dots$

Ta có: $x_{n+1} + 1 = x_n^2 + 3x_n + 2 = (x_n + 1)(x_n + 2)$

$$+ \frac{1}{x_{n+1} + 1} = \frac{1}{(x_n + 1)(x_n + 2)} = \frac{1}{x_n + 1} - \frac{1}{x_n + 2} \Rightarrow \frac{1}{x_n + 2} = \frac{1}{x_n + 1} - \frac{1}{x_{n+1} + 1}$$

$$\text{Do đó } \frac{y_n}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i + 1} - \frac{1}{x_{i+1} + 1} \right) = \frac{1}{x_1 + 1} - \frac{1}{x_{n+1} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x_{n+1} + 1}$$

Từ (1) $x_{k+1} = x_k^2 + 3x_k + 1 > 3x_k \geq 3 \cdot 3^{k-1} = 3^k$

Ta dễ dàng chứng minh bằng quy nạp $x_n > 3^{n-1} \Rightarrow \lim x_n = +\infty$

$$\text{Vậy } \lim y_n = \lim x_n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x_{n+1} + 1} \right) = +\infty \text{ vì } \lim x_n = +\infty; \lim \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x_{n+1} + 1} \right) = \frac{1}{2}.$$

Dạng toán 4. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm.

Câu 22. Gọi a, b là các giá trị để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1}, & x < -1 \\ x + 1, & x \geq -1 \end{cases}$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới -1

. Tính $a - b$?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Do hàm số $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới -1 nên $x = -1$ là nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$, do đó ta $1 - a + b = 0 \Leftrightarrow b = a - 1$.

$$\text{Ta viết lại hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{x-1+a}{x-1}, & x < -1 \\ x+1, & x \geq -1 \end{cases}.$$

Mặt khác giới hạn cần tìm tồn tại

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \Leftrightarrow \frac{a-2}{-2} = 0 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow b = 1.$$

Do đó $a - b = 1$.

Câu 23. Cho $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = 15, n+m=11, n, m \in \mathbb{N}$. Khi đó n bằng:

A. 9.

B. 8.

C. 7.

D. 6.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (1+mx)^n = 1 + mn x + \frac{m^2 n(n-1)x^2}{2} + m^3 x^3 A \text{ (với } A = C_n^3 + mxC_n^4 + \dots + (mx)^{n-3} C_n^n)$$

$$(1+nx)^m = 1 + mn x + \frac{n^2 m(m-1)x^2}{2} + n^3 x^3 B, \text{ (với } B = C_m^3 + nxC_m^4 + \dots + (nx)^{m-3} C_m^m)$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } 15 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{m^2 n(n-1) - n^2 m(m-1)}{2} + x(m^3 A - n^3 B) \right] \\ &= \frac{m^2 n(n-1) - n^2 m(m-1)}{2} = \frac{mn(n-m)}{2}. \end{aligned}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} \frac{mn(n-m)}{2} = 15 \\ m+n=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mn(n-m) = 30 \\ m=11-n \end{cases} \Rightarrow -2n^3 + 33n^2 - 121n - 30 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=6 \text{ (N)} \\ n=\frac{21 \pm \sqrt{481}}{4} \text{ (L)} \end{cases}$$

Câu 24. Tính $A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{2x+1} \cdot \sqrt[3]{3x+1} \cdot \sqrt[4]{4x+1} - 1}{x} \right)$.

A. $A = 2$.

B. $A = 1$.

C. $A = 9$.

D. $A = 3$.

Lời giải

Với mọi số thực a, b, c ta có:

$$a-1+a(b-1)+ab(c-1)=abc-1$$

Do đó

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} \cdot \sqrt[3]{3x+1} \cdot \sqrt[4]{4x+1} - 1 &= (\sqrt{2x+1} - 1) + \sqrt{2x+1}(\sqrt[3]{3x+1} - 1) + \sqrt{2x+1} \cdot \sqrt[3]{3x+1}(\sqrt[4]{4x+1} - 1) \\ &= \frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1} + \frac{3x\sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + 1} + \frac{4x\sqrt{2x+1} \cdot \sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt[4]{(4x+1)^3} + \sqrt[4]{(4x+1)^2} + \sqrt[4]{(4x+1)} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1} + \frac{3\sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + 1} + \frac{4\sqrt{2x+1} \cdot \sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt[4]{(4x+1)^3} + \sqrt[4]{(4x+1)^2} + \sqrt[4]{(4x+1)} + 1} \right)$$

$$A = 1 + 1 + 1 = 3$$

Câu 25. Tính $L = \lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2} \right)$.

A. $L = \frac{176}{27}$.

B. $L = \frac{176}{27}$.

C. $L = \frac{102}{27}$.

D. $L = \frac{112}{27}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} - \frac{\sqrt[3]{x+20}-3}{x-7}}{\frac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\frac{1}{(\sqrt{x+2}+3)} - \frac{1}{(\sqrt[3]{(x+20)^2} + 3\sqrt[3]{x+20} + 9)}}{\frac{1}{(\sqrt[4]{(x+9)^3} + 2\sqrt[4]{(x+9)^2} + 4\sqrt[4]{x+9} + 8)}} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{27}}{\frac{1}{32}} = \frac{112}{27}.$$

- Câu 26.** Cho $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-5}{x-1} = 10$. Tính $T = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{4f(x)+7} - \sqrt{f(x)+4}}{x^2+x-2}$.
- A.** $\frac{5}{81}$. **B.** $-\frac{5}{81}$. **C.** $\frac{40}{81}$. **D.** $-\frac{5}{9}$.

Lời giải.

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{f(x)-5}{x-1} \Rightarrow f(x) = (x-1)g(x) + 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } T &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{4f(x)+7} - \sqrt{f(x)+4}}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{4f(x)+7} - 3 + 3 - \sqrt{f(x)+4}}{x^2+x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{4f(x)+7} - 3}{x^2+x-2} - \frac{\sqrt{f(x)+4} - 3}{x^2+x-2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4[f(x)-5]}{(x-1)(x+2)\left[\sqrt[3]{(4f(x)+7)^2} + 3\sqrt[3]{4f(x)+7} + 9\right]} - \frac{f(x)-5}{(x-1)(x+2)\left[\sqrt{f(x)+4} + 3\right]} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)-5}{x-1} \cdot \left(\frac{4}{(x+2)\left(\sqrt[3]{(4f(x)+7)^2} + 3\sqrt[3]{4f(x)+7} + 9\right)} - \frac{1}{(x+2)(\sqrt{f(x)+4} + 3)} \right) \right] \\ &= 10 \cdot \left(\frac{4}{81} - \frac{1}{18} \right) = -\frac{5}{81}. \end{aligned}$$

- Câu 27.** Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2ax^2+30}-bx-5}{x^3-3x+2} = c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tính giá trị $P = a^2 + b^2 + 36c$.
- A.** 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 25.

Lời giải

$$\text{Ta có } x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

$$\Rightarrow 2ax^2 + 30 - (bx+5)^2 = 0 \text{ có nghiệm kép } x=1$$

$$\Rightarrow (2a-b^2)x^2 - 10bx + 5 = 0 \text{ có nghiệm kép } x=1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b^2 \neq 0 \\ \Delta = 0 \\ 2a-b^2-10b+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \neq b^2 \\ 25b^2-5(2a-b^2)=0 \\ 2a-b^2-10b+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \neq b^2 \\ 2a-b^2=5b^2 \\ 2a-b^2-10b+5=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a \neq b^2 \\ 2a - b^2 = 5b^2 \\ 5b^2 - 10b + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \neq b^2 \\ a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{6x^2 + 30} - (x+5)}{(x-1)^2(x+2)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 30 - (x+5)^2}{(x-1)^2(x+2) \left[\sqrt{6x^2 + 30} + (x+5) \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2) \left[\sqrt{6x^2 + 30} + (x+5) \right]} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{(x+2) \left[\sqrt{6x^2 + 30} + (x+5) \right]} = \frac{5}{36} \end{aligned}$$

Vậy $P = 15$.

Câu 28. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{9x+4} - \sqrt[3]{4x^2+8}}{\sin x} \right)$.

A. $\frac{4}{9}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. Không tồn tại.

D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{9x+4} - \sqrt[3]{4x^2+8}}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{9x+4} - 2}{\sin x} + \frac{2 - \sqrt[3]{4x^2+8}}{\sin x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sqrt{9x+4} - 2}{x}}{\frac{\sin x}{x}} + \frac{\frac{2 - \sqrt[3]{4x^2+8}}{x}}{\frac{\sin x}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{9}{\sqrt{9x+4} + 2}}{\frac{\sin x}{x}} - \frac{\frac{4x}{4 + 2\sqrt[3]{4x^2+8} + \sqrt[3]{(4x^2+8)^2}}}{\frac{\sin x}{x}} \right) \\ &= \frac{9}{2+2} - 0 = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{9x+4} - \sqrt[3]{4x^2+8}}{\sin x} \right) = \frac{9}{4}.$$

Dạng toán 5. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực.

Câu 29. Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 3} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + x - 3} \right) = -\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$

A. $a + b = 5$.

B. $a + b = 6$.

C. $a + b = 4$.

D. $a + b = 7$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 3} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + x - 3} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\sqrt{x^2 - x + 3} - x \right) - \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2 + x - 3} - x \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x+3}{\sqrt{x^2-x+3}+x} - \frac{-x^2+x-3}{\sqrt[3]{(x^3-x^2+x-3)^2}+x\sqrt[3]{x^3-x^2+x-3}+x^2} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1} - \frac{-1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}+1} \right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{-1}{6}.
\end{aligned}$$

Suy ra: $a+b=7$.

Câu 30. Cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \sin \left(\frac{1}{3x} \right) \right) = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a-b$.

- A.** $a-b=-6$. **B.** $a-b=-4$. **C.** $a-b=-2$. **D.** $a+b=0$.

Lời giải

$$\text{Ta đặt } L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \sin \frac{1}{3x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sin \frac{1}{3x}}{\frac{1}{3x}} \right) = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{3x}}{\frac{1}{3x}} \right)$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{3x} \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} t = 0 \text{ thì } L = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{3x}}{\frac{1}{3x}} \right) = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right) = \frac{1}{3}.$$

Suy ra: $a-b=1-3=-2$.

Câu 31. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2+3x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+2}+2x} = \frac{1}{3}$. Giá trị a là:

- A.** -4 . **B.** 1 . **C.** 2 . **D.** 4 .

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2+3x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+2}+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{a+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{a+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+2} = \frac{\sqrt{a}-1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a}-1=1 \Leftrightarrow \sqrt{a}=2 \Leftrightarrow a=4.$$

Câu 32. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3+5x^2} - \sqrt{4x^2-3x} \right) = \frac{a}{b}$ (phân số tối giản). Tính $P=2a-3b$.

- A.** $P=-7$. **B.** $P=-10$.
C. $P=-20$. **D.** $P=-2$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \left(\sqrt[3]{8x^3 + 5x^2} - \sqrt{4x^2 - 3x} \right) = \left[\left(\sqrt[3]{8x^3 + 5x^2} - 2x \right) - \left(\sqrt{4x^2 - 3x} - 2x \right) \right]$$

$$= \frac{5x^2}{\sqrt[3]{(8x^3 + 5x^2)^2} + 2x\sqrt[3]{8x^3 + 5x^2} + 4x^2} - \frac{-3x}{\sqrt{4x^2 - 3x} + 2x}$$

$$= \frac{5x^2}{x^2\sqrt[3]{\left(8 + \frac{5}{x}\right)^2} + 2x^2\sqrt[3]{8 + \frac{5}{x}} + 4x^2} + \frac{3x}{|x|\sqrt{4 - \frac{3}{x}} + 2x}$$

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 + 5x^2} - \sqrt{4x^2 - 3x} \right) = \frac{5}{2+2.2+4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow a=5; b=4$$

$$\Rightarrow P = -2.$$

Câu 33. Cho giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5\sin 2x + 7\cos^2 x}{2x^2 + 2} = \frac{a}{b}$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó $a - b$ là:

A. 0.

B. $-\frac{5}{2}$.

C. $\frac{7}{2}$.

D. 1.

Lời giải

Ta có:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5\sin 2x + 7\cos^2 x}{2x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x^2 + 2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5\sin 2x}{2x^2 + 2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7\cos^2 x}{2x^2 + 2} = A_1 - A_2 + A_3$$

$$+) \text{ Với } A_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2 + \frac{2}{x^2}} = \frac{3}{2}.$$

$$+) \text{ Với } A_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5\sin 2x}{2x^2 + 2}$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{2x^2 + 2} = 0 \leq A_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5\sin 2x}{2x^2 + 2} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{2x^2 + 2} = 0$$

$$\text{Suy ra } A_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5\sin 2x}{2x^2 + 2} = 0.$$

$$+) \text{ Với } A_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7\cos^2 x}{2x^2 + 2}$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{0}{2x^2 + 2} = 0 \leq A_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7\cos^2 x}{2x^2 + 2} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{2x^2 + 2} = 0$$

$$\text{Suy ra } A_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7\cos^2 x}{2x^2 + 2} = 0$$

$$\text{Lúc đó } A = A_1 - A_2 + A_3 = \frac{3}{2}$$

Vậy $a = 3$, $b = 2$ và $a - b = 1$.

Câu 34. Cho β là một góc cho trước (đơn vị radian). Giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin^3 \frac{\beta}{3} + 3 \sin^3 \frac{\beta}{3^2} + 3^2 \sin^3 \frac{\beta}{3^3} + \dots + 3^{x-1} \sin^3 \frac{\beta}{3^x} \right) = \frac{a - \sin b}{c}. \text{ Tính } T = a - b + 3c.$$

A. $T = -12$.

B. $T = -8$.

C. $T = 8$.

D. $T = 12$

Lời giải

Áp dụng công thức $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$

$$\sin^3 \frac{\beta}{3} = \frac{1}{4} \left(3 \sin \frac{\beta}{3} - \sin \beta \right)$$

$$3 \sin^3 \frac{\beta}{3^2} = \frac{3}{4} \left(3 \sin \frac{\beta}{3^2} - \sin \frac{\beta}{3} \right)$$

$$3^2 \sin^3 \frac{\beta}{3^3} = \frac{3^2}{4} \left(3 \sin \frac{\beta}{3^3} - \sin \frac{\beta}{3^2} \right)$$

.....

$$3^{x-1} \sin^3 \frac{\beta}{3^x} = \frac{3^{x-1}}{4} \left(3 \sin \frac{\beta}{3^x} - \sin \frac{\beta}{3^{x-1}} \right)$$

Từ đó suy ra

$$\sin^3 \frac{\beta}{3} + 3 \sin^3 \frac{\beta}{3^2} + 3^2 \sin^3 \frac{\beta}{3^3} + \dots + 3^{x-1} \sin^3 \frac{\beta}{3^x} = -\frac{1}{4} \sin \beta + \frac{3^x}{4} \sin^3 \frac{\beta}{3^x}. (1)$$

Mà

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4} \sin \beta + \frac{3^x}{4} \sin^3 \frac{\beta}{3^x} \right) &= -\frac{1}{4} \sin \beta + \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3^x \cdot \sin^3 \frac{\beta}{3^x} \right) = -\frac{1}{4} \sin \beta + \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin \frac{\beta}{3^x}}{\frac{\beta}{3^x}} \cdot \beta \right) \\ &= \frac{\beta - \sin \beta}{4} \end{aligned}$$

Vậy $a = b = \beta$; $c = 4 \Rightarrow T = 12$.

Câu 35. Cho các số thực a, b, c với $a > 0$ thỏa mãn $c^2 + a = 2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx - cx}) = -3$. Tính

$$P = a + b + 5c.$$

A. $P = -28$.

B. $P = 0$.

C. $P = 28$.

D. $P = 1$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx - cx}) = -3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a - c^2)x^2 + bx}{\sqrt{ax^2 + bx + cx}} = -3$.

$$\text{Điều này xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c^2 = 0 & (a, c > 0) \\ \frac{b}{\sqrt{a+c}} = -3 \end{cases} \quad . \text{ (Vì nếu } c \leq 0 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx} - cx) = +\infty).$$

Mặt khác, ta cũng có $c^2 + a = 2$.

$$\text{Do đó, } \begin{cases} a = c^2 = 1 \\ b = -3(\sqrt{a+c}) = -6 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -6, c = 1. \text{ Vậy } P = a + b + 5c = 0.$$

Dạng toán 6. Giới hạn vô cực của hàm số.

Câu 36. Giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x)$ bằng:

- A.** $I = -\infty$. **B.** $I = \frac{1}{4}$. **C.** $I = \frac{-1}{4}$. **D.** $I = +\infty$.

Lời giải

$$I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 \right) \right]$$

Do:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 \right) = -4 < 0$

$$\text{nên } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 \right) \right] = +\infty.$$

Câu 37. Giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{1 - x^2}$ bằng:

- A.** $I = -1$. **B.** $I = -\infty$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = +\infty$.

Lời giải

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{(-x-1)(-x+4)}}{(-x-1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{-x+4}}{\sqrt{(-x-1)(x-1)}} = -\infty \end{aligned}$$

Do

- $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} (\sqrt{-x+4}) = \sqrt{5}$;
- $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} (\sqrt{(-x-1)(x-1)}) = 0, \sqrt{(-x-1)(x-1)} < 0, \forall x < -1$.

Câu 38. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-2} \right)$ là:

A. -11 .

B. 0 .

C. $+\infty$.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{(x+1)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-(x+1)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2}$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(1-(x+1)(\sqrt{x+2}+2) \right) = -11$$

$$\text{Mặt khác } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0 \text{ và } x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x-2 > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-2} \right) = -\infty$$

Câu 39. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+x^2}{(x+1)^3}$ là:

A. 2 .

B. 1 .

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+x^2}{(x+1)^3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2(x+1)}{(x+1)^3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{(x+1)^2}$$

$$\text{Vì: } \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 = 0 \text{ và } (x+1)^2 > 0, \forall x \neq -1$$

$$\text{Nên } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+x^2}{(x+1)^3} = +\infty.$$

Câu 40. Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-10}{x-1} = 5$ và $g(x) = \sqrt{f(x)+6} - 2\sqrt[3]{f(x)-2}$.

$$\text{Tính } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x}-1)g(x)}.$$

A. $+\infty$.

B. $-\frac{5}{12}$.

C. $\frac{5}{12}$.

D. $-\infty$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-10}{x-1} = 5 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow 1} (f(x)-10) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 10$$

$$\text{Ta có } \sqrt{f(x)+6} - 2\sqrt[3]{f(x)-1} = (\sqrt{f(x)+6}-4) - (2\sqrt[3]{f(x)-2}-4)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(x)-10}{\sqrt{f(x)+6}+4} - \frac{2(f(x)-10)}{\left(\sqrt[3]{f(x)-2}\right)^2 + 2\sqrt[3]{f(x)-2}+4} \\
(\sqrt{x}-1)g(x) &= \left(\frac{f(x)-10}{\sqrt{f(x)+6}+4} - \frac{2(f(x)-10)}{\left(\sqrt[3]{f(x)-2}\right)^2 + 2\sqrt[3]{f(x)-2}+4} \right) (\sqrt{x}-1) \\
&= \frac{f(x)-10}{x-1} \left(\frac{1}{\sqrt{f(x)+6}+4} - \frac{2}{\left(\sqrt[3]{f(x)-2}\right)^2 + 2\sqrt[3]{f(x)-2}+4} \right) (x-1)(\sqrt{x}-1) \\
&= \frac{f(x)-10}{x-1} \left(\frac{1}{\sqrt{f(x)+6}+4} - \frac{2}{\left(\sqrt[3]{f(x)-2}\right)^2 + 2\sqrt[3]{f(x)-2}+4} \right) (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)^2 \\
\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}-1)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)-10}{x-1} \left(\frac{1}{\sqrt{f(x)+6}+4} - \frac{2}{\left(\sqrt[3]{f(x)-2}\right)^2 + 2\sqrt[3]{f(x)-2}+4} \right) (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)^2 \right) \\
&= 5 \left(\frac{1}{\sqrt{10+6}+4} - \frac{2}{\left(\sqrt[3]{10-2}\right)^2 + 2\sqrt[3]{10-2}+4} \right) (\sqrt{1}+1)(\sqrt{1}-1)^2 = 0 \\
\text{Mặt khác } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)-10}{x-1} \left(\frac{1}{\sqrt{f(x)+6}+4} - \frac{2}{\left(\sqrt[3]{f(x)-2}\right)^2 + 2\sqrt[3]{f(x)-2}+4} \right) (\sqrt{x}+1) \right) &= -\frac{5}{12} \\
\text{Và } (\sqrt{x}-1)^2 > 0 \text{ với } (\sqrt{x}-1) > 0 \text{ với } \forall x \neq 1 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x}-1)g(x)} &= -\infty.
\end{aligned}$$

Câu 41. Cho a và b là các số nguyên dương. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + ax} + \sqrt[3]{8x^3 + 2bx^2 + 3} \right) = \frac{7}{3}$. Khi đó a và b thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

- A.** $a + 2b = 33$. **B.** $a + 2b = 35$. **C.** $a + 2b = 36$. **D.** $a + 2b = 34$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x^2 + ax} + \sqrt[3]{8x^3 + 2bx^2 + 3} &= \frac{ax}{\sqrt{4x^2 + ax} - 2x} + \frac{2bx^2 + 3}{\sqrt[3]{(8x^3 + 2bx^2 + 3)^2} + 2x\sqrt[3]{8x^3 + 2bx^2 + 3} + 4x^2} \\
\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + ax} + \sqrt[3]{8x^3 + 2bx^2 + 3} \right) &= \frac{-a}{4} + \frac{b}{6} = \frac{-3a + 2b}{12}.
\end{aligned}$$

Theo bài ra ta có: $\frac{-3a+2b}{12} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow -3a+2b=28 \Rightarrow 3a=2b-28$. Suy ra a là số chẵn.

Vậy $a+2b$ là số chẵn. Nên loại phương án A và B.

Giải hệ $\begin{cases} -3a+2b=28 \\ a+2b=36 \end{cases}$ được $\begin{cases} a=2 \\ b=17 \end{cases}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 42. Biết giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - x^2} + \sqrt{4x^2 + 3x} \right) = -\frac{a}{b}$ với a, b là số tự nhiên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

A. 7

B. 11

C. 9

D. 13

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - x^2} + \sqrt{4x^2 + 3x} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - x^2} - 2x + 2x + \sqrt{4x^2 + 3x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - x^2} - 2x \right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + \sqrt{4x^2 + 3x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{\sqrt[3]{8x^3 - x^2} + \sqrt[3]{8x^3 - x^2} \cdot 2x + 4x^2} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\sqrt{4x^2 + 3x} - 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x^2 \left(\sqrt[3]{8 - \frac{1}{x}} + \sqrt[3]{8 - \frac{1}{x}} \cdot 2 + 4 \right)} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x \left(-\sqrt{4 + \frac{3}{x}} - 2 \right)} = -\frac{1}{12} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

Vậy $a=5, b=6 \Rightarrow a+b=11$.

Dạng toán 7. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm.

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2, & x > 1 \\ 3x^2 + 6, & x < 1 \\ 4a^2 + 5, & x = 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

A. 1.

B. ± 1 .

C. -1.

D. ± 2 .

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Với $x=1$, ta có: $f(1) = 4a^2 + 5$.

Với $x \neq 1$, ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+2)^2 = 9$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 + 6) = 9$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 9$.

Vậy hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$ nếu $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow 9 \neq 4a^2 + 5 \Leftrightarrow a \neq \pm 1$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{a\sqrt{5x+1} - 2a\sqrt[3]{2x+2}}{x-3}, & x \neq 3 \\ 2x+1, & x = 3 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 3$.

A. 20.

B. 22.

C. 23.

D. 24.**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a\sqrt{5x+1} - 2a\sqrt[3]{2x+2}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{a\sqrt{5x+1} - 4a}{x-3} + \frac{4a - 2a\sqrt[3]{2x+2}}{x-3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{5a(x-3)}{(x-3)(\sqrt{5x+1} + 4)} + \frac{2a(6-2x)}{(x-3)[4 + 2\sqrt[3]{2x+2} + (\sqrt[3]{2x+2})^2]} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{5a}{\sqrt{5x+1} + 4} - \frac{4a}{4 + 2\sqrt[3]{2x+2} + (\sqrt[3]{2x+2})^2} \right) = \frac{5a}{8} - \frac{4a}{12} = \frac{7a}{24}. \end{aligned}$$

Ta có $f(3) = 7$.

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow \frac{7a}{24} = 7 \Leftrightarrow a = 24$.

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 3$ khi $a = 24$.

Câu 45. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{2-x} & \text{khi } x > 2 \\ mx & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$.

A. $m = \frac{1}{3}$.B. $m = -\frac{1}{3}$.C. $m = \frac{2}{3}$.D. $m = -\frac{2}{3}$.**Lời giải**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$; $x_0 = 2 \Rightarrow x_0 \in D$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (mx) = 2m$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4(x-2)}{(2-x)(\sqrt{4x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-4}{\sqrt{4x+1}+3} = -\frac{2}{3}.$$

$f(2) = 2m$.

Hàm số liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow 2m = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$.

Câu 46. Tích tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 3x^2 - x + 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m^2x - 3mx - 2021 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 1$

bằng:

A. 2021.

B. -2021.

C. -2020.

D. 2022.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$; $x_0 = 1 \Rightarrow x_0 \in D$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 3x^2 - x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2 - x - 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - x - 2) = -1.$$

$$f(1) = m^2 - 3m - 2021.$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x_0 = 1 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 2021 = -1 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 2020 = 0.$$

Ta thấy phương trình trên có $ac < 0$ nên phương trình có hai nghiệm trái dấu và tích hai nghiệm bằng -2020.

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{ax^2 + 1} - bx - 2}{4x^3 - 3x + 1} & \text{khi } x \neq \frac{1}{2} \\ \frac{c}{2} & \text{khi } x = \frac{1}{2} \end{cases}, (a, b, c \in \mathbb{R})$. Biết hàm số liên tục tại $x_0 = \frac{1}{2}$.

Tính $S = abc$.

A. $S = -36$.

B. $S = 18$.

C. $S = 36$.

D. $S = -18$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{\sqrt{ax^2 + 1} - bx - 2}{4x^3 - 3x + 1} = \frac{(\sqrt{ax^2 + 1})^2 - (bx + 2)^2}{(2x - 1)^2 (x + 1)(\sqrt{ax^2 + 1} + bx + 2)} = \frac{(a - b^2)x^2 - 4bx - 3}{(2x - 1)^2 (x + 1)(\sqrt{ax^2 + 1} + bx + 2)}.$$

$$\text{Để } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{ax^2 + 1} - bx - 2}{4x^3 - 3x + 1} \right) \text{ tồn tại thì } \begin{cases} (a - b^2)x^2 - 4bx - 3 = m(2x - 1)^2 \\ \sqrt{\frac{a}{4} + 1} + \frac{b}{2} + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ b = -3 \\ a = -3 \end{cases}$$

Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{ax^2 + 1} - bx - 2}{4x^3 - 3x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{-3x^2 + 1} + 3x - 2}{4x^3 - 3x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-3(2x - 1)^2}{(2x - 1)^2 (x + 1)(\sqrt{-3x^2 + 1} - 3x + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-3}{(x + 1)(\sqrt{-3x^2 + 1} - 3x + 2)} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2.$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x_0 = \frac{1}{2} \text{ khi } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{c}{2} = -2 \Leftrightarrow c = -4$$

$$\text{Vậy } S = abc = -3(-3)(-4) = -36.$$

Câu 48. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{6x-3}-ax-b}{x^2-4x+4} & \text{khi } x \neq 2 \\ -\frac{1}{6} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $S = a^2 + b^2$

khi hàm số liên tục tại $x = 2$.

A. $S = 2$.

B. $S = 1$.

C. $S = 4$.

D. $S = 8$.

Lời giải

Cách 1:

Để $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6x-3}-ax-b}{x^2-4x+4}$ tồn tại hữu hạn thì phương trình $\sqrt{6x-3} = ax+b$ phải có nghiệm kép tại $x = 2$.

$$\text{Ta có } (ax+b)^2 = 6x-3 \Leftrightarrow a^2x^2 + (2ab-6)x + b^2 + 3 = 0$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \sqrt{6 \cdot 2 - 3} = 2a + b \\ \Delta' = (ab-3)^2 - a^2(b^2+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ -6ab + 9 - 3a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - 2a \\ -3a^2 - 6a(3-2a) + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1.$$

Với $a = b = 1$ ta được

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6x-3}-x-1}{x^2-4x+4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x-3-(x+1)^2}{(x^2-4x+4)(\sqrt{6x-3}+x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2+4x-4}{(x^2-4x+4)(\sqrt{6x-3}+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{\sqrt{6x-3}+x+1} = -\frac{1}{6} = f(2) \end{aligned}$$

Do đó hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$.

$$\text{Vậy } S = a^2 + b^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Cách 2:

Để $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6x-3}-ax-b}{x^2-4x+4}$ tồn tại hữu hạn thì phương trình $\sqrt{6x-3} = ax+b$ phải có nghiệm kép tại

$$x = 2. \text{ Khi đó } \begin{cases} \sqrt{6 \cdot 2 - 3} = a \cdot 2 + b \\ \left. \frac{d}{dx}(\sqrt{6x-3}) \right|_{x=2} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^{2020}+x-2}{\sqrt{2021x+1}-\sqrt{x+2021}} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Khi hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ thì $a = \frac{m}{1010} \sqrt{n}$ trong đó m và n là hai số nguyên tố cùng nhau. Tính $2n - m$.

A. 2021.

B. 2020.

C. 2022.

D. 2023.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 & + \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2020} + x - 2}{\sqrt{2021x+1} - \sqrt{x+2021}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[(x^{2020} - 1) + (x - 1)](\sqrt{2021x+1} + \sqrt{x+2021})}{(2021x+1) - (x+2021)} \\
 & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{2019} + x^{2018} + \dots + x + 1)(\sqrt{2021x+1} + \sqrt{x+2021})}{2020(x-1)} \\
 & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{2019} + x^{2018} + \dots + x + 1)(\sqrt{2021x+1} + \sqrt{x+2021})}{2020} \\
 & = \frac{2021}{2020} \cdot 2 \cdot \sqrt{2022} = \frac{2021}{1010} \sqrt{2022}.
 \end{aligned}$$

+ Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a = \frac{2021}{1010} \sqrt{2022}$.

Vậy $m = 2021$, $n = 2022$. Do đó $2n - m = 2 \cdot 2022 - 2021 = 2023$.

Dạng toán 8. Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định.

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^3-x+6}} & \text{khi } x \neq 3, x > -2 \\ m + \sqrt{3} & \text{khi } x = 3, m \in \mathbb{R} \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = 3$.

A. $m = \sqrt{3}$.B. $m = -\sqrt{3}$.C. $m = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.D. $m = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.**Lời giải**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^3-x+6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Và } f(3) = m + \sqrt{3}.$$

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$ thì $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow m = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 51. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 5x}{5x} & \text{khi } x \neq 0 \\ a + 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

A. $a = 1$.B. $a = -1$.C. $a = -2$.D. $a = 2$.**Lời giải**

Ta có: $f(0) = a + 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1.$$

Để hàm số liên tục tại $x = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow a + 2 = 1 \Leftrightarrow a = -1$.

Câu 52. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - (ax-b)}{(x-1)^2} & \text{khi } x \neq 1 \\ c & \text{khi } x = 1 \end{cases}$, với $a > 0$. Biết hàm số liên tục trên tập xác

định. Tính giá trị biểu thức $T = 2a - b + 8c$?

A. $T = -1$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = -2\sqrt{2}$. **D.** $T = \sqrt{2}$.

Lời giải

Hàm số xác định trên $[-1; +\infty)$.

$$\text{Ta có: } \frac{\sqrt{x+1} - (ax-b)}{(x-1)^2} = \frac{(x+1) - (ax-b)^2}{(x-1)^2 \cdot [\sqrt{x+1} + (ax-b)]} = \frac{-a^2x^2 + (1+2ab)x + (1-b^2)}{(x-1)^2 \cdot [\sqrt{x+1} + (ax-b)]}.$$

Hàm số liên tục trên tập xác định $\Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại điểm $x = 1$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - (ax-b)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-a^2x^2 + (1+2ab)x + (1-b^2)}{(x-1)^2 \cdot [\sqrt{x+1} + (ax-b)]}.$$

Vì hàm số liên tục tại $x = 1$ nên $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ tồn tại hữu hạn.

Do đó: phương trình $-a^2x^2 + (1+2ab)x + (1-b^2) = 0$ có nghiệm kép $x = 1$.

$$\text{Suy ra: } -a^2x^2 + (1+2ab)x + (1-b^2) = -a^2 \cdot (x-1)^2; \forall x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+2ab = -2 \cdot (-a^2) \\ 1-b^2 = -a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 2ab = b^2 - a^2 \\ b^2 - a^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 2ab - b^2 = 0 \\ b^2 - a^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b) \cdot (3a+b) = 0 \\ b^2 - a^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a^2 - a^2 = 1 \text{ (VN)} \\ b = -3a \\ 8a^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ (} a > 0 \text{)} \\ b = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{8}x^2 + \left(1 - 2 \cdot \frac{3}{8}\right)x - \frac{1}{8}}{(x-1)^2 \cdot \left[\sqrt{x+1} + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\right]} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{8}}{\left[\sqrt{x+1} + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\right]} = -\frac{\sqrt{2}}{32}.$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow c = -\frac{\sqrt{2}}{32}.$$

Vậy $a = \frac{\sqrt{2}}{4}; b = -\frac{3\sqrt{2}}{4}; c = -\frac{\sqrt{2}}{32}$. Nên $T = 2a - b + 8c = \sqrt{2}$.

Câu 53. Cho a, b là các tham số thực sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{khi } |x| \leq \frac{\pi}{3} \\ ax + b & \text{khi } |x| > \frac{\pi}{3} \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính giá

trị của biểu thức $a + 2b$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\frac{\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}; +\infty\right)$, f là hàm số sơ cấp cho bởi một công thức và xác định nên f liên tục. Do đó, hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi f liên tục tại $x = -\frac{\pi}{3}$ và $x = \frac{\pi}{3}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} (ax + b) = -\frac{\pi}{3}a + b$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}^+} (\cos x) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$;
 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Hàm số liên tục tại $x = -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}a + b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\pi a - 6b = -3. (1)$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\cos x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} (ax + b) = \frac{\pi}{3}a + b$;
 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Hàm số liên tục tại $x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}a + b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\pi a + 6b = 3. (2)$

Từ (1) và (2) ta được $a = 0, b = \frac{1}{2}$. Suy ra $a + 2b = 1$.

Dạng toán 9. Ứng dụng tính liên tục của hàm số trong giải phương trình.

Câu 54. Phương trình nào dưới đây luôn có nghiệm với mọi m ?

A. $(m-1)x^3 + 2x^2 + 1 = 0$.

B. $mx^5 + x^4 + 3 = 0$.

C. $(m^2 - 1)x^3 + (m-1)x^2 + 1 = 0$.

D. $(m^2 + m + 5)x^7 + x^5 - 1 = 0$.

Lời giải

Xét phương án A: khi $m = 1$ thì phương trình vô nghiệm.

Xét phương án B: khi $m = 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Xét phương án C: khi $m = 1$ thì phương trình vô nghiệm.

Xét hàm số $f(x) = (m^2 + m + 5)x^7 + x^5 - 1 = 0$. Ta có:

$$\begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = m^2 + m + 5 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0, \forall m \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Suy ra $f(0) \cdot f(1) < 0$. Mà hàm số $f(x) = (m^2 + m + 5)x^7 + x^5 - 1$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$.

Vậy phương trình $(m^2 + m + 5)x^7 + x^5 - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trên $(0; 1)$ với mọi m .

Câu 55. Phương trình $x^5 - 5x^4 + 4x - 1 = 0$ có ít nhất bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; 5)$.

A. Một.

B. Hai.

C. Ba.

D. Vô nghiệm.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^5 - 5x^4 + 4x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $\begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{23}{32} > 0 \end{cases}$ suy ra $f(0) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. Do đó phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Ta lại có: $\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{23}{32} > 0 \\ f(1) = -1 < 0 \end{cases}$ suy ra $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$. Do đó phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Tương tự: $\begin{cases} f(1) = -1 < 0 \\ f(5) = 19 > 0 \end{cases}$ suy ra $f(1) \cdot f(5) < 0$. Do đó phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(1; 5)$.

Ta lại có các khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; 1\right); (1; 5)$ là đôi một không giao nhau.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất ba nghiệm thuộc khoảng $(0; 5)$.

Câu 56. Phương trình nào sau đây luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

A. $(m-1)x^5 + x^2 - x + 1 = 0$.

B. $mx^5 + 2x^4 + 1 = 0$.

C. $(m^2 - 4)x^5 + mx^2 + 2 = 0$.

D. $(m^2 - 1)x^5 + 4x + 2 = 0$.

Lời giải

Đặt $f(x) = (m^2 - 1)x^5 + 4x + 2$ (*), hàm số liên tục trên $[-1; 0]$.

Ta có $f(-1) = -m^2 - 1 < 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$, $f(0) = -2 > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

Vì $f(0).f(-1) < 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình (*) có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1; 0)$.

Vậy phương trình (*) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

Câu 57. Phương trình nào sau đây có đúng một nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.

A. $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$. **B.** $x^5 - 3x^4 + x - 3 = 0$.

C. $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$. **D.** $x^5 + 2x + 1 = 0$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^5 + 2x + 1$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-1) = -2 < 0$, $f(1) = 4 > 0$.

Vì $f(1).f(-1) < 0$ nên phương trình $x^5 + 2x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1; 1)$

Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 trên khoảng $(-1; 1)$.

Khi đó $f(x_1) - f(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1^5 - x_2^5 + 2(x_1 - x_2) = 0$.

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^4 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_2^4 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) \left[(x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2)^2 + (x_2^2 + \frac{1}{2}x_1x_2)^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2^2 + 2 \right] = 0(1)$$

$$\text{Do } (x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2)^2 + (x_2^2 + \frac{1}{2}x_1x_2)^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2^2 + 2 > 0 \quad \forall x_1, x_2$$

$$\text{Nên } (1) \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Vậy phương trình luôn có đúng một nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 58. Trong các phương trình sau, phương trình nào có đúng 5 nghiệm phân biệt?

A. $2\sqrt{2-3x} = x^3 + 2020x - 4$.

B. $x^5 + 2020x - 1 = 0$.

C. $x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x-2}$.

D. $x^5 - 9x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 12x + 1 = 0$.

Lời giải

Với phương án A: $2\sqrt{2-3x} = x^3 + 2020x - 4$

$$\text{Điều kiện: } x \leq \frac{2}{3}.$$

$$\text{Phương trình } 2\sqrt{2-3x} = x^3 + 2020x - 4 \Leftrightarrow x^3 + 2020x - 2\sqrt{2-3x} - 4 = 0.$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 2020x - 2\sqrt{2-3x} - 4$ liên tục trên $\left[-\infty; \frac{2}{3}\right]$.

$f(0) = -4 - 2\sqrt{2} < 0$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{36260}{27} > 0 \Rightarrow f(0).f\left(\frac{2}{3}\right) < 0$ Nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 .

Khi đó: $f(x_1) - f(x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1^3 - x_2^3) + 2020(x_1 - x_2) - 2(\sqrt{2-3x_1} - \sqrt{2-3x_2}) = 0$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) \underbrace{\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2020 + \frac{6}{\sqrt{2-3x_1} + \sqrt{2-3x_2}} \right)}_B = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ Vì } B = \left(x_1 + \frac{x_2}{2} \right)^2 + \frac{3x_2^2}{4} + 2020 + \frac{6}{\sqrt{2-3x_1} + \sqrt{2-3x_2}} > 0.$$

Vậy phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

Với phương án B. $x^5 + 2020x - 1 = 0$.

Xét hàm số $f(x) = x^5 + 2020x - 1$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ Mặt khác:

$$f(0) = -1, f(1) = 2020 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = -2020 < 0$$

Nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; 1)$.

Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 .

Khi đó: $f(x_1) - f(x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1^5 - x_2^5) + 2(x_1 - x_2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) \underbrace{(x_1^4 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_2^4 + 2)}_A = 0 \quad (1)$$

Do $A = \left(x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 \right)^2 + \left(\frac{1}{4}x_1x_2 + x_2^2 \right)^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2^2 + 2 > 0$ Nên $(1) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Vậy phương trình luôn có đúng một nghiệm.

Với phương án C: $x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x-2}$.

Đặt $y = \sqrt[3]{3x-2} \Leftrightarrow y^3 = 3x-2 \Leftrightarrow 3x = y^3 + 2$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 2 = 3y \\ y^3 + 2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 + xy + 3 = 0 \end{cases}$.

Với $x = y$ có: $x = \sqrt[3]{3x-2} \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$.

Với $x^2 + y^2 + xy + 3 = 0$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$; $x = -2$.

Với phương án D. $x^5 - 9x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 12x + 1 = 0$.

Xét hàm số $f(x) = x^5 - 9x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 12x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(-2) = -95 < 0, f(-1) = 1 > 0, f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{19}{32} < 0$

$f(0) = 1 > 0, f(2) = -47 < 0, f(10) = 7921 > 0$

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 5 nghiệm thuộc các khoảng

$$(-2; -1), \left(-1; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; 0\right), (0; 2), (2; 10)$$

Mặt khác $f(x)$ là đa thức bậc 5 nên có tối đa 5 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm.

Câu 59. Số nghiệm ít nhất có thể của phương trình $m(x-1)(x^3-4x)+x^3-3x+1=0$ (m là tham số) là:

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = m(x-1)(x^3-4x) + x^3 - 3x + 1$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(-2) = -1, f(0) = 1, f(1) = -1, f(2) = 3.$$

Ta có

* $f(-2).f(0) < 0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2; 0)$.

* $f(0).f(1) < 0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; 1)$.

* $f(1).f(2) < 0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(1; 2)$.

Từ đó suy ra phương trình có ít nhất 3 nghiệm. Mặt khác $m=0$ phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Câu 60. Trong các phương trình sau, phương trình nào có đúng 5 nghiệm phân biệt?

A. $x^5 + 3x + 1 = 0$.

B. $\sqrt{x^5 + 2x^3 + 15x^2 + 14x + 2} = 3x^2 + x + 1$.

C. $x^3 + 2x = 4 + 3\sqrt{3-2x}$.

D. $2x + 6\sqrt[3]{1-x} = 3$.

Lời giải

A. Xét hàm số $f(x) = x^5 + 3x + 1$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Mặt khác:
 $f(-1) = -1, f(0) = 1 \Rightarrow f(-1).f(0) = -1 < 0$.

Nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1; 0)$.

Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 .

Khi đó: $f(x_1) - f(x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1^5 - x_2^5) + 3(x_1 - x_2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) \underbrace{\left(x_1^4 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_2^4 + 3\right)}_A = 0 \quad (1)$$

Do $A = \left(x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2\right)^2 + \left(\frac{1}{4}x_1x_2 + x_2^2\right)^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2^2 + 3 > 0$ Nên $(1) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Vậy phương trình luôn có đúng một nghiệm.

B. Phương trình đã cho tương đương với:

$$x^5 + 2x^3 + 15x^2 + 14x + 2 = (3x^2 + x + 1)^2 \Leftrightarrow x^5 - 9x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 12x + 1 = 0 \quad (1)$$

Hàm số $f(x) = x^5 - 9x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 12x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(-2) = -95 < 0, f(-1) = 1 > 0, f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{19}{32} < 0$

$$f(0) = 1 > 0, f(2) = -47 < 0, f(10) = 7921 > 0$$

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 5 nghiệm thuộc các khoảng

$$(-2; -1), \left(-1; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; 0\right), (0; 2), (2; 10)$$

Mặt khác $f(x)$ là đa thức bậc 5 nên có tối đa 5 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm.

C. Điều kiện: $x \leq \frac{3}{2}$.

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3\sqrt{3-2x} - 4 = 0.$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 2x - 3\sqrt{3-2x} - 4$ liên tục trên $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

$$f(0) = -4 - 3\sqrt{3} < 0, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{19}{8} > 0 \Rightarrow f(0).f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$$

Nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 .

$$\text{Khi đó: } f(x_1) - f(x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1^3 - x_2^3) + 2(x_1 - x_2) - 3(\sqrt{3-2x_1} - \sqrt{3-2x_2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) \underbrace{\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2 + \frac{6}{\sqrt{3-2x_1} + \sqrt{3-2x_2}}\right)}_B = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ (Vì } B = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4} + 2 + \frac{6}{\sqrt{3-2x_1} + \sqrt{3-2x_2}} > 0).$$

Vậy phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

D. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 61. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $(m^2 - 5m + 4)x^5 + 2x^2 + 1 = 0$ có nghiệm.

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$. **B.** $m \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

C. $m \in \{1; 4\}$. **D.** $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

+ Nếu $m^2 - 5m - 4 = 0 \Leftrightarrow m \in \{1; 4\}$ thì phương trình đã cho trở thành $2x^2 + 1 = 0$. Đây là một phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $m^2 - 5m + 4 \neq 0$ thì phương trình bậc 5 luôn có ít nhất một nghiệm.

Vậy để phương trình đã cho có nghiệm thì $m \in \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$.

HẾT