

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm các số thực a, b sao cho hàm số $f(x) = a \ln x + bx^2 + x$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và $f(1) = 3$.

Câu 3 (1,0 điểm).

- a) Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sqrt{x+4} - 2}$
- b) Giải phương trình $\log_2 \left(\frac{5 \cdot 2^x - 8}{2^x + 2} \right) = 3 - x$

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_1^4 \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x} - 2e^x}{e^{2x}\sqrt{x}}} dx$

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho các điểm $A(1;1;1)$; $B(3;-1;1)$ và $C(-2;0;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm C và vuông góc với đường thẳng AB. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Câu 6 (1,0 điểm).

- a) Giải phương trình $\cos 2x - 3 \sin 2x + 5(\sin x + \cos x) = 3$
- b) Có 2 túi đựng bút. Túi thứ nhất chứa 4 bút đỏ và 6 bút xanh. Túi thứ hai chứa 16 bút đỏ và một số bút xanh. Chọn ngẫu nhiên từ mỗi túi ra một chiếc bút. Biết xác suất để hai bút chọn ra có cùng màu là 0,44. Xác định số bút xanh có trong túi thứ hai.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC cân tại A với $\widehat{ABC} = 30^\circ$; các mặt (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết độ dài trung tuyến AM của tam giác ABC bằng a và góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Tính thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa các đường thẳng AM, SC theo a.

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tâm I tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N. Đường thẳng BI cắt đường thẳng MN tại E. Biết $I(-1;-1)$; $E(3;1)$ và đường thẳng AC có phương trình $x + 2y - 1 = 0$. Xác định tọa độ điểm C.

Câu 9 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4 + (x + y^2)\sqrt{y - 4x + 8} = 2y^2 - y + 6x \\ 4(\sqrt{y} + 2\sqrt{x+1}) = 9y\sqrt{x-1} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 10 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{2a-1} + \frac{b}{2b-1} + \frac{c}{2c-1} \geq \frac{18}{3+ab+bc+ca}$$

ĐÁP ÁN – LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

+ Sự biến thiên

Chiều biến thiên: $y' = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in D$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$

Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty \Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng

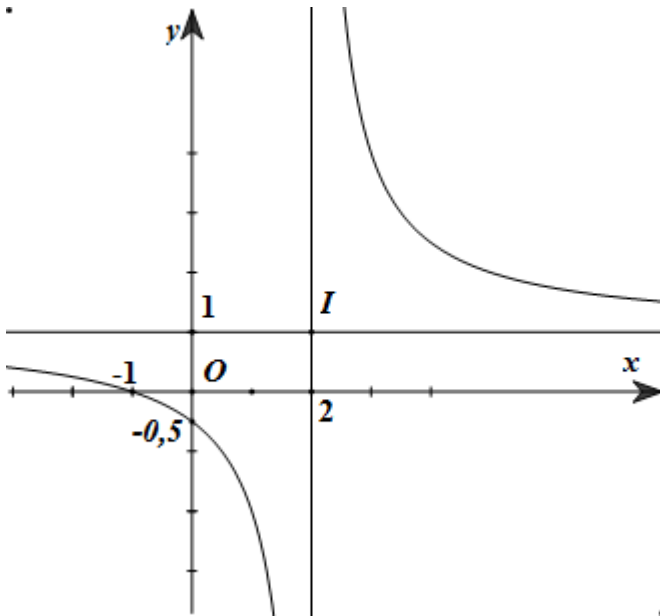
$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	1 	$+\infty$ 	1
	$-\infty$		

+ Đồ thị

Giao với Ox tại $(-1; 0)$, giao Oy tại $(0; -\frac{1}{2})$. Điểm $I(2; 1)$ là tâm đối xứng đồ thị



Câu 2.

Tập xác định $(0; +\infty)$

Ta có $f(1) = 3 \Leftrightarrow a \cdot \ln 1 + b \cdot 1 + 1 = 3 \Leftrightarrow b = 2$

Khi đó $f(x) = a \ln x + 2x^2 + x$; $f'(x) = \frac{a}{x} + 4x + 1$; $f''(x) = -\frac{a}{x^2} + 4$

$$\text{Hàm số } f(x) \text{ đạt cực tiểu tại } x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{1} + 4 \cdot 1 + 1 = 0 \\ -\frac{a}{1} + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -5$$

Vậy $a = -5$, $b = 2$

Câu 3.

a) Xét hàm số $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{\sqrt{x+4} - 2}$ có tập xác định: $D = (-4; +\infty) \setminus \{0\}$

$$\text{Ta có } \forall x \in D, f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{\sqrt{x+4} - 2} = \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \frac{2x(\sqrt{x+4} + 2)}{x+4-4} = \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot 2(\sqrt{x+4} + 2)$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2(\sqrt{x+4} + 2) = 8$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \cdot 8 = 8$$

$$\text{b) } \log_2 \left(\frac{5 \cdot 2^x - 8}{2^x + 2} \right) = 3 - x \quad (1)$$

Điều kiện: $\frac{5 \cdot 2^x - 8}{2^x + 2} > 0$. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{5 \cdot 2^x - 8}{2^x + 2} = 2^{3-x} \Leftrightarrow \frac{5 \cdot 2^x - 8}{2^x + 2} = \frac{8}{2^x}$$

$$\Leftrightarrow 2^x (5 \cdot 2^x - 8) = 8(2^x + 2)$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot 2^{2x} - 16 \cdot 2^x - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 4)(5 \cdot 2^x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 4 \quad (\text{do } 5 \cdot 2^x + 4 > 0, \forall x)$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{2\}$

Câu 4.

$$I = \int_1^4 \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x} - 2e^x}{e^{2x}\sqrt{x}}} dx$$

Xét $f(x) = e^x - \sqrt{x}$ trên $[1;4]$. $f(x)$ liên tục trên $[1;4]$. Ta có

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \geq e^1 - \frac{1}{2\sqrt{1}} > 0, \forall x \in [1; 4] \Rightarrow f(x) \geq f(1) = e^1 - 1 > 0, \forall x \in [1; 4]$$

$$\Rightarrow e^x > \sqrt{x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{e^x} > 0, \forall x \in [1; 4]$$

Suy ra

$$I = \int_1^4 \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{x})^2} - \frac{2}{e^x \sqrt{x}} + \frac{1}{(e^x)^2}} dx = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{e^x}\right)^2} dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - e^{-x}\right) dx = \left(2\sqrt{x} + e^{-x}\right) \Big|_1^4 = 2 + \frac{1}{e^4} - \frac{1}{e}$$

Câu 5.

Có $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 0)$. Vì $(P) \perp AB$ nên nhận $\vec{n} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = (1; -1; 0)$ làm VTPT

Suy ra phương trình (P): $1.(x+2) - 1.y = 0 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0$.

Gọi d là đường thẳng đi qua $O(0;0;0)$ và vuông góc với (P). Suy ra d nhận $\vec{n} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = (1; -1; 0)$ làm

$$\text{VTCP} \Rightarrow \text{phương trình d: } \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

Gọi H là giao điểm của d và (P). $H \in d \Rightarrow H(t; -t; 0)$

$H \in (P) \Rightarrow t - (-t) + 2 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1; 1; 0)$

Bán kính của mặt cầu (S) là $R = OH = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Suy ra phương trình (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

Câu 6.

$$a) \cos 2x - 3\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) = 3$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x) + 5(\sin x + \cos x) = 3(1 + \sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x + 5) = 3(\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x + 5) = 3(\sin x + \cos x)^2$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(-2\cos x - 4\sin x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ 2\cos x + 4\sin x = 5 \end{cases}$$

$$\text{Có } \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 bộ số, ta có

$$(2 \cos x + 4 \sin x)^2 \leq (2^2 + 4^2)(\cos^2 x + \sin^2 x) = 20 \Rightarrow 2 \cos x + 4 \sin x < 5$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Gọi số bút xanh trong túi thứ 2 là x. A là biến cố “Hai bút chọn ra có cùng màu”

Tính số phần tử của không gian mẫu: Có 10 cách chọn 1 bút ở túi thứ nhất, $(16 + x)$ cách chọn 1 bút ở túi thứ 2, theo quy tắc nhân số phần tử của không gian mẫu là $10(16 + x)$

Tính số kết quả thuận lợi cho A:

TH1: 2 bút lấy ra cùng có màu đỏ: Số cách chọn bút màu đỏ từ túi thứ nhất và túi thứ hai lần lượt là 4 và 16, do đó có 4.16 cách chọn ra 2 bút màu đỏ

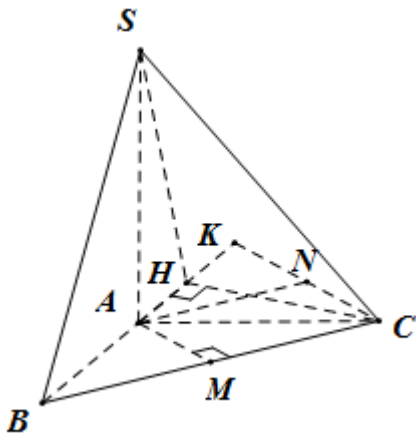
TH2: 2 bút lấy ra cùng có màu xanh: Tương tự có $6.x$ cách chọn ra 2 bút màu xanh.

Theo quy tắc cộng số kết quả thuận lợi cho A là $4.16 + 6x$

$$\text{Xác suất của A là } \frac{4.16 + 6.x}{10.(16 + x)} = 0,44 \Leftrightarrow 1,6x = 6,4 \Leftrightarrow x = 4$$

Vậy có 4 bút màu xanh ở túi thứ 2.

Câu 7.



Về $CH \perp AB$ tại $H \Rightarrow CH \perp (SAB)$. Góc giữa SC và (SAB) là $(SC; SH) = \widehat{HSC} = 30^\circ$

$$\Delta ABC \text{ cân tại } A \Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow AC = AB = \frac{AM}{\sin 30^\circ} = 2a$$

$$BM = AM \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}; BC = 2BM = 2a\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC = a^2 \sqrt{3}$$

$$\Delta BAM \sim \Delta BCH \Rightarrow \frac{AM}{CH} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow CH = \frac{AM \cdot BC}{BA} = a\sqrt{3}$$

$$SC = \frac{HC}{\sin 30^\circ} = 2a\sqrt{3}, SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = 2a\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} -a - b + c = -2 \\ 3a + b + c = -10 \\ -\frac{1}{5}a + \frac{3}{5}b + c = -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{10}{3} \\ b = \frac{8}{3} \\ c = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình (C): } \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{65}{9}$$

$$(C) \text{ có tâm } J\left(\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right) \text{ là trung điểm IC} \Rightarrow C\left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}\right)$$

Câu 9.

$$\begin{cases} 4 + (x + y^2)\sqrt{y - 4x + 8} = 2y^2 - y + 6x & (1) \\ 4(\sqrt{y} + 2\sqrt{x+1}) = 9y\sqrt{x-1} \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \\ y - 4x + 8 \geq 0 \end{cases}$$

Với điều kiện đó ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (x + y^2)(\sqrt{y - 4x + 8} - 2) = -y + 4x - 4 \\ &\Leftrightarrow (x + y^2)(\sqrt{y - 4x + 8} - 2) = 4 - (y - 4x + 8) \\ &\Leftrightarrow (x + y^2)(\sqrt{y - 4x + 8} - 2) = (2 - \sqrt{y - 4x + 8})(2 + \sqrt{y - 4x + 8}) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{y - 4x + 8} - 2)(x + y^2 + 2 + \sqrt{y - 4x + 8}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y - 4x + 8} = 2 \quad \left(\text{do } x + y^2 + 2 + \sqrt{y - 4x + 8}, \forall x \geq -1, y \geq 0, y - 4x + 8 \geq 0\right) \\ &\Leftrightarrow y = 4x - 4 \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 4 \\ 4(2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x+1}) = 36(x-1)\sqrt{x-1} \end{cases} \quad (2) \\ (2) &\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x+1} = 9(x-1)\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} - 4\sqrt{x-1} = (9x-15)\sqrt{x-1} \\ &\Leftrightarrow \frac{4(x+1) - 16(x-1)}{2\sqrt{x+1} + 4\sqrt{x-1}} = (9x-15)\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \frac{-12x+20}{2\sqrt{x+1} + 4\sqrt{x-1}} = (9x-15)\sqrt{x-1} \\ &\Leftrightarrow (3x-5)\left(3\sqrt{x-1} + \frac{4}{2\sqrt{x+1} + 4\sqrt{x-1}}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

(thỏa điều kiện)

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$

Câu 10.

Với các số dương x, y, z bất kì, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương, ta có:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x + y + z) \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \cdot 3\sqrt[3]{xyz} = 9 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z} \quad (*)$$

Áp dụng (*) ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2a-1} + \frac{b}{2b-1} + \frac{c}{2c-1} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4a-2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4b-2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4c-2}\right) \\ &= \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{4a-2} + \frac{1}{4b-2} + \frac{1}{4c-2}\right) \geq \frac{3}{2} + \frac{9}{4(a+b+c)-6} = \frac{3t}{2t-3} \end{aligned}$$

$$\text{Với } t = a + b + c, t \geq 3 \quad (1)$$

Mặt khác vì $a, b \geq 1$ nên $(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b$. Tương tự $bc+1 \geq b+c, ca+1 \geq c+a$

$$\text{Suy ra } \frac{18}{3+ab+bc+ca} \leq \frac{18}{2(a+b+c)} = \frac{9}{a+b+c} = \frac{9}{t} \quad (2)$$

$$\text{Ta chứng minh } \frac{3t}{2t-3} \geq \frac{9}{t} \Leftrightarrow 3t^2 - 18t + 27 \geq 0 \Leftrightarrow 3(t-3)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng.} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có đpcm.