HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN
VÙNG DH&ĐB BẮC BỘ

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
LẦN THỨ XV, NĂM 2024
ĐỀ THI MÔN: TOÁN - LỚP 11
Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: 16 tháng 7 năm 2024

(Đề thi gồm 01 trang)

Câu 1 (4,0 điểm). Cho dãy số thực (u_n) được xác định bởi công thức truy hồi sau:

$$u_1 > 0, u_{n+1} = \frac{3+\sqrt{2u_n^2+8u_n+9}}{u_n}, \text{ với } n \text{ nguyên dương.}$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 2 (4,0 điểm). Cho đa thức $P(x) = x^5 + x^4 - x - \frac{1}{2}$.

a) Chứng minh rằng $P(x)$ có nghiệm là số phức nhưng không là số thực.

b) Giả sử $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$ là một nghiệm phức tùy ý của $P(x)$. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2 + b^2 + 1\right)^2 < 4b^2 + 1.$$

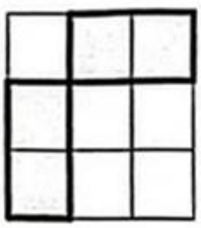
Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có $AB < AC$. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và E, F lần lượt là trung điểm của AC và AB. Tia phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ cắt các đường thẳng OF, OE lần lượt tại P, Q và cắt lại đường tròn (O) tại điểm D.

a) Chứng minh rằng diện tích hai tam giác PDF và QDE bằng nhau.

b) Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng BP và CQ. Chứng minh rằng HM đi qua điểm chính giữa cung BAC của đường tròn (O).

Câu 4 (4,0 điểm). Cho số nguyên a và số nguyên dương n. Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^{n} a^{(k,n)}$ chia hết cho n, trong đó (x, y) được kí hiệu là ước chung lớn nhất của hai số nguyên x và y.

Câu 5 (4,0 điểm). Một hình chữ nhật gồm hai ô vuông đơn vị 2×1 hoặc 1×2 được gọi là một domino. Người ta đặt các domino lên một bảng $n\times n$ (n nguyên dương, $n \geq 2$) ô vuông đơn vị sao cho mỗi domino phủ đúng 2 ô của bảng và không có ô nào được phủ bởi 2 domino khác nhau (tức là các domino không xếp chồng lên nhau). Tổng số domino mà các ô của chúng phủ ít nhất một ô của hàng hoặc cột được gọi là trị số của hàng hoặc cột đó. Một cách đặt được gọi là cân bằng nếu tồn tại số nguyên dương k sao cho mỗi hàng và mỗi cột của nó đều có trị số là k. Chẳng hạn tồn tại cách đặt cân bằng cho bảng 3×3 với $k=1$ như hình vẽ bên.



a) Chứng minh tồn tại các cách đặt cân bằng với $n \in \{4;5\}$ và $k=3$.

b) Có tồn tại cách đặt cân bằng với $n = 2024$ hay không? Nếu có hãy tìm số domino ít nhất cần thiết để có được cách đặt cân bằng cho bảng đó.

HẾT

Họ và tên thí sinh: .... *Số báo danh:* ....

Lưu ý: - Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.