

LỚP TOÁN THẦY CƯ- TP HUẾ

CS 1: Trung Tâm MASTER EDUCATION- 25 THẠCH HẪN

CS 2: Trung Tâm BDKT 168 Mai Thúc Loan

CS 3: Trung Tâm BDKT Thuận Hóa – 32 Lê Lợi



LÀM CHỦ KIẾN THỨC TOÁN 11-CÁNH DIỀU (TẬP 2)

NỘI DUNG

- ✓ TÓM TẮT KIẾN THỨC CẦN NẮM
- ✓ BÀI TẬP MẪU
- ✓ GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA
- ✓ GIẢI BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

CHƯƠNG 5: MỘT SỐ YẾU TỐ THÔNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

BÀI 1: CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Mẫu số liệu ghép nhóm

a) Bảng tần số ghép nhóm

- Mẫu số liệu ghép nhóm là mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm.
- mỗi nhóm số liệu gồm một số giá trị của mẫu số liệu được ghép nhóm theo một tiêu chí xác định có dạng $[a; b)$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải. độ dài nhóm là $b - a$.
- Tần số của một nhóm là số liệu trong mẫu số liệu thuộc vào nhóm đó. Tần số của nhóm 1, nhóm 2, ..., nhóm m kí hiệu lần lượt là $n_1, n_2, \dots, n_m$.
- Bảng tần số ghép nhóm được lập ở Bảng 2, trong đó mẫu số liệu n số liệu được chia thành m nhóm ứng với m nửa khoảng $[a_1; a_2); [a_2; a_3); \dots; [a_m; a_{m+1})$, ở đó

$$a_1 < a_2 < \dots < a_m < a_{m+1} \text{ và } n = n_1 + n_2 + \dots + n_m.$$

Nhóm	Tần số
$[a_1; a_2)$	n_1
$[a_2; a_3)$	n_2
...	n_m
$[a_m; a_{m+1})$	
	n

b) Ghép nhóm mẫu số liệu. Tần số tích lũy

Để chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm thành mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện như sau:

- Chia miền giá trị của mẫu số liệu thành một số nhóm theo tiêu chí cho trước;
- Đếm số giá trị của mẫu số liệu thuộc mỗi nhóm (tần số) và lập bảng tần số ghép nhóm.

Chú ý: Khi ghép nhóm số liệu, ta thường phân chia các nhóm có độ dài bằng nhau và đầu mút của các nhóm có thể không phải là giá trị của mẫu số liệu. Nhóm cuối cùng có thể là $[a_m; a_{m+1}]$.

- Tần số tích lũy của một nhóm là số số liệu trong mẫu số liệu có giá trị nhỏ hơn giá trị đầu mút phải của nhóm đó. Tần số tích lũy của nhóm 1, nhóm 2, ..., nhóm m kí hiệu lần lượt là $cf_1, cf_2, \dots, cf_m$.
- Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy được lập như ở bảng 2

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[a_1; a_2)$	n_1	$cf_1 = n_1$
$[a_2; a_3)$	n_2	$cf_2 = n_1 + n_2$
...	...	...
$[a_m; a_{m+1})$	n_m	$cf_m = n_1 + n_2 + \dots + n_m$
	n	

Bảng 2

2. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm

a) Số trung bình cộng (số trung bình)

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở Bảng 3, trong đó giá trị đại diện của nhóm là trung điểm x_i của nửa khoảng (tính bằng trung bình cộng của hai đầu mút) ứng với nhóm i .

Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\bar{x}$, được tính theo công thức:

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_mx_m}{n}$$

Nhóm	Giá trị	Tần số tích lũy
$[a_1; a_2)$	x_1	n_1
$[a_2; a_3)$	x_2	n_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$[a_m; a_{m+1})$	x_m	n_m
		$n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$

b) Trung vị

Cho mẫu số liệu ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy như ở Bảng 2.

Giả sử nhóm k là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{2}$, tức là $cf_{k-1} < \frac{n}{2}$ nhưng $cf_k \geq \frac{n}{2}$.

Ta gọi r, d, n_k lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm k ; cf_{k-1} là tần số tích lũy của nhóm $k-1$.

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu M_e , được tính theo công thức sau:

$$M_e = r + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf_{k-1}}{n_k} \right) \cdot d.$$

Quy ước: $cf_0 = 0$.

c) Tứ phân vị

Cho mẫu số liệu ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy như ở Bảng 2.

- Tứ phân vị thứ hai, kí hiệu Q_2 , bằng trung vị M_e .
- Giả sử nhóm p là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4}$, tức là $cf_{p-1} < \frac{n}{4}$ nhưng $cf_p \geq \frac{n}{4}$. Ta gọi s, h, n_p lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm p ; cf_{p-1} là tần số tích lũy của nhóm $p-1$.

Tứ phân vị thứ nhất, kí hiệu Q_1 , được tính bằng công thức sau: $Q_1 = s + \left(\frac{\frac{n}{4} - cf_{p-1}}{n_p} \right) \cdot h.$

- Giả sử nhóm q là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4}$, tức là $cf_{q-1} < \frac{3n}{4}$ nhưng $cf_q \geq \frac{3n}{4}$. Ta gọi t, l, n_q lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm q ; cf_{q-1} là tần số tích lũy của nhóm $q-1$.

Tứ phân vị thứ ba, kí hiệu Q_3 , được tính bằng công thức sau: $Q_3 = t + \left(\frac{\frac{3n}{4} - cf_{q-1}}{n_q} \right) \cdot l$.

d) Một

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở Bảng 1.

Giả sử nhóm i là nhóm có tần số lớn nhất. Ta gọi u, g, n_i lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm i ; n_{i-1}, n_{i+1} lần lượt là tần số của nhóm $i-1$, nhóm $i+1$. Một của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu M_o , được tính theo công thức sau:

$$M_o = u + \left(\frac{n_i - n_{i-1}}{2n_i - n_{i-1} - n_{i+1}} \right) \cdot g.$$

Quy ước: $n_0 = 0; n_{m+1} = 0$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Vấn đề 1. Mẫu số liệu ghép nhóm. Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu

Ví dụ 1. Bảng 4 biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm. Hãy cho biết:

- Mẫu số liệu đó có bao nhiêu số liệu; bao nhiêu nhóm;
- Tần số của mỗi nhóm.

Nhóm	Tần số
$[0;10)$	8
$[10;20)$	7
$[20;30)$	9
$[30;40)$	6
	$n = 30$

Bảng 4

Lời giải

Từ Bảng 4, ta thấy:

- a) Mẫu số liệu đó gồm 30 số liệu và 4 nhóm.
b) Tần số của các nhóm 1, 2, 3, 4 lần lượt là 8, 7, 9, 6.

Ví dụ 2. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 42 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ (đơn vị: km / h):

47,5	49,5	46	51	52,5	45	61
42	67	48	63	65	62,5	49,5
43,5	41	57,5	63,5	56,5	53	48
61,5	46	57	69	44,5	52	50
45	55	47	60	67,5	62	58
56	51,5	57,5	59	52	43	56

Lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy cho mẫu số liệu trên có sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng.

Lời giải

Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy như ở Bảng 5:

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[40;45)	5	5
[45;50)	10	15
[50;55)	7	22
[55;60)	9	31
[60;65)	7	38
[65;70)	4	42
	$n = 42$	

Bảng 5

Vấn đề 2. Xác định số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 3. Tính số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở Bảng 5 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Từ mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở Bảng 5, ta có bảng tần số ghép nhóm như ở Bảng 6:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[40;45)	42,5	5

$[45;50)$	47,5	10
$[50;55)$	52,5	7
$[55;60)$	57,5	9
$[60;65)$	62,5	7
$[65;70)$	67,5	4
		$n = 42$

Bảng 6

Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là:

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 42,5 + 10 \cdot 47,5 + 7 \cdot 52,5 + 9 \cdot 57,5 + 7 \cdot 62,5 + 4 \cdot 67,5}{42} \approx 54,3 \text{ (km / h)}.$$

Vấn đề 3. Xác định trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 4. Xác định trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở Bảng 5 (làm tròn các kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Số phần tử của mẫu là $n = 42$.

• Ta có: $\frac{n}{2} = \frac{42}{2} = 21$ mà $15 < 21 < 22$. Suy ra nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 21.

Xét nhóm 3 là nhóm $[50;55)$ có $r = 50, d = 5, n_3 = 7$ và nhóm 2 là nhóm $[45;50)$ có $cf_2 = 15$.

Áp dụng công thức, ta có trung vị của mẫu số liệu là:

$$M_e = 50 + \left(\frac{21-15}{7} \right) \cdot 5 \approx 54,3 \text{ (km / h)}.$$

Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu là: $Q_2 = M_e \approx 54,3 \text{ (km / h)}.$

• Ta có: $\frac{n}{4} = \frac{42}{4} = 10,5$ mà $5 < 10,5 < 15$ nên nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 10,5.

Xét nhóm 2 là nhóm $[45;50)$ có $s = 45, h = 5, n_2 = 10$ và nhóm 1 là nhóm $[40;45)$ có $cf_1 = 5$.

Áp dụng công thức, ta có tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là:

$$Q_1 = 45 + \left(\frac{10,5-5}{10} \right) \cdot 5 \approx 47,8 \text{ (km / h)}.$$

- Ta có: $\frac{3n}{4} = \frac{3.42}{4} = 31,5$ mà $31 < 31,5 < 38$ nên nhóm 5 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 31,5.

Xét nhóm 5 là nhóm $[60; 65)$ có $t = 60, l = 5, n_5 = 7$ và nhóm 4 là nhóm $[55; 60)$ có $cf_4 = 31$.

Áp dụng công thức, ta có tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là:

$$Q_3 = 60 + \left(\frac{31,5 - 31}{7} \right) \cdot 5 \approx 60,4 \text{ (km / h)}.$$

Vậy tứ phân vị của mẫu số liệu trên là:

$$Q_1 \approx 47,8 \text{ (km / h)}; Q_2 \approx 54,3 \text{ (km / h)}; Q_3 \approx 60,4 \text{ (km / h)}.$$

Vấn đề 5. Xác định một của mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 5: Xác định một của mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở Bảng 5 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Ta thấy: Nhóm 2 ứng với nửa khoảng $[45; 50)$ là nhóm có tần số lớn nhất với $u = 45; g = 5, n_2 = 10$.
Nhóm 1 có tần số $n_1 = 5$, nhóm 3 có tần số $n_3 = 7$.

Áp dụng công thức, ta có một của mẫu số liệu là:

$$M_o = 45 + \left(\frac{10 - 5}{2 \cdot 10 - 5 - 7} \right) \cdot 5 \approx 48,1 \text{ (km / h)}.$$

C. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Mẫu số liệu đây ghi lại tốc độ của 40 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ (đơn vị: km/h)

48, 5 43 50 55 45 60 53 55,5 44 65
51 62,5 41 44,5 57 57 68 49 46,5 53,5
61 49,5 54 62 59 56 47 50 60 61
49,5 52,5 57 47 60 55 45 47,5 48 61,5

- Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng: $[40; 45), [45; 50), [50; 55), [55; 60), [60; 65), [65; 70)$
- Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- Một của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

Lời giải

- Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả giá trị đại diện là:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[40; 45)$	42,5	4

$[45;50)$	47,5	11
$[50;55)$	52,5	7
$[55;60)$	57,5	8
$[60;65)$	62,5	8
$[65;70)$	67,5	n

b) Trung bình cộng là:

$$\bar{x} = \frac{42,5 \cdot 4 + 47,5 \cdot 11 + 52,5 \cdot 7 + 57,5 \cdot 8 + 62,5 \cdot 8 + 67,5 \cdot 2}{40} = 53,875$$

Trung vị là:

Có bảng ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy là

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[40;45)$	4	4
$[45;50)$	11	15
$[50;55)$	7	22
$[55;60)$	8	30
$[60;65)$	8	38
$[65;70)$	2	40

Số phần tử của mẫu là $n = 40$. Ta có: $\frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20 \Rightarrow$ Nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hoặc bằng 20.

Xét nhóm 3 là nhóm $[50;55)$ có $r = 50; d = 5; n_3 = 7$ và nhóm 2 là nhóm $[45;50)$ có $cf_2 = 15$.

Áp dụng công thức, ta có trung vị của mẫu số liệu là: $M_e = 50 + \left(\frac{20-15}{7} \right) \cdot 5 \approx 53,6 \text{ (km / h)}$

Q_1 là:

Số phần tử của mẫu là $n = 40$.

Ta có $\frac{n}{4} = \frac{40}{4} = 10$. Suy ra nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 10.

Xét nhóm 2 là nhóm $[45; 50)$ có $r = 45$; $d=5$; $n\{2\}=11$ và nhóm 1 là nhóm $[40; 45)$ có $cf_1 = 4$

Áp dụng công thức, ta có Q_1 của mẫu số liệu là $Q_1 = 45 + \left(\frac{10-4}{11}\right) \cdot 5 \approx 47,7$ (km / h)

Q_2 là: Có $Q_2 = M_e \approx 53,6$ (km / h)

Q_3 là:

Ta có $\frac{3n}{4} = 30$. Suy ra nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 30. Xét

nhóm 4 là nhóm $[55; 60)$ có $r = 55$; $d = 5$; $n_4 = 8$ và nhóm 3 là nhóm $[50; 55)$ có $cf_3 = 22$

Áp dụng công thức, ta có Q_3 của mẫu số liệu là: $Q_3 = 55 + \left(\frac{30-22}{8}\right) \cdot 5 = 60$ (km / h)

c) Một của mẫu số liệu là

Có nhóm 2 là nhóm có tần số lớn nhất $\Rightarrow M_o = 45 + \left(\frac{11-4}{2 \cdot 11 - 4 - 7}\right) \cdot 5 \approx 43,2$

Bài 2. Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng của 30 bạn học sinh (đơn vị: kilôgam):

17 40 39 40,5 42 51 41,5 39 41 30
40 42 40,5 39,5 41 40,5 37 39,5 40 41
38,5 39,5 40 41 39 40,5 40 38,5 39,5 41,5

a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có tám nhóm ứng với tám nửa khoảng :

$[15; 20), [20; 25), [25; 30), [30; 35), [35; 40), [40; 45), [45; 50), [50; 55)$

b) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

c) Một của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

Lời giải

a) Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả giá trị đại diện là

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[15; 20)$	17,5	1
$[20; 25)$	22,5	0
$[25; 30)$	27,5	0
$[30; 35)$	32,5	1
$[35; 40)$	37,5	10
$[40; 45)$	42,5	17

$[45;50)$	47,5	0
$[50;55)$	52,5	030

b) Trung bình cộng là:

$$\bar{x} = \frac{17,5 + 32,5 + 37,5 \cdot 10 + 42,5 \cdot 17 + 52,5}{30} = 40$$

Trung vị là:

Có bảng ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy là:

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[15;20)$	1	1
$[20;25)$	0	1
$[25;30)$	0	1
$[30;35)$	1	2
$[35;40)$	10	12
$[40;45)$	17	29
$[45;50)$	0	29
$[50;55)$	1	30

Số phần tử của mẫu là $n = 30$. Ta có:

Áp dụng công thức, ta có trung vị của mẫu số liệu là: $M_e = 40 + \left(\frac{15-12}{17} \right) \cdot 5 \approx 40,9$ (kilôgam)

Q_1 là:

Số phần tử của mẫu là $n = 30$.

Ta có $\frac{n}{4} = \frac{30}{4} = 7,5$. Suy ra nhóm 5 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 7,5.

Xét nhóm 5 là nhóm $[35;40)$ có $r = 35; d = 5; n_5 = 10$ và nhóm 4 là nhóm $[30;35)$ có $cf_4 = 2$ Áp

dụng công thức, ta có Q_1 của mẫu số liệu là $Q_1 = 35 + \left(\frac{7,5-2}{10} \right) \cdot 5 = 37,75$ (kilôgam)

Q_2 là: Có $Q_2 = M_e \approx 40,9$ (kilôgam)

Q_3 là:

Ta có $\frac{3n}{4} = 22,5$. Suy ra nhóm 6 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 22,5. Xét

nhóm 6 là nhóm $[40; 45)$ có $r = 40; d = 5; n_6 = 17$ và nhóm 5 là nhóm $[35; 40)$ có $cf_5 = 12$

Áp dụng công thức, ta có Q_3 của mẫu số liệu là:

$$Q_3 = 40 + \left(\frac{22,5 - 12}{17} \right) \cdot 5 = 43,1 \text{ (kilôgam)}$$

c) Một của mẫu số liệu là:

$$\text{Có nhóm 6 là nhóm có tần số lớn nhất } M_o = 40 + \left(\frac{17 - 10}{2 \cdot 17 - 10} \right) \cdot 5 \approx 41,46$$

Bài 3. Bảng 15 cho ta bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê chiều cao của 40 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét)

a) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Một của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[30; 40)	4	4
[40; 50)	10	14
[50; 60)	14	28
[60; 70)	6	34
[70; 80)	4	38
[80; 90)	2	40
	$n = 40$	

Bảng 15

Lời giải

a) Có bảng ghép nhóm bao gồm cả giá trị đại diện là:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[30; 40)	35	4
[40; 50)	45	10
[50; 60)	55	14
[60; 70)	65	6
[70; 80)	75	4
[80; 90)	85	2

Trung bình cộng là:

$$\bar{x} = \frac{35.4 + 45.10 + 55.14 + 65.6 + 75.4 + 85.2}{40} = 55,5$$

Trung vị là

Số phần tử của mẫu là $n = 40$. Ta có:

$$\frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20 \Rightarrow \text{Nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hoặc bằng 20.}$$

Xét nhóm 3 là nhóm $[50; 60)$ có $r = 50; d = 10; n_3 = 14$ và nhóm 2 là nhóm $[45; 50)$ có $cf_2 = 14$.

Áp dụng công thức, ta có trung vị của mẫu số liệu là: $M_e = 50 + \left(\frac{20 - 14}{14} \right) \cdot 10 \approx 54,3$ (centimét)

Q_1 là:

Số phần tử của mẫu là $n = 40$.

Ta có $\frac{n}{4} = \frac{40}{4} = 10$. Suy ra nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 10.

Xét nhóm 2 là nhóm $[40; 50)$ có $r = 40; d = 10; n_2 = 10$ và nhóm 1 là nhóm $[30; 40)$ có $cf_1 = 4$

Áp dụng công thức, ta có Q_1 của mẫu số liệu là: $Q_1 = 40 + \left(\frac{10 - 4}{10} \right) \cdot 10 \approx 46$ (centimét)

Q_2 là Có $Q_2 = M_e \approx 54,3$ (centimét).

Q_3 là:

Ta có $\frac{3n}{4} = 30$. Suy ra nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 30. Xét

nhóm 4 là nhóm $[60; 70)$ có $r = 60; d = 10; n_4 = 6$ và nhóm 3 là nhóm $[50; 60)$ có $cf_3 = 28$.

Áp dụng công thức, ta có Q_3 của mẫu số liệu là: $Q_3 = 60 + \left(\frac{30 - 28}{6} \right) \cdot 10 = 63,3$ (centimét)

c) Một của mẫu số liệu là:

Có nhóm 3 là nhóm có tần số lớn nhất $M_o = 50 + \left(\frac{14 - 10}{2.14 - 10 - 6} \right) \cdot 10 \approx 53,3$.

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

1. Khi thống kê chiều cao của 40 bạn lớp 11 A, ta thu được mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở Bảng 7 (đơn vị: centimét).

Nhóm	Tần số
$[155; 160)$	5
$[160; 165)$	12
$[165; 170)$	16
$[170; 175)$	7

	$n = 40$
--	----------

Bảng 7

a) Độ dài của mỗi nhóm bằng:

- A. 155. B. 5. C. 175. D. 20.

Lời giải

Chọn B

b) Tần số của nhóm $[160;165)$ là bao nhiêu?

- A. 5. B. 16. C. 12. D. 7.

Lời giải

Chọn C

c) Nhóm có tần số lớn nhất là:

- A. $[155;160)$. B. $[160;165)$. C. $[165;170)$. D. $[170;175)$.

Lời giải

Chọn C

d) Giá trị cf_3 bằng:

- A. 16. B. 17. C. 23. D. 33.

Lời giải

Chọn D

e) Giá trị đại diện của nhóm $[155;160)$ bằng:

- A. 157,5. B. 155. C. 160. D. 5.

Lời giải

Chọn A

g) Nhóm có giá trị đại diện bằng 162,5 là:

- A. $[155;160)$. B. $[160;165)$. C. $[165;170)$. D. $[170;175)$.

Lời giải

Chọn B

2. Xác định các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở Bảng 7 (làm tròn các kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

$$\text{Số trung bình cộng là: } \bar{x} = \frac{5 \cdot 157,5 + 12 \cdot 162,5 + 16 \cdot 167,5 + 7 \cdot 172,5}{40} \approx 165,6.$$

Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy được cho như ở Bảng 9:

Ta có: $\frac{n}{2} = 20, \frac{n}{4} = 10, \frac{3n}{4} = 30$.

Vì $17 < 20 < 33$ nên nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 20.

Suy ra trung vị là: $M_e = 165 + \left(\frac{20-17}{16} \right) \cdot 5 \approx 165,9$.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[155;160)	5	5
[160;165)	12	17
[165;170)	16	33
[170;175)	7	40
	$n = 40$	

Tứ phân vị thứ hai là: $Q_2 = M_e \approx 165,9$.

Vì $5 < 10 < 17$ nên nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 10. Suy ra tứ phân vị thứ nhất là: $Q_1 = 160 + \left(\frac{10-5}{12} \right) \cdot 5 \approx 162,1$.

Vì $17 < 30 < 33$ nên nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 30. Suy ra tứ phân vị thứ ba là:

$Q_3 = 165 + \left(\frac{30-17}{16} \right) \cdot 5 \approx 169,1$.

Trong các nhóm, nhóm 3 có tần số lớn nhất. Suy ra mốt là: $M_o = 165 + \left(\frac{16-12}{2 \cdot 16 - 12 - 7} \right) \cdot 5 \approx 166,5$.

3. Cho mẫu số liệu ghép nhóm thống kê thời gian sử dụng điện thoại trước khi ngủ (đơn vị: phút) của một người trong 120 ngày như ở Bảng 8. Xác định các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu đó (làm tròn các kết quả đến hàng phần mười).

Nhóm	Tần số
[0;4)	13
[4;8)	29

$[8;12)$	48
$[12;16)$	22
$[16;20)$	8
	$n = 120$

Bảng 8

Lời giải

Số trung bình cộng là:

$$\bar{x} = \frac{13 \cdot 2 + 29 \cdot 6 + 48 \cdot 10 + 22 \cdot 14 + 8 \cdot 18}{120} \approx 9,4.$$

Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy được cho như ở Bảng 10: Ta có:

$\frac{n}{2} = 60, \frac{n}{4} = 30, \frac{3n}{4} = 90$. Vì $42 < 60 < 90$ nên nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 60.

Suy ra trung vị là:

$$M_e = 8 + \left(\frac{60 - 42}{48} \right) \cdot 4 = 9,5.$$

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[0;4)$	13	13
$[4;8)$	29	42
$[8;12)$	48	90
$[12;16)$	22	112
$[16;20)$	8	120
	$n = 120$	

Tứ phân vị thứ hai là: $Q_2 = M_e = 9,5$.

Vì $13 < 30 < 42$ nên nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 30. Suy ra tứ phân vị

thứ nhất là: $Q_1 = 4 + \left(\frac{30 - 13}{29} \right) \cdot 4 \approx 6,3$.

Vì $42 < 90 \leq 90$ nên nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 90. Suy ra tứ phân vị thứ ba là: $Q_3 = 8 + \left(\frac{90 - 42}{48} \right) \cdot 4 = 12$.

Trong các nhóm, nhóm 3 có tần số lớn nhất.

Suy ra một là: $M_o = 8 + \left(\frac{48 - 29}{2 \cdot 48 - 29 - 22} \right) \cdot 4 \approx 9,7$

4. Khi thống kê chỉ số đường huyết (đơn vị: mmol / L) của 28 người cao tuổi trong một lần đo, ta được kết quả sau:

7,5	7,2	7,5	7,1	7,9	7,4	7,0
7,1	7,5	7,2	7,1	8,0	7,9	7,7
7,5	7,6	7,7	7,2	7,6	7,6	7,5
7,3	7,4	7,2	7,1	7,2	7,1	7,0

a) Lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy có năm nhóm ứng với năm nửa khoảng: $[7,0;7,2), [7,2;7,4), [7,4;7,6), [7,6;7,8), [7,8;8,0]$.

Lời giải

a) Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy được cho như dưới

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[7,0;7,2)$	7	7
$[7,2;7,4)$	6	13
$[7,4;7,6)$	7	20
$[7,6;7,8)$	5	25
$[7,8;8,0]$	3	28
	$n = 28$	

b) Độ dài của mỗi nhóm bằng:

A. 7.

B. 8.

C. 1.

D. 0,2.

Lời giải

Chọn D

c) Tần số của nhóm $[7,8;8,0]$ bằng:

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

d) Giá trị cf_3 bằng:

A. 7.

B. 13.

C. 20.

D. 25.

Lời giải

Chọn C

e) Giá trị đại diện của nhóm $[7,4;7,6)$ bằng:

A. 7,4.

B. 7,6.

C. 7,5.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

g) Nhóm có giá trị đại diện bằng 7,7 là:

A. $[7,0;7,2)$.

B. $[7,2;7,4)$.

C. $[7,4;7,6)$.

D. $[7,6;7,8)$.

Lời giải

Chọn D

5. Với mẫu số liệu ghép nhóm thu được ở Bài 4, xác định các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm đó (làm tròn các kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Số trung bình cộng là: $\bar{x} = \frac{7 \cdot 7,1 + 6 \cdot 7,3 + 7 \cdot 7,5 + 5 \cdot 7,7 + 3 \cdot 7,9}{28} \approx 7,4$.

Ta có: $\frac{n}{2} = 14, \frac{n}{4} = 7, \frac{3n}{4} = 21$.

Vì $13 < 14 < 20$ nên nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 14.

Suy ra trung vị là: $M_e = 7,4 + \left(\frac{14-13}{7} \right) \cdot 0,2 \approx 7,4$.

Tứ phân vị thứ hai là: $Q_2 = M_e \approx 7,4$.

Vì $0 < 7 \leq 7$ nên nhóm 1 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 7. Suy ra tứ phân vị thứ nhất là:

$Q_1 = 7,0 + \left(\frac{7-0}{7} \right) \cdot 0,2 = 7,2$.

Vì $20 < 21 < 25$ nên nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 21. Suy ra tứ phân vị thứ ba là: $Q_3 = 7,6 + \left(\frac{21-20}{5} \right) \cdot 0,2 \approx 7,6$.

Trong các nhóm, nhóm 1 và nhóm 3 có tần số lớn nhất nên ta có hai mốt là:

$$M_o = 7,0 + \left(\frac{7-0}{2 \cdot 7 - 0 - 6} \right) \cdot 0,2 \approx 7,2$$

$$M'_o = 7,4 + \left(\frac{7-6}{2 \cdot 7 - 6 - 5} \right) \cdot 0,2 \approx 7,5.$$

BÀI 2. BIẾN CỐ HỢP VÀ BIẾN CỐ GIAO. BIẾN CỐ ĐỘC LẬP. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Xét phép thử T có không gian mẫu là tập hợp Ω gồm hữu hạn phần tử; các kết quả của phép thử là đồng khả năng, các biến cố đều liên quan đến phép thử đó.

1. Phép toán trên các biến cố

a) Biến cố hợp

Cho hai biến cố A và B . Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu Ω . Đặt $C = A \cup B$, ta có C là một biến cố và được gọi là biến cố hợp của hai biến cố A và B , kí hiệu là $A \cup B$.

b) Biến cố giao

Cho hai biến cố A và B . Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu Ω . Đặt $D = A \cap B$, ta có D là một biến cố và được gọi là biến cố giao của hai biến cố A và B , kí hiệu là $A \cap B$ hay AB .

c) Biến cố xung khắc

Cho hai biến cố A và B . Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu Ω . Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì A và B gọi là hai biến cố xung khắc.

2. Biến cố độc lập

Cho hai biến cố A và B . Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

Chú ý: Nếu A, B là hai biến cố độc lập thì mỗi cặp biến cố sau cũng độc lập: A và $\bar{B}$; $\bar{A}$ và B ; $\bar{A}$ và $\bar{B}$.

3. Các quy tắc tính xác suất

a) Công thức cộng xác suất

Cho hai biến cố A và B . Khi đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Hệ quả: Nếu hai biến cố A và B là xung khắc thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

b) Công thức nhân xác suất

Cho hai biến cố A và B . Nếu hai biến cố A và B là độc lập thì $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Vấn đề 1. Xác định biến cố hợp, biến cố giao, biến cố xung khắc, biến cố độc lập

Ví dụ 1. Một hộp có 10 viên bi màu xanh và 15 viên bi màu đỏ, các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi. Xét các biến cố:

A : "Hai viên bi được lấy ra có cùng màu xanh";

B : "Hai viên bi được lấy ra có cùng màu đỏ";

C : "Hai viên bi được lấy ra cùng màu";

D : "Hai viên bi được lấy ra khác màu".

Chọn phát biểu đúng trong những phát biểu sau đây:

- a) Biến cố hợp của hai biến cố A và B là biến cố C .
- b) Biến cố hợp của hai biến cố A và B là biến cố D .
- c) Biến cố hợp của hai biến cố A và C là biến cố C .

Lời giải

Phát biểu a) đúng; phát biểu b) sai; phát biểu c) đúng.

Ví dụ 2. Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:

A : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là số lẻ";

B : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai là số lẻ".

Chọn phát biểu đúng trong những phát biểu sau đây:

- a) Biến cố giao của hai biến cố A và B là "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là số lẻ hoặc số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai là số lẻ".
- b) Biến cố giao của hai biến cố A và B là "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là số lẻ và số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai là số lẻ".
- c) Biến cố giao của hai biến cố A và B là "Tích số chấm xuất hiện ở hai lần gieo là số lẻ".
- d) Biến cố giao của hai biến cố A và B là "Tích số chấm xuất hiện ở hai lần gieo là số chẵn".

Lời giải

Phát biểu a) sai; phát biểu b) đúng; phát biểu c) đúng; phát biểu d) sai.

Ví dụ 3. Tung một đồng xu cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp. Xét các biến cố:

A : "Đồng xu xuất hiện mặt sấp (S) ở lần tung thứ nhất";

B : "Đồng xu xuất hiện mặt ngửa (N) ở lần tung thứ nhất".

Hai biến cố trên có xung khắc hay không?

Lời giải

Ta có: $A = \{SSS; SSN; SNS; SNN\}$, $B = \{NSS; NSN; NNS; NNN\}$.

Suy ra $A \cap B = \emptyset$. Do đó A và B là hai biến cố xung khắc.

Ví dụ 4. Một hộp có 7 viên bi màu xanh và 8 viên bi màu đỏ, các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy viên bi ngẫu nhiên hai lần liên tiếp, trong đó mỗi lần lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, ghi lại màu của viên bi lấy ra và bỏ lại viên bi đó vào hộp. Xét các biến cố:

A : Viên bi màu đỏ được lấy ra ở lần thứ nhất;

B : Viên bi màu xanh được lấy ra ở lần thứ hai.

Hai biến cố A và B có độc lập không? Vì sao?

Lời giải

Trước hết, xác suất của biến cố B khi biến cố A xảy ra bằng $\frac{7}{15}$, xác suất của biến cố B khi biến cố A không xảy ra cũng bằng $\frac{7}{15}$. Do đó việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố A không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố B . Mặt khác xác suất của biến cố A bằng $\frac{8}{15}$, không phụ thuộc vào việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố B . Vậy hai biến cố A và B là độc lập.

Vấn đề 2. Tính xác suất của biến cố bằng các quy tắc tính xác suất

Ví dụ 5: Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương có hai chữ số. Xét các biến cố:

A : "Số được chọn chia hết cho 5";

B : "Số được chọn chia hết cho 7".

Tính $P(A \cup B)$.

Lời giải

Trong 90 số có hai chữ số, có 18 số chia hết cho 5, có 13 số chia hết cho 7 và có 2 số chia hết cho cả 5 và 7. Vì thế, ta có: $P(A) = \frac{18}{90}$, $P(B) = \frac{13}{90}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{90}$.

Vậy $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{18}{90} + \frac{13}{90} - \frac{2}{90} = \frac{29}{90}$.

Ví dụ 6. Một xưởng sản xuất có hai động cơ chạy độc lập với nhau. Xác suất để động cơ I và động cơ II chạy tốt lần lượt là 0,7 và 0,8. Tính xác suất của biến cố C : "Cả hai động cơ đều chạy tốt".

Lời giải

Xét biến cố A : "Động cơ I chạy tốt", ta có: $P(A) = 0,7$.

Xét biến cố B : "Động cơ II chạy tốt", ta có: $P(B) = 0,8$.

Ta thấy A và B là hai biến cố độc lập và $C = A \cap B$.

Suy ra $P(C) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$.

Ví dụ 7. Trong một giải bóng đá có hai đội Tín Phát và An Bình ở hai bảng khác nhau. Mỗi bảng chọn ra một đội để vào vòng chung kết. Xác suất lọt qua vòng bảng của hai đội Tín Phát và An Bình lần lượt là 0,6 và 0,7. Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) A : "Cả hai đội Tín Phát và An Bình lọt vào vòng chung kết";
- b) B : "Có ít nhất một đội lọt vào vòng chung kết";
- c) C : "Chỉ có đội Tín Phát lọt vào vòng chung kết".

Lời giải

Xét các biến cố:

E : "Đội Tín Phát lọt vào vòng chung kết";

G : "Đội An Bình lọt vào vòng chung kết".

Vì hai đội ở hai bảng khác nhau nên hai biến cố E và G là hai biến cố độc lập, ta có: $P(E) = 0,6$ và $P(G) = 0,7$.

- a) Vì $A = E \cap G$ nên $P(A) = P(E \cap G) = P(E) \cdot P(G) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$.
- b) Vì $B = E \cup G$ nên $P(B) = P(E \cup G) = P(E) + P(G) - P(E \cap G) = 0,6 + 0,7 - 0,42 = 0,88$.
- c) Xét biến cố đối $\bar{G}$ của biến cố G . Ta có: $P(\bar{G}) = 1 - P(G) = 1 - 0,7 = 0,3$.

Vì E và $\bar{G}$ là hai biến cố độc lập và $C = E \cap \bar{G}$ nên

$$P(C) = P(E \cap \bar{G}) = P(E) \cdot P(\bar{G}) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18.$$

Vấn đề 3. Tính xác suất của biến cố bằng phương pháp tổ hợp

Ví dụ 8. Một công ty đón đoàn khách bao gồm khách đến từ nước Anh và khách đến từ nước Pháp. Công ty chọn 3 cán bộ phiên dịch từ một nhóm cán bộ phiên dịch có 19 người, trong đó có 10 cán bộ phiên dịch tiếng Anh và 9 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp, mỗi người chỉ phiên dịch được một thứ tiếng.

- a) Công ty có bao nhiêu cách chọn 3 cán bộ sao cho có cả cán bộ phiên dịch tiếng Anh và cán bộ phiên dịch tiếng Pháp?
- b) Tính xác suất của biến cố "Trong 3 cán bộ được chọn có cả cán bộ phiên dịch tiếng Anh và cán bộ phiên dịch tiếng Pháp".

Lời giải

- a) Xét các biến cố:

A : "Trong 3 cán bộ được chọn có cả cán bộ phiên dịch tiếng Anh và cán bộ phiên dịch tiếng Pháp".

B : "Trong 3 cán bộ được chọn có 1 cán bộ phiên dịch tiếng Anh và 2 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp".

C : "Trong 3 cán bộ được chọn có 2 cán bộ phiên dịch tiếng Anh và 1 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp".

Ta có: $A = B \cup C, B \cap C = \emptyset$, suy ra $n(A) = n(B) + n(C)$.

Số các kết quả thuận lợi cho biến cố B là $n(B) = C_{10}^1 \cdot C_9^2 = 360$.

Số các kết quả thuận lợi cho biến cố C là $n(C) = C_9^1 \cdot C_{10}^2 = 405$.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = n(B) + n(C) = 360 + 405 = 765$.

Vậy công ty có 765 cách chọn 3 cán bộ sao cho có cả cán bộ phiên dịch tiếng Anh và cán bộ phiên dịch tiếng Pháp

b) Mỗi cách chọn 3 cán bộ từ 19 cán bộ phiên dịch cho ta một tổ hợp chập 3 của 19 phần tử. Do đó, không gian mẫu Ω gồm các tổ hợp chập 3 của 19 phần tử và $n(\Omega) = C_{19}^3 = 969$.

Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{765}{969} = \frac{15}{19}$.

Vấn đề 6. Tính xác suất của biến cố bằng sơ đồ hình cây

Ví dụ 9: Một người cho ngẫu nhiên 3 lá thư vào 3 chiếc phong bì đã ghi địa chỉ sao cho mỗi phong bì chỉ chứa một lá thư. Tính xác suất để có ít nhất một lá thư được cho vào đúng phong bì đã ghi địa chỉ theo lá thư đó.

Lời giải

Giả sử lá thư I, lá thư II, lá thư III tương ứng với các phong bì đã ghi đúng địa chỉ là phong bì I, phong bì II, phong bì III.

Mỗi cách chọn 3 phong bì cho 3 lá thư tương ứng với một hoán vị của 3 phần tử. Do đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 3! = 6$.

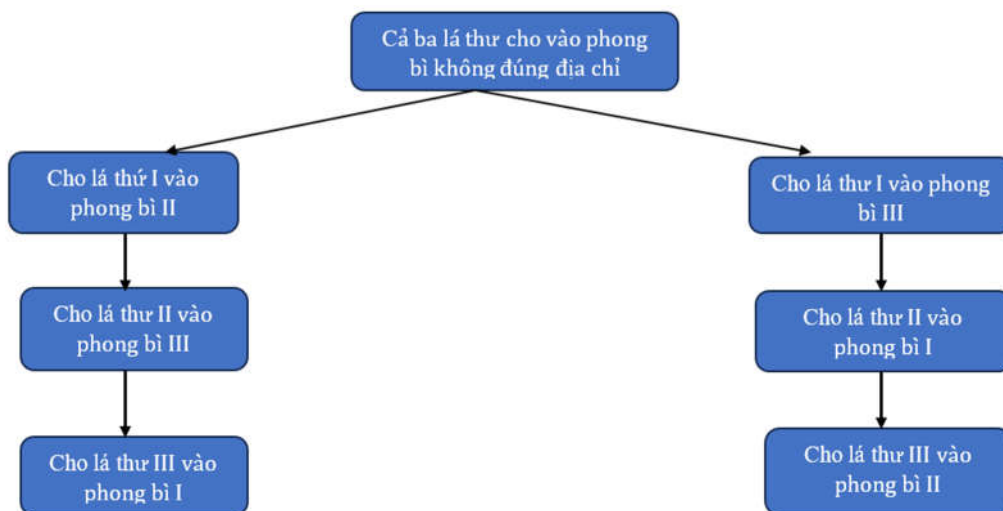
Gọi A là biến cố có ít nhất một lá thư được cho vào đúng phong bì đã ghi địa chỉ theo lá thư đó.

Khi đó biến cố đối của biến cố A là $\bar{A}$: "Cả ba lá thư được cho vào phong bì không đúng địa chỉ".

Sơ đồ hình cây biểu thị các khả năng thuận lợi cho biến cố $\bar{A}$.

Suy ra $n(\bar{A}) = 1 + 1 = 2$.

Khi đó $P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.



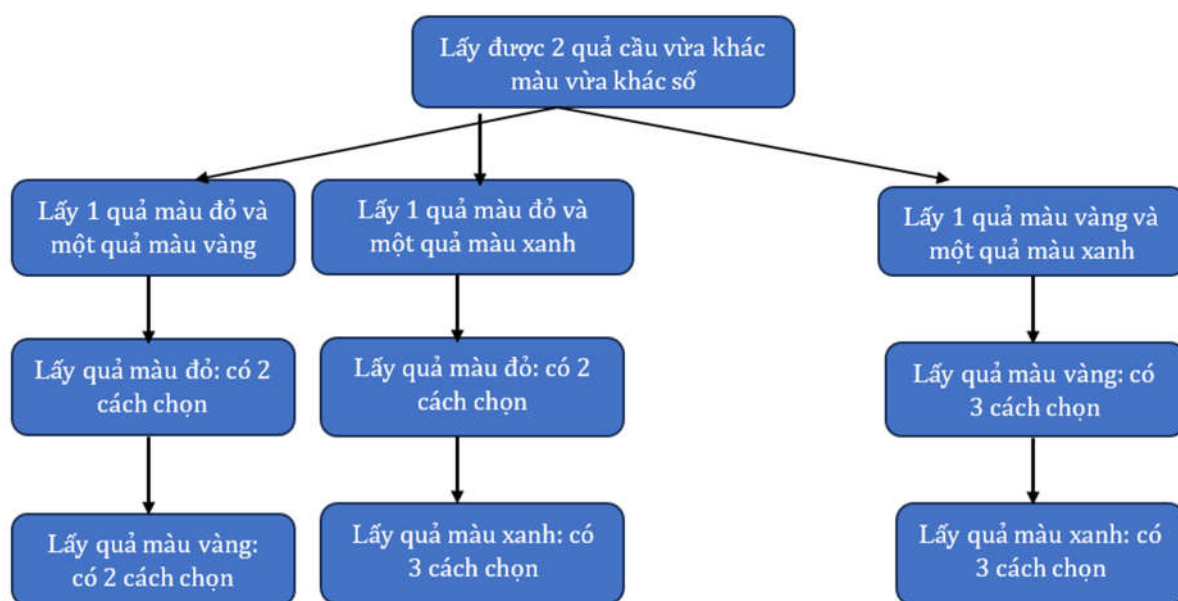
Ví dụ 10: Một hộp chứa 9 quả cầu có cùng kích thước và khối lượng, trong đó có 4 quả cầu màu xanh đánh số từ 1 đến 4, có 3 quả cầu màu vàng đánh số từ 1 đến 3, có 2 quả cầu màu đỏ đánh số 1 và 2. Lấy ngẫu nhiên 2 quả cầu từ hộp. Tính xác suất để 2 quả cầu được lấy vừa khác màu vừa khác số.

Lời giải

Mỗi cách lấy ngẫu nhiên 2 quả cầu từ một hộp có 9 quả cầu cho ta một tổ hợp chập 2 của 9 phần tử. Do đó không gian mẫu Ω gồm các tổ hợp chập 2 của 9 phần tử và $n(\Omega) = C_9^2 = 36$.

Xét biến cố A : "Lấy được 2 quả cầu vừa khác màu vừa khác số".

Sơ đồ hình cây biểu thị các khả năng thuận lợi cho biến cố A .



Suy ra $n(A) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 19$. Vậy $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{19}{36}$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố: A : "Lần thứ nhất xuất hiện mặt ngửa";

B : "Lần thứ hai xuất hiện mặt ngửa";

C : "Cả hai lần đều xuất hiện mặt ngửa";

D : "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa".

Trong hai biến cố C, D biến cố nào là biến cố hợp của hai biến cố A, B ? Biến cố nào là biến cố giao của hai biến cố A, B ?

Lời giải

Biến cố hợp (A và B): "Cả hai lần đều xuất hiện mặt ngửa". (C) là kết quả của việc ghép lại hai biến cố A và B , tức là xảy ra cùng lúc cả A và B .

Biến cố giao (A giao B): "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa". (D) là kết quả của việc giao của hai biến cố A và B , tức là ít nhất một trong A hoặc B xảy ra.

Bài 2. Gieo ngẫu nhiên một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:

A : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất lớn hơn 4";

B : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai nhỏ hơn 4";

C : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất nhỏ hơn 4".

Trong các biến cố trên, hãy:

a) Tìm cặp biến cố xung khắc;

b) Tìm cặp biến cố độc lập.

Lời giải

a) Cặp biến cố xung khắc là A và C , vì nếu A xảy ra thì C không thể xảy ra, và ngược lại, nếu C xảy ra thì A không thể xảy ra.

b) Cặp biến cố độc lập là A và B , vì xảy ra hay không xảy ra biến cố A không ảnh hưởng đến khả năng xảy ra biến cố B , và ngược lại, xảy ra hay không xảy ra biến cố B cũng không ảnh hưởng đến khả năng xảy ra biến cố A .

Bài 3. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số. Tính xác suất của biến cố M : "Số tự nhiên có hai chữ số được viết ra chia hết cho 11 hoặc chia hết cho 12".

Lời giải

Có $n(\Omega) = 90$.

Xét biến cố A : "Số tự nhiên có hai chữ số được chọn chia hết cho 11". Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là

$$n(A) = 9 \Rightarrow P(A) = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$$

Xét biến cố B : "Số tự nhiên có hai chữ số được chọn chia hết cho 12". Số kết quả thuận lợi cho biến cố

$$B \text{ là } n(B) = 8 \Rightarrow P(B) = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$$

$$\text{Vậy } P(M) = \frac{1}{10} + \frac{4}{45} = \frac{17}{90}.$$

Bài 4. Một hộp có 12 viên bi có cùng kích thước và khối lượng, trong đó có 7 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để trong 5 viên bi được chọn có ít nhất 2 viên bi màu vàng.

Lời giải

$$\text{Có } n(\Omega) = C_{12}^5 = 792$$

Xét biến cố A : "Trong 5 viên bi được chọn không có viên bi màu vàng nào".

$$\Rightarrow n(A) = C_7^5 = 21$$

Xét biến cố B : "Trong 5 viên bi được chọn có 1 viên bi màu vàng, 4 viên bi màu xanh

$$\Rightarrow n(B) = C_5^1 \cdot C_7^4 = 175$$

Xét biến cố M : "Trong 5 viên bi được chọn có ít nhất 2 viên bi màu vàng".

Xét biến cố $\bar{M}$: "Trong 5 viên bi được chọn có nhiều nhất 1 viên bi màu vàng".

$$\text{Có } P(\bar{M}) = \frac{21+175}{792} = \frac{49}{198} \Rightarrow P(M) = 1 - P(\bar{M}) = 1 - \frac{49}{198} = \frac{149}{198}.$$

Bài 5. Hai bạn Việt và Nam cùng tham gia một kì thi trắc nghiệm môn Toán và môn Tiếng Anh một cách độc lập nhau. Đề thi của mỗi môn gồm 6 mã đề khác nhau và các môn khác nhau thì mã đề cũng khác nhau. Đề thi được sắp xếp và phát cho học sinh một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất để hai bạn Việt và Nam có chung đúng một mã đề thi trong kì thi đó.

Lời giải

Giả sử xác suất để Việt và Nam chọn cùng một mã đề là $\frac{1}{N}$, với N là tổng số mã đề khác nhau. Vậy

xác suất để Việt chọn một mã đề và Nam chọn cùng mã đề đó là $\frac{1}{N}$, và xác suất để cả hai chọn đúng

mã đề là $\frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N}$

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Bài 6. Trong một chiếc hộp có 20 viên bi có cùng kích thước và khối lượng, trong đó có 9 viên bi màu đỏ, 6 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi. Tìm xác suất để 3 viên bi lấy ra có đúng hai màu.

Lời giải

$$\text{Ta có: } n(\Omega) = C_{20}^3 = 1140$$

Gọi A là biến cố: "3 viên bi lấy ra có đúng hai màu"

Khi đó $\bar{A}$ là biến cố: "3 viên bi lấy ra có đúng 1 màu hoặc có cả ba màu"

$$\text{Có } n(\overline{A}) = (C_9^1 \cdot C_6^1 \cdot C_5^1) + C_9^3 + C_6^3 + C_5^3 = 384$$

$$\Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \frac{384}{1140} = \frac{32}{95}$$

C. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

6. Một hộp có 20 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số $1, 2, 3, \dots, 19, 20$; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ trong hộp. Xét các biến cố:

A : "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 2";

B : "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 5";

C : "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 2 hoặc chia hết cho 5";

D : "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số vừa chia hết cho 2 vừa chia hết cho 5".

a) Biến cố C là biến cố hợp của:

- A.** Biến cố B và biến cố D .
- B.** Biến cố A và biến cố D .
- C.** Biến cố A và biến cố B .
- D.** Biến cố A và biến cố D hoặc biến cố B và biến cố D .

Lời giải

Chọn C

b) Biến cố D là biến cố giao của:

- A.** Biến cố B và biến cố C .
- B.** Biến cố A và biến cố B .
- C.** Biến cố A và biến cố C .
- D.** Biến cố A và biến cố C hoặc biến cố B và biến cố C .

Lời giải

Chọn B

7. Một lớp học có 35 học sinh gồm 20 nam và 15 nữ. Chọn ngẫu nhiên ra 2 học sinh để phân công trực nhật.

a) Xét các biến cố sau:

A : "Hai học sinh được chọn đều là học sinh nam";

B : "Hai học sinh được chọn đều là học sinh nữ";

C : "Hai học sinh được chọn có cùng giới tính".

Trong ba biến cố A, B, C , biến cố nào là biến cố hợp của hai biến cố còn lại?

Lời giải

Biến cố C là biến cố hợp của hai biến cố A và B .

b) Xét các biến cố sau:

D : "Hai học sinh được chọn gồm một bạn nam và một bạn nữ";

E : "Trong hai học sinh được chọn, có ít nhất một học sinh nữ";

G : "Trong hai học sinh được chọn, có ít nhất một học sinh nam".

Trong ba biến cố D, E, G , biến cố nào là biến cố giao của hai biến cố còn lại?

Lời giải

Biến cố D là biến cố giao của hai biến cố E và G .

8. Một ban văn nghệ có 20 người, trong đó có 8 nam và 12 nữ. Chọn ngẫu nhiên ra 5 người để tập múa. Xét các biến cố sau:

M : "Trong 5 người được chọn, số nam lớn hơn 3";

N : "Trong 5 người được chọn, số nữ nhỏ hơn 3";

P : "Trong 5 người được chọn, số nam không vượt quá 3".

Trong ba biến cố M, N, P , hai biến cố nào là xung khắc?

Lời giải

Biến cố M và biến cố P là xung khắc

9. Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp. Xét các biến cố sau: A : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất lớn hơn 3";

B : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai nhỏ hơn 3";

C : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ ba lớn hơn 3";

D : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất nhỏ hơn 3".

Trong các biến cố trên, tìm:

a) Một cặp biến cố xung khắc; b) Ba cặp biến cố độc lập.

Lời giải

a) Một cặp biến cố xung khắc là A và D .

b) Ba cặp biến cố độc lập là: A và B , A và C , B và C .

10. Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp.

a) Viết các kết quả thuận lợi của không gian mẫu Ω và hai biến cố A : "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp", B : "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa".

b) Viết các kết quả thuận lợi của mỗi biến cố $A \cup B, A \cap B$.

c) Tính $P(A), P(B), P(A \cup B), P(A \cap B)$. Cho biết A và B có là hai biến cố xung khắc không; A và B có là hai biến cố độc lập không.

Lời giải

a) Kí hiệu S là mặt sấp, N là mặt ngửa.

$$\Omega = \{SS; SN; NS; NN\}; A = \{SS; SN; NS\}; B = \{NS; SN; NN\}.$$

$$b) A \cup B = \{SS; SN; NS; NN\} = \Omega; A \cap B = \{SN; NS\}.$$

$$c) P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{4}; P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{4};$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = 1; P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2}.$$

Vì $A \cap B \neq \emptyset$ nên A và B không là hai biến cố xung khắc.

Vì $P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$ nên A và B không là hai biến cố độc lập.

11. Xét các biến cố A, B liên quan đến cùng một phép thử thoả mãn $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5, P(A \cup B) = 0,6$. Hai biến cố A và B có xung khắc không? Vì sao?

Lời giải

$$\text{Ta có: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ nên } P(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,6 = 0,3.$$

Suy ra $A \cap B \neq \emptyset$. Vậy A và B không là hai biến cố xung khắc.

12. Xét các biến cố A, B liên quan đến cùng một phép thử thoả mãn $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,4, P(A \cap B) = 0,1$. Hai biến cố A và B có độc lập không? Vì sao?

Lời giải

$$\text{Ta có: } P(A \cap B) \neq P(A).P(B) \text{ nên } A \text{ và } B \text{ không là hai biến cố độc lập.}$$

13. Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp.

a) Không gian mẫu Ω có bao nhiêu phần tử?

b) Xét các biến cố:

A : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là 2";

B : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai là 3".

Tính xác suất của các biến cố $A, B, A \cap B$.

Lời giải

a) $n(\Omega) = 6, 6 = 36.$

b) $n(A) = n(B) = 6.$ Suy ra $P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{6}.$

A và B là hai biến cố độc lập nên $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$

14. Cho hai biến cố độc lập A và B cùng liên quan đến một phép thử thoả mãn $P(A) = 0,2$ và $P(B) = 0,3.$

Tính xác suất của các biến cố: $\bar{A}, \bar{B}, A \cap B, \bar{A} \cap B, A \cap \bar{B}$ và $\bar{A} \cap \bar{B}.$

Lời giải

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,2 = 0,8; P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,3 = 0,7.$

A và B là hai biến cố độc lập nên các cặp biến cố sau cũng độc lập: $\bar{A}$ và B, A và $\bar{B}, \bar{A}$ và $\bar{B}.$ Ta có:
 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06.$

Tương tự ta có: $P(\bar{A} \cap B) = 0,24; P(A \cap \bar{B}) = 0,14; P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,56;$

15. Hai bệnh nhân cùng nhiễm một loại virus. Xác suất biến chứng nặng của bệnh nhân thứ nhất và bệnh nhân thứ hai lần lượt là 0,2 và 0,25; khả năng bị biến chứng nặng của hai bệnh nhân là độc lập. Tính xác suất của các biến cố:

- a) M : "Bệnh nhân thứ nhất và bệnh nhân thứ hai đều bị biến chứng nặng";
- b) N : "Bệnh nhân thứ nhất không bị biến chứng nặng và bệnh nhân thứ hai bị biến chứng nặng";
- c) Q : "Bệnh nhân thứ nhất bị biến chứng nặng và bệnh nhân thứ hai không bị biến chứng nặng";
- d) R : "Bệnh nhân thứ nhất và bệnh nhân thứ hai đều không bị biến chứng nặng";
- e) S : "Có ít nhất một trong hai bệnh nhân bị biến chứng nặng".

Lời giải

Xét hai biến cố A : "Bệnh nhân thứ nhất bị biến chứng nặng";

B : "Bệnh nhân thứ hai bị biến chứng nặng".

A và B là hai biến cố độc lập, $n(A) = 0,2, n(B) = 0,25.$

a) $P(M) = P(A \cap B) = 0,2 \cdot 0,25 = 0,05.$

b) $P(N) = P(\bar{A} \cap B) = 0,8 \cdot 0,25 = 0,2.$

c) $P(Q) = P(A \cap \bar{B}) = 0,2 \cdot 0,75 = 0,15.$

$$d) P(R) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,8 \cdot 0,75 = 0,6.$$

$$e) P(S) = 1 - P(R) = 1 - 0,6 = 0,4$$

16. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 25 học sinh thích chơi cầu lông, 20 học sinh thích chơi bóng bàn, 12 học sinh thích chơi cả cầu lông và bóng bàn. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Tính xác suất của các biến cố:

a) A : "Học sinh được chọn thích chơi cầu lông";

b) B : "Học sinh được chọn thích chơi bóng bàn";

c) C : "Học sinh được chọn vừa thích chơi cầu lông vừa thích chơi bóng bàn";

d) D : "Học sinh được chọn thích chơi ít nhất một trong hai môn thể thao là cầu lông hoặc bóng bàn".

Lời giải

$$a) P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}.$$

$$b) P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}.$$

$$c) P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}.$$

$$d) P(D) = P(A) + P(B) - P(C) = \frac{5}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{33}{40}.$$

17. Một nồi cơm điện gồm hai van bảo hiểm hoạt động độc lập. Xác suất hoạt động tốt của van I và van II lần lượt là 0,8 và 0,6. Nồi cơm điện hoạt động an toàn khi có ít nhất một van hoạt động tốt. Tính xác suất nồi cơm điện hoạt động an toàn.

Lời giải

Xét biến cố A : "Van I hoạt động tốt";

B : "Van II hoạt động tốt";

C : "Nồi cơm điện hoạt động an toàn".

A và B là hai biến cố độc lập.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P(C) &= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= 0,8 + 0,6 - 0,8 \cdot 0,6 = 0,92 \end{aligned}$$

18. Hai xạ thủ A và B cùng lúc bắn vào một mục tiêu một cách độc lập. Xác suất bắn trúng mục tiêu đó của hai xạ thủ A và B lần lượt là 0,6 và 0,65. Mục tiêu bị hạ nếu có ít nhất một xạ thủ bắn trúng mục tiêu. Tính xác suất của biến cố D : "Mục tiêu bị hạ bởi hai xạ thủ".

Lời giải

$$P(D) = 0,86$$

19. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 21 số nguyên dương đầu tiên. Tính xác suất của các biến cố:

- a) A : "Hai số được chọn là số chẵn";
 b) B : "Hai số được chọn là số lẻ";
 c) C : "Tổng của hai số được chọn là số chẵn".

Lời giải

Trong 21 số nguyên dương đầu tiên có 10 số chẵn và 11 số lẻ.

$$a) P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{10}^2}{C_{21}^2} = \frac{3}{14}.$$

$$b) P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{C_{11}^2}{C_{21}^2} = \frac{11}{42}.$$

c) Vì tổng của hai số là số chẵn khi hai số đó cùng chẵn hoặc cùng lẻ, mà A và B là hai biến cố xung khắc nên

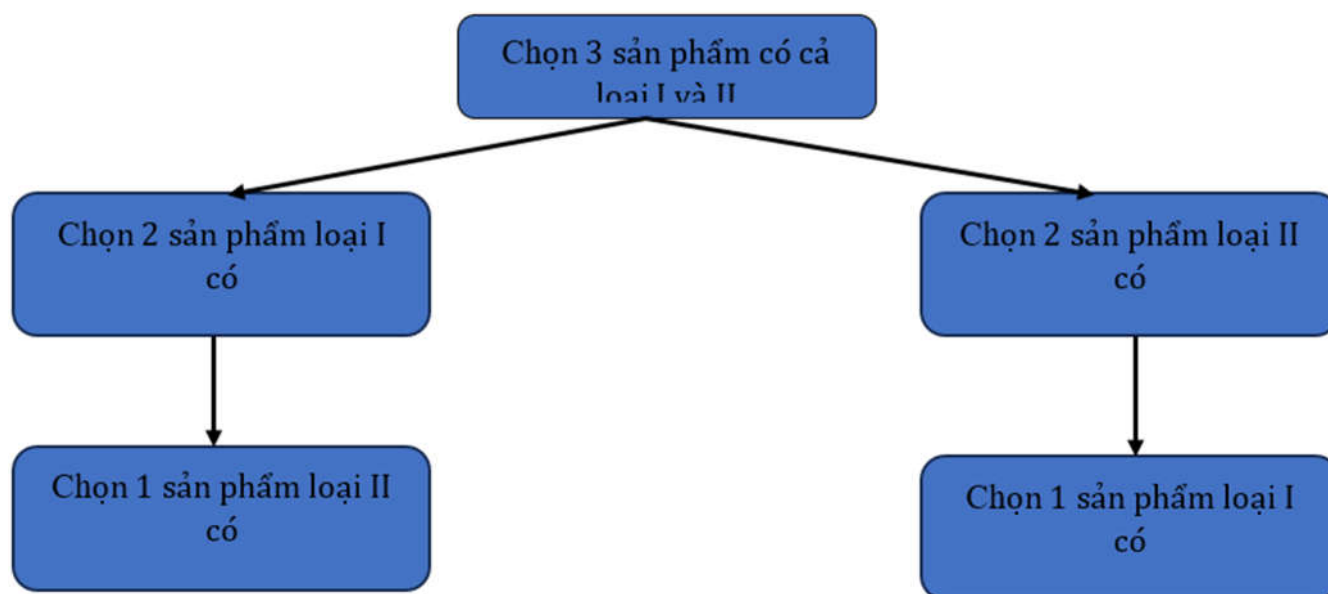
$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{14} + \frac{11}{42} = \frac{10}{21}.$$

20. Trong một ngày bán hàng khuyến mại, cửa hàng để lẫn cả sản phẩm loại I và sản phẩm loại II vào một hộp, các sản phẩm có hình thức bề ngoài giống nhau và đồng giá. Trong hộp có 10 sản phẩm loại I và 18 sản phẩm loại II. Một người lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm. Tính xác suất của biến cố A : "Trong ba sản phẩm lấy được, có cả sản phẩm loại I và sản phẩm loại II".

Lời giải

Mỗi cách lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm từ một hộp có 28 sản phẩm cho ta một tổ hợp chập 3 của 28 phần tử. Do đó không gian mẫu Ω gồm các tổ hợp chập 3 của 28 phần tử và $n(\Omega) = C_{28}^3 = 3276$.

Sơ đồ hình cây biểu thị các khả năng thuận lợi cho biến cố A .



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2340}{3276} = \frac{5}{7}.$$

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là:

$$n(A) = C_{10}^2 \cdot 18 + C_{18}^2 \cdot 10 = 2340.$$

Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2340}{3276}$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG

PHẦN 1: BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Câu 1. Người ta tiến hành phỏng vấn 40 người về một mẫu áo sơ mi mới. Người điều tra yêu cầu cho điểm mẫu áo đó theo thang điểm 100. Kết quả được trình bày trong *Bảng 16*.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[50;60)	4	4
[60;70)	5	9
[70;80)	23	32
[80;90)	6	38
[90;100)	2	40
	$n = 40$	

Bảng 16.

- a) Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị:
A. 74. **B.** 75. **C.** 76. **D.** 77.
- b) Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) là:
A. $Q_1 \approx 71; Q_2 \approx 76; Q_3 \approx 78$. **B.** $Q_1 \approx 71; Q_2 \approx 75; Q_3 \approx 78$.
C. $Q_1 \approx 70; Q_2 \approx 76; Q_3 \approx 79$. **D.** $Q_1 \approx 70; Q_2 \approx 75; Q_3 \approx 79$.
- c) Một của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) là:
A. 73. **B.** 74. **C.** 75. **D.** 76.

Lời giải

a) Trung vị là: $M_e = 70 + \left(\frac{20-9}{23} \right) \cdot 10 \approx 75 \Rightarrow$ **Chọn B.**

b) $Q_1 = 70 + \left(\frac{10-9}{23} \right) \cdot 10 \approx 70$, $Q_2 = M_e \approx 75 \Rightarrow$ **Chọn D.**

c) $M_o = 70 + \left(\frac{23-5}{2 \cdot 23 - 5 - 6} \right) \cdot 10 \approx 75 \Rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 2. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 21 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng:

A. $\frac{11}{21}$. **B.** $\frac{221}{441}$. **C.** $\frac{10}{21}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Có $n(\Omega) = C_{21}^2 = 210$.

Để hai số có tổng là một số chẵn là thì có các trường hợp sau:

TH1: Cả hai số là số chẵn.

TH2: Cả hai số là số lẻ.

Xét biến cố A : "Cả hai số là số chẵn". $\Rightarrow n(A) = C_{10}^2 = 45$

Xét biến cố B : "Cả hai số là số lẻ". $\Rightarrow n(B) = C_{11}^2 = 55$

Vậy xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn là: $\frac{45+55}{210} = \frac{10}{21}$

Câu 3. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại độ dài quãng đường di chuyển trong một tuần (đơn vị: kilômét) của 40 chiếc ô tô:

100	105	115	116	130	135	138	132	135	120
125	128	120	124	140	140	146	145	142	142
145	148	150	150	159	155	151	156	155	151
154	152	153	160	162	175	176	165	188	198

a) Lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy với năm nhóm ứng với năm nửa khoảng:

$$[100;120) ; [120;140) ; [140;160) ; [160;180) ; [180;200).$$

b) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

c) Một của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu.

Lời giải

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[100;120)$	4	4
$[120;140)$	15	19
$[140;160)$	14	33
$[160;180)$	5	38
$[180;200)$	2	40

b) Trung bình cộng là: $\bar{x} = \frac{110.4+130.15+150.14+170.5+190.2}{40} = 143$

• Trung vị là: $M_e = 140 + \left(\frac{20-19}{14} \right) \cdot 20 \approx 141$

• Q_1 là $Q_1 = 120 + \left(\frac{10-4}{15}\right) \cdot 20 = 128$

Q_2 là: Có $Q_2 = M_e \approx 141$

Q_3 là: $Q_3 = 140 + \left(\frac{30-19}{15}\right) \cdot 20 = 155,6$

c) Một của mẫu số liệu là:

Có nhóm 2 là nhóm có tần số lớn nhất $\Rightarrow M_o = 120 + \left(\frac{15-4}{2 \cdot 15 - 4 - 14}\right) \cdot 20 \approx 138,3$

Câu 4. Bạn Dũng và bạn Hương tham gia đội văn nghệ của nhà trường. Nhà trường chọn từ đội văn nghệ đó một bạn nam và một bạn nữ để lập tiết mục song ca. Xác suất được nhà trường chọn vào tiết mục song ca của Dũng và Hương lần lượt là 0,7 và 0,9.

Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) A : “Cả hai bạn được chọn vào tiết mục song ca”;
- b) B : “Có ít nhất một bạn được chọn vào tiết mục song ca”;
- c) C : “Chỉ có bạn Hương được chọn vào tiết mục song ca”

Lời giải

a) $P(A) = 0,7 \cdot 0,9 = 0,63$.

b) Xét biến cố D : “Dũng không được chọn”. $P(D) = 1 - 0,7 = 0,3$

Xét biến cố E : “Hương không được chọn”. $P(E) = 1 - 0,9 = 0,1 \Rightarrow P(B) = 1 - (0,3 \cdot 0,1) = 0,97$

c) $P(C) = 0,9 \cdot 0,3 = 0,27$.

Câu 5. Hai bạn Mai và Thi cùng tham gia một kì kiểm tra ngoại ngữ một cách độc lập nhau. Xác suất để bạn Mai và bạn Thi đạt từ điểm 7 trở lên lần lượt là 0,8 và 0,9.

Tính xác suất của biến cố C : “Cả hai bạn đều đạt từ điểm 7 trở lên”.

Lời giải

$P(C) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72$.

Câu 6. Một người chọn ngẫu nhiên 3 lá thư vào 3 phong bì đã ghi địa chỉ sao cho mỗi phong bì chỉ chứa một lá thư. Tính xác suất để có ít nhất một lá thư được cho vào đúng phong bì đã ghi địa chỉ theo lá thư đó.

Lời giải

Có $n(\Omega) = 3! = 6$.

Có biến cố A : “Có ít nhất một lá thư được cho vào đúng phong bì đã ghi địa chỉ theo lá thư đó”.

Xét biến cố A' : “Không có lá thư nào được cho vào đúng phong bì đã ghi địa chỉ theo lá thư đó”.

$n(A') = 2! = 2 \Rightarrow P(A') = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Câu 7. Một hộp chứa 9 quả cầu có cùng kích thước và khối lượng. Trong đó có 4 quả cầu màu xanh đánh số từ 1 đến 4, có 3 quả cầu màu vàng đánh số từ 1 đến 3, có 2 quả cầu màu đỏ đánh số từ 1 đến 2. Lấy ngẫu nhiên 2 quả cầu từ hộp. Tính xác suất để 2 quả cầu được lấy vừa khác màu vừa khác số.

Lời giải

$$\text{Có } n(\Omega) = C_9^2 = 36$$

Gọi biến cố A : "2 quả cầu được lấy vừa khác màu vừa khác số"

Khi đó biến cố A' : "2 quả cầu được lấy cùng màu hoặc khác màu cùng số"

$$\Rightarrow n(A') = C_4^2 + C_3^2 + C_2^2 + 7 = 17$$

$$\Rightarrow P(A') = \frac{17}{36}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{17}{36} = \frac{19}{36}$$

Câu 8. Bạn An vẽ trên đất một bảng gồm 9 ô vuông như Hình 3. Sau đó, bạn An cầm 4 viên bi giống nhau đặt ngẫu nhiên vào 4 ô vuông trong bảng đó. Tính xác suất để bất kì hàng nào và cột nào của bảng cũng có viên bi.

Hình 3

Không gian mẫu: $n(\Omega) = C_9^4 = 126$.

Gọi A là biến cố: "bất kì hàng nào và cột nào của bảng cũng có viên bi", khi đó ta có biến cố đối: $\bar{A}$: "có 1 hàng hoặc 1 cột không có viên bi".

Gọi B là biến cố: 1 hàng không có viên bi

- Chọn 1 hàng trong 3 hàng có C_3^1 cách.
- Xếp 4 viên bi vào 2 hàng còn lại có C_6^4 cách.

$$\Rightarrow n(B) = C_3^1 \cdot C_6^4 = 45 \text{ cách.}$$

Gọi C là biến cố: 1 cột không có viên bi.

- Chọn 1 cột trong 3 cột có C_3^1 cách.
- Xếp 4 viên bi vào 2 cột còn lại có C_6^4 cách.

$$\Rightarrow n(C) = C_3^1 \cdot C_6^4 = 45 \text{ cách.}$$

Ta có: $B \cap C$ = "1 hàng không có viên bi và 1 cột không có viên bi".

X	X	
X	X	

- Chọn 1 hàng không có viên bi có C_3^1 cách.
- Chọn 1 cột không có viên bi có C_3^1 cách.
- Xếp 4 viên bi vào 4 ô còn lại có 1 cách.
 $\Rightarrow n(B \cap C) = 9$.
 $\Rightarrow n(A) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) = 45 + 45 - 9 = 81$.
 Vậy $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{81}{126} = \frac{5}{14}$.

PHẦN 2: BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

21. Nếu A và B là hai biến cố thì $P(A \cup B)$ bằng:

- A.** $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. **B.** $P(A) - P(B) - P(A \cap B)$.
C. $P(A) \cdot P(B) - P(A \cap B)$. **D.** $P(A) \cdot P(B) + P(A \cap B)$.

Lời giải

Chọn A

22. Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì $P(A \cup B)$ bằng:

- A.** $P(A) \cdot P(B)$. **B.** $P(A) - P(B)$
C. $P(A) + P(A \cap B)$. **D.** $P(A) + P(B)$.

Lời giải

Chọn D

23. Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $P(A \cap B)$ bằng:

- A.** $P(A) + P(B)$. **B.** $P(A) - P(B)$.
C. $P(A) \cdot P(B)$. **D.** $P(A \cup B) - P(B)$.

Lời giải

Chọn C

24. Một hộp có 10 viên bi màu hồng và 14 viên bi màu vàng, các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi. Xét các biến cố:

P : "Hai viên bi được lấy ra có màu hồng";

Q : "Hai viên bi được lấy ra có màu vàng".

Khi đó, biến cố hợp của hai biến cố P và Q là:

- A.** "Hai viên bi được lấy ra chỉ có màu hồng".
B. "Hai viên bi được lấy ra có cùng màu".
C. "Hai viên bi được lấy ra chỉ có màu vàng".
D. "Hai viên bi được lấy ra có màu khác nhau".

Lời giải

Chọn B

25. Trên giá sách có các quyển vở không nhãn xếp cạnh nhau với bề ngoài, khối lượng và kích thước giống hệt nhau, trong đó có 5 quyển ghi môn Toán, 5 quyển ghi môn Ngữ Văn và 3 quyển ghi môn Tiếng Anh. Lấy ngẫu nhiên hai quyển vở. Xét các biến cố:

M : "Trong hai quyển vở được lấy, chỉ có 1 quyển ghi môn Tiếng Anh";

N : "Trong hai quyển vở được lấy, chỉ có 1 quyển ghi môn Ngữ Văn".

Khi đó, biến cố giao của hai biến cố M và N là:

A. "Hai quyển vở được lấy ghi cùng một môn".

B. "Hai quyển vở được lấy ghi hai môn khác nhau".

C. "Trong hai quyển vở được lấy, một quyển ghi môn Tiếng Anh và một quyển ghi môn Ngữ Văn".

D. "Hai quyển vở được lấy có ít nhất một quyển ghi môn Tiếng Anh".

Lời giải

Chọn C

26. Cho n là số nguyên dương lớn hơn 2. Chọn ngẫu nhiên hai số nguyên dương từ tập hợp $\{1; 2; 3; \dots; 2n; 2n+1\}$. Tính xác suất để hai số được chọn có tích là số chẵn.

Lời giải

Tích hai số được chọn là số chẵn khi hai số được chọn là cùng chẵn hoặc một số lẻ và một số chẵn.

Xét biến cố A : "Hai số được chọn có tích là số chẵn".

$$P(A) = \frac{C_n^2 + C_{n+1}^1 \cdot C_n^1}{C_{2n+1}^2}.$$

27. Người ta ghi lại tốc độ của 40 xe đạp đi qua một vị trí trên đường. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 40 xe đó (đơn vị: km / h):

10 10,4 11 16 12 13 15,8 12,7 16,8 19
17 15,1 14 12,3 17,2 10,5 13,2 18,1 19,6 17,4
11,8 13,6 12,7 15,9 14,2 12,6 11,6 10,4 14,1 15,1
12,3 15,2 11,9 16,3 18,4 17,1 14,2 12,1 13,7 13,2

a) Lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy có năm nhóm ứng với sáu nửa khoảng: $[10;12), [12;14), [14;16), [16;18), [18;20)$.

Lời giải

a) Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy được cho như ở Bảng 12:

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[10;12)$	8	8

$[12;14)$	12	20
$[14;16)$	9	29
$[16;18)$	7	36
$[18;20)$	4	40
	$n = 40$	

b) Xác định các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn các kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Ta có: $\frac{n}{2} = 20, \frac{n}{4} = 10, \frac{3n}{4} = 30$. Vì $8 < 20 \leq 20$ nên nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 20.

Suy ra trung vị là:

$$M_e = 12 + \left(\frac{20 - 8}{12} \right) \cdot 2 = 14.$$

Tứ phân vị thứ hai là: $Q_2 = M_e = 14$.

Vì $8 < 10 < 20$ nên nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 10. Suy ra tứ phân vị thứ nhất là:

$$Q_1 = 12 + \left(\frac{10 - 8}{12} \right) \cdot 2 \approx 12,3.$$

Vì $29 < 30 < 36$ nên nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 30. Suy ra tứ phân vị thứ ba là: $Q_3 = 16 + \left(\frac{30 - 29}{7} \right) \cdot 2 \approx 16,3$.

Trong các nhóm, nhóm 2 có tần số lớn nhất.

$$\text{Suy ra mode là: } M_o = 12 + \left(\frac{12 - 8}{2 \cdot 12 - 8 - 9} \right) \cdot 2 \approx 13,1.$$

28. Bạn Nam có 10 quyển sách sinh học, 20 quyển sách khoa học và 5 quyển sách văn học muốn mang đi quyên góp cho các thư viện gần nhà. Bạn Nam chọn ngẫu nhiên 3 quyển sách để mang tới thư viện trường. Tính xác suất ba quyển sách được chọn đôi một thể loại khác nhau.

Lời giải

Không gian mẫu Ω là các cách chọn ngẫu nhiên 3 quyển sách từ 35 quyển sách của bạn Nam, khi đó

$$n(\Omega) = C_{35}^3 = 6545.$$

Gọi biến cố A : "Ba quyển sách được chọn đôi một thể loại khác nhau". Khi đó, chọn 1 quyển sách sinh học có 10 cách, chọn 1 quyển sách địa lí có 20 cách, chọn 1 quyển sách văn học có 5 cách nên

$$n(A) = 10 \cdot 20 \cdot 5 = 1000.$$

Vậy xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1000}{6545} = \frac{200}{1309}.$$

29*. Một câu lạc bộ cờ của trường có 10 bạn, trong đó có 4 bạn biết chơi cờ tướng, 6 bạn biết chơi cờ vua, mỗi bạn chỉ biết chơi một loại cờ. Nhà trường chọn ngẫu nhiên 4 bạn để tham gia buổi giao lưu cờ giữa các học sinh trong thành phố. Tính xác suất của biến cố "Trong 4 bạn được chọn, có ít nhất một bạn biết chơi cờ tướng, ít nhất một bạn biết chơi cờ vua".

Lời giải

Không gian mẫu Ω là các cách chọn 4 bạn từ 10 bạn của câu lạc bộ cờ, khi đó $n(\Omega) = C_{10}^4 = 210$.

Xét biến cố A : "Trong 4 bạn được chọn, có ít nhất một bạn biết chơi cờ tướng, ít nhất một bạn biết chơi cờ vua".

Khi đó biến cố đối của A là $\bar{A}$: "Bốn bạn được chọn chỉ chơi cờ vua hoặc chỉ chơi cờ tướng".

$$\text{Xác suất của biến cố } \bar{A} \text{ là: } P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{C_4^4 + C_6^4}{210} = \frac{8}{105}.$$

$$\text{Suy ra xác suất của biến cố } A \text{ là: } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{8}{105} = \frac{97}{105}$$

30. Hai bạn An và Bình cùng tập ném bóng rổ một cách độc lập ở hai nửa sân khác nhau. Xác suất bạn An và bạn Bình ném bóng vào rổ lần lượt là 0,6 và 0,9. Trong cùng một lần ném, tính xác suất có ít nhất một bạn ném bóng vào rổ.

Lời giải

Xét các biến cố A : "Bạn An ném bóng trúng rổ";

B : "Bạn Bình ném bóng trúng rổ";

C : "Có ít nhất một bạn ném bóng vào rổ".

A và B là hai biến cố độc lập nên $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$\text{Khi đó, } P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0,6 + 0,9 - 0,6 \cdot 0,9 = 0,96.$$

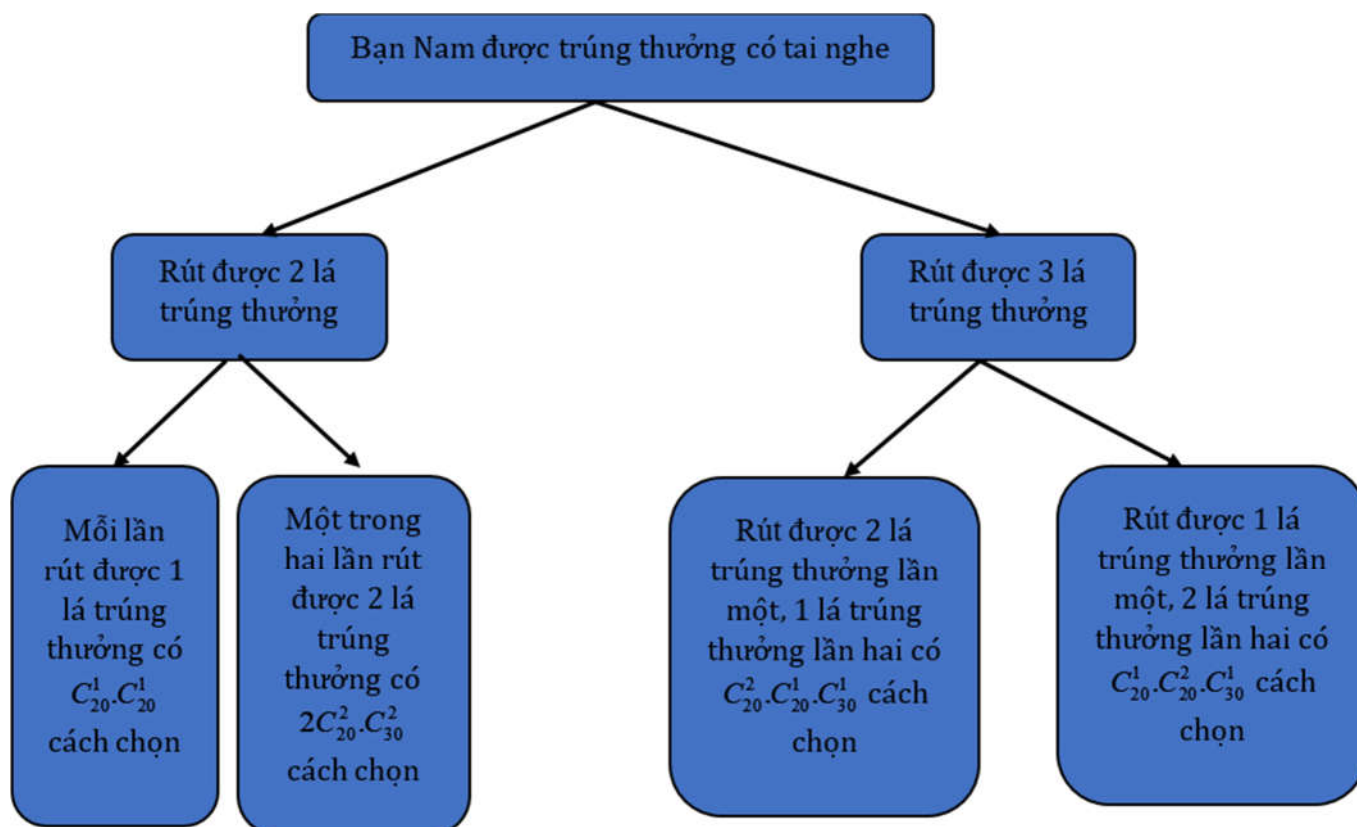
31*. Bạn Nam tham gia một trò chơi rút thăm trúng thưởng. Hộp đựng thăm có 50 lá thăm cứng với kích thước và khối lượng như nhau, trong đó có 20 lá trúng thưởng, 30 lá không trúng thưởng. Mỗi người

được rút 2 lần (sau mỗi lần rút thì ghi kết quả và bỏ lại thăm vào hộp), mỗi lần 2 lá thăm. Nếu rút được 2 lá trúng thưởng thì được 1 tai nghe, nếu rút được 3 lá trúng thưởng thì được 1 tai nghe và 1 bàn phím, nếu rút được 4 lá trúng thưởng thì được 1 máy tính bảng. Tính xác suất để bạn Nam được trúng thưởng có tai nghe (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu Ω là: $n(\Omega) = C_{50}^2 \cdot C_{50}^2$.

Sơ đồ hình cây biểu thị các khả năng thuận lợi cho biến cố A .



Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là:

$$n(A) = C_{20}^1 \cdot C_{20}^1 + 2C_{20}^2 \cdot C_{30}^2 + 2C_{20}^2 \cdot C_{20}^1 \cdot C_{30}^1 = 393700.$$

Xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{393700}{C_{50}^2 \cdot C_{50}^2} \approx 0,3.$$

CHƯƠNG VI. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

BÀI 1. PHÉP TÍNH LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phép tính lũy thừa với số mũ nguyên

Cho số thực a khác 0 và số nguyên dương n . Ta đặt $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Chú ý

- 0^0 và 0^{-n} (n nguyên dương) không có nghĩa.
- Lũy thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự của lũy thừa với số mũ nguyên dương.

2. Căn bậc n

a) Định nghĩa

Cho số thực a và số nguyên dương n ($n \geq 2$). Số b được gọi là căn bậc n của số a nếu $b^n = a$.

Nhận xét

- Với n lẻ và $a \in \mathbb{R}$: Có duy nhất một căn bậc n của a , kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$.
- Với n chẵn, ta xét ba trường hợp sau:

+) $a < 0$: Không tồn tại căn bậc n của a ;

+) $a = 0$: Có một căn bậc n của a là số 0;

+) $a > 0$: Có hai căn bậc n của a là hai số đối nhau, giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$, còn giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$.

b) Tính chất

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{nếu } n \text{ chẵn;} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

(Ở mỗi công thức trên, ta giả sử các biểu thức xuất hiện trong đó là có nghĩa).

3. Phép tính lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Lũy thừa của a với số mũ r xác

định bởi: $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Nhận xét

- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} (a > 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.
- Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ của số thực dương có đầy đủ các tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên.

4. Phép tính lũy thừa với số mũ thực

a) Định nghĩa

Cho a là số thực dương, α là số vô tỉ, (r_n) là dãy số hữu tỉ và $\lim r_n = \alpha$. Giới hạn của dãy số (a^{r_n}) gọi là lũy thừa của a với số mũ α , kí hiệu $a^\alpha, a^\alpha = \lim a^{r_n}$.

b) Tính chất

Cho a, b là những số thực dương; α, β là những số thực tùy ý. Khi đó, ta có:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha; \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha};$$

$$\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}; (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta};$$

- Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

- Cho $0 < a < b, \alpha$ là một số thực. Ta có:

$$a^\alpha < b^\alpha \Leftrightarrow \alpha > 0; a^\alpha > b^\alpha \Leftrightarrow \alpha < 0.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Vấn đề 1. Tính giá trị của biểu thức chứa lũy thừa

Ví dụ 1: Tính:

$$\text{a) } \left(\frac{1}{256}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}; \quad \text{b) } (4^{3+\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}}.$$

Lời giải

$$\text{a) } \left(\frac{1}{256}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} = (4^{-4})^{-0,75} + (3^{-3})^{-\frac{4}{3}} = 4^3 + 3^4 = 145.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (4^{3+\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}} &= [2^{2(3+\sqrt{3})} - 2^{2(\sqrt{3}-1)}] \cdot 2^{-2\sqrt{3}} \\ &= (2^{6+2\sqrt{3}} - 2^{2\sqrt{3}-2}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}} = 2^{6+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}} - 2^{2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}} = 2^6 - 2^{-2} = \frac{255}{4} \end{aligned}$$

Vấn đề 2. Rút gọn biểu thức chứa lũy thừa

Ví dụ 2. Cho a, b là những số thực dương. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

a) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$; b) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$

c) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$ d) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}$.

Lời giải

a) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}$.

b) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b} = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = b$.

c) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a} = a^{\frac{4}{3}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} = a$.

d) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{3}} : b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{6}}$.

Ví dụ 3. Rút gọn mỗi biểu thức sau:

a) $\frac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}$ ($a > 0, a \neq 1$); b) $\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}$ ($a > 0, b > 0$).

Lời giải

a) $\frac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}(a^2 - 1)}{a^{\frac{1}{3}}(a - 1)} = a + 1$. b) $\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}} = \sqrt[6]{(a^2b)^6} = a^2b$.

Vấn đề 3. So sánh các lũy thừa

Ví dụ 4. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số:

a) $16^{\sqrt{3}}$ và $4^{3\sqrt{2}}$; b) $(0,2)^{\sqrt{16}}$ và $(0,2)^{\sqrt[3]{60}}$.

Lời giải

a) Ta có: $16^{\sqrt{3}} = 4^{2\sqrt{3}}$. Do $2\sqrt{3} = \sqrt{12}, 3\sqrt{2} = \sqrt{18}, \sqrt{12} < \sqrt{18}$ và $4 > 1$ nên $4^{2\sqrt{3}} < 4^{3\sqrt{2}}$ hay $16^{\sqrt{3}} < 4^{3\sqrt{2}}$.

b) Ta có: $(0,2)^{\sqrt{16}} = (0,2)^4$. Do $4 = \sqrt[3]{64} > \sqrt[3]{60}$ và $0,2 < 1$ nên $(0,2)^4 < (0,2)^{\sqrt[3]{60}}$ hay $(0,2)^{\sqrt{16}} < (0,2)^{\sqrt[3]{60}}$.

Ví dụ 5. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số:

a) 2^{300} và 3^{200} ; b) $(\sqrt{5})^{\frac{2}{3}}$ và $\sqrt[3]{4}$.

Lời giải

a) Ta có: $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}; 3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$.

Do $8 < 9$ và $100 > 0$ nên $8^{100} < 9^{100}$ hay $2^{300} < 3^{200}$.

b) Ta có: $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

Do $\sqrt{5} > 1 > \frac{1}{2}$ và $-\frac{2}{3} < 0$ nên $(\sqrt{5})^{-\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$ hay $(\sqrt{5})^{-\frac{2}{3}} < \sqrt[3]{4}$.

Vấn đề 4. Ứng dụng

Ví dụ 6. Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1AU khoảng 93000000 dặm) (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Hỏi Sao Hoả quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)? Biết khoảng cách từ Sao Hoả đến Mặt Trời là 1,52 AU.

Lời giải

Thời gian để Sao Hoả quay quanh Mặt Trời là:

$$P = d^{\frac{3}{2}} = 1,52^{\frac{3}{2}} \approx 1,874 \text{ (năm Trái Đất)}$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Tính:

a) $\left(\frac{1}{256}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$;

b) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5} - \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

c) $(4^{3+\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}}$;

Lời giải

a) $\left(\frac{1}{256}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} = 256^{\frac{3}{4}} + 27^{\frac{4}{3}} = \sqrt[4]{(4^3)^4} + \sqrt[3]{(3^4)^3} = 4^3 + 3^4 = 145$

b) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5} - \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} = 49^{\frac{3}{2}} - 125^{\frac{2}{3}} = \sqrt{(7^3)^2} - \sqrt[3]{(5^2)^3} = 7^3 - 5^2 = 318$

c) $(4^{3+\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}} = 4^{\sqrt{3}} (4^3 - 4^{-1}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}} = 2^{2\sqrt{3}} \cdot 2^{-2\sqrt{3}} \cdot (4^3 - 4^{-1})$
 $= 4^3 - 4^{-1} = \frac{255}{4}$

Bài 2. Cho a, b là những số thực dương. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

a) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$; b) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$; c) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$; d) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}$;

Lời giải

a) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}$ b) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b} = b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = b$
c) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a} = a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} = a$ d) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{6}}$

Bài 3. Rút gọn mỗi biểu thức sau:

a) $\frac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{5}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}}$ ($a > 0, a \neq 1$); b) $\frac{(\sqrt[4]{a^3 b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}}}$ ($a > 0, b > 0$);

Lời giải

a) $\frac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot (a^2 - 1)}{a^{\frac{1}{3}} \cdot (a - 1)} = \frac{a^2 - 1}{a - 1} = a + 1$
b) $\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}} = \sqrt[3]{(a^{12} b^6)^{\frac{1}{2}}} = (a^{12} b^6)^{\frac{1}{6}} = a^2 \cdot b$

Bài 4. Viết các số sau theo thứ tự tăng dần:

a) $1^{1,5}; 3^{-1}; \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; b) $2022^0; \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}; 5^{\frac{1}{2}}$;

Lời giải

a) Có $1^{1,5} = 1$; $3^{-1} = \frac{1}{3}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$.

$\Rightarrow$ Thứ tự là: $3^{-1}; 1^{1,5}; 4$.

b) Có $2022^0 = 1$; $\left(\frac{4}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{4}$; $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$.

$\Rightarrow$ Thứ tự là: $2022^0; \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}; 5^{\frac{1}{2}}$

Bài 5. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số sau:

a) $\sqrt{42}$ và $\sqrt[3]{51}$; b) $16^{\sqrt{3}}$ và $4^{3\sqrt{2}}$; c) $(0,2)^{\sqrt{16}}$ và $(0,2)^{\sqrt[3]{60}}$;

Lời giải

a) $\sqrt{42} = 42^{\frac{1}{2}} = 42^{\frac{1}{6} \cdot 3} = (42^3)^{\frac{1}{6}} = 74088^{\frac{1}{6}}$

$$\sqrt[3]{51} = 51^{\frac{1}{3}} = 51^{2 \cdot \frac{1}{6}} = (51^2)^{\frac{1}{6}} = 2601^{\frac{1}{6}}$$

$$74088 > 2601 \Rightarrow \sqrt{42} > \sqrt[3]{51}$$

$$b) 16^{\sqrt{3}} = (4^2)^{\sqrt{3}} = 4^{2\sqrt{3}}$$

$$2\sqrt{3} < 3\sqrt{2} \Rightarrow 4^{2\sqrt{3}} < 4^{3\sqrt{2}} \Rightarrow 16^{\sqrt{3}} < 4^{3\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{16} = 4, \sqrt[3]{60} = 60^{\frac{1}{3}} < 64^{\frac{1}{3}} = 4$$

$$c) \Rightarrow \sqrt{16} > \sqrt[3]{60}; 0 < 0,2 < 1$$

$$\Rightarrow (0,2)^{\sqrt{16}} < (0,2)^{\sqrt[3]{60}}$$

Bài 6. Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU khoảng 93 000 000 dặm) (Nguồn: R.I. Challes et al., Algebra 2, Pearson)

Hỏi Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là 1,52 AU.

Lời giải

Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất số năm Trái Đất là:

$$P = d^{\frac{3}{2}} = 1.52^{\frac{3}{2}} \approx 1,87 \text{ (năm)}$$

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

1. Điều kiện xác định của x^{-7} là:

- A. $x \in \mathbb{R}$. B. $x \neq 0$. C. $x \geq 0$. D. $x > 0$.

Lời giải

Chọn B

2. Điều kiện xác định của $\sqrt[5]{x^3}$ là:

- A. $x \in \mathbb{R}$. B. $x \neq 0$. C. $x \geq 0$. D. $x > 0$.

Lời giải

Chọn A

3. Điều kiện xác định của $\sqrt[8]{x^3}$ là:

- A. $x \in \mathbb{R}$. B. $x \neq 0$. C. $x \geq 0$. D. $x > 0$.

Lời giải

Chọn C

4. Điều kiện xác định của $x^{\sqrt{2}}$ là:

- A. $x \in \mathbb{R}$. B. $x \neq 0$. C. $x \geq 0$. D. $x > 0$.

Lời giải

Chọn D

5. Giá trị của biểu thức $P = 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{3+\sqrt{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}$ bằng:

- A. 128. B. 64. C. 16. D. 32.

Lời giải

Chọn D

6. Nếu $a > 1$ thì:

- A. $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. B. $a^{-\sqrt{3}} < \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.
C. $a^{-\sqrt{3}} \leq \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. D. $a^{-\sqrt{3}} = \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

Lời giải

Chọn A

7. Nếu $(2 - \sqrt{3})^{a-1} < 2 + \sqrt{3}$ thì:

- A. $a > 0$. B. $a > 1$. C. $a < 1$. D. $a < 0$.

Lời giải

Chọn A

8. Nếu $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$ thì:

- A. $a > 1$. B. $a < 1$. C. $0 < a < 1$. D. $a > 0$.

Lời giải

Chọn C

9. Biểu thức $P = \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x^3}}$ với $x > 0$ được rút gọn bằng:

- A. $x^{\frac{5}{3}}$. B. $x^{\frac{7}{6}}$. C. $x^{\frac{1}{3}}$. D. $x^{\frac{5}{6}}$.

Lời giải

Chọn B

10. Biểu thức $Q = a^{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{3}-1}$ với $a > 0$ được rút gọn bằng:

- A. $\frac{1}{a}$. B. a^3 . C. a . D. 1.

Lời giải

Chọn C

11. Viết các biểu thức sau về lũy thừa cơ số a , biết:

a) $A = \sqrt[7]{3 \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{3}}}$ với $a = 3$; b) $B = \frac{25\sqrt[3]{5}}{\sqrt{125}}$ với $a = \sqrt{5}$.

Lời giải

a) $A = a^{\frac{4}{35}}$. b) $B = a^{\frac{5}{3}}$.

12. Không sử dụng máy tính cầm tay, so sánh hai số a và b , biết:

a) $a = (\sqrt{3} - 1)^{\sqrt{2}}$ và $b = (\sqrt{3} - 1)^{\sqrt{3}}$;

b) $a = (\sqrt{2} - 1)^{\pi}$ và $b = (\sqrt{2} + 1)^e$;

c) $a = \frac{1}{3^{400}}$ và $b = \frac{1}{4^{300}}$;

d) $a = \frac{8}{\sqrt[4]{27}}$ và $b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$.

Lời giải

a) Do $\sqrt{3} - 1 < 1$ và $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ nên $a > b$.

b) Ta có: $a = (\sqrt{2} - 1)^{\pi} = (\sqrt{2} + 1)^{-\pi}$. Do $\sqrt{2} + 1 > 1$ và $-\pi < e$ nên $a < b$.

c) Ta có: $a = \frac{1}{3^{400}} = \left(\frac{1}{81}\right)^{100}$, $b = \frac{1}{4^{300}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{100}$ mà $\frac{1}{81} < \frac{1}{64}$ nên $a < b$.

d) Ta có: $a = \frac{8}{\sqrt[4]{27}} = \left(\frac{16}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ và $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1 < \frac{16}{3}$ nên $a > b$.

13. Xác định các giá trị của số thực a thỏa mãn:

a) $a^{\frac{1}{2}} > a^{\sqrt{3}}$; b) $a^{-\frac{3}{2}} < a^{\frac{2}{3}}$; c) $(\sqrt{2})^a > (\sqrt{3})^a$.

Lời giải

a) $0 < a < 1$. b) $a > 1$. c) $a < 0$.

14. Cho $a > 0, b > 0$. Rút gọn mỗi biểu thức sau:

a) $A = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3 b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}}}$ b) $B = \frac{a^{\frac{1}{3}} \sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}} \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$

Lời giải

a) $A = ab$. b) $B = \sqrt[3]{ab}$.

15. Cho x, y là các số thực dương và số thực a thỏa mãn:

$a = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}}$. Chứng minh rằng $a^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } a &= \sqrt{\sqrt[3]{x^6} + \sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{\sqrt[3]{y^6} + \sqrt[3]{x^2y^4}} \\ &= \sqrt{\sqrt[3]{x^4} \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \right)} + \sqrt{\sqrt[3]{y^4} \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \right)} \\ &= \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \right) \sqrt{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}} = \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } a^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}.$$

16. Một chất phóng xạ có chu kì bán rã là 25 năm, tức là cứ sau 25 năm, khối lượng của chất phóng xạ đó giảm đi một nửa. Giả sử lúc đầu có 10 g chất phóng xạ đó. Viết công thức tính khối lượng của chất đó còn lại sau t năm và tính khối lượng của chất đó còn lại sau 120 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn theo đơn vị gam).

Lời giải

Công thức tính khối lượng của chất phóng xạ đó còn lại sau t năm là:

$$m = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{25}} \text{ (g)}.$$

Khối lượng của chất đó còn lại sau 120 năm là:

$$m = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{120}{25}} \approx 0,359 \text{ (g)}.$$

BÀI 2. PHÉP TÍNH LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm lôgarit

a) Định nghĩa

Với $a > 0, a \neq 1$ và $b > 0$, ta có: $c = \log_a b \Leftrightarrow a^c = b$. Ngoài ra:

- Lôgarit thập phân của b là lôgarit cơ số 10 của số thực dương b : $c = \log b \Leftrightarrow 10^c = b$;
- Lôgarit tự nhiên của b là lôgarit cơ số e của số thực dương b : $c = \ln b \Leftrightarrow e^c = b$.

b) Tính chất

Với $a > 0, a \neq 1$ và $b > 0$, ta có:

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1 \quad \log_a a^c = c \quad a^{\log_a b} = b.$$

2. Một số tính chất của phép tính lôgarit

Trong mục này, ta xét $a > 0, a \neq 1$ và $b > 0$.

a) Lôgarit của một tích, một thương

Với $m > 0, n > 0$, ta có:

$$\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n; \quad \log_a \left(\frac{m}{n} \right) = \log_a m - \log_a n$$

Nhận xét: $\log_a \left(\frac{1}{b} \right) = -\log_a b$.

b) Lôgarit của một lũy thừa

Với mọi số thực α , ta có: $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$.

Nhận xét: Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, ta có: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$.

c) Đổi cơ số của lôgarit

Với a, b là hai số thực dương khác 1 và c là số thực dương, ta có: $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$.

Nhận xét: Với a, b là hai số thực dương khác 1, $c > 0$ và $\alpha \neq 0$, ta có những công thức sau:

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c; \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \quad \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Vấn đề 1. Thực hiện các phép tính lôgarit

Ví dụ 1. Tính:

a) $\log_{0,5} 0,25$; b) $8^{\log_2 5}$; c) $\left(\frac{1}{10}\right)^{\log 81}$; d) $5^{\log_{25} 16}$.

Lời giải

a) $\log_{0,5} 0,25 = \log_{0,5} 0,5^2 = 2$.

b) $8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^3 = 5^3 = 125$.

c) $\left(\frac{1}{10}\right)^{\log 81} = (10^{-1})^{\log 81} = (10^{\log 81})^{-1} = 81^{-1} = \frac{1}{81}$.

d) $5^{\log_{25} 16} = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{25} 16} = (25^{\log_{25} 16})^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$.

Ví dụ 2: Cho $\log_a b = 2$. Tính:

a) $\log_a (a^2 b^3)$; b) $\log_a \frac{a\sqrt{a}}{b^3\sqrt{b}}$; c) $\log_a (2b) + \log_a \left(\frac{b^2}{2}\right)$.

Lời giải

a) $\log_a (a^2 b^3) = \log_a a^2 + \log_a b^3 = 2 + 3\log_a b = 2 + 3 \cdot 2 = 8$.

b) $\log_a \frac{a\sqrt{a}}{b^3\sqrt{b}} = \log_a a^{\frac{3}{2}} - \log_a b^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{4}{3}\log_a b = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} \cdot 2 = -\frac{7}{6}$.

c) $\log_a (2b) + \log_a \left(\frac{b^2}{2}\right) = \log_a 2 + \log_a b + \log_a b^2 - \log_a 2 = 3\log_a b = 3 \cdot 2 = 6$.

Vấn đề 2. Ứng dụng

Ví dụ 3. Trong nuôi trồng thủy sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khỏe và sự phát triển của thủy sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[H^+]$ (mol L⁻¹) trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $[H^+] = 8 \cdot 10^{-8}$ (Nguồn: <https://nongnghiep.farmvina.com>). Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không? Biết $pH = -\log[H^+]$.

Lời giải

Độ pH của đầm đó là: $pH = -\log[H^+] = -\log(8 \cdot 10^{-8}) \approx 7,097$.

Do $7,097 < 7,2$ nên đầm đó không thích hợp cho tôm sú phát triển.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Tính:

a) $\log_{12} 12^3$; b) $\log_{0,5} 0,25$; c) $\log_a a^{-3} (a > 0, a \neq 1)$.

Lời giải

a) $\log_{12} 12^3 = 3$;
b) $\log_{0,5} 0,25 = \log_{0,5} 0,5^2 = 2$;
c) $\log_a a^{-3} = -3$.

Bài 2. Tính:

a) $8^{\log_2 5}$ b) $\left(\frac{1}{10}\right)^{\log 81}$ c) $5^{\log_{25} 16}$.

Lời giải

a) $8^{\log_2 5} = 2^{3\log_2 5} = 5^3 = 125$
b) $\frac{1}{10}^{\log 81} = 10^{-1 \log 81} = \frac{1}{81}$
c) $5^{\log_{25} 16} = 5^{\log_5 16^{\frac{1}{2}}} = 4$

Bài 3. Cho $\log_a b = 2$. Tính:

a) $\log_a (a^2 b^3)$ b) $\log_a \frac{a\sqrt{a}}{b^3\sqrt{b}}$ c) $\log_a (2b) + \log_a \left(\frac{b^2}{2}\right)$.

Lời giải

a) $\log_a (a^2 b^3) = \log_a a^2 + \log_a b^3 = 2\log_a a + 3\log_a b = 2 + 6 = 8$
b) $\log_a \frac{a\sqrt{a}}{b^3\sqrt{b}} = \log_a a\sqrt{a} - \log_a b^3\sqrt{b} = \log_a a \cdot a^{\frac{1}{2}} - \log_a b \cdot b^{\frac{1}{3}} = \log_a a^{\frac{3}{2}} \cdot \log_a b^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} \cdot 2 = \frac{-7}{6}$
c) $\log_a (2b) + \log_a \left(\frac{b^2}{2}\right) = \log_a \left(2b \cdot \frac{b^2}{2}\right) = \log_a \frac{2b^3}{2} = \log_a b^3 = 3 \cdot 2 = 6$

Bài 4. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a^3 b^2 = 100$. Tính giá trị của biểu thức $P = 3\log a + 2\log b$.

Lời giải

$$P = 3\log a + 2\log b = \log a^3 + \log b^2 = \log (a^3 \cdot b^2) = \log 100 = 2$$

Bài 5. Trong nuôi trồng thủy sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khỏe và sự phát triển của thủy sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[H^+]$ trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $[H^+] = 8 \cdot 10^{-8}$

(Nguồn: <https://nongnghiep.farmvina.com>). Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không?

Lời giải

$$\text{Ta có } pH = -\log[H^+] = -\log 8 \cdot 10^{-8} \approx 7,1$$

=> Độ pH của đầm đó không thích hợp để tôm sú phát triển.

Bài 6. Một vi khuẩn có khối lượng khoảng $5 \cdot 10^{-13}$ gam và cứ 20 phút vi khuẩn đó tự nhân đôi một lần (Nguồn: Câu hỏi và bài tập vi sinh học, NXB ĐHSP, 2008). Giả sử các vi khuẩn được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu và mỗi con vi khuẩn đều tồn tại trong ít nhất 60 giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ khối lượng do tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất (lấy khối lượng của Trái Đất là $6 \cdot 10^{27}$ gam) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Số lượng tế bào đạt tới khối lượng của Trái Đất là:

$$N = 6 \cdot 10^{27} : (5 \cdot 10^{-13}) = 1,2 \cdot 10^{40}$$

Số lần phân chia:

$$N = N_0 \cdot 2^n \Rightarrow n = \frac{\log N - \lg N_0}{\lg 2} = 133$$

Thời gian cần thiết là :

$$133 : 3 = 44,3 \text{ (giờ)}$$

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

17. Cho $a > 0, a \neq 2$. Giá trị của $\log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4} \right)$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. -2.

Lời giải

Chọn B

18. Cho $a > 0, a \neq 1$. Giá trị của $\log_a \sqrt{a\sqrt{a}}$ bằng:

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn C

19. Cho $a > 0$. Giá trị của $\log_2 \left(\frac{8}{a} \right)$ bằng:

- A. $3 - \log_2 a$. B. $4 - \log_2 a$. C. $\frac{3}{\log_2 a}$. D. $8 - \log_2 a$.

Lời giải

Chọn A

20. Nếu $\log_a b = 2, \log_a c = 3$ thì $\log_a (b^2 c^3)$ bằng:

- A. 108. B. 13. C. 31. D. 36.

Lời giải

Chọn B

21. Cho $a > 0$. Giá trị của $\ln(9a) - \ln(3a)$ bằng:

- A. $\ln(6a)$. B. $\ln 6$. C. $\frac{\ln 9}{\ln 3}$. D. $\ln 3$.

Lời giải

Chọn D

22. Cho $a > 0, b > 0$. Mệnh đề đúng là:

- A. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$. B. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$.
C. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b$. D. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b$

Lời giải

Chọn A

23. Cho $a > 0, a \neq 1$ và $b > 0$. Mệnh đề đúng là:

- A. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a b$. B. $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b$.
C. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log_a b$. D. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b$.

Lời giải

Chọn D

24. Nếu $\log_2 3 = a$ thì $\log_6 9$ bằng:

- A. $\frac{a}{a+1}$. B. $\frac{a}{a+2}$. C. $\frac{2a}{a+2}$. D. $\frac{2a}{a+1}$.

Lời giải

Chọn D

25. Nếu $\log_a b = 5$ thì $\log_{a^2 b}(ab^2)$ bằng:

- A. $\frac{11}{7}$. B. 1. C. 4. D. $\frac{26}{7}$.

Lời giải

Chọn A

26. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Khi đó, $\log(a+b)$ bằng:

- A. $\log 9 + \frac{1}{2}(\log a + \log b)$. B. $\log 3 + \frac{1}{2} \log a \cdot \log b$.
C. $\log 3 + \frac{1}{2} \log a + \log b$. D. $\log 3 + \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

Lời giải

Chọn D

27. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy tính:

- a) $\log_{\sqrt{2}} 8$; b) $\log_3 \sqrt[3]{9}$; c) $9^{\log_1 12}$; d) $2^{\log_4 9}$.

Lời giải

- a) 6. b) $\frac{2}{3}$. c) 144. d) 3.

28. Tính:

a) $A = \frac{25^{\log_8 6} + 49^{\log_8 8} - 3}{3^{1+\log_9 4} + 4^{2-\log_2 3} + 5^{\log_{12} 27}}$; b) $B = \frac{36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_2} - 3^{\log_9 36}}{\log_2 (\log_2 \sqrt[4]{2})}$;

c) $C = \log_{\frac{1}{4}} (\log_3 4 \cdot \log_2 3)$; d) $D = \log_4 2 \cdot \log_6 4 \cdot \log_8 6$.

Lời giải

- a) 9. b) -8. c) $-\frac{1}{2}$. d) $\frac{1}{3}$.

29. Cho $\log_a b = 4$. Tính:

a) $\log_a \left(a^{\frac{1}{2}} b^5 \right)$; b) $\log_a \left(\frac{a\sqrt{b}}{b^3\sqrt{a}} \right)$; c) $\log_{a^3b^2} (a^2b^3)$; d) $\log_{a\sqrt{b}} \left(\sqrt[4]{a\sqrt{b}} \right)$.

Lời giải

- a) $\frac{41}{2}$. b) $-\frac{4}{3}$.

c) $\log_{a^3b^2} (a^2b^3) = \frac{\log_a (a^2b^3)}{\log_a (a^3b^2)} = \frac{2+3\log_a b}{3+2\log_a b} = \frac{2+3 \cdot 4}{3+2 \cdot 4} = \frac{14}{11}$.

d) $\frac{9}{28}$.

30. a) Cho $\log_2 3 = a$. Tính $\log_{18} 72$ theo a .

b*) Cho $\log 2 = a$. Tính $\log_{20} 50$ theo a .

Lời giải

$$a) \log_{18} 72 = \frac{2a+3}{2a+1}.$$

b*) Ta có: $1 = \log 10 = \log 2 + \log 5$ nên $\log 5 = 1 - \log 2 = 1 - a$. Khi đó:

$$\log_{20} 50 = \frac{\log 50}{\log 20} = \frac{1 + \log 5}{1 + \log 2} = \frac{2 - a}{a + 1}.$$

31*. Cho $x > 0, y > 0$ thỏa mãn: $x^2 + 4y^2 = 6xy$. Chứng minh rằng:

$$2\log(x+2y) = 1 + \log x + \log y.$$

Lời giải

Ta có: $x^2 + 4y^2 = 6xy \Leftrightarrow (x+2y)^2 = 10xy$.

Suy ra $2\log(x+2y) = \log(x+2y)^2 = \log(10xy) = 1 + \log x + \log y$.

32*. Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương khác 1 và $\log_x a, \log_y b, \log_z c$ theo thứ tự lập thành một cấp

số cộng. Chứng minh rằng: $\log_b y = \frac{2\log_a x \cdot \log_c z}{\log_a x + \log_c z}$

Lời giải

Vì $\log_x a, \log_y b, \log_z c$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên ta có:

$$\begin{aligned} 2\log_y b = \log_x a + \log_z c &\Leftrightarrow 2\log_y b = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_c z} \\ \Leftrightarrow 2\log_y b = \frac{\log_a x + \log_c z}{\log_a x \cdot \log_c z} &\Leftrightarrow \log_b y = \frac{2\log_a x \cdot \log_c z}{\log_a x + \log_c z} \end{aligned}$$

33. Để tính độ tuổi của mẫu vật bằng gỗ, người ta đo độ phóng xạ của $^{14}_6\text{C}$ có trong mẫu vật tại thời điểm t (năm) (so với thời điểm ban đầu $t = 0$), sau đó sử dụng công thức tính độ phóng xạ $H = H_0 e^{-\lambda t}$ (đơn vị là Becquerel, kí hiệu Bq) với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$); $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ, $T = 5730$ (năm) (Nguồn: Vật lí 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2014). Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được độ phóng xạ là 0,215 Bq. Biết độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại là 0,250 Bq. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Gọi t là độ tuổi của mẫu gỗ cổ.

Ta có: $H = H_0 e^{-\lambda t}$ với $H = 0,215$; $H_0 = 0,250$; $\lambda = \frac{\ln 2}{5730}$.

Từ đó, $\lambda t = \ln \frac{H_0}{H} = \ln \frac{0,250}{0,215} \approx 0,1508$. Vậy $t \approx \frac{0,1508}{\lambda} \approx 1247$.

Vậy độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó xấp xỉ 1247 năm.

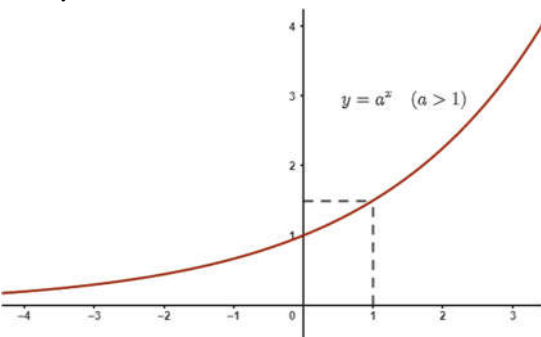
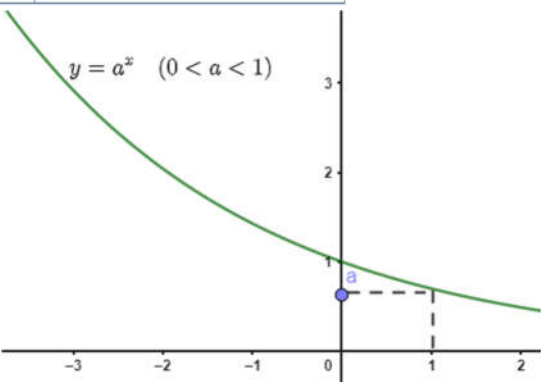
BÀI 3. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số mũ

Cho số thực $a(a > 0, a \neq 1)$. Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a .

Xét hai trường hợp:

$y = a^x (a > 1)$	$y = a^x (0 < a < 1)$																
Tập xác định: $\mathbb{R}$; tập giá trị: $(0; +\infty)$. Tính liên tục m số $y = a^x (a > 1)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Giới hạn đặc biệt $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty.$ Sự biến thiên m số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên <table><tr><th>x</th><th>$-\infty$</th><th>0</th><th>$+\infty$</th></tr><tr><td>$y = a^x$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr></table> Đồ thị 	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$y = a^x$	0	1	$+\infty$	Tập xác định: $\mathbb{R}$; tập giá trị: $(0; +\infty)$. Tính liên tục m số $y = a^x (0 < a < 1)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Giới hạn đặc biệt $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0.$ Sự biến thiên m số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên <table><tr><th>x</th><th>$-\infty$</th><th>0</th><th>$+\infty$</th></tr><tr><td>$y = a^x$</td><td>$+\infty$</td><td>1</td><td>0</td></tr></table> Đồ thị 	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$y = a^x$	$+\infty$	1	0
x	$-\infty$	0	$+\infty$														
$y = a^x$	0	1	$+\infty$														
x	$-\infty$	0	$+\infty$														
$y = a^x$	$+\infty$	1	0														

2. Hàm số lôgarit

Cho số thực $a(a > 0, a \neq 1)$. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a . Xét hai trường hợp:

$y = \log_a x, (a > 1)$	$y = \log_a x, (0 < a < 1)$
1. Tập xác định: $(0; +\infty)$ 2. Sự biến thiên. $y' = \frac{1}{x \ln a} > 0, \forall x > 0$ → hàm số luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$ Giới hạn đặc biệt:	1. Tập xác định: $(0; +\infty)$ 2. Sự biến thiên. $y' = \frac{1}{x \ln a} < 0, \forall x > 0$ → hàm số luôn nghịch biến $(0; +\infty)$ Giới hạn đặc biệt:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty.$$

Tiệm cận: Oy là tiệm cận đứng

3. Bảng biến thiên.

x	0	1	a	$+\infty$
y'		+	+	+
y				

4. Đồ thị

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty.$$

Tiệm cận: Oy là tiệm cận đứng.

3. Bảng biến thiên.

x	0	a	1	$+\infty$
y'		-	-	-
y				

4. Đồ thị

B. CÁC DẠNG TOÁN

Vấn đề 1. Tính chất và đồ thị của hàm số mũ, hàm số lôgarit

Ví dụ 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

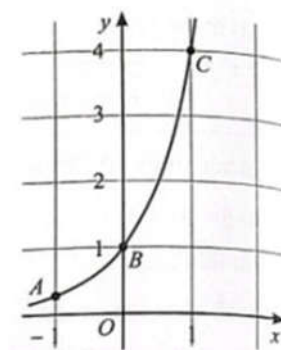
a) $y = 4^x$; b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Lời giải

a) Vì hàm số $y = 4^x$ có cơ số $4 > 1$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = 4^x$	0	1	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = 4^x$ là một đường cong liên nét đi qua các điểm $A\left(-1; \frac{1}{4}\right)$, $B(0; 1)$, $C(1; 4)$ (Hình 1).

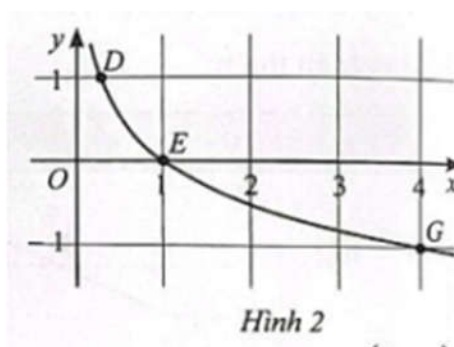


Hình 1

b) Vì hàm số $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ có cơ số $\frac{1}{4} < 1$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = \log_{\frac{1}{4}} x$	$+\infty$	0	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ là một đường cong liền nét đi qua các điểm $D\left(\frac{1}{4}; 1\right)$, $E(1; 0)$, $G(4; -1)$ (Hình 2).



Hình 2

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = 12^x$; b) $y = \log_5(2x - 3)$.

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số $y = 12^x$ là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $y = \log_5(2x - 3)$ xác định khi $2x - 3 > 0$ hay $x > \frac{3}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_5(2x - 3)$ là $D = \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

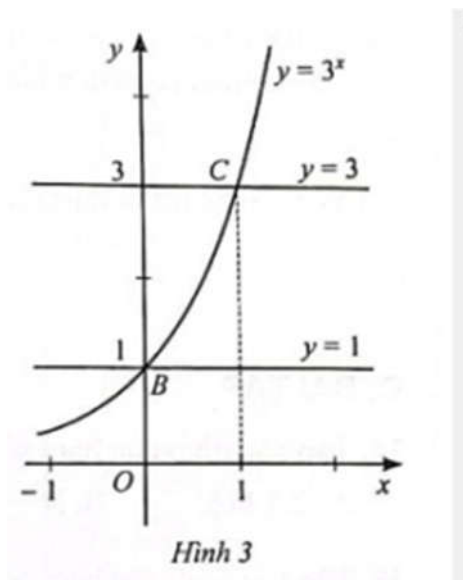
Ví dụ 3. Dựa vào đồ thị hàm số, cho biết với giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = 3^x$:

a) Nằm ở phía trên đường thẳng $y = 3$;

b) Nằm ở phía dưới đường thẳng $y = 1$.

Lời giải

Quan sát Hình 3.



a) Đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị hàm số $y = 3^x$ tại điểm $C(1;3)$.

Dựa vào hình 3, ta thấy đồ thị hàm số $y = 3^x$ nằm ở phía trên đường thẳng $y = 3$ khi $x > 1$.

b) Đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = 3^x$ tại điểm $B(0;1)$.

Dựa vào Hình 3, ta thấy đồ thị hàm số $y = 3^x$ nằm ở phía dưới đường thẳng $y = 1$ khi $x < 0$.

Vấn đề 2. Ứng dụng

Ví dụ 4. Các nhà tâm lý học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c(1 - e^{-kt})$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được.

(Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson).

Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k = 0,2$. Hỏi em học sinh sẽ học được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Sau 2 ngày, em học sinh đó học được số đơn vị kiến thức mới là:

$$f(2) = 25 \cdot (1 - e^{-0,2 \cdot 2}) \approx 8 \text{ đơn vị kiến thức}$$

Sau 8 ngày, em học sinh đó học được số đơn vị kiến thức mới là:

$$f(8) = 25 \cdot (1 - e^{-0,28}) \approx 20 \text{ đơn vị kiến thức}$$

Ví dụ 5. Cô Yên gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6% / năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Yên không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), cô Yên sử dụng công thức

$y = \log_{1,06} \left(\frac{x}{10} \right)$. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng từ tài khoản tiết kiệm đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng sau ít nhất số năm là:

$$y = \log_{1,06} \left(\frac{15}{10} \right) \approx 7 \text{ (năm)}.$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

a) $y = 4^x$;

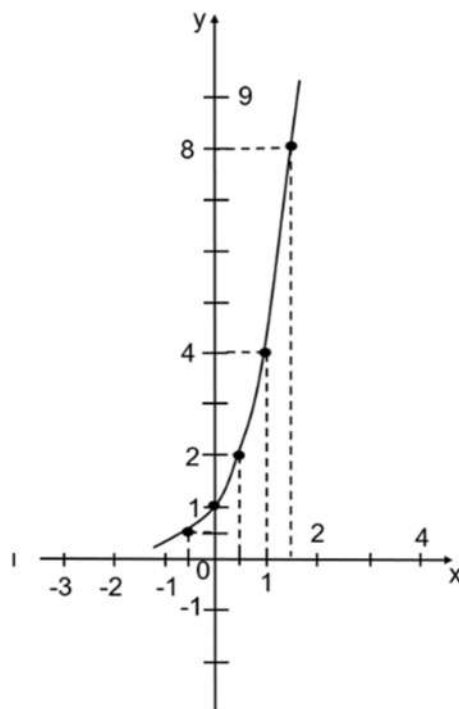
b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Lời giải

a) Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = 4^x$		1	$+\infty$

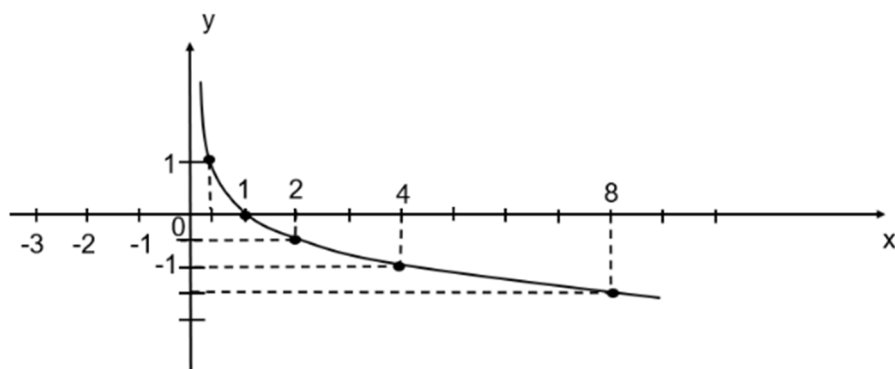
Đồ thị hàm số $y = 4^x$ là đường thẳng đi qua $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), B(0;1), C(1;4), D\left(\frac{1}{2}; 2\right), E\left(\frac{3}{2}; 8\right)$.



b) Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = \log_{\frac{1}{4}} x$	$+\infty$	0	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ là đường thẳng đi qua $A\left(\frac{1}{4}; 1\right), B(1; 0), C\left(2; \frac{-1}{2}\right), D(4; -1), E\left(8; \frac{-3}{2}\right)$.



Bài 2. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = 12^x$;

b) $y = \log_5 (2x - 3)$;

c) $y = \log_{\frac{1}{5}} (-x^2 + 4)$.

Lời giải

a) TXĐ: $\mathbb{R}$.

b) TXĐ: $(0; +\infty)$.

c) TXĐ: $(0; +\infty)$.

Bài 3. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến trên khoảng xác định của hàm số đó? Vì sao?

a) $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$

b) $y = \left(\frac{\sqrt[3]{26}}{3}\right)^x$

c) $y = \log_{\pi} x$

d) $y = \log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} x$.

Lời giải

a) $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ vì $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$.

b) $y = \left(\frac{\sqrt[3]{26}}{3}\right)^x$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ vì $\frac{\sqrt[3]{26}}{3} < 1$.

c) $y = \log_{\pi} x$ Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ vì $\pi > 1$.

d) $y = \log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} x$ Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ vì $\frac{\sqrt{15}}{4} < 1$.

Bài 4. Ta coi năm lấy làm mốc để tính dân số của một vùng (hoặc một quốc gia) là năm 0. Khi đó, dân số của quốc gia đó ở năm thứ t là hàm số theo biến t được cho bởi công thức: $S = A \cdot e^{rt}$. Trong đó A là dân số của vùng (hoặc quốc gia) đó ở năm 0 và r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Biết rằng dân số Việt Nam năm 2021 ước tính là 98564407 người và tỉ lệ tăng dân số 0,93%/năm (Nguồn: <https://danso.org/viet-nam>). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm là như nhau tính từ năm 2021, nêu dự đoán dân số Việt Nam năm 2030 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Ta có: $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó:

S là dân số của Việt Nam năm 2030 (cần dự đoán).

A là dân số của Việt Nam năm 2021, đã biết là 98,564,407 người.

r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm, đã biết là 0,93%

t là số năm từ năm 2021 đến năm 2030, tức là $t = 2030 - 2021 = 9$ năm.

Thay các giá trị vào công thức, ta có: $S = 98,564,407 \cdot e^{(0,0093 \cdot 9)}$

Sau khi tính toán, ta có kết quả: $S \approx 107169341$ người.

Vậy dự đoán dân số Việt Nam năm 2030 là khoảng 107 triệu người.

Bài 5. Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c(1 - e^{-kt})$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k = 0,2$. Hỏi em học sinh sẽ nhớ được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày?

Lời giải

Để tính số đơn vị kiến thức học sinh đã học được sau một số ngày nhất định, ta chỉ cần thay giá trị của t vào công thức $f(t) = c(1 - e^{(-k.t)})$, trong đó:

Số đơn vị kiến thức học sinh đã học được sau 2 ngày: Thay $t = 2$ vào công thức $f(t) = c(1 - e^{(-k.t)})$, và biết rằng $f(t) = 25$ (số đơn vị kiến thức đã học được), $k = 0.2$ (tốc độ tiếp thu), ta có:

$$f(2) = c(1 - e^{-kt}) = 25.(1 - e^{-0,2.2}) \approx 8 \text{ (đơn vị)}$$

Trong 8 ngày, em học sinh nhớ được:

$$f(t) = c(1 - e^{-kt}) = 25.(1 - e^{-0,2.8}) \approx 20 \text{ (đơn vị)}$$

Bài 6. Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: $\text{pH} = -\log[H^+]$. Phân tích nồng độ ion hydrogen $[H^+]$ trong hai mẫu nước sông, ta có kết quả sau:

$$\text{Mẫu 1: } [H^+] = 8 \cdot 10^{-7}; \text{ Mẫu 2: } [H^+] = 2 \cdot 10^{-9}.$$

Không dùng máy tính cầm tay, hãy so sánh độ pH của hai mẫu nước trên.

Lời giải

Độ pH của mẫu 1 là:

$$\text{pH} = -\log[8 \cdot 10^{-7}] = -(\log 8 + \log 10^{-7}) = -(\log 8 - 7 \log 10) = 7 - \log 8 = 7 - 3 \log 2$$

Độ pH của mẫu 2 là:

$$\text{pH} = -\log[2 \cdot 10^{-9}] = -(\log 2 + \log 10^{-9}) = 9 - \log 2$$

$$7 < 9$$

Nhận thấy $-3 \log 2 < -\log 2$.
 $\Rightarrow 7 - 3 \log 2 < 9 - \log 2$

Bài 7. Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6% / năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và người đó không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), người đó sử dụng công thức

$y = \log_{1,06} \left(\frac{x}{10} \right)$. Hỏi sau bao nhiêu năm thì người đó có được tổng số tiền cả vốn và lãi là 15 triệu đồng? 20 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

$$\text{Có } y = \log_{1,06} \frac{15}{10} \approx 7$$

Vậy sau ít nhất 7 năm thì cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng từ tài khoản tiết kiệm đó.

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

34. Tập xác định của hàm số $y = 0,2^{x-1}$ là:

- A.** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

35. Tập xác định của hàm số $y = \log_3(2x+1)$ là:

- A.** $\mathbb{R}$. **B.** $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{0\}$. **D.** $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

36. Tập xác định của hàm số $y = \log_5(x^2)$ là:

- A.** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $[0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

37. Trong các hàm số sau, hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ là:

- A.** $y = \log_5 x$. **B.** $y = (\sqrt{3})^x$. **C.** $y = \ln(x^2 - 1)$. **D.** $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

Lời giải

Chọn B

38. Trong các hàm số sau, hàm số nghịch biến trên tập xác định của nó là:

- A.** $y = e^x$. **B.** $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$. **C.** $y = (\sqrt{5})^x$. **D.** $y = (1,2)^x$.

Lời giải

Chọn B

39. Trong các hàm số sau, hàm số đồng biến trên tập xác định của nó là:

- A. $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$. B. $y = \log_{0,5} x$. C. $y = -\log x$. D. $y = \ln x$.

Lời giải

Chọn D

40. Giá trị thực của tham số a để hàm số $y = \log_{2a+3} x$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là:

- A. $a > 1$. B. $a > -1$. C. $a > 0, a \neq 1$. D. $a > -1, a \neq 1$.

Lời giải

Chọn B

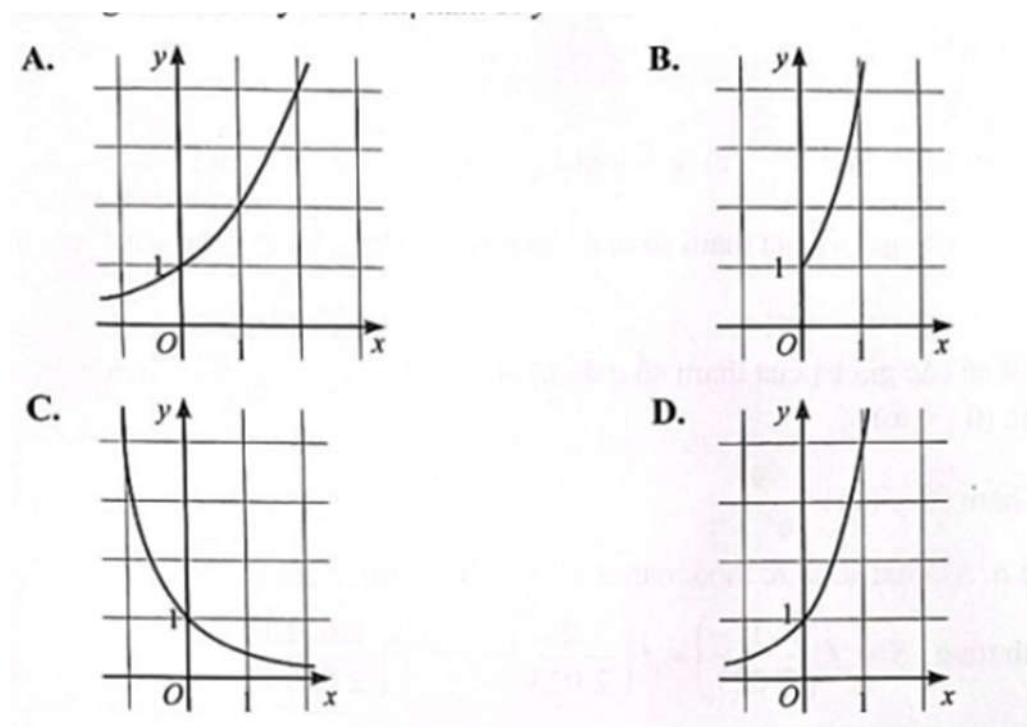
41. Cho $a^{\frac{7}{3}} < a^{\frac{7}{8}}$ và $\log_b(\sqrt{2} + \sqrt{5}) < \log_b(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. $a > 1$ và $b > 1$. B. $0 < a < 1$ và $0 < b < 1$.
C. $0 < a < 1$ và $b > 1$. D. $a > 1$ và $0 < b < 1$.

Lời giải

Chọn B

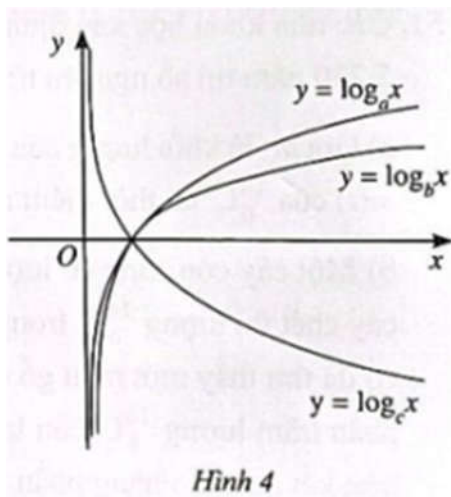
42. Đường nào sau đây là đồ thị hàm số $y = 4^x$?



Lời giải

Chọn D

43. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1 và đồ thị của ba hàm số lôgarit $y = \log_a x, y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ được cho bởi Hình 4. Kết luận nào sau đây là đúng đối với ba số a, b, c ?



A. $c > b > a$.

B. $a > b > c$.

C. $b > a > c$.

D. $c > a > b$.

Lời giải

Chọn C

44. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

a) $y = (\sqrt{2})^x$; b) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$;

c) $y = \log_{\sqrt{3}} x$; d) $y = -\log_2 x$.

Lời giải

45. Dựa vào đồ thị hàm số, cho biết với giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = 0,5^x$:

a) Nằm ở phía trên đường thẳng $y = 1$;

b) Nằm ở phía trên đường thẳng $y = 4$;

c) Nằm ở phía dưới đường thẳng $y = \frac{1}{2}$.

Lời giải

a) $x < 0$. b) $x < -2$. c) $x > 1$.

46. Dựa vào đồ thị hàm số, cho biết với giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = \log_3 x$:

a) Nằm ở phía trên đường thẳng $y = 1$;

b) Nằm ở phía dưới trục hoành.

Lời giải

a) $x > 3$. b) $0 < x < 1$.

47. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-5}$ b) $y = 3^{\frac{x-1}{x+1}}$ c) $y = 1,5^{\sqrt{x+2}}$

d) $y = \log_5(1-5x)$; e) $y = \log(4x^2 - 9)$; g) $y = \ln(x^2 - 4x + 4)$.

Lời giải

a) $\mathbb{R}$. b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. c) $[-2; +\infty)$.

d) $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right)$. e) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. g) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \log_3(4x^2 - 4x + m)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số $y = \log_3(4x^2 - 4x + m)$ xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$4x^2 - 4x + m > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

49. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y = \log_{a^2-2a+1}x$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

Hàm số $y = \log_{a^2-2a+1}x$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$0 < a^2 - 2a + 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < a < 2 \text{ và } a \neq 1.$$

50*. Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$.

a) Với a, b là hai số thực thỏa mãn $a + b = 1$. Tính $f(a) + f(b)$.

b) Tính tổng: $S = f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + \dots + f\left(\frac{2022}{2023}\right)$.

Lời giải

a) Ta có:

$$f(a) + f(b) = \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{9^b}{9^b + 3} = \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{9^{1-a}}{9^{1-a} + 3} = \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{3}{3 + 9^a} = 1.$$

b) Ta thấy: $\frac{1}{2023} + \frac{2022}{2023} = 1, \frac{2}{2023} + \frac{2021}{2023} = 1, \dots$

Theo câu a, ta có: $f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2022}{2023}\right) = 1, f\left(\frac{2}{2023}\right) + f\left(\frac{2021}{2023}\right) = 1, \dots$

Suy ra $S = f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + \dots + f\left(\frac{2022}{2023}\right)$

$$= \left[f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2022}{2023}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{2023}\right) + f\left(\frac{2021}{2023}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{1011}{2023}\right) + f\left(\frac{1012}{2023}\right) \right]$$

$$= 1 + 1 + \dots + 1 = 1011$$

51. Các nhà khoa học xác định được chu kì bán rã của ${}^{14}_6\text{C}$ là 5730 năm, tức là sau 5730 năm thì số nguyên tử ${}^{14}_6\text{C}$ giảm đi một nửa.

a) Gọi m_0 là khối lượng của ${}^{14}_6\text{C}$ tại thời điểm $t = 0$. Viết công thức tính khối lượng $m(t)$ của ${}^{14}_6\text{C}$ tại thời điểm t (năm).

b) Một cây còn sống có lượng ${}^{14}_6\text{C}$ trong cây được duy trì không đổi. Nhưng nếu cây chết thì lượng ${}^{14}_6\text{C}$ trong cây phân rã theo chu kì bán rã của nó. Các nhà khảo cổ đã tìm thấy một mẫu gỗ cổ được xác định chết cách đây 2000 năm. Tính tỉ lệ phần trăm lượng ${}^{14}_6\text{C}$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

$$a) m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}.$$

b) Tỉ lệ phần trăm lượng ${}^{14}_6\text{C}$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng là:

$$\frac{m(2000)}{m_0} \cdot 100\% = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2000}{5730}} \cdot 100\% \approx 78,5\%.$$

52. Mức cường độ âm L (dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$, trong đó I (W / m^2) là cường độ âm. Tai người có thể nghe được âm có cường độ âm từ $10^{-12} \text{ W} / \text{m}^2$ đến $10 \text{ W} / \text{m}^2$. Tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được.

Lời giải

Mức cường độ âm tai người có thể nghe được từ 0 dB đến 130 dB.

BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH MŨ, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình mũ

Phương trình mũ cơ bản ẩn x có dạng $a^x = b (a > 0, a \neq 1)$.

- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

Với $a > 0, a \neq 1$ thì

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b \text{ với } b > 0;$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

2. Phương trình lôgarit

Phương trình lôgarit cơ bản ẩn x có dạng $\log_a x = b (a > 0, a \neq 1)$. Phương trình có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

Với $a > 0, a \neq 1$ thì

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b.$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}.$$

3. Bất phương trình mũ

Xét bất phương trình mũ $a^x > b (a > 0, a \neq 1)$.

- Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$;
- Nếu $b > 0, a > 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$;
- Nếu $b > 0, 0 < a < 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Các bất phương trình mũ cơ bản khác được giải tương tự.

4. Bất phương trình lôgarit

Xét bất phương trình lôgarit $\log_a x > b (a > 0, a \neq 1)$.

- Nếu $a > 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$;
- Nếu $0 < a < 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.

Các bất phương trình lôgarit cơ bản khác được giải tương tự.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Vấn đề 1. Giải phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit

Ví dụ 1: Giải mỗi phương trình sau:

a) $(0,3)^{x-3} = 1$; b) $9^{x-2} = 243^{x+1}$;

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -3$; d) $\log_5(3x-5) = \log_5(2x+1)$.

Lời giải

a) $(0,3)^{x-3} = 1 \Leftrightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

b) $9^{x-2} = 243^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2(x-2)} = 3^{5(x+1)} \Leftrightarrow 2(x-2) = 5(x+1) \Leftrightarrow x = -3$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -3$.

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -3 \Leftrightarrow x+1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x+1 = 8 \Leftrightarrow x = 7$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 7$.

d) $\log_5(3x-5) = \log_5(2x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 = 2x+1 \\ 3x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 6$.

Ví dụ 2. Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $3^x > \frac{1}{243}$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \leq \frac{3}{2}$ c) $4^{x+3} \geq 32^x$;

d) $\log(x-1) < 0$; e) $\log_{\frac{1}{5}}(2x-1) \geq \log_{\frac{1}{5}}(x+3)$; g) $\ln(x+3) \geq \ln(2x-8)$.

Lời giải

a) $3^x > \frac{1}{243} \Leftrightarrow 3^x > 3^{-5} \Leftrightarrow x > -5$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-5; +\infty)$.

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow 3x-7 \geq -1 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[2; +\infty)$.

c) $4^{x+3} \geq 32^x \Leftrightarrow 2^{2(x+3)} \geq 2^{5x} \Leftrightarrow 2(x+3) \geq 5x \Leftrightarrow x \leq 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; 2]$.

d) $\log(x-1) < 0 \Leftrightarrow \log(x-1) < \log 1 \Leftrightarrow 0 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(1; 2)$.

$$e) \log_{\frac{1}{5}}(2x-1) \geq \log_{\frac{1}{5}}(x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \leq x+3 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leq 4.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\frac{1}{2}; 4\right]$.

$$g) \ln(x+3) \geq \ln(2x-8) \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 2x-8 \\ 2x-8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 11 \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x \leq 11.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(4; 11]$.

Vấn đề 2. Ứng dụng

Ví dụ 3. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất là 6% / năm. Để có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì người đó phải gửi ít nhất bao nhiêu năm? Biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt quá trình gửi.

Lời giải

Gọi x là số năm người đó gửi tiền trong ngân hàng.

Số tiền cả gốc và lãi người đó có được sau x năm được tính bởi công thức: $S = 100 \cdot 1,06^x$.

Để có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì

$$100 \cdot 1,06^x > 130 \Leftrightarrow 1,06^x > 1,3 \Leftrightarrow x > \log_{1,06} 1,3. \text{ Suy ra } x > 4,503.$$

Do kì hạn gửi là 12 tháng nên để rút được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì người đó phải gửi ít nhất 5 năm.

Ví dụ 4. Độ pH của đất thích hợp cho trồng hoa hồng là từ 6,5 đến 7. Tính nồng độ của ion hydrogen $[H^+]$ của đất để thích hợp cho trồng hoa hồng.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 6,5 < -\log[H^+] < 7 \Leftrightarrow -7 < \log[H^+] < -6,5 \Leftrightarrow 10^{-7} < [H^+] < 10^{-6,5}.$$

Vậy nồng độ của ion hydrogen $[H^+]$ của đất trong khoảng $(10^{-7}; 10^{-6,5})$ thì thích hợp để trồng hoa hồng.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Giải mỗi phương trình sau:

a) $(0,3)^{x-3} = 1$.

b) $5^{3x-2} = 25$.

c) $9^{x-2} = 243^{x+1}$.

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -3$.

e) $\log_5(3x-5) = \log_5(2x+1)$.

g) $\log_{\frac{1}{7}}(x+9) = \log_{\frac{1}{7}}(2x-1)$.

Lời giải

a) $(0,3)^{x-3} = 1 \Leftrightarrow (0,3)^{x-3} = (0,3)^0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

b) $5^{3x-2} = 25 \Leftrightarrow 5^{3x-2} = 5^2 \Leftrightarrow 3x-2 = 2 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

c) $9^{x-2} = 243^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2(x-2)} = 3^{5(x+1)} \Leftrightarrow 2x-4 = 5x+5 \Leftrightarrow -3x = 9 \Leftrightarrow x = -3$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -3$

ĐKXĐ: $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -3 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = \log_{\frac{1}{2}}(8) \Leftrightarrow x+1 = 8 \Leftrightarrow x = 7$.

e) $\log_5(3x-5) = \log_5(2x+1)$

ĐKXĐ: $x > \frac{5}{3}$

$\log_5(3x-5) = \log_5(2x+1) \Leftrightarrow 3x-5 = 2x+1 \Leftrightarrow x = 6$

g) $\log_{\frac{1}{7}}(x+9) = \log_{\frac{1}{7}}(2x-1)$

ĐKXĐ: $x > \frac{1}{2}$

$\log_{\frac{1}{7}}(x+9) = \log_{\frac{1}{7}}(2x-1) \Leftrightarrow x+9 = 2x-1 \Leftrightarrow x = 10$

Bài 2. Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $3^x > \frac{1}{243}$;

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \leq \frac{3}{2}$;

c) $4^{x+3} \geq 32^x$;

d) $\log(x-1) < 0$;

e) $\log_{\frac{1}{5}(2x-1)} \geq \log_{\frac{1}{5}}(x+3)$;

g) $\ln(x+3) \geq \ln(2x-8)$.

Lời giải

a) $3^x > \frac{1}{243} \Leftrightarrow 3^x > 3^{-5} \Leftrightarrow x > -5$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3x-7 \geq -1 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 2$

c) $4^{x+3} \geq 32^x \Leftrightarrow 2^{2(x+3)} \geq 2^{5x} \Leftrightarrow 2x+6 \geq 5x \Leftrightarrow -3x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 2$

d) $\log(x-1) < 0$

ĐKXĐ: $x > 1$

$$\log(x-1) < 0 \Leftrightarrow \log(x-1) < \log(1) \Leftrightarrow x-1 < 1 \Leftrightarrow x < 2$$

Kết hợp với ĐKXĐ: $1 < x < 2$

e) $\log_{\frac{1}{5}}(2x-1) \geq \log_{\frac{1}{5}}(x+3)$

ĐKXĐ: $x > \frac{1}{2}$

$$\log_{\frac{1}{5}}(2x-1) \geq \log_{\frac{1}{5}}(x+3) \Leftrightarrow 2x-1 \leq x+3 \Leftrightarrow x \leq 4$$

Kết hợp với ĐKXĐ $\Rightarrow \frac{1}{2} < x \leq 4$

g) $\ln(x+3) \geq \ln(2x-8)$

ĐKXĐ: $x > 3$

$$\ln(x+3) \geq \ln(2x-8) \Leftrightarrow x+3 \geq 2x-8 \Leftrightarrow x \leq 11$$

Kết hợp với ĐKXĐ $\Rightarrow 3 < x \leq 11$

Bài 3. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất $x\% / \text{năm}$ ($x > 0$). Sau 3 năm, người đó rút được cả gốc và lãi là 119,1016 triệu đồng. Tìm x , biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt quá trình gửi.

Lời giải

Ta có công thức: $100 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^3 = 119,1016 \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{100} = 1,06 \Leftrightarrow \frac{x}{100} = 0,06 \Leftrightarrow x = 6.$

Bài 4. Sử dụng công thức tính mức cường độ âm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được, biết rằng tai người có thể nghe được âm với cường độ âm từ $10^{-12} \text{ W} / \text{m}^2$ đến $10 \text{ W} / \text{m}^2$.

Lời giải

$$L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \Leftrightarrow 130 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{I}{10^{-12}} = 13 \Leftrightarrow \log \frac{I}{10^{-12}} = \log 1 \cdot 10^{13}$$

$$\Leftrightarrow \frac{I}{10^{-12}} = 1 \cdot 10^{13}$$

$$\Leftrightarrow I = 10$$

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

53. Nghiệm của phương trình $2^{x-1} = 8$ là:

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

54. Nghiệm của phương trình $2^x = 5$ là:

A. $x = \sqrt{5}$.

B. $x = \frac{5}{2}$.

C. $x = \log_2 5$.

D. $x = \log_5 2$.

Lời giải

Chọn C

55. Nghiệm của phương trình $9^{2x+1} = 27^{x-3}$ là:

A. $x = -9$.

B. $x = 11$.

C. $x = 9$.

D. $x = -11$.

Lời giải

Chọn D

56. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-5) = 4$ là:

A. $x = 21$.

B. $x = 9$.

C. $x = 13$.

D. $x = 7$.

Lời giải

Chọn A

57. Nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = -2$ là:

A. $x = 2$.

B. $x = 5$.

C. $x = \frac{5}{2}$.

D. $x = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

58. Số nghiệm của phương trình $\log(x^2 - 7x + 12) = \log(2x - 8)$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

59. Nghiệm của bất phương trình $2^x < 5$ là:

A. $x > \log_2 5$.

B. $x < \log_5 2$.

C. $x < \log_2 5$.

D. $x > \log_5 2$.

Lời giải

Chọn C

60. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,2}(x+1) > -3$ là:

A. $(-1; 124)$.

B. $(124; +\infty)$.

C. $\left(-1; -\frac{26}{27}\right)$.

D. $(-\infty; 124)$.

Lời giải

Chọn A

61. Giải mỗi phương trình sau:

a) $3^{x-1} = 5$; b) $3^{x^2-4x+5} = 9$; d) $8^{x-2} = 4^{1-2x}$;
e) $2^{x^2-3x-2} = 0,25 \cdot 16^{x-3}$; c) $2^{2x+3} = 8\sqrt{2}$; g) $2^{x^2-4x+4} = 3$

Lời giải

a) $x = 1 + \log_3 5$. b) $x = 1$ hoặc $x = 3$. c) $x = \frac{1}{4}$.
d) $x = \frac{8}{7}$. e) $x = 3$ hoặc $x = 4$. g) $x = 2 \pm \sqrt{\log_2 3}$.

62. Giải mỗi phương trình sau:

a) $\log_4(x-4) = -2$; b) $\log_3(x^2 + 2x) = 1$; c) $\log_{25}(x^2 - 4) = \frac{1}{2}$;
d) $\log_9[(2x-1)^2] = 2$; e) $\log(x^2 - 2x) = \log(2x-3)$ g) $\log_2(x) + \log_1(2x+8) = 0$.

Lời giải

a) $x = \frac{65}{16}$. b) $x = -3$ hoặc $x = 1$. c) $x = -3$ hoặc $x = 3$.
d) $x = -4$ hoặc $x = 5$. e) $x = 3$. g) $x = -2$ hoặc $x = 4$.

63. Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $(0,2)^{2x+1} > 1$; b) $27^2 \leq \frac{1}{9}$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5x+4} \geq 4$;
d) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} < 125^{2x}$; e) $(\sqrt{2}-1)^{3x-2} < (\sqrt{2}+1)^{4-x}$; g) $(0,5)^{2x^2-x} > (\sqrt{2})^{4x-12}$.

Lời giải

a) $x < -\frac{1}{2}$. b) $x \leq -\frac{1}{3}$. c) $2 \leq x \leq 3$.
d) $x > -\frac{1}{4}$. e) $x > -1$. g) $-2 < x < \frac{3}{2}$.

64. Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-6) < -3$; b) $\log_3(x^2 - 2x + 2) > 0$; c) $\log_4(2x^2 + 3x) \geq \frac{1}{2}$;
d) $\log_{0,5}(x-1) \geq \log_{0,5}(5-2x)$; e) $\log(x^2 + 1) \leq \log(x+3)$;
g) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 8) + \log_5(x-4) > 0$.

Lời giải

a) $x > 7$. b) $x \neq 1$. c) $x \leq -2$ hoặc $x \geq \frac{1}{2}$.

d) $1 < x \leq 2$. e) $-1 \leq x \leq 2$. g) Vô nghiệm

65. Người ta nuôi cấy vi khuẩn *Bacillus subtilis* trong nồi lên men và thu được số liệu sau: Lúc ban đầu, số tế bào/1 ml dịch nuôi là $2 \cdot 10^2$. Sau 13 giờ, số tế bào/1 ml dịch nuôi là $3,33 \cdot 10^9$. Biết vi khuẩn *Bacillus subtilis* sinh trưởng trong điều kiện hoàn toàn tối ưu và sinh sản theo hình thức tự nhân đôi. Hỏi sau bao nhiêu phút, vi khuẩn *Bacillus subtilis* tự nhân đôi một lần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Gọi T (phút) là thời gian để vi khuẩn *Bacillus subtilis* tự nhân đôi một lần. Theo giả thiết, ta có:

$$3,33 \cdot 10^9 = 2 \cdot 10^2 \cdot 2^{\frac{13 \cdot 60}{T}} \Leftrightarrow \frac{13 \cdot 60}{T} = \log_2(1,665 \cdot 10^7).$$

Suy ra $T \approx 33$ phút.

66. Tốc độ của gió S (dặm/giờ) gần tâm của một cơn lốc xoáy được tính bởi công thức: $S = 93 \log d + 65$, trong đó d (dặm) là quãng đường cơn lốc xoáy đó di chuyển được.

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Tính quãng đường cơn lốc xoáy đã di chuyển được, biết tốc độ của gió ở gần tâm bằng 140 dặm/giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

6,4 dặm.

67. Dân số thành phố Hà Nội năm 2022 khoảng 8,4 triệu người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Hà Nội không đổi và bằng $r = 1,04\%$. Biết rằng, sau t năm dân số Hà Nội (tính từ mốc năm 2022) ước tính theo công thức: $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là dân số năm lấy làm mốc. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số của Hà Nội vượt quá 10 triệu người?

Lời giải

$$\text{Ta có: } 8,4e^{0,0104t} > 10 \Leftrightarrow t > \frac{\ln 10 - \ln 8,4}{0,0104}.$$

Suy ra $t > 16,764$.

Vậy sau khoảng 17 năm tính từ mốc năm 2022, tức là từ năm 2039 thì dân số Hà Nội vượt quá 10 triệu người.

68. Mức cường độ âm L (dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$, trong đó I (W / m^2) là cường độ âm. Để đảm bảo sức khỏe cho công nhân, mức cường độ âm trong một nhà máy phải giữ sao cho không vượt quá 85 dB. Hỏi cường độ âm của nhà máy đó phải thỏa mãn điều kiện nào để đảm bảo sức khỏe cho công nhân?

Lời giải

Cường độ âm của nhà máy đó không vượt quá $10^{-3,5}$ (W / m^2).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

PHẦN 1: BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Câu 1: Điều kiện xác định của x^{-3} là:

A. $x \in \mathbb{R}$.

B. $x \geq 0$.

C. $x \neq 0$.

D. $x > 0$.

Lời giải

Chọn C

Câu 2: Điều kiện xác định của $x^{\frac{3}{5}}$ là:

A. $x \in \mathbb{R}$.

B. $x \geq 0$.

C. $x \neq 0$.

D. $x > 0$.

Lời giải

Chọn A

Câu 3: Tập xác định của hàm số $y = \log_{0,5}(x^2 - 2x + 1)$ là:

A. $\mathbb{R}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$$y = \log_{0,5}(2x - x^2)$$

$$\Rightarrow 2x - x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < 2$$

Câu 4: Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = (0,5)^x$.

B. $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

C. $y = (\sqrt{2})^x$.

D. $y = \left(\frac{e}{\pi}\right)^x$.

Lời giải

Chọn C

Câu 5: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \log_3 x$.

B. $y = \log_{\sqrt{3}} x$.

C. $y = \log_{\frac{1}{e}} x$.

D. $\log_{\pi} x$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Vì } 0 < \frac{1}{e} < 1.$$

Câu 6: Nếu $3^x = 5$ thì 3^{2x} bằng:

A. 15.

B. 125.

C. 10.

D. 25.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Vì } 3^x = 5 \Rightarrow x = \log_3 5 \Rightarrow 3^{2x} = 3^{2\log_3 5} \Rightarrow x = 25$$

Câu 7: Cho $A = 4^{\log_2 3}$. Khi đó giá trị của A bằng:

A. 9.

B. 6.

C. $\sqrt{3}$.

D. 81.

Lời giải

Chọn A

Câu 8: Nếu $\log_a b = 3$ thì $\log_a b^2$ bằng:

- A.** 9. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Vi } \log_a b^2 = 2\log_a b = 2.3 = 6.$$

Câu 9: Nghiệm của phương trình $3^{2x-5} = 27$ là:

- A.** 1. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

$$3^{2x-5} = 27 \Leftrightarrow 2x-5=3 \Leftrightarrow x=4$$

Câu 10: Nghiệm của phương trình $\log_{0,5}(2-x) = -1$ là:

- A.** 0. **B.** 2,5. **C.** 1,5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$$\log_{0,5}(2-x) = -1 \Leftrightarrow \log_{0,5}(2-x) = \log_{0,5}(2) \Leftrightarrow 2-x = 2 \Leftrightarrow x = 0$$

Câu 11: Tập nghiệm của bất phương trình $(0,2)^x > 1$ là:

- A.** $(-\infty; 0, 2)$. **B.** $(0, 2; +\infty)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{4}} x > -2$ là:

- A.** $(-\infty; 16)$. **B.** $(16; +\infty)$. **C.** $(0; 16)$. **D.** $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn C

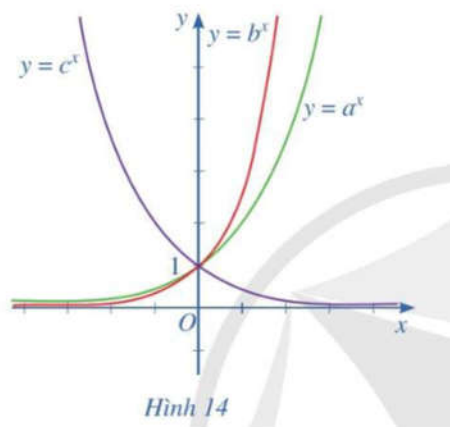
$$\log_{\frac{1}{4}} x > -2 \quad \exists K \exists \mathfrak{D} : x > 0$$

$$\log_{\frac{1}{4}} x > -2 \Leftrightarrow x < \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \Leftrightarrow x < 16$$

Kết hợp với ĐKXD $\Rightarrow 0 < x < 16$.

Câu 13: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1 và đồ thị ba hàm số mũ $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho bởi hình 14. Kết luận nào sau đây là đúng đối với ba số a, b, c ?

- A.** $c < a < b$. **B.** $c < b < a$. **C.** $a < b < c$. **D.** $b < c < a$.



Hình 14

Lời giải

Chọn A

Nhận thấy $y = c^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow 0 < c < 1$ $y = a^x; y = b^x$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow a, b > 1$.

Cho cùng giá trị của $x = x_0$ ta thấy $a^{x_0} < b^{x_0}$.

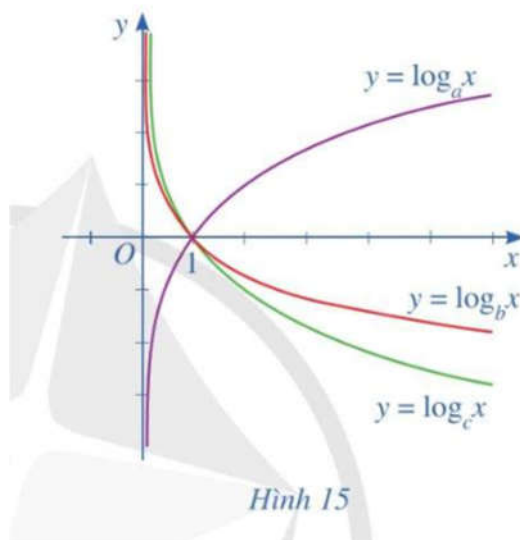
Câu 14: Cho ba thực dương a, b, c khác 1 và đồ thị ba hàm số logarit $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$ được cho bởi hình 15. Kết luận nào sau đây là đúng với ba số a, b, c

A. $c < a < b$.

B. $c < b < a$.

C. $a < b < c$.

D. $b < c < a$.



Hình 15

Lời giải

Chọn D

Nhận thấy $y = \log_a x$ đồng biến nên $a > 1$.

$y = \log_b x, y = \log_c x$ nghịch biến nên $0 < b, c < 1$.

Nhận thấy $b < c \Rightarrow b < c < a$.

Câu 15: Viết các biểu thức sau về lũy thừa cơ số a

a) $A = \sqrt[3]{5\sqrt{\frac{1}{5}}} \quad \forall a = 5.$

b) $B = \frac{4\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{4}} \quad \forall a = \sqrt{2}.$

Lời giải

$$\text{a) } A = \sqrt[3]{5\sqrt{\frac{1}{5}}} = \sqrt[3]{5\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{5 \cdot 5^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{5^{\frac{1}{2}}} = 5^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{6}}$$

$$\text{b) Có } a = \sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 2$$

$$B = \frac{4\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{11}{5}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{11}{5}}}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{22}{5}}}{a^{\frac{4}{3}}} = a^{\frac{46}{15}}$$

Câu 16: Cho x, y là các số thực dương. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{x^{\frac{5}{4}} \cdot y + x \cdot y^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}; B = \left(\sqrt[7]{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt[5]{\frac{y}{x}} \right)^{\frac{35}{4}}.$$

Lời giải

$$\text{a) } A = \frac{x^{\frac{5}{4}} \cdot y + x \cdot y^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}} = \frac{x^{\frac{1}{4}} \cdot x \cdot y + x \cdot y \cdot y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}} = \frac{xy \left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} \right)}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}} = xy$$

$$\text{b) } B = \left(\sqrt[7]{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt[5]{\frac{y}{x}} \right)^{\frac{95}{4}} = \left(\sqrt[7]{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{x}{y} \right)^{-\frac{1}{5}} \right)^{\frac{25}{4}} = \left(\sqrt[7]{\left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{4}{5}}} \right)^{\frac{35}{4}} = \left(\left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{4}{35}} \right)^{\frac{35}{4}} = \frac{x}{y}$$

Câu 17: Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

$$\text{a) } y = \frac{5}{2^x - 3}; \text{ b) } y = \sqrt{25 - 5^x};$$

$$\text{c) } y = \frac{x}{1 - \ln x}; \text{ d) } y = \sqrt{1 - \log_3 x}.$$

Lời giải

$$\text{a) } y = \frac{5}{2^x - 3}$$

$$\text{ĐKXĐ: } 2^x - 3 \neq 0 \Rightarrow 2^x \neq 3 \Rightarrow x \neq \log_2 3 \Rightarrow \text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \log_2 3$$

$$\text{b) } y = \sqrt{25 - 5^x}$$

$$\text{ĐKXĐ: } 25 - 5^x \geq 0 \Rightarrow 5^x \leq 5^2 \Rightarrow x \leq 2$$

$$\text{TXĐ: } D = (-\infty; 2]$$

$$c) y = \frac{x}{1 - \ln x}$$

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x > 0 \\ 1 - \ln x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e \end{cases}$$

$$D = (0; +\infty) \setminus e$$

$$d) y = \sqrt{1 - \log_3 x}$$

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x > 0 \\ 1 - \log_3 x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

Câu 18: Cho $a > 0, a \neq 1$ và $a^{\frac{3}{5}} = b$

a) Viết $a^6; a^3b; \frac{a^9}{b^9}$ theo lũy thừa cơ số b .

b) Tính: $\log_a b; \log_a (a^2 b^5); \log_{\sqrt[5]{a}} \left(\frac{a}{b} \right)$.

Lời giải

$$a) a^6 = \left(a^{\frac{3}{5}} \right)^{10} = b^{10}; \quad a^3 b = \left(a^{\frac{3}{5}} \right)^5 \cdot b = b^5 \cdot b = b^6; \quad \frac{a^9}{b^9} = \frac{\left(a^{\frac{3}{5}} \right)^{15}}{b^9} = \frac{b^{15}}{b^9} = b^6$$

$$b) \log_a b = \frac{3}{5}$$

$$\log_a a^2 b^5 = \log_a a^2 + \log_a b^5 = 2\log_a a + 5\log_a b = 2 + 5 \cdot \frac{3}{5} = 5$$

$$\log_{\sqrt[5]{a}} \left(\frac{a}{b} \right) = \log_{\sqrt[5]{a}} a - \log_{\sqrt[5]{a}} b = 5\log_a a - 5\log_a b = 5 - 5 \cdot \frac{3}{5} = 2$$

Câu 19: Giải mỗi phương trình sau:

$$a) 3^{x^2 - 4x + 5} = 9; \quad b) 0,5^{2x - 4} = 4;$$

$$c) \log_3 (2x - 1) = 3; \quad d) \log x + \log (x - 3) = 1.$$

Lời giải

$$a) 3^{x^2 - 4x + 5} = 9 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$b) 0,5^{2x - 4} = 4 \Leftrightarrow 2x - 4 = \log_{0,5} 4 \Leftrightarrow 2x - 4 = -2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

$$c) \log_3 (2x - 1) = 3 \Leftrightarrow \log_3 (2x - 1) = \log_3 27 \Leftrightarrow 2x - 1 = 27 \Leftrightarrow x = 14$$

$$d) \log x + \log (x - 3) = 1, \text{ ĐKXĐ: } x > 3$$

$$\begin{aligned}\log x + \log(x-3) &= 1 \Leftrightarrow \log(x^2 - 3x) = \log 10 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x &= 10 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \text{ (không t/m đkxđ)} \end{cases} \\ \Rightarrow x &= 5\end{aligned}$$

Câu 20: Giải mỗi bất phương trình sau:

- a) $5^x < 0,125$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq 3$;
c) $\log_{0,3} x > 0$; d) $\ln(x+4) > \ln(2x-3)$.

Lời giải

a) $5^x < 0,125 \Leftrightarrow x < \log_5 0,125$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq 3 \Leftrightarrow 2x+1 \leq \log_{\frac{1}{3}} 3 \Leftrightarrow 2x+1 \leq -1 \Leftrightarrow x \leq -1$

c) $\log_{0,3} x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

d) $\ln(x+4) > \ln(2x-3)$, ĐKXĐ: $x > \frac{3}{2}$

$\ln(x+4) > \ln(2x-3) \Leftrightarrow x+4 > 2x-3 \Leftrightarrow x < 7$

Kết hợp vs ĐKXĐ: $\frac{3}{2} < x < 7$.

Câu 21: Trong một trận động đất, năng lượng giải tỏa E (đơn vị: Jun, kí hiệu J) tại tâm địa chấn ở M độ Richter được xác định xấp xỉ bởi công thức: $\log E \approx 11,4 + 1,5M$.

(Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021).

- a) Tính xấp xỉ năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter.
b) Năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 8 độ Richter gấp khoảng bao nhiêu lần năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter?

Lời giải

a) Tính xấp xỉ năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter:

Thay $M = 5$ vào công thức, ta có: $\log E \approx 11,4 + 1,5 \cdot 5 \approx 18,9 \Rightarrow E \approx 10^{18,9}$

b) Tính tỷ lệ năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 8 độ Richter so với tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter:

$\log E \approx 11,4 + 1,5 \cdot 8 \approx 23,4 \Rightarrow E \approx 10^{23,4} \Rightarrow$ Gấp khoảng 31623 lần.

Câu 22: Trong cây cối có chất phóng xạ $^{14}_6C$. Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được phóng xạ của nó bằng 86% độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó. Biết chu kì bán rã của $^{14}_6C$ là $T = 5730$ năm, độ phóng xạ của chất phóng xạ tại thời điểm t

được cho bởi công thức $H = H_0 e^{-\lambda t}$ với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$);

$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ (Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021).

Lời giải

Từ đó, ta có thể tính được hằng số phóng xạ: $\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{5,730} \approx 0.12$

Giờ ta cần tìm thời gian t mà đã trôi qua từ thời điểm mẫu gỗ cổ được sinh ra đến thời điểm hiện tại. Để tìm thời gian này, ta sử dụng tỷ lệ phóng xạ giữa mẫu gỗ cổ và mẫu gỗ tươi cùng loại:

$$\frac{H}{H_0} = 0.86 = e^{-\lambda t} \Rightarrow t = \frac{\ln 0.86}{-\lambda} \approx 3,078 \text{ năm}$$

Vậy độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó là khoảng 3,078 năm.

PHẦN 2: BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

69. Nếu $a^{\frac{3}{4}} < a^{\frac{4}{5}}$ thì:

- A. $a < 1$. B. $0 < a < 1$. C. $a < 0$. D. $a > 1$.

Lời giải

Chọn D

70. Nếu $2^x = 3$ thì 4^x bằng:

- A. 6. B. 9. C. 12. D. 8.

Lời giải

Chọn B

71. Nếu $\sqrt[6]{x} = a$ thì $\sqrt{x}$ bằng:

- A. $\sqrt[3]{a}$. B. $\sqrt[4]{a}$. C. a^3 . D. a^4 .

Lời giải

Chọn C

72. Rút gọn biểu thức $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$ với $x \geq 0$ nhận được:

- A. $\sqrt[6]{x}$. B. $x^{\frac{1}{5}}$. C. $\sqrt[5]{x}$. D. $x^{\frac{1}{6}}$.

Lời giải

Chọn A

73. Tập xác định của hàm số $y = (\sqrt{2})^{x+2}$ là:

- A. $(-2; +\infty)$. B. $\mathbb{R}$. C. $(-2; +\infty) \setminus \{-1\}$. D. $\mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn B

74. Tập xác định của hàm số $y = \log_2(x-1)$ là:

- A. $[1; +\infty)$. B. $(1; +\infty) \setminus \{2\}$. C. $(1; +\infty)$. D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

75. Giá trị của $\log_2 9 - \log_2 36$ bằng:

- A. 2. B. 4. C. -4. D. -2.

Lời giải

Chọn D

76. Nếu $\log_4 \sqrt{a} = 16$ thì $\log_4 a$ bằng:

- A. 32. B. 256. C. 8. D. 4.

Lời giải

Chọn A

77. Nếu $\log 2 = a$ thì $\log 4000$ bằng:

- A. $2a + 3$. B. $3a^2$. C. $\frac{1}{2}a + 3$. D. $a^2 + 3$.

Lời giải

Chọn A

78. Nếu $\log_{12} 6 = a$ thì $\log_2 6$ bằng:

- A. $\frac{a}{1+a}$. B. $\frac{2a}{1-a}$. C. $\frac{a}{1-a}$. D. $\frac{2a}{1+a}$.

Lời giải

Chọn C

79. Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

- A. $y = \left(\frac{e}{\pi}\right)^x$. B. $y = (\sqrt{3})^x$. C. $y = \log_{0,3} x$. D. $y = -\log_2 x$.

Lời giải

Chọn B

80. Nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 1$ là:

- A. $x = 1$. B. $x = 0$. C. $x = 2$. D. $x = -1$.

Lời giải

Chọn A

81. Nghiệm của phương trình $0,5^x = (\sqrt{2})^{x+3}$ là:

- A. $x = 3$. B. $x = 1$. C. $x = -3$. D. $x = -1$.

Lời giải

Chọn D

82. Nghiệm của phương trình $\log_1 x = -2$ là:

- A. $x = -\frac{1}{9}$. B. $x = \frac{1}{9}$. C. $x = 9$. D. $x = -9$.

Lời giải

Chọn C

83. Nghiệm của phương trình $\log_5 (2x-3) - \log_{\frac{1}{5}} (2x-3) = 0$ là:

- A. $x = \frac{3}{2}$. B. $x = 8$. C. $x = 2$. D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn C

84. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}} > 1$ là:

- A. $(0; +\infty)$. B. $[0; +\infty)$. C. $\mathbb{R}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải

Chọn A

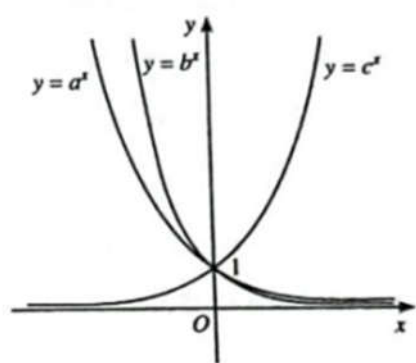
85. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 (3x-1) < 3$ là:

- A. $(-\infty; 3)$. B. $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$. C. $\left(-\infty; \frac{10}{3}\right)$. D. $\left(\frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

86. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1 và đồ thị của ba hàm số mũ $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho bởi Hình 5. Kết luận nào sau đây là đúng đối với ba số a, b, c ?



Hình 5

- A. $c < a < b$. B. $c < b < a$. C. $a < b < c$. D. $b < a < c$.

Lời giải

Chọn D

87. Cho a là số thực dương. Viết các biểu thức sau về lũy thừa cơ số a :

a) $a^{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{3}-1}$; b) $\left(a^{\sqrt{5}}\right)^{2\sqrt{5}}$;

c) $\left(\frac{1}{a}\right)^{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{a^{4\sqrt{2}}}$ d) $a^n \cdot \sqrt[3]{a^3 : a^{6n}}$.

Lời giải

a) a . b) a^{10} . c) $a^{-\sqrt{2}}$. d) a^{1-n} .

88. Cho x, y là các số thực dương khác 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{x^{3\sqrt{3}} - 1}{x^{\sqrt{3}} - 1} - \frac{x^{2\sqrt{3}} + x^{\sqrt{3}}}{x^{\sqrt{3}}}$; b) $B = \frac{x^{2\sqrt{2}} - y^{2\sqrt{3}}}{(x^{\sqrt{2}} - y^{\sqrt{3}})^2} + 1$.

Lời giải

a) $A = \frac{(x^{\sqrt{3}})^3 - 1}{x^{\sqrt{3}} - 1} - \frac{x^{\sqrt{3}}(x^{\sqrt{3}} + 1)}{x^{\sqrt{3}}} = x^{2\sqrt{3}} + x^{\sqrt{3}} + 1 - (x^{\sqrt{3}} + 1) = x^{2\sqrt{3}}$.

b) $B = \frac{2x^{\sqrt{2}}}{x^{\sqrt{2}} - y^{\sqrt{3}}}$.

89. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2^x - 3}{2^x + 3}$; b) $y = \sqrt{3^x - 1}$;

c) $y = \frac{\log_2 x}{3 - \log_2 x}$; d) $y = \frac{1}{\sqrt{\log_{0,2} x + 2}}$.

Lời giải

a) $\mathbb{R}$. b) $[0; +\infty)$. c) $(0; +\infty) \setminus \{8\}$. d) $(0; 25)$.

90. Cho $b > 0$ và $b^{\frac{2}{3}} = a$. Viết $b^2; \sqrt{a} \cdot b; \frac{a^6}{b^3}$ theo lũy thừa cơ số a .

Lời giải

$$b^2 = \left(b^{\frac{2}{3}}\right)^3 = a^3;$$

$$\sqrt{a} \cdot b = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a^2;$$

$$\frac{a^6}{b^3} = \frac{a^6}{\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3} = a^2$$

91. Cho $a > 0, a \neq 1$ và $a^{\frac{1}{2}} = b$. Tính:

a) $\log_a b$; b) $\log_a (a^3 b^2)$;

c) $\log_{\sqrt{a}} \left(\frac{a}{b}\right)$; d) $\log_{ab} (a\sqrt{b})$.

Lời giải

a) $\log_a b = \frac{1}{2}$. b) $\log_a (a^3 b^2) = 4$.

c) $\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{b}\right)=1$. d) $\log_{ab}\left(a\sqrt{b}\right)=\frac{5}{6}$.

92. Giải mỗi phương trình sau:

a) $0,5^{2x^2+x-1}=\frac{1}{4}$; b) $2^{x^2-6x-\frac{5}{2}}=16\sqrt{2}$; c) $27^{x^2-4x+4}=9^{x^2-4}$;

d) $0,05^{x-3}=(2\sqrt{5})^x$; e) $\log_3 3(x-2)=-1$; g) $\log_5(x^2+1)+\log_{0,2}(4-5x-x^2)=0$

Lời giải

a) $x=-\frac{3}{2}$ hoặc $x=1$. b) $x=-1$ hoặc $x=7$. c) $x=2$ hoặc $x=10$.

d) $0,05^{x-3}=(2\sqrt{5})^x \Leftrightarrow 20^{3-x}=(2\sqrt{5})^x \Leftrightarrow (2\sqrt{5})^{6-2x}=(2\sqrt{5})^x \Leftrightarrow 6-2x=x \Leftrightarrow x=2$.

e) $x=\frac{19}{9}$.

g) $\log_5(x^2+1)+\log_{0,2}(4-5x-x^2)=0$

$\Leftrightarrow \log_5(x^2+1)-\log_5(4-5x-x^2)=0$

$\Leftrightarrow \log_5(x^2+1)=\log_5(4-5x-x^2)$

$\Leftrightarrow x^2+1=4-5x-x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$

93. Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $2^{5x+1}>0,25$; b) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{x+2}$;

c) $\log_{16}(3x+4)<-\frac{1}{4}$; d) $\log_{0,2}(x^2-6x+9) \geq \log_{0,2}(x-3)$.

Lời giải

a) $x>-\frac{3}{5}$.

b) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{x+2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-2x+2} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{x+2} \Leftrightarrow -2x+2 \leq x+2 \Leftrightarrow x \geq 0$.

c) $-\frac{4}{3}<x<-\frac{7}{6}$.

d) $\log_{0,2}(x^2-6x+9) \geq \log_{0,2}(x-3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+9>0 \\ x^2-6x+9 \leq x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2>0 \\ x^2-7x+12 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ 3 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x \leq 4$

94. Số lượng của một loài vi khuẩn sau x giờ được tính bởi công thức $f(x) = Ae^{rx}$, trong đó, A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$). Biết số vi khuẩn ban đầu là 1000 con và sau 10 giờ tăng trưởng thành 5000 con.

a) Tính tỉ lệ tăng trưởng của vi khuẩn.

b) Hỏi sau khoảng bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần so với số lượng vi khuẩn ban đầu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

a) Theo giả thiết, ta có: $1000e^{10r} = 5000 \Leftrightarrow e^{10r} = 5$.

Suy ra tỉ lệ tăng trưởng của vi khuẩn là: $r = \frac{\ln 5}{10}$.

b) Khi số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần so với số lượng vi khuẩn ban đầu thì ta có phương trình:

$$Ae^{rx} = 10A \Leftrightarrow e^{rx} = 10 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 10}{r}.$$

Thay $r = \frac{\ln 5}{10}$ ta có: $x = \frac{\ln 10}{\frac{\ln 5}{10}} \approx 14$.

Vậy sau khoảng 14 giờ thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần.

95. Với nước biển có nồng độ muối 30%, nhiệt độ $T(^{\circ}\text{C})$ của nước biển được tính bởi công thức $T = 7,9\ln(1,0245 - d) + 61,84$, ở đó $d(\text{g/cm}^3)$ là khối lượng riêng của nước biển.

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Biết vùng biển khơi mặt ở một khu vực có nồng độ muối 30% và nhiệt độ là 8°C . Tính khối lượng riêng của nước biển ở vùng biển đó (làm tròn kết quả đến hàng phần chục nghìn).

Lời giải

Theo giả thiết, với $T = 8$ ta có phương trình:

$$7,9\ln(1,0245 - d) + 61,84 = 8 \Leftrightarrow \ln(1,0245 - d) = \frac{-2692}{395}$$

$$\Leftrightarrow 1,0245 - d = e^{\frac{-2692}{395}} \Leftrightarrow d = 1,0245 - e^{\frac{-2692}{395}}$$

Suy ra khối lượng riêng của nước biển ở vùng biển đó là: $d \approx 1,0234 \text{ g/cm}^3$.

96. Cường độ của một trận động đất, kí hiệu là M (độ Richter), được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, ở đó A là biên độ rung chấn tối đa đo được bằng địa chấn kế và A_0 là biên độ chuẩn (hằng số phụ thuộc vào từng khu vực)(Nguồn: [https://vi.wikipedia.org/wiki/Dô Richter](https://vi.wikipedia.org/wiki/D%C3%B4_Richter))

Vào hồi 12 giờ 14 phút trưa ngày 27/07/2020, tại khu vực huyện Mộc Châu, Sơn La xảy ra trận động đất thứ nhất với cường độ 5,3 độ Richter. Trong vòng 20 tiếng đồng hồ, Sơn La đã xảy ra liên tiếp 7 trận động đất. Đến 8 giờ 26 phút sáng 28/07/2020, trận động đất thứ bảy xảy ra với cường độ 4 độ Richter.

(Nguồn: <https://plo.vn/7-tran-dong-dat-lien-tiep-o-son-la-trong-vong-20-tieng-dong-ho-posi585443.html>)

Biết rằng biên độ chuẩn được dùng cho cả tỉnh Sơn La. Hỏi biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ nhất gấp khoảng mấy lần biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ bảy (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Cường độ trận động đất thứ nhất là: $M_1 = \log A_1 - \log A_0 = 5,3$.

Cường độ trận động đất thứ bảy là: $M_7 = \log A_7 - \log A_0 = 4$.

Do đó, ta có:

$$M_1 - M_7 = \log A_1 - \log A_7 = 1,3 \Leftrightarrow \log \frac{A_1}{A_7} = 1,3 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_7} = 10^{1,3}.$$

Suy ra $\frac{A_1}{A_7} \approx 20$.

Vậy biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ nhất gấp khoảng 20 lần biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ bảy.

CHƯƠNG VII: ĐẠO HÀM

BÀI 1: ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là *đạo hàm của hàm số* $y = f(x)$ tại x_0 và được kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc y'_{x_0} .

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.

2. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa

Để tính đạo hàm $f'(x_0)$ của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 ta lần lượt thực hiện ba bước sau:

Bước 1. Xét $\Delta x = x - x_0$ là số gia của biến số tại điểm x_0 .

Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Bước 2. Rút gọn tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3. Tính $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Kết luận: Nếu $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ thì $f'(x_0) = a$.

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

- Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.
- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Vấn đề 1. Tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$ tại điểm $x_0 = 1$ bằng định nghĩa.

Lời giải

Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có: $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = 3(1 + \Delta x)^2 - 1 - (3 \cdot 1^2 - 1) = 9\Delta x + 9(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)^3$.

$$\text{Suy ra: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9\Delta x + 9(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)^3}{\Delta x} = 9 + 9\Delta x + 3(\Delta x)^2.$$

$$\text{Ta thấy: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [9 + 9\Delta x + 3(\Delta x)^2] = 9.$$

$$\text{Vậy } f'(1) = 9.$$

Vấn đề 2. Xác định tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ có đồ thị (P) .

a) Xác định hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị (P) tại điểm có hoành độ bằng $\frac{1}{2}$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (P) tại điểm có hoành độ bằng $\frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0 = \frac{1}{2}$.

$$\text{Ta có: } \Delta y = f\left(\frac{1}{2} + \Delta x\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \Delta x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \Delta x + (\Delta x)^2.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 1 + \Delta x.$$

$$\text{Ta thấy: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \Delta x) = 1.$$

$$\text{Suy ra } f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \text{ Vậy } k = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

b) Ta có: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

$$\text{Phương trình tiếp tuyến của đồ thị } (P) \text{ tại điểm có hoành độ bằng } \frac{1}{2} \text{ là: } y = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \text{ hay } y = x - \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ có đồ thị (C) .

a) Xác định hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 3.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 3.

Lời giải

a) Gọi M là điểm có tung độ bằng 3 nằm trên (C) . Khi đó, hoành độ của điểm M bằng 1.

Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0 = 1$.

$$\text{Ta có: } \Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = \left(2 + \frac{1}{1 + \Delta x}\right) - \left(2 + \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{1 + \Delta x} - 1 = \frac{-\Delta x}{1 + \Delta x}.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{1 + \Delta x}}{\Delta x} = \frac{-1}{1 + \Delta x}.$$

$$\text{Ta thấy: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{1 + \Delta x}\right) = -1.$$

$$\text{Suy ra } f'(1) = -1. \text{ Vậy } k = f'(1) = -1.$$

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1; 3)$ là: $y = -1(x - 1) + 3$ hay $y = -x + 4$.

Vấn đề 3. Ứng dụng

Ví dụ 4: Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Q máy vô tuyến là $C(Q) = Q^2 + 80Q + 3500$.

a) Tính $\frac{\Delta C}{\Delta Q}$.

b) Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q + 1$ sản phẩm.

Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$. Tìm hàm chi phí biên.

c) Tìm $C'(90)$ và giải thích ý nghĩa kết quả tìm được.

Lời giải

a) Xét ΔQ là số gia của biến số tại điểm Q .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \Delta C &= C(Q + \Delta Q) - C(Q) = (Q + \Delta Q)^2 + 80(Q + \Delta Q) + 3500 - Q^2 - 80Q - 3500 \\ &= 2Q \cdot \Delta Q + (\Delta Q)^2 + 80\Delta Q. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta thấy: } \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} (2Q + \Delta Q + 80) = 2Q + 80.$$

Vậy hàm chi phí biên là: $C'(Q) = 2Q + 80$.

c) Ta có: $C'(90) = 2 \cdot 90 + 80 = 260$. Dựa vào kết quả đó, ta thấy chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ 90 sản phẩm lên 91 sản phẩm là 260 USD.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 3x^3 - 1$ tại điểm $x_0 = 1$ bằng định nghĩa.

Lời giải

+ Xét Δx là số gia của biến số tại điểm 1.

Ta có: $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1)$

$$= 3(1 + \Delta x)^3 - 1 - (3 \cdot 1^3 - 1) = 9\Delta x + 9\Delta x^2 + 3\Delta x^3 = 3\Delta x(3 + 3\Delta x + \Delta x^2).$$

Suy ra: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3(3 + 3\Delta x + \Delta x^2).$

+ Ta thấy: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3(3 + 3\Delta x + \Delta x^2) = 3 \cdot 3 = 9.$

Vậy $f'(1) = 9.$

Bài 2. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x|$ không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$, nhưng có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq 0$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = f(0)$ nên hàm số $f(x) = |x|$ liên tục tại $x = 0$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Nên $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

Với mọi $x \neq 0$ thì $f(x) = |x|$ tồn tại đạo hàm

- $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(|x|) = -1$
- $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f'(|x|) = 1$

Bài 3. Cho hàm số $y = -2x^2 + x$ có đồ thị (C) .

- Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2; -6)$.

Lời giải

a) Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 có hệ số góc là:

$$\begin{aligned} k_0 = f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2 + x - (-2 \cdot 2^2 + 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2 + x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x - 2)(2x + 3)}{x - 2} = -7 \end{aligned}$$

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2; -6)$ là:

$$y = -7(x - 2) - 6 \Rightarrow y = -7x + 8$$

Bài 4. Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Q máy vô tuyến là $C(Q) = Q^2 + 80Q + 3500$.

- a) Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q+1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$. Tìm hàm chi phí biên.
- b) Tìm $C'(90)$ và giải thích ý nghĩa kết quả tìm được.
- c) Hãy tính chi phí sản xuất máy vô tuyến thứ 100.

Lời giải

a) Chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q+1$ sản phẩm. Chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$

$$\Rightarrow C'(Q) = \lim_{Q \rightarrow Q+1} \frac{(Q^2 + 80Q + 3500) - ((Q+1)^2 + 80(Q+1) + 3500)}{Q - (Q+1)}$$

$$C'(Q) = \lim_{Q \rightarrow Q+1} \frac{(Q^2 + 80Q + 3500) - (Q^2 + 2Q + 1 + 80Q + 80 + 3500)}{-1}$$

$$C'(Q) = \lim_{Q \rightarrow Q+1} (2Q + 80)$$

$$b) C'(90) = 2 \cdot 90 + 80 = 260(USD)$$

$\Rightarrow$ Ý nghĩa: Chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ 89 sản phẩm lên 90 sản phẩm là 260 (USD)

c) Chi phí sản xuất 101 máy vô tuyến là:

$$C(101) = 101^2 + 80 \cdot 101 + 3500 = 21781(USD)$$

Chi phí sản xuất 100 máy vô tuyến là:

$$C(100) = 100^2 + 80 \cdot 100 + 3500 = 21500(USD)$$

Chi phí sản xuất máy vô tuyến thứ 100 là

$$C(101) - C(100) = 281(USD)$$

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x + x_0}$. **B.** $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

C. $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x + x_0}$. **D.** $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x - x_0}$.

Lời giải

Chọn B

2. Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian t , $Q = Q(t)$. Cường độ trung bình trong khoảng thời gian $|t - t_0|$ được xác định bởi công thức $\frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$. Cường độ tức thời tại thời điểm t_0 là:

- A. $\frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$. B. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$.
C. $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{Q'(t) - Q'(t_0)}{t - t_0}$. D. $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$.

Lời giải

Chọn D

3. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là:

- A. $f(x_0)$. B. $f'(x_0)$. C. x_0 . D. $-f'(x_0)$.

Lời giải

Chọn B

4. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là:

- A. $y = f(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. B. $y = f'(x_0)(x + x_0) + f(x_0)$.
C. $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. D. $y = f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$.

Lời giải

Chọn C

5. Vận tốc tức thời của chuyển động $s = f(t)$ tại thời điểm t_0 là:

- A. $f'(t_0)$. B. $f(t_0) - f'(t_0)$. C. $f(t_0)$. D. $-f'(t_0)$.

Lời giải

Chọn A

6. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau bằng định nghĩa:

- a) $f(x) = x + 2$; b) $g(x) = 4x^2 - 1$; c) $h(x) = \frac{1}{x-1}$.

Lời giải

a) $f'(x) = 1$.

b) $g'(x) = 8x$.

c) Xét Δx là số gia của biến số tại điểm x .

Ta có: $\Delta h = h(x + \Delta x) - h(x) = \frac{1}{x + \Delta x - 1} - \frac{1}{x - 1} = \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)}$.

$$\text{Suy ra: } \frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)}}{\Delta x} = \frac{-1}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)}.$$

$$\text{Ta thấy: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)} = \frac{-1}{(x - 1)^2}.$$

$$\text{Vậy } h'(x) = \frac{-1}{(x - 1)^2}.$$

7. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x - 2|$ không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$, nhưng có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq 2$.

Lời giải

□ Với $x > 2$, ta có: $f(x) = |x - 2| = x - 2$. Đạo hàm của hàm số $f(x) = |x - 2|$ tại điểm $x > 2$ là 1.

□ Với $x < 2$, ta có: $f(x) = |x - 2| = 2 - x$. Đạo hàm của hàm số $f(x) = |x - 2|$ tại điểm $x < 2$ là -1.

Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0 = 2$.

$$\text{Ta có: } \Delta f = f(2 + \Delta x) - f(2) = |2 + \Delta x - 2| - |2 - 2| = |\Delta x|.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

$$\text{Ta thấy: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Do đó, không tồn tại $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Vậy hàm số $f(x) = |x - 2|$ không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$, nhưng có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq 2$.

8. Cho hàm số $f(x) = x^3$ có đồ thị (C) .

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng -1.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 8.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = 3x^2.$$

a) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 là: $y = 3x + 2$.

b) Ta có: $f(x) = x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 8 là: $y = 12x - 16$.

9. Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8m/s^2$.

a) Tìm vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 3(s)$.

b) Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của vật tại thời điểm đó bằng $39,2(m/s)$.

Lời giải

Xét Δt là số gia của biến số tại điểm t .

$$\text{Ta có: } \Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot (t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t^2 = 4,9 \cdot [2t\Delta t + (\Delta t)^2]$$

$$\text{Suy ra: } \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4,9 \cdot [2t\Delta t + (\Delta t)^2]}{\Delta t} = 9,8t + 4,9\Delta t.$$

$$\text{Ta thấy: } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (9,8t + 4,9\Delta t) = 9,8t. \text{ Vậy } v(t) = s'(t) = 9,8t.$$

a) Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 3(s)$ là: $v(3) = 9,8 \cdot 3 = 29,4(m/s)$.

b) Theo đề bài, ta có: $v(t) = 9,8t = 39,2 \Leftrightarrow t = 4$.

Vậy vận tốc tức thời của vật đạt $39,2(m/s)$ tại thời điểm $t = 4(s)$.

BÀI 2: CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Giả sử $f = f(x), g = g(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có:

$$(f + g)' = f' + g'; (f - g)' = f' - g';$$

$$(fg)' = f'g + fg'; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} (g = g(x) \neq 0)$$

2. Đạo hàm của hàm hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

3. Bảng đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản và hàm hợp

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản thường gặp là	Đạo hàm của hàm hợp (ở đây $u = u(x)$)
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Vấn đề 1. Tính đạo hàm bằng công thức và vận dụng

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của mỗi hàm sau tại điểm $x_0 = 1$;

a) $f(x) = x^6$; b) $g(x) = (2x-1)(x+1)$;

c) $h(x) = \frac{1-x}{3x+5}$; d) $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

e) $m(x) = 2^{3x+1}$; g) $n(x) = \log_3(2x+1)$.

Lời giải

a) Ta có: $f'(x) = 6x^5$.

Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là: $f'(1) = 6.1^5 = 6$.

b) Ta có: $g'(x) = (2x-1)'(x+1) + (2x-1)(x+1)' = 2(x+1) + (2x-1) = 4x+1$

Đạo hàm của hàm số $g(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là: $g'(x) = 4.1+1 = 5$.

c) Ta có: $h'(x) = \frac{(1-x)'(3x+5) - (1-x)(3x+5)'}{(3x+5)^2} = \frac{(-1)(3x+5) - 3(1-x)}{(3x+5)^2} = \frac{-8}{(3x+5)^2}$.

Đạo hàm của hàm số $h(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là: $h'(1) = \frac{-8}{(3.1+5)^2} = \frac{-1}{8}$.

d) Ta có: $k'(x) = -\frac{(\sqrt{x})'}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

Đạo hàm của hàm số $k(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là: $k'(1) = -\frac{1}{2.1.\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}$.

e) Ta có: $m'(x) = (3x+1)' . 2^{3x+1} \ln 2 = 3 \ln 2 . 2^{3x+1}$.

Đạo hàm của hàm số $m(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là: $m'(x) = 3 \ln 2 . 2^{3.1+1} = 48 \ln 2$.

g) Ta có: $n'(x) = \frac{(2x+1)'}{(2x+1) \ln 3} = \frac{2}{(2x+1) \ln 3}$.

Đạo hàm của hàm số $n(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là: $n'(1) = \frac{2}{(2.1+1) \ln 3} = \frac{2}{3 \ln 3}$.

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

a) $f(x) = 2 \sin x$; b) $g(x) = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

a) Ta có: $f'(x) = 2(\sin x)' = 2\cos x$.

Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{4}$ là: $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

b) Ta có: $g'(x) = -\frac{\left(x + \frac{\pi}{4}\right)'}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

Đạo hàm của hàm số $g(x)$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{4}$ là: $g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} = -1$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Giải bất phương trình $f'(x) < 0$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Khi đó, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình trên là: $(-1; 1)$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc tập xác định, hàm số $g(x)$ được xác định bởi $g(x) = -3 - 2f(x)$. Biết $f'(5) = 1$. Tính $g'(5)$.

Lời giải

Ta có: $g'(x) = (-3)' - (2f(x))' = 0 - 2.f'(x) = -2f'(x)$.

Suy ra $g'(5) = -2f'(5) = (-2).1 = -2$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc tập xác định và $f'(5) = 1$. Tính đạo hàm của hàm số $g(x) = f(1 + 2x)$ tại $x = 2$.

Lời giải

Ta có: $g'(x) = (1 + 2x)' . f'(1 + 2x) = 2f'(1 + 2x)$.

Suy ra $g'(2) = 2f'(5) = 2.1 = 2$.

Vấn đề 2. Ứng dụng hình học của đạo hàm

Ví dụ 6: Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $(P): y = x^2 + 2x + 1$ tại giao điểm của nó với trục tung.

Lời giải

Gọi $A(0; y_0)$ là giao điểm của (P) với trục tung, suy ra $y_0 = y(0) = 1$.

Ta có: $y' = 2x + 2$, do đó $y'(0) = 2$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 2(x - 0) + 1$ hay $y = 2x + 1$.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$ có đồ thị (C) , viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng -5.

Lời giải

Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

$$\text{Ta có: } y'(x_0) = -5 \Leftrightarrow \frac{-5}{(x_0 - 2)^2} = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

Với $x_0 = 1$ ta được $y_0 = -3$, phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -5x + 2$.

Với $x_0 = 3$ ta được $y_0 = 7$, phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -5x + 22$.

Vấn đề 3. Ứng dụng thực tiễn của đạo hàm

Ví dụ 9: Một chất điểm chuyển động của phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 4t + 1$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3(s)$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(s)$ là: $v(t) = s'(t) = t^2 - 4t + 4$.

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3(s)$ là: $v(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 1(m/s)$

Ví dụ 10: Một chất điểm chuyển động của phương trình $s(t) = 6\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}(s)$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(s)$ là: $v(t) = s'(t) = 18\cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}(s)$ là: $v\left(\frac{\pi}{6}\right) = 18\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = -9\sqrt{2}(cm/s)$

Ví dụ 11: Một viên đạn được bắn lên cao theo phương thẳng đứng có phương trình chuyển động $s(t) = 2 + 196t - 4,9t^2$, trong đó $t \geq 0$, $t(s)$ là thời gian chuyển động, $s(m)$ là độ cao so với mặt đất.

a) Sau bao lâu kể từ khi bắn thì viên đạn đạt được độ cao 1962m?

b) Tính vận tốc tức thời của viên đạn khi viên đạn đạt được độ cao 1962m.

c) Tại thời điểm viên đạn đạt vận tốc tức thời bằng 98 m/s thì viên đạn đang ở độ cao bao nhiêu mét so với mặt đất?

Lời giải

a) Khi viên đạn đạt được độ cao 1962 m , ta có phương trình: $1962 = 2 + 196t - 4,9t^2 \Leftrightarrow t = 20$

Vậy sau 20 s kể từ khi bắn thì viên đạn đạt được độ cao 1962 m .

b) Vận tốc tức thời của viên đạn tại thời điểm t là: $v(t) = s'(t) = 196 - 9,8t$

Viên đạn đạt được độ cao 1962 m vào thời điểm $t = 20 \text{ (s)}$ kể từ lúc bắn, khi đó vận tốc tức thời của viên đạn là: $v(20) = 196 - 9,8 \cdot 20 = 0 \text{ (m/s)}$.

c) Viên đạn đạt vận tốc tức thời bằng 98 m/s ta có phương trình: $v(t) = 196 - 9,8t = 98 \Leftrightarrow t = 10$

Khi đó viên đạn đang ở độ cao là: $s(10) = 2 + 196 \cdot 10 - 4,9 \cdot 10^2 = 1472 \text{ (m)}$.

Ví dụ 12. Năm 2001, dân số Việt Nam khoảng 78 690 000 người. Nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm luôn là 1,7% thì ước tính số dân Việt Nam sau x năm kể từ năm 2001 được tính theo hàm số sau:

$f(x) = 7,869e^{0,017x}$ (chục triệu người). Tốc độ gia tăng dân số (chục triệu người) sau x năm kể từ năm 2001 được xác định bởi hàm số $f'(x)$.

a) Tìm hàm số thể hiện tốc độ gia tăng dân số sau x năm kể từ năm 2001.

b) Tính tốc độ gia tăng dân số Việt Nam theo đơn vị chục triệu người/năm vào năm 2023 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười), nêu ý nghĩa của kết quả đó.

Lời giải

a) Ta có: $f'(x) = 7,869 \cdot (0,017x)' \cdot e^{0,017x} = 7,869 \cdot 0,017 \cdot e^{0,017x} = 0,133773e^{0,017x}$

Vậy hàm số thể hiện tốc độ gia tăng dân số sau x năm kể từ năm 2001 là: $f'(x) = 0,133773e^{0,017x}$

b) Ta có: $x = 2023 - 2001 = 22$.

Tốc độ gia tăng dân số Việt Nam vào năm 2023 là: $f'(22) = 0,133773e^{0,017 \cdot 22} \approx 0,2$ (chục triệu người/năm).

Theo kết quả trên thì dân số nước ta tăng thêm khoảng 2 triệu người trong năm 2023.

Ví dụ 13: Trong thuyết động học phân tử chất khí, với một khối khí lí tưởng, các đại lượng áp suất $p \text{ (Pa)}$, thể tích $V \text{ (m}^3\text{)}$, nhiệt độ $T \text{ (K)}$, số mol $n \text{ (mol)}$ liên hệ với nhau theo phương trình: $pV = nRT$, trong đó $R = 8,31 \text{ (J/mol.K)}$ là hằng số.

Nguồn: James Stewart, Calculus)

Một bóng thám không chứa 8 mol khí hydrogen ở trạng thái lí tưởng có áp suất không đổi $p = 10^5 \text{ Pa}$. Tính tốc độ thay đổi thể tích theo nhiệt độ của khối khí trong bóng thám không.

Lời giải

Thay $p = 10^5, n = 8, R = 8,31$ vào phương trình trên ta có: $10^5 V = 8,8,31T \Leftrightarrow V = 6,648.10^{-4}T$

Khi đó $V(t) = 6,648.10^{-4}$. Vậy tốc độ thay đổi thể tích của khối khí lúc có nhiệt độ T là:

$$6,648.10^{-4} (m^3 / K).$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Cho $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Phát biểu nào sau đây là đúng?

a) $(u + v + w)' = u' + v' + w'$

b) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;

c) $(uv)' = u'v'$

d) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$ với $v = v(x) \neq 0, v' = v'(x) \neq 0$.

Lời giải

a) Đúng

b) Đúng

c) Sai: $\Rightarrow (uv)' = u'v + uv'$

d) Sai: $\Rightarrow \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Bài 2. Cho $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định.

Chứng minh rằng $(u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$.

Lời giải

Đặt $u.v = a$

$$\text{Có } (u.v)' = u'v + uv'$$

$$\Rightarrow (u.v.w)' = (a.w)' = a'.w + a.w' = (u'v + uv')w + u.v.w' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$$

Bài 3. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 10$;

b) $y = \frac{x+1}{x-1}$

c) $y = -2x\sqrt{x}$

d) $y = 3\sin x + 4\cos x - \tan x$

e) $y = 4^x + 2e^x$

g) $y = x \ln x$

Lời giải

a) $y = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 10$

$$y' = 12x^2 - 6x + 2$$

$$b) y = \frac{x+1}{x-1}$$

$$y' = (x+1) \cdot \frac{1}{x-1}$$

$$y' = \frac{1}{x-1} + \frac{-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$c) y = -2x\sqrt{x}$$

$$y' = -2\sqrt{x} + (-2x) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = -2\sqrt{x} - \frac{2x}{2\sqrt{x}} = -2\sqrt{x} - \sqrt{x} = -3\sqrt{x}$$

$$d) y = 3\sin x + 4\cos x - \tan x$$

$$y' = 3\cos x - 4\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$e) y = 4^x + 2e^x$$

$$y' = 4^x \ln 4 + 2e^x$$

$$g) y = x \ln x$$

$$y' = \ln x + 1$$

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = 2^{3x+2}$.

a) Hàm số $f(x)$ là hàm hợp của các hàm số nào?

b) Tìm đạo hàm của $f(x)$.

Lời giải

a) Hàm số $f(x)$ là hàm hợp của hai hàm số $y = 2^u, u = 3x + 2$

$$b) f'(x) = 3 \cdot 2^{3x+2} \cdot \ln 2$$

Bài 5. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

$$a) y = \sin 3x + \sin^2 x$$

$$b) y = \log_2(2x+1) + 3^{-2x+1}$$

Lời giải

$$a) \sin 3x + \sin^2 x$$

$$y' = 3\cos 3x + \sin 2x$$

$$b) \log_2(2x+1) + 3^{-2x+1}$$

$$y' = \frac{2}{(2x+1)\ln 2} + (-2) \cdot 3^{-2x+1} \cdot \ln 3$$

Bài 6. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị mỗi hàm số sau:

- a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$;
 b) $y = \ln x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = e$;
 c) $y = e^x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

Lời giải

a)

$$y = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$\Rightarrow f(2) = 0$$

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow f'(2) = 0$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ là:

$$y = 0 \cdot (x - 2) + 0$$

b)

$$y = \ln x \Rightarrow f(e) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(e) = \frac{1}{e}$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \ln x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = e$ là:

$$y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{x}{e}$$

c)

$$y = e^x = f'(x)$$

$$\Rightarrow f(0) = f'(0) = e^0 = 1$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = e^x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là:

$$y = x + 1$$

Bài 7. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196 \text{ m/s}$ (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0 . Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét (lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$)?

Lời giải

Ta lần lượt có:

- Phương trình của viên đạn đi theo phương thẳng đứng được cho bởi :

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 - v_0t \Leftrightarrow y = -4,9t^2 + 196t$$

- Vận tốc viên đạn tại thời điểm t là :

$$v = y' = -9,8t + 196$$

Từ đó, ta nhận thấy:

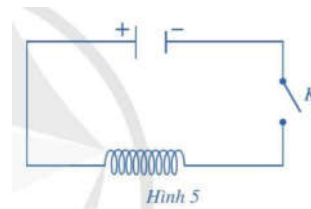
- Thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0 được cho bởi:

$$-9,8t + 196 = 0 \Leftrightarrow t = 20s$$

- Khi đó viên đạn cách mặt đất một khoảng cho bởi:

$$y = -4,9 \cdot 20^2 + 196 \cdot 20 = 1960m$$

Bài 8. Cho mạch điện như *Hình 5*. Lúc đầu tụ điện có điện tích Q_0 . Khi đóng khoá tụ điện phóng điện qua cuộn dây; điện tích q của tụ điện phụ thuộc vào thời gian t theo công thức $q(t) = Q_0 \sin \omega t$, trong đó ω là tốc độ góc. Biết rằng cường độ $I(t)$ của dòng điện tại thời điểm t được tính theo công thức $I(t) = q'(t)$. Cho biết $Q_0 = 10^{-8}(\text{C})$ và $\omega = 10^6 \pi(\text{rad/s})$. Tính cường độ của dòng điện tại thời điểm $t = 6(\text{s})$ (tính chính xác đến $10^{-5}(\text{mA})$).



Lời giải

Cường độ của dòng điện tại t là :

$$I(t) = q'(t) = Q_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega t$$

Khi $Q_0 = 10^{-8}(\text{C})$ và $\omega = 10^6 \pi(\text{rad/s})$ thì cường độ của dòng điện tại thời điểm $t = 6(\text{s})$ là :

$$\begin{aligned} I(6) &= q'(6) = 10^{-8} \cdot \pi \cdot \cos(10^6 \cdot \pi \cdot 6) = \frac{\pi}{10}(\text{A}) \\ &\approx 31,41593(\text{mA}) \end{aligned}$$

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

10. Cho $f = f(x)$, $g = g(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.** $(fg)' = fg'$. **B.** $(fg)' = f'g'$.
C. $(fg)' = f'g - fg'$. **D.** $(fg)' = f'g + fg'$.

Lời giải

Chọn D

11. Cho $f = f(x)$, $g = g(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định và $g = g(x) \neq 0$, $g' = g'(x) \neq 0$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g'}$. **B.** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
C. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g^2}$. **D.** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g + fg'}{g^2}$.

Lời giải

Chọn B

12. Cho hàm số $f(x) = \cos 3x$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

- A.** $\sin 3x$. **B.** $-\sin 3x$. **C.** $-3 \sin 3x$ **D.** $3 \sin 3x$.

Lời giải

Chọn C

13. Cho hàm số $f(x) = \sin(x^2)$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

- A. $2x\cos(x^2)$. B. $\cos(x^2)$. C. $x^2\cos(x^2)$. D. $2x\cos(2x)$.

Lời giải

Chọn A

14. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3}$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

- A. $-\frac{1}{(2x+3)^2}$. B. $-\frac{2}{(2x+3)^2}$. C. $\frac{2}{(2x+3)^2}$. D. $\frac{1}{(2x+3)^2}$.

Lời giải

Chọn B

15. Cho hàm số $f(x) = e^{2x}$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

- A. e^{2x} . B. $2e^x$. C. $2xe^{2x}$. D. $2e^{2x}$.

Lời giải

Chọn D

16. Cho hàm số $f(x) = \ln(3x)$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

- A. $\frac{1}{3x}$. B. $\frac{1}{x}$. C. $\frac{3}{x}$. D. $-\frac{1}{x}$.

Lời giải

Chọn B

17. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm $x_0 = 2$:

- a) $f(x) = e^{x^2+2x}$; b) $g(x) = \frac{3^x}{2^x}$;
c) $h(x) = 2^x \cdot 3^{x+2}$; d) $k(x) = \log_3(x^2 - x)$.

Lời giải

a) Ta có: $f'(x) = (x^2 + 2x)' e^{x^2+2x} = (2x+2)e^{x^2+2x}$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 2$ là: $f'(2) = (2 \cdot 2 + 2)e^{2^2+2 \cdot 2} = 6e^8$.

b) Ta có: $g'(x) = \left[\left(\frac{3}{2} \right)^x \right]' = \left(\frac{3}{2} \right)^x \ln \frac{3}{2}$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 2$ là: $g'(2) = \left(\frac{3}{2} \right)^2 \ln \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \ln \frac{3}{2}$.

c) Ta có: $h(x) = 2^x \cdot 3^x \cdot 9 = 9 \cdot 6^x$.

Suy ra $h'(x) = 9 \ln 6 \cdot 6^x$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 2$ là: $h'(2) = 9 \ln 6 \cdot 6^2 = 324 \ln 6$.

d) Ta có: $k'(x) = \frac{(x^2 - x)'}{(x^2 - x) \ln 3} = \frac{2x - 1}{x(x - 1) \ln 3}$

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 2$ là: $k'(2) = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2(2 - 1) \ln 3} = \frac{3}{2 \ln 3}$.

18. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $f(x) = 2 \cos(\sqrt{x})$; b) $g(x) = \tan(x^2)$;

c) $h(x) = \cos^2(3x) - \sin^2(3x)$; d) $k(x) = \sin^2 x + e^x \cdot \sqrt{x}$.

Lời giải

a) $f'(x) = 2(\sqrt{x})' [-\sin(\sqrt{x})] = \frac{-\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

b) $g'(x) = \frac{(x^2)'}{\cos^2(x^2)} = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}$.

c) Ta có: $h(x) = \cos^2(3x) - \sin^2(3x) = \cos(6x)$.

Suy ra $h'(x) = (6x)' [-\sin(6x)] = -6 \sin(6x)$.

d) $k'(x) = (\sin^2 x)' + (e^x)' \cdot \sqrt{x} + e^x \cdot (\sqrt{x})' = 2 \sin x \cos x + e^x \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}}$

19. Cho hàm số $f(x) = 2^{3x-6}$. Giải phương trình $f'(x) = 3 \ln 2$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = (3x - 6)' \cdot 2^{3x-6} \ln 2 = 3 \ln 2 \cdot 2^{3x-6}$.

Khi đó $f'(x) = 3 \ln 2 \Leftrightarrow 3 \ln 2 \cdot 2^{3x-6} = 3 \ln 2 \Leftrightarrow 2^{3x-6} = 1 \Leftrightarrow 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

20. Giải bất phương trình $f'(x) < 0$, biết:

a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$; b) $f(x) = -\log_5(x+1)$.

Lời giải

a) Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$.

Khi đó, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 24 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 4$

b) Ta có: $f'(x) = -\frac{(x+1)'}{(x+1)\ln 5} = \frac{-1}{(x+1)\ln 5}$.

Khi đó, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{(x+1)\ln 5} < 0 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

21. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc tập xác định, hàm số $g(x)$ được xác định bởi $g(x) = [f(x)]^2 + 2xf(x)$. Biết $f'(0) = f(0) = 1$. Tính $g'(0)$.

Lời giải

Ta có: $g'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f(x) + 2xf'(x)$.

Vậy $g'(0) = 2f(0)f'(0) + 2f(0) + 2.0.f'(0) = 4$

22. Cho hàm số $y = x^2 + 3x$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có:

a) Hoành độ bằng -1; b) Tung độ bằng 4.

Lời giải

a) $y = x - 1$.

b) $y = 5x - 1$ hoặc $y = -5x - 16$.

23. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+2}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C) trong mỗi trường hợp sau:

a) d song song với đường thẳng $y = 5x - 2$;

b) d vuông góc với đường thẳng $y = -20x + 1$.

Lời giải

Ta có: $y'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$.

a) Vì d song song với đường thẳng $y = 5x - 2$ nên $\frac{5}{(x+2)^2} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$

Với $x = -1$ thì $y(-1) = -4$, phương trình tiếp tuyến d là: $y = 5x + 1$.

Với $x = -3$ thì $y(-3) = 6$, phương trình tiếp tuyến d là: $y = 5x + 21$.

b) Vì d vuông góc với đường thẳng $y = -20x + 1$ nên $\frac{5}{(x+2)^2} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ x = 8 \end{cases}$

Với $x = -12$ thì $y(-12) = \frac{3}{2}$, phương trình tiếp tuyến d là: $y = \frac{1}{20}x + \frac{21}{10}$.

Với $x = 8$ thì $y(8) = \frac{1}{2}$, phương trình tiếp tuyến d là: $y = \frac{1}{20}x + \frac{1}{10}$.

24. Một chất điểm chuyển động của phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5(s)$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(s)$ là: $v(t) = s'(t) = t^2 - 6t + 8$

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5(s)$ là: $v(5) = 5^2 - 6.5 + 8 = 3(m/s)$

25. Một mạch dao động điện từ LC có lượng điện tích dịch chuyển qua tiết diện thẳng của dây xác định bởi hàm số $Q(t) = 10^{-5} \sin\left(2000t + \frac{\pi}{3}\right)$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, Q tính bằng Coulomb. Tính cường độ dòng điện tức thời $I(A)$ trong mạch tại thời điểm $t = \frac{\pi}{1500}(s)$, biết $I(t) = Q'(t)$.

Lời giải

Cường độ dòng điện tức thời trong mạch tại thời điểm $t(s)$ là:

$$I(t) = Q'(t) = 10^{-5} \cdot 2000 \cos\left(2000t + \frac{\pi}{3}\right) = 0,02 \cos\left(2000t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Cường độ dòng điện tức thời trong mạch tại thời điểm $t = \frac{\pi}{1500}(s)$ là:

$$I\left(\frac{\pi}{1500}\right) = 0,02 \cos\left(2000 \cdot \frac{\pi}{1500} + \frac{\pi}{3}\right) = 0,01(A)$$

26. Năm 2010, dân số của một tỉnh D là 1 038 229 người. Tính đến năm 2015, dân số của tỉnh đó là 1 153 600 người. Cho biết dân số của tỉnh D được ước tính theo công thức $S(N) = Ae^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm được làm tròn đến hàng phần nghìn). Tốc độ gia tăng dân số (người/năm) vào thời điểm sau N năm kể từ năm 2010 được xác định bởi hàm số $S'(N)$. Tính tốc độ gia tăng dân số của tỉnh D vào năm 2023 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị người/năm), biết tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi.

Lời giải

Tính từ năm 2010 đến năm 2015, chọn năm 2010 làm mốc, ta có: $1\,153\,600 = 1\,038\,229 \cdot e^{5r} \Rightarrow r \approx 0,021$

Khi đó, ta có: $S(N) \approx 1\,038\,229 \cdot e^{0,021N}$, suy ra tốc độ gia tăng dân số vào thời điểm sau N năm kể từ năm 2010 là:

$$S'(N) \approx 0,021 \cdot 1\,038\,229 \cdot e^{0,021N} = 21\,802,809 \cdot e^{0,021N}$$

Tốc độ gia tăng dân số tỉnh D vào năm 2023 (sau 13 năm kể từ năm 2010) là:

$$S'(13) \approx 21\,802,809.e^{0,021.13} \approx 28\,647 \text{ (người/năm)}$$

27. Một tài xế đang lái ô tô, ngay khi phát hiện có vật cản phía trước đã phanh gấp lại nhưng vẫn xảy ra va chạm, chiếc ô tô để lại vết trượt dài $20,4m$ (được tính từ lúc bắt đầu phanh đến khi xảy ra va chạm).

Trong quá trình đạp phanh, ô tô chuyển động theo phương trình $s(t) = 20t - \frac{5}{2}t^2$, trong đó $s(m)$ là độ dài quãng đường đi được sau khi phanh, $t(s)$ là thời gian tính từ lúc bắt đầu phanh ($0 \leq t \leq 4$).

a) Tính vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh. Hãy cho biết xe ô tô trên có chạy quá tốc độ hay không, biết tốc độ giới hạn cho phép là $70km/h$.

b) Tính vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm?

Lời giải

a) Vận tốc tức thời của ô tô tại thời điểm $t(s)$ là: $v(t) = s'(t) = 20 - 5t$.

Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh ($t = 0(s)$) là: $v(0) = 20 - 5.0 = 20(m/s)$

Ta có: $20m/s = 72km/h > 70km/h$. Suy ra ô tô trên đã chạy quá tốc độ giới hạn cho phép.

b) Khi xảy ra va chạm, ô tô đã đi được $20,4m$ kể từ khi đạp phanh nên

$$20,4 = 20t - \frac{5}{2}t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1,2 \\ t = 6,8 \end{cases}$$

Vì $0 \leq t \leq 4$ nên $t = 1,2(s)$

Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm là:

$$v(1,2) = 20 - 5.1,2 = 14(m/s)$$

28. Trong kinh tế học, xét mô hình doanh thu y (đồng) được tính theo số sản phẩm sản xuất ra x (chiếc) theo công thức $y = f(x)$.

Xét giá trị ban đầu $x - x_0$. Đặt $Mf(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0)$ và gọi giá trị đó là giá trị y cận biên của x tại $x - x_0$. Giá trị $Mf(x_0)$ phản ánh lượng doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm tại mức sản phẩm x_0 .

Xem hàm doanh thu $y = f(x)$ như là hàm biến số thực x .

Khi đó $Mf(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0) \approx f'(x_0)$. Như vậy, đạo hàm $f'(x_0)$ cho chúng ta biết (xấp xỉ) lượng doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm tại mức sản phẩm x_0 .

Tính doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm nếu hàm doanh thu là $y = 10x - \frac{x^2}{100}$ tại mức sản phẩm $x_0 = 10000$.

Lời giải

Ta có: $y'(x) = 10 - \frac{x}{50}$.

Vậy doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm tại mức sản phẩm $x_0 = 10000$ là:

$$y'(10000) = 10 - \frac{10000}{50} = -190 \text{ (đồng)}$$

BÀI 3: ĐẠO HÀM CẤP HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ tại mọi điểm $x \in (a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ tiếp tục có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' tại x là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x , kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

2. Ý nghĩa cơ học

Đạo hàm cấp hai $s''(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t .

B. CÁC DẠNG TOÁN

Vấn đề 1. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

- Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.
- Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x_0 = 0, x_0 = 1$.

Lời giải

- Ta có: $f'(x) = 2x + 2$ và $f''(x) = (2x + 2)' = 2$.
- Vì $f''(x) = 2$ nên $f''(0) = f''(1) = 2$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $g(x) = \cos x$.

- Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.
- Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Lời giải

- Ta có: $g'(x) = -\sin x, g''(x) = (-\sin x)' = -\cos x$.
- Vì $g''(x) = -\cos x$ nên $g''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $h(x) = \ln x, x > 0$.

- Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.
- Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x_0 = \sqrt{2}$.

Lời giải

a) Ta có: $h'(x) = \frac{1}{x}, h''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$

b) Vì $h''(x) = -\frac{1}{x^2}$ nên $h''(\sqrt{2}) = -\frac{1}{(\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{2}.$

Ví dụ 4: Cho hàm số $k(x) = \sin x \cdot \cos x.$

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x_0 = \frac{\pi}{3}.$

Lời giải

a) Ta có: $k(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$, suy ra $k'(x) = \cos 2x, k''(x) = (\cos 2x)' = -2 \sin 2x.$

b) Vì $k''(x) = -2 \sin 2x$ nên $k''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 4x$. Giải phương trình $f'(x) = f''(x).$

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 2x - 4, f''(x) = 2.$

Khi đó, ta có phương trình: $f'(x) = f''(x) \Leftrightarrow 2x - 4 = 2 \Leftrightarrow x = 3.$

Vấn đề 2. Ứng dụng

Ví dụ 6 Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 4$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ (s).

Lời giải

Ta có: $s'(t) = t^2 - 6t + 5.$

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t (s) là: $s''(t) = 2t - 6$

Vậy gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ (s) là: $s''(3) = 2 \cdot 3 - 6 = 0$ (m/s²)

Ví dụ 7 Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t) = 6\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ (s).

Lời giải

Ta có: $s'(t) = 18\cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t (s) là: $s''(t) = -54\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ (s) là:

$$s''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -54\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = -27\sqrt{2} \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

Bài 1. Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{2x+3}$. b) $y = \log_3 x$. c) $y = 2^x$.

Lời giải

a) $y = \frac{1}{2x+3}$

$$y' = -\frac{2}{4x^2 + 12x + 9} = -2 \cdot \frac{1}{4x^2 + 12x + 9}$$

$$y'' = -2 \cdot -\frac{8x+12}{(4x^2 + 12x + 9)^2}$$

b) $y = \log_3 x$

$$y' = \frac{1}{x \cdot \ln 3}$$

$$\Rightarrow y'' = -\frac{\ln 3}{(x \cdot \ln 3)^2} = -\frac{1}{x^2 \cdot \ln 3}$$

c) $y = 2^x$

$$y' = 2^x \ln 2$$

$$\Rightarrow y'' = 2^x (\ln 2)^2$$

Bài 2. Tính đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau:

a) $y = 3x^2 - 4x + 5$ tại điểm $x_0 = -2$;

b) $y = \log_3(2x+1)$ tại điểm $x_0 = 3$;

c) $y = e^{4x+3}$ tại điểm $x_0 = 1$;

d) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

e) $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ tại điểm $x_0 = 0$.

Lời giải

a) $y = 3x^2 - 4x + 5$

$$y' = 6x - 4$$

$$y'' = 6$$

b) $\log_3(2x+1)$

$$y' = \frac{2}{(2x+1)\ln 3} = 2 \cdot \frac{1}{(2x+1)\ln 3}$$

$$\Rightarrow y'' = 2 \cdot -\frac{2 \cdot \ln 3}{(2x+1)^2 (\ln 3)^2} = \frac{-4}{(2x+1)^2 \cdot \ln 3}$$

Thay $x_0 = 3$

$$\Rightarrow y''(3) = \frac{-4}{49 \cdot \ln 3}$$

c) e^{4x+3}

$$y' = 4e^{4x+3}$$

$$\Rightarrow y'' = 16e^{4x+3}$$

$$\Rightarrow y''(1) = 16e^7$$

d) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

$$y' = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow y'' = -4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

e) $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$y' = -3\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y'' = -9\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y''(0) = -9\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

Bài 3. Một vật rơi tự do theo phương thẳng đứng có phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó g là gia tốc rơi tự do, $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$.

a) Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2(\text{s})$.

b) Tính gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2(\text{s})$.

Lời giải

a) $v(t) = s'(t) = gt$

Vận tốc tức thời $v(t)$ tại thời điểm $t_0 = 2(\text{s})$.

$$v(2) = 9,8 \cdot 2 = 19,6(\text{m/s})$$

b) $a(t) = v'(t) = g$

Gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2(\text{s})$.

$$a(2) = g = 9,8(\text{m/s}^2)$$

Bài 4. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 1$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tìm vận tốc tức thời, gia tốc tức thời của chất điểm:

a) Tại thời điểm $t = 3(\text{s})$;

b) Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được $7(\text{m})$.

Lời giải

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 8$$

$$a(t) = v'(t) = 6t - 6$$

a) vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 3(\text{s})$ là:

$$v(3) = s'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 17(\text{m/s})$$

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3(\text{s})$ là:

$$a(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12(\text{m/s}^2)$$

b) Chất điểm di chuyển được $7(\text{m})$

$$\Rightarrow s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 1 = 7$$

$$\Leftrightarrow t = 1(\text{s})$$

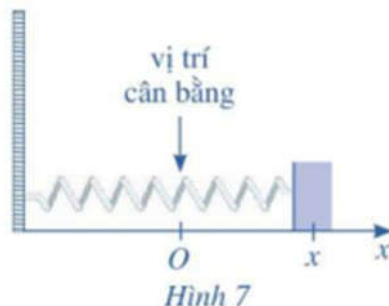
vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 1(\text{s})$ là:

$$v(1) = 3.1^2 - 6.1 + 8 = 5(m/s)$$

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 1(s)$ là:

$$a(1) = 6.1 - 6 = 0(m/s^2)$$

Bài 5. Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như Hình 7, có phương trình chuyển động $x = 4\sin t$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng centimét.



a) Tìm vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t(s)$.

b) Tìm vị trí, vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t = \frac{2\pi}{3}(s)$. Tại thời điểm đó, con lắc di chuyển theo hướng nào?

Lời giải

a) Vận tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t(s)$ là:

$$v(t) = x' = 4\cos t$$

Gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t(s)$ là:

$$a(t) = v'(t) = -4\sin t$$

b) Tại thời điểm $t = \frac{2\pi}{3}(s)$

$$x\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4.\sin \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3}(cm)$$

$$v\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\cos \frac{2\pi}{3} = -2(cm/s)$$

$$a\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -4\sin \frac{2\pi}{3} = -2\sqrt{3}(cm/s^2)$$

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

29. Gia tốc tức thời của chuyển động $s = f(t)$ tại thời điểm t_0 là:

A. $f(t_0)$.

B. $f''(t_0)$.

C. $f'(t_0)$.

D. $-f'(t_0)$.

Lời giải

Chọn B

30. Cho hàm số $f(x) = e^{-x}$. Khi đó $f''(x)$ bằng:

A. e^{-x} .

B. $-e^{-x}$.

C. $-e^x$.

D. e^x .

Lời giải

Chọn A

31. Cho hàm số $f(x) = \ln(3x)$. Khi đó $f''(x)$ bằng:

A. $-\frac{1}{9x^2}$.

B. $-\frac{1}{x^2}$.

C. $\frac{3}{x^2}$.

D. $-\frac{3}{x^2}$.

Lời giải

Chọn B

32. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$. Khi đó $f''(1)$ bằng:

A. 1.

B. -2.

C. 2.

D. -1.

Lời giải

Chọn C

33. Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{1}{3x+5}$; b) $g(x) = 2^{x+3x^2}$.

Lời giải

a) Ta có:

$$f'(x) = -\frac{(3+5)'}{(3x+5)^2} = \frac{-3}{(3x+5)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-3)'(3x+5)^2 - [(3x+5)^2]'(-3)}{(3x+5)^4} = \frac{18}{(3x+5)^3}$$

b) Ta có:

$$g'(x) = (x+3x^2)' \ln 2 \cdot 2^{x+3x^2} = (6x+1) \ln 2 \cdot 2^{x+3x^2},$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= \ln 2 \left[(6x+1)' \cdot 2^{x+3x^2} + (6x+1) \cdot (2^{x+3x^2})' \right] \\ &= 6 \ln 2 \cdot 2^{x+3x^2} + [(6x+1) \ln 2]^2 \cdot 2^{x+3x^2}. \end{aligned}$$

34. Cho hàm số $f(x) = \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Lời giải

a) Ta có: $f(x) = \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$.

Khi đó, $f'(x) = \frac{1}{4} (4x)' \cos 4x = \cos 4x$, $f''(x) = (4x)' (-\sin 4x) = -4 \sin 4x$.

b) Vì $f''(x) = -4 \sin 4x$ nên $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4 \sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = -2\sqrt{3}$.

35. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5$. Giải bất phương trình $f'(x) - f''(x) \geq 0$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 8x$, $f''(x) = 6x + 8$.

Khi đó, $f'(x) - f''(x) = 3x^2 + 8x - 6x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases}$

36. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm:

a) Tại thời điểm $t = 5$ (s).

b) Tại thời điểm mà vận tốc tức thời của chất điểm bằng -1 m/s.

Lời giải

Ta có: $s'(t) = t^2 - 6t + 8$, $s''(t) = 2t - 6$.

a) Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ (s) là: $s''(5) = 4$ (m/s²).

b) Theo giả thiết, $s'(t) = t^2 - 6t + 8 = -1 \Leftrightarrow t = 3$ (s).

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ (s) là: $s''(3) = 0$ (m/s²).

37. Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t) = 3\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây,

$s(t)$ tính bằng centimét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ (s).

Lời giải

Ta có: $s''(t) = -3\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ (s) là:

$s''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-3}{2}$ (cm/s²).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

PHẦN 1. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Câu 1: Cho $u = u(x), v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. $(uv)' = u'.v'$ B. $(uv)' = u.v'$ C. $(uv)' = u'.v$ D. $(uv)' = u'.v + v'.u$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Có } (uv)' = u'v + uv'$$

Câu 2: Cho $u = u(x), v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$ với $v = v(x) \neq 0, v' = v'(x) \neq 0$ B. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - v'.u}{v}$ với $v = v(x) \neq 0$
C. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}$ với $v = v(x) \neq 0$ D. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - v'.u}{v'}$ với $v = v(x) \neq 0$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Câu 3: Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

- a) $y = (x^2 + 2x)(x^3 - 3x)$; b) $y = \frac{1}{-2x + 5}$;
c) $y = \sqrt{4x + 5}$; d) $y = \sin x \cdot \cos x$;
e) $y = xe^x$; f) $y = \ln^2 x$.

Lời giải

$$\text{a) } y = (x^2 + 2x)(x^3 - 3x)$$

$$y' = (2x + 2)(x^3 - 3x) + (x^2 + 2x)(3x^2 - 3)$$

$$y' = 2x^4 - 6x^2 + 2x^3 - 6x + 3x^4 - 3x^2 + 6x^3 - 6x$$

$$y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 12x$$

$$\text{b) } y = \frac{1}{-2x + 5}$$

$$y' = \frac{2}{(-2x + 5)^2}$$

$$\text{c) } y = \sqrt{4x + 5}$$

$$y' = \frac{4}{2\sqrt{4x+5}}$$

d) $y = \sin x \cos x$

$$y' = \cos^2 x - \sin^2 x$$

e) $y = xe^x$

$$y' = e^x + xe^x$$

g) $y = \ln^2 x$

$$y' = \frac{2}{x} \ln x$$

Câu 4: Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau:

a) $y = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2$;

b) $y = \frac{2}{3-x}$;

c) $y = \sin 2x \cdot \cos x$;

d) $y = e^{-2x+3}$

e) $y = \ln(x+1)$

f) $y = \ln(e^x + 1)$.

Lời giải

a) $y = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2$

$$y' = 8x^3 - 9x^2 + 10x$$

$$y'' = 24x^2 - 18x + 10$$

b) $y = \frac{2}{3-x}$

$$y' = \frac{2}{(3-x)^2}$$

$$y'' = \frac{4(3-x)}{(3-x)^4} = \frac{4}{(3-x)^3}$$

c) $y = \sin 2x \cos x$

$$y' = 2\cos(2x) \cdot \cos x + \sin 2x \cdot (-\sin x)$$

$$y'' = -4\sin(2x) \cdot \cos x + 2\cos(2x) \cdot (-\sin x) + 2\cos(2x) \cdot (-\sin x) - \sin 2x \cdot (\cos x)$$

$$y'' = \cos x(-4\sin(2x) - \sin 2x) \cdot \sin x \cdot (2\cos(2x) + 2\cos(2x))$$

$$y'' = -5\sin(2x) \cdot \cos x - 4\cos(2x) \cdot \sin x$$

d) $y = e^{-2x+3}$

$$y' = -2e^{-2x+3}$$

$$y'' = 4e^{-2x+3}$$

e) $y = \ln(x+1)$

$$y' = \frac{1}{x+1}$$

$$y'' = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

g) $y = \ln(e^x + 1)$

$$y' = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$y'' = \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{-e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Câu 5: Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 2t + t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng m/s . Tìm gia tốc tức thời của chất điểm:

a) Tại thời điểm $t = 3 (s)$;

b) Tại thời điểm mà vận tốc chất điểm bằng $8 m/s$.

Lời giải

$$a(t) = v'(t) = 2t + 2$$

a) Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3 (s)$ là:

$$a(3) = 2.3 + 2 = 8 (m/s^2)$$

b) Vận tốc chất điểm bằng $8 m/s$

$$v(t) = 2t + t^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow t = 2(s)$$

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 2 (s)$ là:

$$a(2) = 2.2 + 2 = 6 (m/s^2)$$

Câu 6: Một con lắc lò xo dao động điều hòa theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 4 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 3$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng centimet.

a) Tìm vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc lò xo tại thời điểm $t = 3 (s)$.

b) Tìm thời điểm mà vận tốc của con lắc bằng 0.

Lời giải

$$v = x' = -4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$a = v' = -4\pi^2 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

a) Vận tốc tức thời của con lắc lò xo tại thời điểm $t = 3 (s)$ là:

$$v = -4\pi \sin\left(\pi \cdot 3 - \frac{2\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3}\pi \text{ (cm/s)}$$

Gia tốc tức thời của con lắc lò xo tại thời điểm $t = 3 \text{ (s)}$ là:

$$a = -4\pi^2 \cos\left(3\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -2\pi^2 \text{ (cm/s}^2\text{)}$$

b) vận tốc của con lắc bằng 0 $\Rightarrow v = -4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow t = \frac{2\pi}{3} \text{ s}$

PHẦN 2. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

38. Cho $f = f(x)$, $g = g(x)$, $h = h(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Khi đó, $(fg + h)'$ bằng:

- A.** $f'g' + h'$. **B.** $f'g'h'$. **C.** $f'g + fg' + h'$. **D.** $f'gh' + fg'h$.

Lời giải

Chọn C

39. Cho hàm số $f(x) = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

- A.** $\frac{1}{2} \cos x$. **B.** $-\frac{1}{2} \cos x$. **C.** $-\frac{1}{4} \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$. **D.** $\cos x$.

Lời giải

Chọn A

40. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{ax+b}$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

- A.** $-\frac{1}{(ax+b)^2}$. **B.** $\frac{1}{(ax+b)^2}$. **C.** $\frac{a}{(ax+b)^2}$. **D.** $-\frac{a}{(ax+b)^2}$.

Lời giải

Chọn D

41. Cho hàm số $f(x) = \sin ax$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

- A.** $\cos ax$. **B.** $-\cos ax$. **C.** $a \cos ax$. **D.** $a \cos x$.

Lời giải

Chọn C

42. Cho hàm số $f(x) = \cot ax$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

- A.** $-\frac{a}{\sin^2 ax}$. **B.** $\frac{a}{\sin^2 ax}$. **C.** $\frac{1}{\sin^2 ax}$. **D.** $-\frac{1}{\sin^2 ax}$.

Lời giải

Chọn A

43. Cho hàm số $f(x) = \log_a (bx)$. Khi đó, $f'(x)$ bằng:

- A.** $\frac{1}{bx}$. **B.** $\frac{1}{ax}$. **C.** $\frac{1}{x \ln a}$. **D.** $\frac{1}{x \ln b}$.

Lời giải

Chọn C

44. Cho hàm số $f(x) = e^{ax}$. Khi đó, $f''(x)$ bằng:

- A. e^{ax} . B. $a^2 e^{ax}$. C. $a^2 e^x$. D. e^{2ax} .

Lời giải

Chọn B

45. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^4$ tại điểm $M(2;16)$ bằng:

- A. 48. B. 8. C. 1. D. 32.

Lời giải

Chọn D

46. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = (2x^2 + 1)^3$; b) $y = \sin 3x \cos 2x - \sin 2x \cos 3x$;

c) $y = \frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x}$ d) $y = \frac{e^{3x+1}}{2^{x-1}}$.

Lời giải

a) $12x(2x^2 + 1)^2$.

b) Vì $y = \sin 3x \cos 2x - \sin 2x \cos 3x = \sin(3x - 2x) = \sin x$ nên $y'(x) = \cos x$.

c) Vì $y = \frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x} = \tan(x + 2x) = \tan(3x)$ nên $y'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}$.

d) Vì $y = \frac{e^{3x+1}}{2^{x-1}} = 2e \left(\frac{e^3}{2} \right)^x$ nên $y'(x) = 2e(3 - \ln 2) \left(\frac{e^3}{2} \right)^x$.

47. Cho hàm số $f(x) = \ln(4x + 3)$. Tính $f'(x)$ và $f''(x)$ tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{4}{4x+3}$, $f''(x) = -\frac{16}{(4x+3)^2}$ nên $f'(1) = \frac{4}{7}$, $f''(1) = -\frac{16}{49}$.

48. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 12x$.

a) Tìm $f'(x)$ và giải bất phương trình $f'(x) > 0$.

b) Tìm $f''(x)$ và giải phương trình $f''(x) = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $f'(x) = x^2 - x - 12$ nên $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < -3. \end{cases}$

b) Ta có: $f''(x) = 2x - 1$ nên $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

49. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-3}{x+4}$ có đồ thị (C) .

- a) Tìm đạo hàm của hàm số.
b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 3.
c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 1.

Lời giải

a) $f'(x) = \frac{11}{(x+4)^2}$. b) $y = 11x + 24$. c) $y = \frac{1}{11}x + \frac{4}{11}$.

50. Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t) = 2\sin\left(6t + \frac{\pi}{4}\right)$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ (s).

Lời giải

Ta có: $s'(t) = 12\cos\left(6t + \frac{\pi}{4}\right), s''(t) = -72\sin\left(6t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ (s) là:

$$s'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 12\cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 6\sqrt{2} \text{ (cm/s)}.$$

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ (s) là:

$$s''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -72\sin\left(6 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 36\sqrt{2} \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

51. Kính viễn vọng không gian Hubble được triển khai vào ngày 24 tháng 4 năm 1990, bởi tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong nhiệm vụ này từ khi xuất phát tại $t = 0$ (s) cho đến khi tên lửa đẩy nhiên liệu rắn bị loại bỏ ở $t = 126$ (s) được xác định theo phương trình sau:

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083 \text{ (ft/s)}.$$

(Nguồn: James Stewan, Calculus)

Tính gia tốc tức thời của tàu con thoi trên tại thời điểm $t = 100$ (s) (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Lời giải

Gia tốc tức thời của tàu con thoi tại thời điểm t (s) là:

$$a(t) = v'(t) = 0,003906t^2 - 0,18058t + 23,61 \text{ (ft/s}^2\text{)}.$$

Gia tốc tức thời của tàu con thoi tại thời điểm $t = 100$ (s) là:

$$a(100) = 0,003906 \cdot 100^2 - 0,18058 \cdot 100 + 23,61 = 44,612 \left(\text{ft} / \text{s}^2 \right).$$

52. Sau khi uống đồ uống có cồn, nồng độ cồn trong máu tăng lên rồi giảm dần được xác định bằng hàm số $C(t) = 1,35te^{-2,802t}$, trong đó C (mg / ml) là nồng độ cồn, t (h) là thời điểm đo tính từ ngay sau khi uống 15ml đồ uống có cồn.

(Nguồn: P. Wilkinson et al., *Pharmacokinetics of Ethanol after Ora' Administration in the Fasting State*, 1977)

Giả sử một người uống hết nhanh 15ml đồ uống có cồn. Tính tốc độ chuyển hoá nồng độ cồn trong máu của người đó tại thời điểm $t = 3$ (h) (làm tròn kết quả đến hàng phần triệu).

Lời giải

Ta có: $C'(t) = 1,35e^{-2,802t} - 3,7827te^{-2,802t}$.

Vậy tốc độ chuyển hoá nồng độ cồn tức thời trong máu của người đó tại thời điểm $t = 3$ (h) là:

$$C'(3) = 1,35e^{-2,802 \cdot 3} - 3,7827 \cdot 3e^{-2,802 \cdot 3} \approx -0,002235 \left(\frac{\text{mg} / \text{ml}}{\text{h}} \right).$$

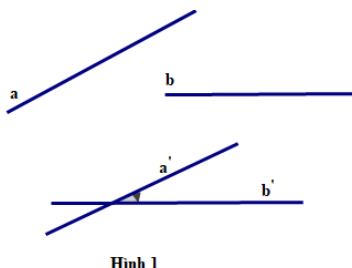
CHƯƠNG VIII: QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

BÀI 1: HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm O và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b (Hình 1), kí hiệu (a, b) hoặc $\widehat{(a, b)}$.



Hình 1

Nhận xét

- Góc giữa hai đường thẳng a, b không phụ thuộc vào vị trí điểm O . Thông thường, khi tìm góc giữa hai đường thẳng a, b , ta chọn O thuộc a hoặc O thuộc b .
- Góc giữa hai đường thẳng a, b bằng góc giữa hai đường thẳng b, a , tức là $(a, b) = (b, a)$.
- Góc giữa hai đường thẳng không vượt quá 90° .
- Nếu $a \parallel b$ thì $(a, c) = (b, c)$ với mọi đường thẳng c trong không gian.

2. Hai đường thẳng vuông góc trong không gian

Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

Khi hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, ta kí hiệu $a \perp b$.

Nhận xét: Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó vuông góc với đường còn lại.

B. CÁC DẠNG TOÁN

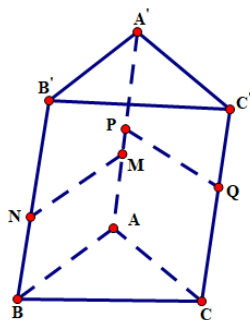
Vấn đề 1. Xác định góc giữa hai đường thẳng

Phương pháp: Đưa bài toán về xác định góc giữa hai đường thẳng trong cùng mặt phẳng

Ví dụ 1: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC cân tại A và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Các điểm M, N lần lượt thuộc hai đoạn thẳng AA' và BB' thỏa mãn $MN \parallel AB$, các điểm P, Q lần lượt thuộc hai đoạn thẳng AA' và CC' (P khác M) thỏa mãn $PQ \parallel AC$ (Hình 2). Tính các góc sau:

- a) (AB, AC) ; b) $(AB, B'C')$; c) (MN, PQ) .

Lời giải



Hình 2

a) Trong mặt phẳng (ABC) , vì $\widehat{BAC} = 120^\circ$ nên $(AB, AC) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

b) Vì tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$.

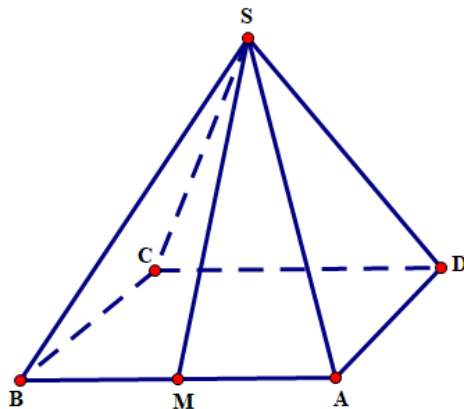
Ta có $BC \parallel B'C'$ nên $(AB, B'C') = (AB, BC) = \widehat{ABC} = 30^\circ$.

c) Vì $MN \parallel AB, PQ \parallel AC$ nên $(MN, PQ) = (AB, AC) = 60^\circ$.

Vấn đề 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, SAB là tam giác cân tại S . Gọi M là trung điểm AB (Hình 3). Chứng minh rằng $SM \perp CD$.

Lời giải



Hình 3

Vì $SA = SB, MA = MB$ nên SM là đường trung trực của AB trong (SAB) . Suy ra $SM \perp AB$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$.

Từ đó, suy ra $SM \perp CD$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Hình 6 gợi nên hình ảnh 5 cặp đường thẳng vuông góc. Hãy chỉ ra 5 cặp đường thẳng đó.



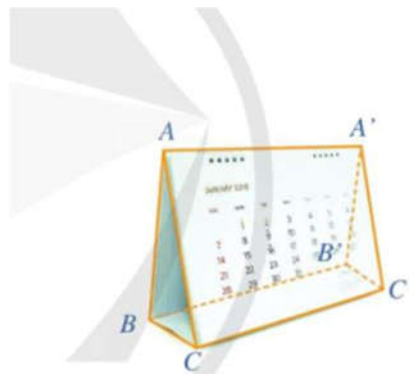
Hình 6

Lời giải

Trong hình 6 có các cặp đường thẳng vuông góc lần lượt là: $a \perp c$, $c \perp b$, $c \perp d$, $a \perp b$, $b \perp d$.

Bài 2. Trong hình 7 cho $ABB'A'$, $BCC'B'$, $ACC'A'$ là các hình chữ nhật.

Chứng minh rằng $AC \perp CC'$, $AA' \perp BC$.



Hình 7

(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Lời giải

Ta có $AB \perp BB'$, mặt khác $BB' \parallel CC' \Rightarrow AA' \perp BC$.

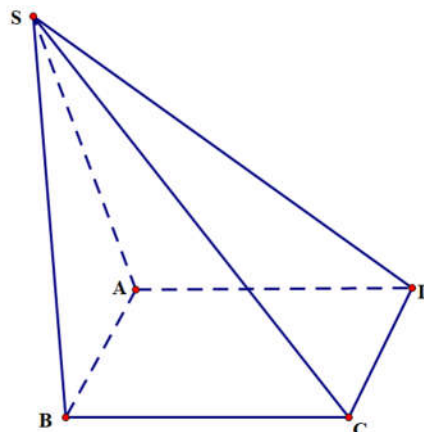
Ta có: $BB' \perp BC$ mà $BB' \parallel AA' \Rightarrow AA' \perp BC$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $\widehat{SAB} = 100^\circ$ (Hình 8). Tính góc giữa hai đường thẳng:

a) SA và AB ;

b) SA và CD .

Lời giải



a) $\widehat{(SA, AB)} = \widehat{SAB} = 100^\circ$.

b) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$.

$$\Rightarrow (\widehat{SA, CD}) = (\widehat{SA, AB}) = \widehat{SAB} = 100^\circ.$$

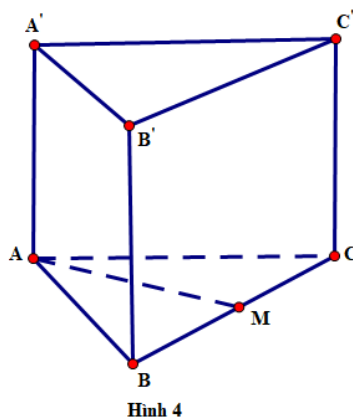
Bài 4. Bạn Hoa nói rằng: “Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì a và b vuông góc với nhau”. Bạn Hoa nói đúng hay sai? Vì sao?

Lời giải

Bạn Hoa nói sai. Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì a và b song song với nhau.

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác đều và $ABB'A'$ là hình chữ nhật. Gọi M là trung điểm của BC (Hình 4).



Hình 4

a) Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$ bằng:

- A.** 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Chọn C

b) Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CC' bằng:

- A.** 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Chọn D

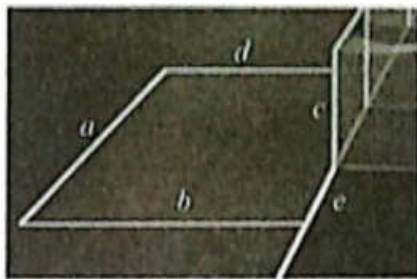
c) Số đo góc giữa hai đường thẳng AM và $A'C'$ bằng:

- A.** 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Chọn A

2. Hình 5 gợi nên hình ảnh một số cặp đường thẳng vuông góc với nhau. Hãy chỉ ra ba cặp đường thẳng vuông góc với nhau.



Hình 5

Lời giải

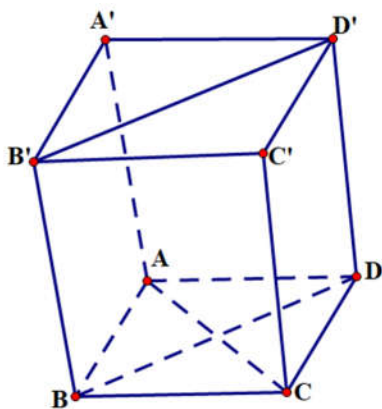
Ba cặp đường thẳng vuông góc có thể là a và b ; b và c ; c và d .

3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông.

a) Chứng minh rằng $AB \perp A'D'$ và $AC \perp B'D'$.

b) Tính góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B'$.

Lời giải



Hình 51

a) Vì $ABB'A'$ là hình bình hành nên $AB \parallel A'B'$.

Do $A'B'C'D'$ là hình vuông nên $A'D' \perp A'B'$. Từ đó, suy ra $AB \perp A'D'$.

Vì $BDD'B'$ có $BB' \parallel DD'$ và $BB' = DD'$ nên $BDD'B'$ là hình bình hành, suy ra $BD \parallel B'D'$. Mà $AC \perp BD$ do $ABCD$ là hình vuông. Như vậy, ta có $AC \perp B'D'$.

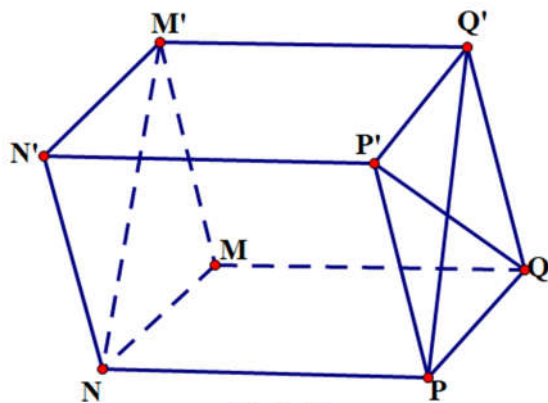
b) Xét hình vuông $ABCD$ có $(AC, AB) = \widehat{CAB} = 45^\circ$.

Mà $AB \parallel A'B'$ nên $(AC, A'B') = (AC, AB) = 45^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B'$ bằng 45° .

4. Cho hình lăng trụ $MNPQ.MN'P'Q'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng $MN \perp P'Q$.

Lời giải



Hình 52

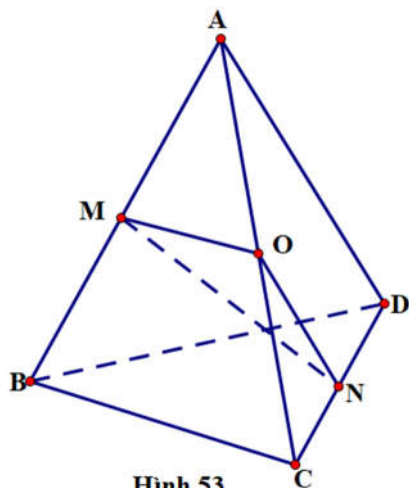
Vì $PQQ'P'$ là hình thoi (do các cạnh bằng nhau) nên $P'Q \perp PQ'$.

Do $NP = MQ = M'Q'$ và $NP \parallel MQ \parallel M'Q'$ nên $NPQM'$ là hình bình hành, suy ra $M'N \parallel PQ'$.

Từ đó ta có $M'N \perp P'Q$.

5*. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tính góc giữa hai đường thẳng AD và BC , biết $MN = a\sqrt{3}$ và $AD = BC = 2a$.

Lời giải



Hình 53

Gọi O là trung điểm AC .

Vì OM, ON lần lượt là đường trung bình của hai tam giác ABC, CAD nên $OM \parallel BC, ON \parallel AD$ và

$$OM = \frac{1}{2}CB = a, ON = \frac{1}{2}AD = a.$$

Khi đó $(AD, BC) = (ON, OM)$.

Xét tam giác OMN có:

$$\cos \widehat{MON} = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM \cdot ON} = \frac{a^2 + a^2 - (a\sqrt{3})^2}{2a \cdot a} = -\frac{1}{2}$$

nên $\widehat{MON} = 120^\circ$.

Suy ra $(AD, BC) = (ON, OM) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

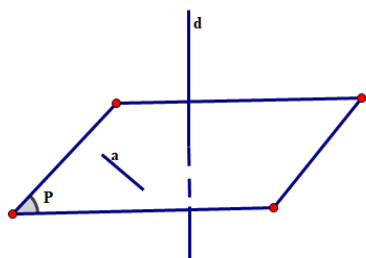
Vậy góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 60° .

BÀI 2: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu đường thẳng d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) (Hình 6), kí hiệu $d \perp (P)$ hoặc $(P) \perp d$.



Hình 6

2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

Nhận xét: Ta có thể chứng minh hai đường thẳng vuông góc bằng cách chứng minh một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng chứa đường thẳng kia.

3. Tính chất

- **Tính chất 1:** Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- **Tính chất 2:** Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

4. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

• Tính chất 3:

Cho hai đường thẳng song song. Một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

• Tính chất 4:

Cho hai mặt phẳng song song. Một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

5. Phép chiếu vuông góc

Cho mặt phẳng (P) và một điểm M tùy ý trong không gian. Lấy đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) , gọi giao điểm của d và (P) là M' . Điểm M' gọi là hình chiếu vuông góc (hay hình chiếu) của điểm M trên (P) .

Cho mặt phẳng (P) . Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu vuông góc M' của điểm đó lên mặt phẳng (P) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) .

Nhận xét: Vì phép chiếu vuông góc là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song (khi phương chiếu vuông góc với mặt phẳng chiếu) nên phép chiếu vuông góc có đầy đủ các tính chất của phép chiếu song song.

6. Định lý ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) . Khi đó, d vuông góc với a khi và chỉ khi d vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P) .

B. CÁC DẠNG TOÁN

Vấn đề 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, hai đường thẳng vuông góc

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC . Có bao nhiêu đường thẳng đi qua A và vuông góc với cả AB, AC ?

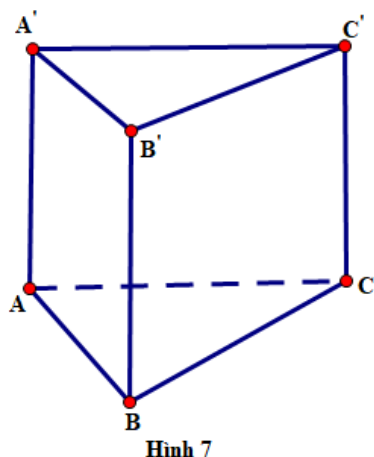
Lời giải

Giả sử đường thẳng d đi qua A và vuông góc với cả AB và AC . Khi đó, đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Suy ra đường thẳng d là duy nhất.

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' \perp (ABC)$ (Hình 7). Chứng minh rằng:

a) $BB' \perp (A'B'C')$; b) $AA' \perp (A'B'C')$.

Lời giải



a) Vì $BB' \parallel AA'$ và $AA' \perp (ABC)$ nên $BB' \perp (A'B'C')$.

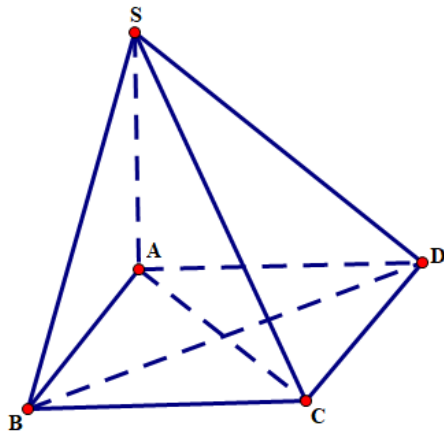
b) Vì $(A'B'C') \parallel (ABC)$ và $AA' \perp (ABC)$ nên $AA' \perp (A'B'C')$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $ABCD$ là hình chữ nhật thì $BC \perp (SAB)$;

a) Nếu $ABCD$ là hình thoi thì $SC \perp BD$.

Lời giải



Hình 8

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ và $BC \subset (ABCD)$ nên $SA \perp BC$.

Mà $BC \perp BA$ vì $ABCD$ là hình chữ nhật, BA cắt SA trong mặt phẳng (SAB) . Suy ra $BC \perp (SAB)$.

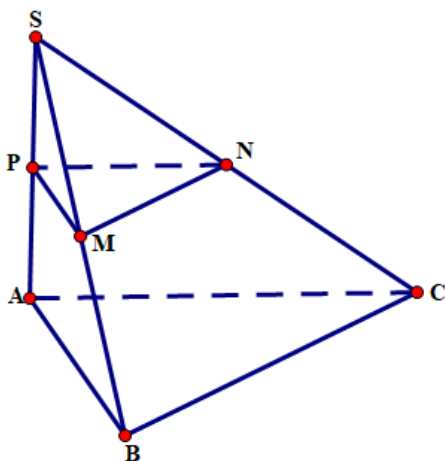
b) Vì $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$.

Mà $BD \perp AC$ nên theo định lý ba đường vuông góc, ta có $BD \perp SC$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABC)$, $BC \perp AB$. Lấy hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC và điểm P nằm trên cạnh SA . Chứng minh rằng tam giác MNP là tam giác vuông.

Lời giải



Vì $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC)$ nên $SA \perp BC$.

Mà $BC \perp AB$, AB và SA cắt nhau trong mặt phẳng (SAB) . Suy ra $BC \perp (SAB)$.

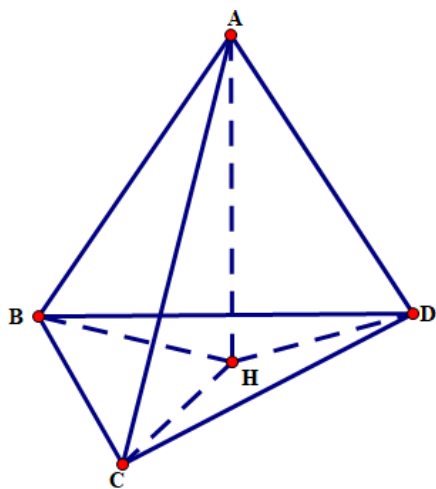
Vì M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC nên $MN \parallel BC$. Suy ra $MN \perp (SAB)$.

Mà $PM \subset (SAB)$ nên $MN \perp PM$.

Vậy tam giác MNP vuông tại M .

Ví dụ 5: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD) . Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác BCD và $AD \perp BC$.

Lời giải



Vì $AH \perp (BCD)$ nên HB, HC, HD lần lượt là hình chiếu của AB, AC, AD trên mặt phẳng (BCD) .

Mà $CD \perp AB, BD \perp AC$ nên theo định lý ba đường vuông góc, ta có $CD \perp BH, BD \perp CH$. Suy ra H là trực tâm của tam giác BCD .

Khi đó $BC \perp HD$. Mà HD là hình chiếu của AD trên mặt phẳng (BCD) nên theo định lý ba đường vuông góc, ta có $BC \perp AD$.

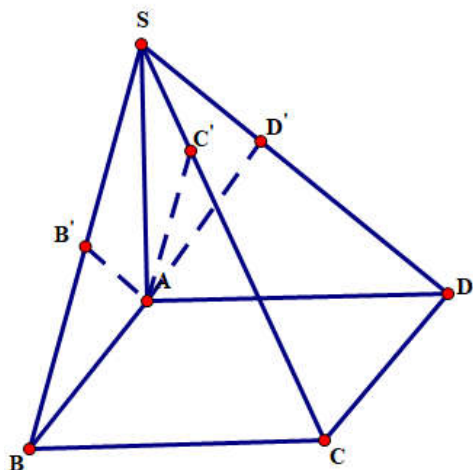
Vấn đề 2. Vận dụng trong một số bài toán xác định vị trí tương đối giữa các đối tượng của hình học không gian

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Gọi B', C', D' lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC, SD .

Chứng minh rằng:

- $SC \perp (AB'C')$ và $SC \perp (AC'D')$;
- Bốn điểm A, B', C', D' cùng nằm trên một mặt phẳng.

Lời giải



a) Vì $SA \perp (ABCD)$ và $BC \subset (ABCD)$ nên $SA \perp BC$.

Mà $BC \perp BA$ vì $ABCD$ là hình chữ nhật và SA, BA cắt nhau trong mặt phẳng (SAB) . Suy ra $BC \perp (SAB)$.

Ngoài ra, $AB' \subset (SAB)$ nên $BC \perp AB'$. Mà $AB' \perp SB$ vì SB, BC cắt nhau trong mặt phẳng (SBC) nên $AB' \perp (SBC)$.

Vì $SC \subset (SBC)$ nên $AB' \perp SC$. Mà $SC \perp AC'$ và AB', AC' cắt nhau trong mặt phẳng $(AB'C')$ nên $SC \perp (AB'C')$.

Tương tự ta chứng minh được $SC \perp (AC'D')$.

b) Vì hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(AC'D')$ cùng đi qua điểm A và vuông góc với SC nên hai mặt phẳng này trùng nhau.

Vậy bốn điểm A, B', C', D' cùng nằm trên một mặt phẳng.

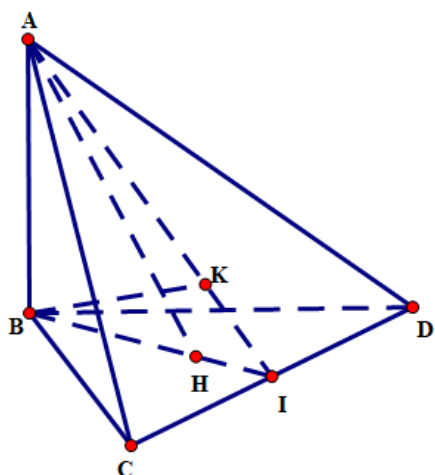
Ví dụ 7: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, các tam giác BCD và ACD là những tam giác nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, ACD . Chứng minh rằng:

a) $CD \perp (ABH)$ và $CD \perp (ABK)$;

b) Bốn điểm A, B, H, K cùng thuộc một mặt phẳng.

c) Ba đường thẳng AK, BH, CD cùng đi qua một điểm.

Lời giải



a) Vì $AB \perp (BCD)$ và $CD \subset (BCD)$ nên $AB \perp CD$.

Mà $BH \perp CD$ vì H là trực tâm của tam giác BCD và AB, BH cắt nhau trong mặt phẳng (ABH) nên $CD \perp (ABH)$.

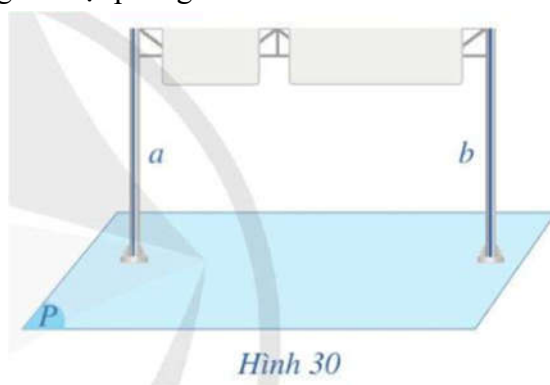
Tương tự ta chứng minh được $CD \perp (ABK)$.

b) Vì hai mặt phẳng (ABH) và (ABK) cùng đi qua điểm A và vuông góc với CD nên hai mặt phẳng này trùng nhau. Vậy bốn điểm A, B, H, K cùng thuộc một mặt phẳng.

c) Trong mặt phẳng (BCD) , gọi I là giao điểm của BH và CD . Khi đó, ba điểm A, K, I đều thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABHK)$ và (ACD) . Suy ra A, K, I thẳng hàng. Vậy ba đường thẳng AK, BH, CD cùng đi qua một điểm.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Quan sát Hình 30 (hai cột của biển báo, mặt đường), cho biết hình đó gợi nên tính chất nào về quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.



Hình 30

Lời giải

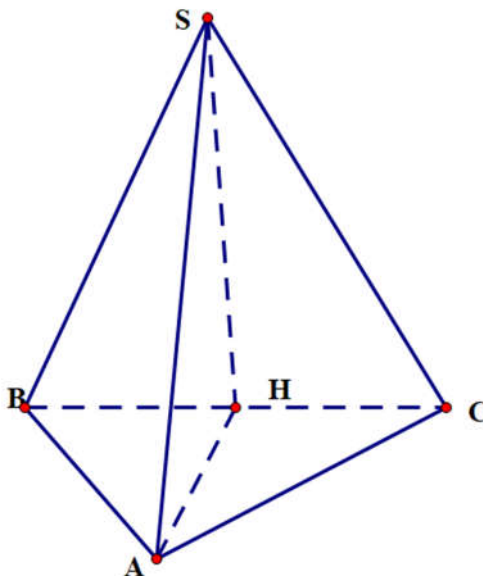
- Cho hai đường thẳng song song. Một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) .

a) Xác định hình chiếu của các đường thẳng SA, SB, SC trên mặt phẳng (ABC) .

b) Giả sử $BC \perp SA, CA \perp SB$. Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác ABC và $AB \perp SC$.

Lời giải



a) Để xác định hình chiếu của các đường thẳng SA, SB, SC trên mặt phẳng (ABC) , ta có thể vẽ đường thẳng vuông góc từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) , kết hợp với việc vẽ các đường thẳng từ A, B, C vuông góc với mặt phẳng (ABC) để tìm hình chiếu của các đường thẳng đó. Hình chiếu của SA, SB, SC lần lượt là AD, BE, CF .

b) Vì $BC \perp SA$ và $CA \perp SB$, nên BC và CA lần lượt là các đường vuông góc với SA và SB . Do đó, ta có:

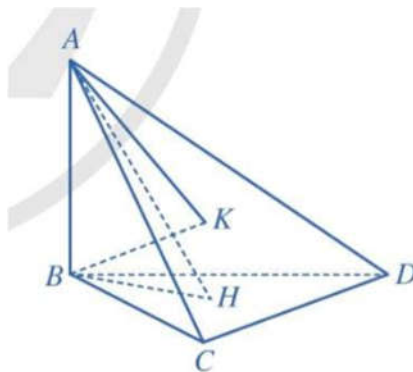
- $SA \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp BC$ và $SK \perp AB$ (trong đó H và K lần lượt là hình chiếu của S xuống BC và AB)
- $SB \perp (ABC) \Rightarrow SJ \perp AC$ và $SL \perp AB$ (trong đó J và L lần lượt là hình chiếu của S xuống AC và AB)
- $SC \perp (ABC) \Rightarrow SM \perp AB$ và $SN \perp AC$ (trong đó M và N lần lượt là hình chiếu của S xuống AB và AC)

Khi đó, ta thấy rằng tam giác ABC có ba đường cao HN, KM và LJ , nên H là trực tâm của tam giác ABC (vì trực tâm là điểm giao điểm của ba đường cao của tam giác).

Bên cạnh đó, ta có $AB \perp SL$ (vì AB vuông góc với mặt phẳng (ABC) , SL vuông góc với AB), và từ đó suy ra $AB \perp SC$ (vì SL là hình chiếu của SC xuống AB). Vậy $AB \perp SC$.

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, các tam giác BCD và ACD là những tam giác nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, ACD (hình 31). Chứng minh rằng:

- $CD \perp (ABH)$;
- $CD \perp (ABK)$;
- Ba đường thẳng AK, BH, CD cùng đi qua một điểm.



Hình 31

Lời giải

a) Vì $AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp CD$ (1)

Có H là trực tâm của tam giác BCD $\Rightarrow BH \perp CD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CD \perp (ABH)$

b) Vì $AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp CD$ (1)

Có K là trực tâm của tam giác ABD $\Rightarrow AK \perp CD$ (2)

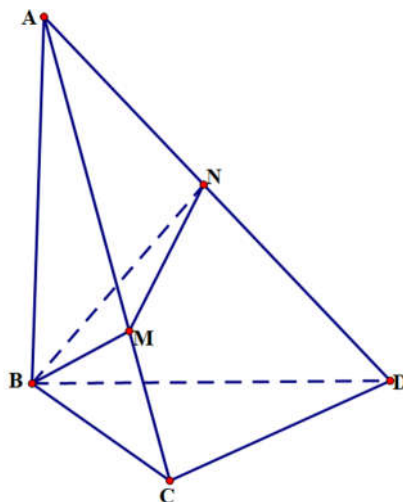
Từ (1) và (2) $\Rightarrow CD \perp (ABK)$

Bài 4. Cho tứ diện ABCD có $AB \perp (BCD)$, $BC \perp CD$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên AC và AD. Chứng minh rằng:

a) $CD \perp BM$;

b) $BM \perp MN$.

Lời giải



a) Vì $AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp CD$

Mà $CD \perp BC \Rightarrow CD \perp (ABC)$

Lại có $BM \in (ABC) \Rightarrow CD \perp BM$

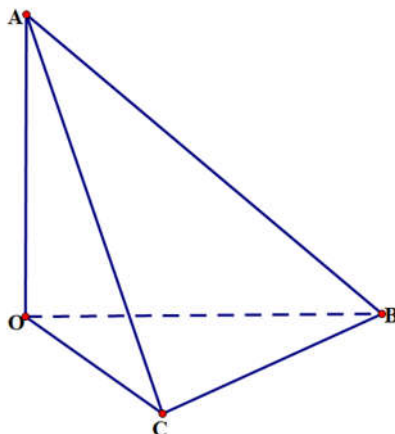
b) Ta có $\left. \begin{array}{l} BM \perp CD \\ BM \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow BM \perp (ACD)$

Mà $MN \in (ACD) \Rightarrow BM \perp MN$

Bài 5. Cho hình chóp O.ABC có $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 90^\circ$. Chứng minh rằng:

- a) $BC \perp OA$; b) $CA \perp OB$; c) $AB \perp OC$.

Lời giải



a) Ta có: $\left. \begin{matrix} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{matrix} \right\} \Rightarrow OA \perp (OBC)$

Mà $BC \in (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$

b) Ta có $\left. \begin{matrix} OA \perp OB \\ OB \perp OC \end{matrix} \right\} \Rightarrow OB \perp (OAC)$

Mà $CA \in (OAC) \Rightarrow CA \perp OB$

c) Ta có $\left. \begin{matrix} OC \perp OB \\ OA \perp OC \end{matrix} \right\} \Rightarrow OC \perp (OAB)$

Mà $AB \in (OAB) \Rightarrow AB \perp OC$

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

6. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng c không nằm trên (P) . Khi đó, $(P) \perp c$ nếu:

- A.** Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b thoả mãn a, b cùng vuông góc với đường thẳng c .
B. Mặt phẳng (P) chứa một đường thẳng vuông góc với đường thẳng c .
C. Mặt phẳng (P) chứa ít nhất hai đường thẳng vuông góc với đường thẳng c .
D. Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b thoả mãn a, b cùng vuông góc với đường thẳng c

Lời giải

Chọn D

7. Cho tam giác ABC . Số mặt phẳng đi qua A và vuông góc với cả AB, AC là:

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

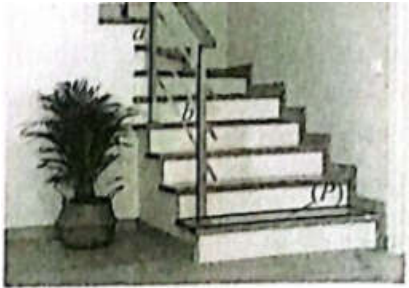
8. Cho điểm I và hai đường thẳng a, b thoả mãn $a // b$. Số mặt phẳng đi qua I và vuông góc với cả a, b là:

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

9. Hình 13 gọi nên hình ảnh các đường thẳng a, b và mặt phẳng (P) trong không gian. Phát biểu nào sau đây là phù hợp?



Hình 13

- A. $a // b, b // (P)$.
 B. $a \perp b, b // (P)$.
 C. $a \perp b, b \perp (P)$.
 D. $a // b, b \perp (P)$.

Lời giải

Chọn D

10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$. Xét những phát biểu sau:

- (1): AB là hình chiếu của SB trên (ABC) ;
 (2): SB là hình chiếu của SC trên (SAB) ;
 (3): AC là hình chiếu của SC trên (ABC) .

Số phát biểu đúng là:

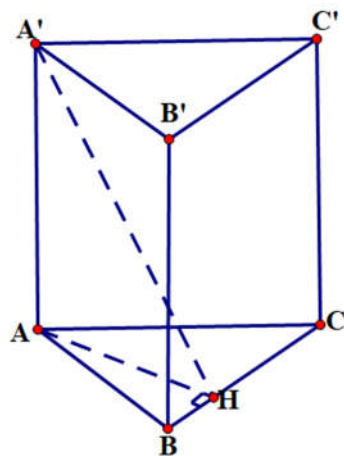
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn D

11. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' \perp (ABC)$. Trong mặt phẳng (ABC) , gọi H là hình chiếu của A trên BC . Chứng minh rằng $BC \perp A'H$.

Lời giải



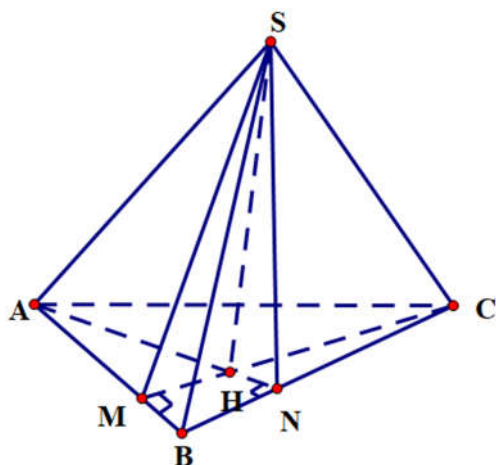
Hình 54

Vì $AA' \perp (ABC)$ nên AH là hình chiếu của $A'H$ trên mặt phẳng (ABC) .

Mà $BC \perp AH$ nên theo Định lý ba đường vuông góc, suy ra $BC \perp A'H$.

12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 90^\circ$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng $SH \perp (ABC)$.

Lời giải



Gọi AN, CM là hai đường cao của tam giác ABC . Khi đó, H là giao điểm của AN và CM .

Theo giả thiết, $SA \perp SB, SA \perp SC$ mà SB, SC cắt nhau trong mặt phẳng (SBC) nên $SA \perp (SBC)$. Mà $BC \subset (SBC)$ nên $SA \perp BC$.

Ngoài ra, $AH \perp BC$ và SA, AH cắt nhau trong mặt phẳng (SAH) nên $BC \perp (SAH)$.

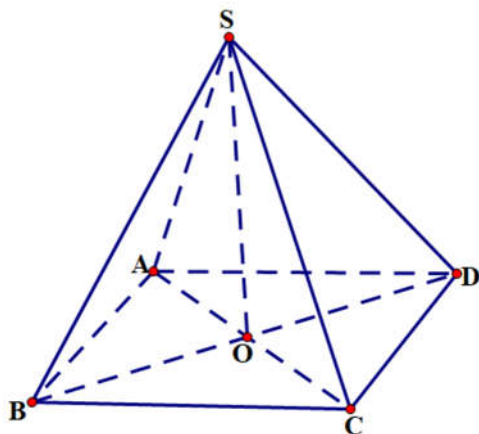
Mà $SH \subset (SAH)$ nên $BC \perp SH$.

Tương tự, ta có: $AB \perp SH$.

Bên cạnh đó, AB, BC cắt nhau trong mặt phẳng (ABC) nên $SH \perp (ABC)$.

13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành và $SA = SC, SB = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

Lời giải



Vì $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm của AC và BD .

Xét tam giác SAC cân tại S có SO là đường trung tuyến nên SO là đường cao, suy ra $SO \perp AC$.

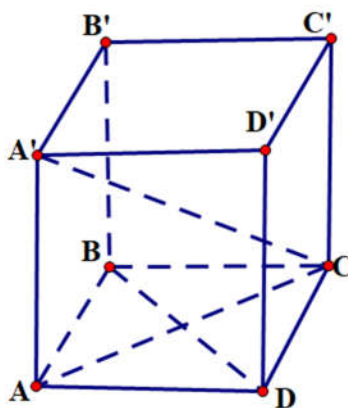
Xét tam giác SBD cân tại S có SO là đường trung tuyến nên SO là đường cao, suy ra $SO \perp BD$.

Mà AC, BD cắt nhau trong mặt phẳng $(ABCD)$. Do đó $SO \perp (ABCD)$.

14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thoi, $AA' \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $BB' \perp (A'B'C'D')$; b) $BD \perp A'C$

Lời giải



a) Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $AA' \parallel BB'$. Mà $AA' \perp (ABCD)$ nên $BB' \perp (ABCD)$.

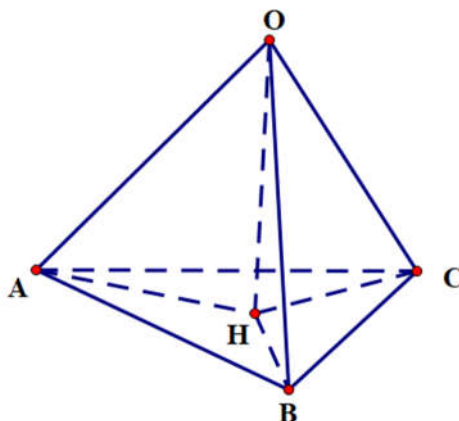
Ngoài ra, ta cũng có $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$ nên $BB' \perp (A'B'C'D')$.

b) Vì $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$. Do $AA' \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của $A'C$ trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Theo định lý ba đường vuông góc suy ra $BD \perp A'C$.

15. Cho hình chóp $O.ABC$ và điểm H không thuộc các đường thẳng AB, BC, CA sao cho $\widehat{OHA} = \widehat{OHB} = \widehat{OHC} = 90^\circ$. Chứng minh rằng H thuộc mặt phẳng (ABC) .

Lời giải



Vì H không thuộc các đường thẳng AB, BC, CA nên HA, HB, HC đôi một cắt nhau.

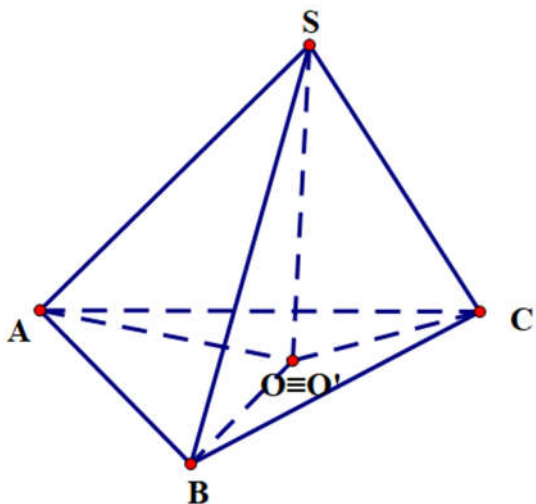
Theo giả thiết, $OH \perp HA, OH \perp HB$ mà HA, HB cắt nhau nên $OH \perp (HAB)$. Tương tự, $OH \perp (HBC)$.

Vì (HAB) và (HBC) cùng đi qua H và vuông góc với OH nên hai mặt phẳng đó trùng nhau.

Suy ra H thuộc mặt phẳng (ABC) .

16. Cho hình chóp $S.ABC$ thỏa mãn $SA = SB = SC$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC . Chứng minh rằng $SO \perp (ABC)$.

Lời giải



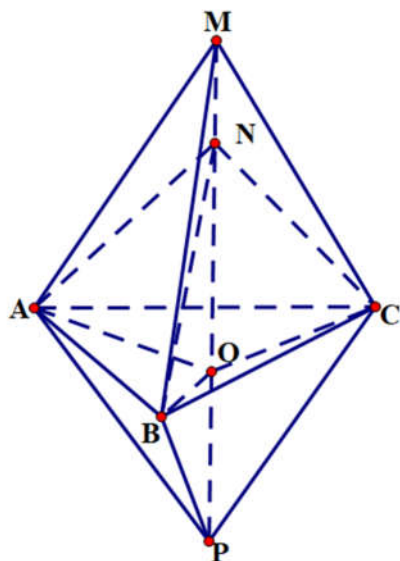
Gọi O' là hình chiếu của S trên (ABC) . Khi đó, $SO' \perp (ABC)$. Mà $O'A, O'B, O'C$ đều nằm trên (ABC) nên $SO' \perp OA, SO' \perp OB, SO' \perp OC$.

Xét ba tam giác $SO'A, SO'B, SO'C$ vuông tại O' có $SA = SB = SC$ và SO' chung nên ba tam giác đó bằng nhau. Do đó, $O'A = O'B = O'C$.

Suy ra O' là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC hay O' trùng O . Vậy $SO \perp (ABC)$

17. Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P đôi một phân biệt thỏa mãn $MA = MB = MC$, $NA = NB = NC$, $PA = PB = PC$. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Lời giải



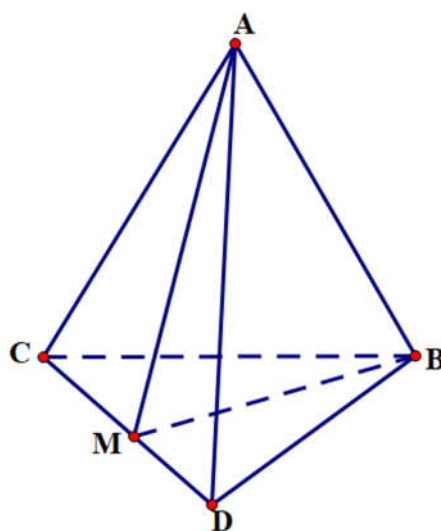
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC .

Giả sử ba điểm M, N, P đều không thuộc mặt phẳng (ABC) , áp dụng kết quả Bài 16 cho ba hình chóp $M.ABC, N.ABC, P.ABC$ ta có $MO \perp (ABC), NO \perp (ABC), PO \perp (ABC)$. Do đó ba đường thẳng MO, NO, PO trùng nhau hay M, N, P thẳng hàng.

Giả sử trong ba điểm M, N, P có một điểm nằm trên (ABC) . Khi đó, theo giả thiết ta có điểm đó trùng O . Như vậy, cùng với kết quả trên ta có ba điểm M, N, P thẳng hàng.

18. Cho hình tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh $AB \perp CD$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của CD .

Vì $ABCD$ là hình tứ diện đều nên hai tam giác ACD và BCD là các tam giác đều.

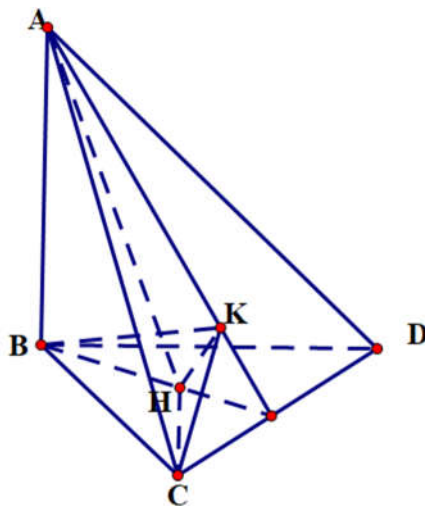
Suy ra $AM \perp CD, BM \perp CD$.

Mà AM, BM cắt nhau trong mặt phẳng (ABM) nên $CD \perp (ABM)$. Ngoài ra, $AB \subset (ABM)$. Do đó, ta có $AB \perp CD$.

19. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, các tam giác BCD và ACD là những tam giác nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, ACD . Chứng minh rằng:

a) $AD \perp CH$; b*) $HK \perp (ACD)$.

Lời giải



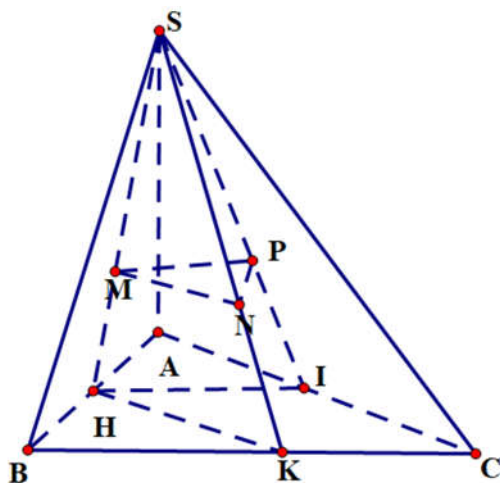
a) Vì $AB \perp (BCD), CH \subset (BCD)$ nên $AB \perp CH$.

Do H là trực tâm của tam giác (BCD) nên $CH \perp BD$. Mà AB, BD cắt nhau trong mặt phẳng (ABD) nên $CH \perp (ABD)$. Ngoài ra, $AD \subset (ABD)$ nên $AD \perp CH$.

b*) Vì K là trực tâm của tam giác (ACD) nên $CK \perp AD$. Mà CK, CH cắt nhau trong mặt phẳng (CHK) nên $AD \perp (CHK)$. Ngoài ra, $HK \subset (CHK)$ nên $AD \perp HK$. Áp dụng kết quả của Ví dụ 7 trang 93, ta có $CD \perp HK$. Bên cạnh đó, AC, CD cắt nhau trong mặt phẳng (ACD) nên $HK \perp (ACD)$.

20. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của ba tam giác SAB, SBC, SCA . Chứng minh rằng $SA \perp (MNP)$.

Lời giải



Gọi H, K, I lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Theo giả thiết ta có: $\frac{SM}{SH} = \frac{SN}{SK} = \frac{SP}{SI} = \frac{2}{3}$.

Do đó, trong tam giác SHK có $MN \parallel HK$, trong tam giác SHI có $MP \parallel HI$. Mà $HK \subset (ABC)$, $HI \subset (ABC)$ nên $MN \parallel (ABC)$, $MP \parallel (ABC)$.

Ngoài ra, MN, MP cắt nhau trong mặt phẳng (MNP) nên $(MNP) \parallel (ABC)$. Mà $SA \perp (ABC)$.

Vậy $SA \perp (MNP)$.

21. Cho hình chóp $S.ABCD$ thỏa mãn $SA = SB = SC = SD$. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua cả bốn đỉnh của tứ giác $ABCD$.

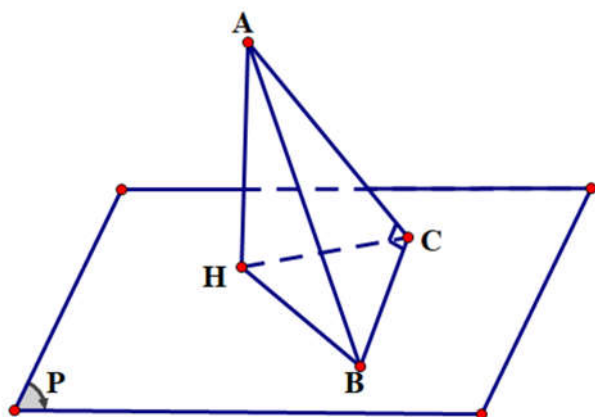
Lời giải

Gọi O là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Chứng minh tương tự Bài 16, ta có $OA = OB = OC = OD$.

Suy ra O là tâm đường tròn đi qua bốn đỉnh tứ giác $ABCD$

22*. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B sao cho B thuộc (P) và A không thuộc (P) . Điểm C chuyển động trên mặt phẳng (P) thỏa mãn $\widehat{ACB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng C chuyển động trên một đường tròn cố định trong (P) .

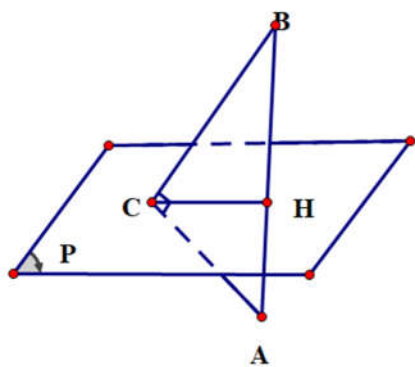
Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A trên (P) . Khi đó H cố định và HC là hình chiếu của AC trên (P) . Vì $BC \perp AC$ nên theo Định lý ba đường vuông góc ta có $BC \perp HC$. Do đó C chuyển động trên đường tròn đường kính HB cố định nằm trong (P) .

23*. Cho đoạn thẳng AB và mặt phẳng (P) sao cho $(P) \perp AB$ và (P) cắt đoạn thẳng AB tại điểm H thỏa mãn $HA = 4$ cm, $HB = 9$ cm. Điểm C chuyển động trong mặt phẳng (P) thỏa mãn $\widehat{ACB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng điểm C thuộc đường tròn tâm H bán kính 6 cm trong mặt phẳng (P) .

Lời giải



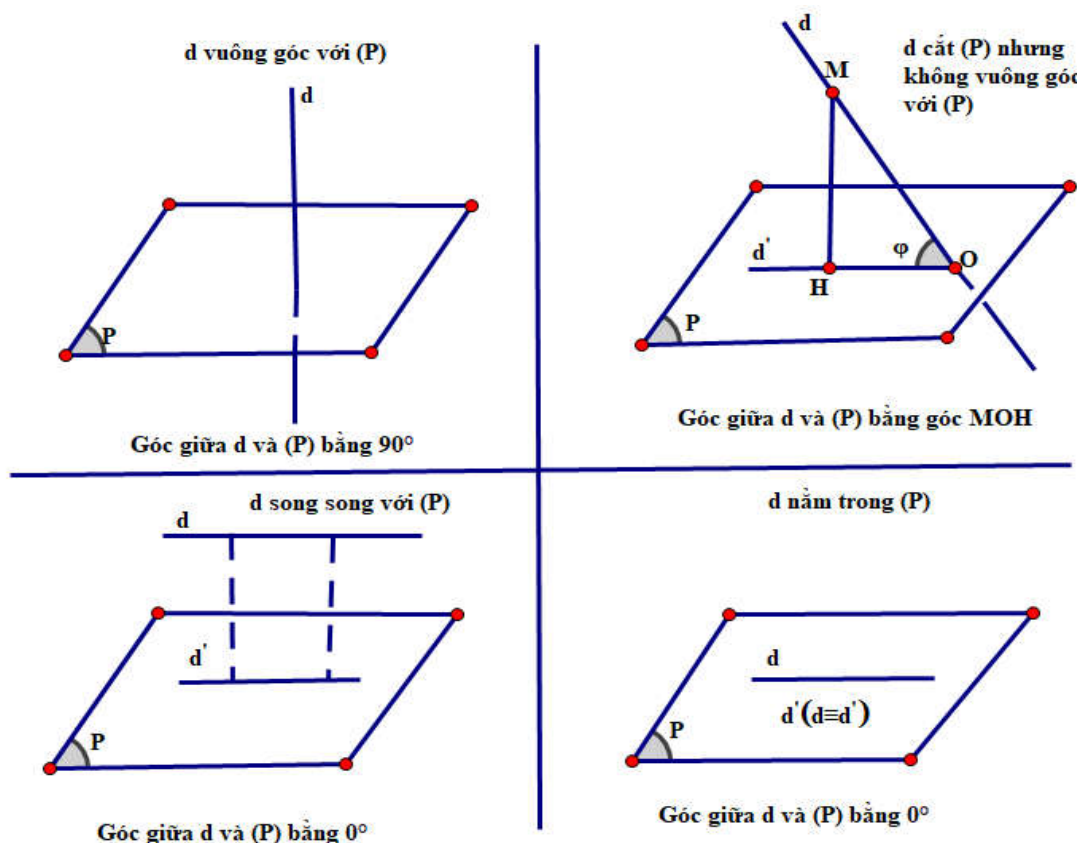
Vì $AC \perp CB$ nên A, B, C không thẳng hàng. Do $AB \perp (P), HC \subset (P)$ nên $AB \perp HC$. Ta có ΔHBC đồng dạng ΔHCA nên $HC^2 = HA \cdot HB$, suy ra $HC = \sqrt{4.9} = 6$ (cm). Vậy C thuộc đường tròn tâm H bán kính 6 cm trong (P) .

BÀI 3: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG. GÓC NHỊ DIỆN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

- Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) , ta có định nghĩa sau:
- Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa d và (P) bằng 90° .
- Nếu đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu d' của đường thẳng d trên (P) .



Hình 14

Nhận xét: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng có số đo từ 0° đến 90° (Hình 14).

2. Góc nhị diện

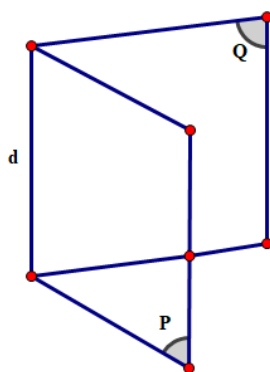
a) Nửa mặt phẳng

Một đường thẳng nằm trong mặt phẳng chia mặt phẳng đó thành hai phần, mỗi phần được gọi là một nửa mặt phẳng và đường thẳng đó được gọi là bờ của mỗi nửa mặt phẳng này.

b) Góc nhị diện

Góc nhị diện là hình gồm hai nửa mặt phẳng có chung bờ.

Ví dụ: Xét góc nhị diện gồm hai nửa mặt phẳng (P) và (Q) có chung bờ là đường thẳng d (Hình 15), kí hiệu là $[M, d, N]$. Đường thẳng d gọi là cạnh của góc nhị diện, mỗi nửa mặt phẳng (P) và (Q) gọi là một mặt của góc nhị diện.

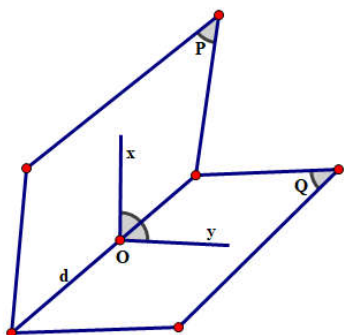


Chú ý: Góc nhị diện còn được kí hiệu là $[M, d, N]$ với M, N lần lượt là các điểm thuộc các nửa mặt phẳng $(P), (Q)$ nhưng không thuộc đường thẳng d .

c) Góc phẳng nhị diện

Trong không gian, cho góc nhị diện. Một góc có đỉnh thuộc cạnh của góc nhị diện, hai cạnh của góc đó lần lượt thuộc hai mặt nhị diện và cùng vuông góc với cạnh của góc nhị diện, được gọi là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện đã cho.

Ví dụ: Cho góc nhị diện $[P, d, Q]$. Lấy O thuộc d , hai tia Ox, Oy lần lượt nằm trên hai nửa mặt phẳng $(P), (Q)$ và cùng vuông góc với d . Khi đó góc xOy là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[P, d, Q]$.



Nhận xét: Cạnh của góc nhị diện luôn vuông góc với mặt phẳng chứa góc phẳng nhị diện của góc nhị diện đó.

d) Số đo của góc nhị diện

- Số đo của một góc phẳng nhị diện được gọi là số đo của góc nhị diện đó.
- Nếu số đo góc phẳng nhị diện bằng 90° thì góc nhị diện đó gọi là góc nhị diện vuông.

Nhận xét: Số đo của góc nhị diện từ 0° đến 180° .

B. CÁC DẠNG TOÁN

Vấn đề 1. Xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

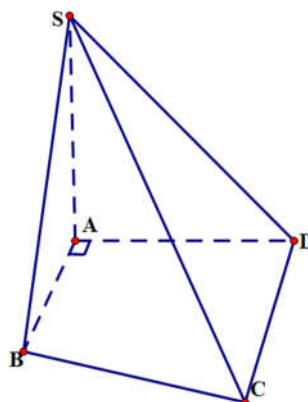
Phương pháp: Đưa bài toán về xác định góc giữa hai đường thẳng, cụ thể là góc giữa đường thẳng và hình chiếu của nó trên mặt phẳng.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD), AB \perp AD, SA = AD = a\sqrt{3}, AB = a$. Tính số đo của:

a) Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) .

Lời giải



Hình 17

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$. Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa SB và AB , hay bằng $\widehat{SBA}$.

Trong tam giác vuông SAB có: $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$ nên $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° .

b) Vì $SA \perp (ABCD)$ và $AD \subset (ABCD)$ nên $SA \perp AD$. Mà $AD \perp AB$ và SA, AB cắt nhau trong mặt phẳng (SAB) nên $AD \perp (SAB)$. Suy ra SA là hình chiếu của SD trên (SAB) , khi đó góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) bằng góc giữa SD và SA , hay bằng $\widehat{DSA}$. Vì tam giác DSA vuông cân tại A nên $\widehat{DSA} = 45^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) bằng 45° .

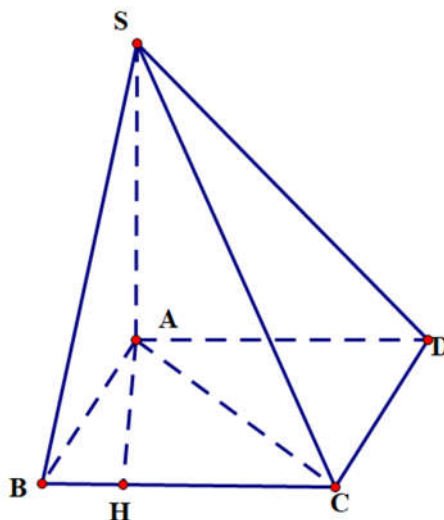
Vấn đề 2. Tính số đo của góc nhị diện

Phương pháp: Xác định vị trí của góc phẳng nhị diện (nằm trên mặt phẳng vuông góc với cạnh của góc nhị diện) rồi tính số đo của góc phẳng nhị diện đó.

Ví dụ 2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC = a$. Tính số đo của mỗi góc nhị diện sau:

a) $[B, SA, C]$; b) $[S, DA, B]$.

Lời giải



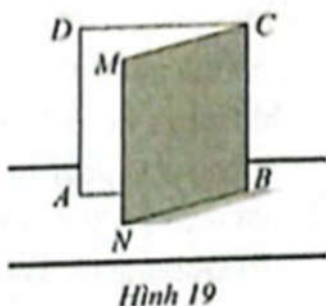
a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB, SA \perp AC$, suy ra góc BAC là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[B, SA, C]$. Do $AC = AB = BC = a$ nên tam giác ABC đều, suy ra $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Vậy góc nhị diện $[B, SA, C]$ có số đo bằng 60° .

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, lấy H thuộc BC sao cho $AH \perp AD$. Mà $SA \perp AD$ (vì $SA \perp (ABCD)$ và $AD \subset (ABCD)$) nên góc SAH là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S, DA, B]$. Mặt khác, $SA \perp (ABCD)$ và $AH \subset (ABCD)$ nên $SA \perp AH$, suy ra góc SAH bằng 90° .

Vậy góc nhị diện $[S, DA, B]$ có số đo bằng 90° .

Vấn đề 3. Ứng dụng

Ví dụ 3: Hình 19 minh họa một cánh cửa và khung cửa. Cánh cửa có dạng hình chữ nhật $BCMN$ và khung cửa có dạng hình chữ nhật $ABCD$, ở đó $AB = BN$. Góc mở cửa là góc nhị diện $[A, BC, N]$. Biết chiều rộng BN của cửa là 1,2 m. Khi góc mở cửa có số đo bằng 60° thì khoảng cách giữa A và N bằng bao nhiêu?



Lời giải

Vì $AB \perp BC$ và $NB \perp BC$ nên góc ABN là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A, BC, N]$.

Vì góc mở cửa bằng 60° nên số đo góc nhị diện $[A, BC, N]$ bằng 60° , suy ra $\widehat{ABN} = 60^\circ$.

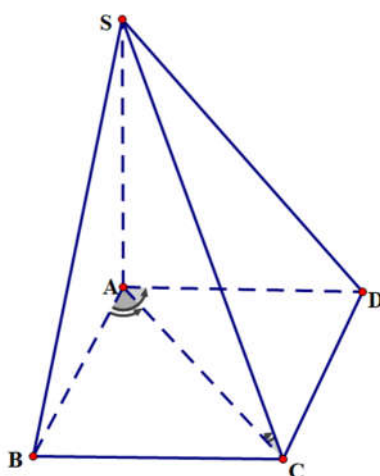
Xét tam giác ABN cân tại B có $BA = BN = 1,2$ m và $\widehat{ABN} = 60^\circ$. Khi đó tam giác ABN đều, suy ra $AN = 1,2$ m, hay khoảng cách giữa A và N bằng 1,2 m.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC = a$.

- Tính số đo của góc nhị diện $[B, SA, C]$.
- Tính số đo của góc nhị diện $[B, SA, D]$.
- Biết $SA = a$, tính số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AB và AC vuông góc với SA . Vậy $\widehat{BAC}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SA, C]$

Do $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AB = BC = a$

Mà $AC = a$

$\Rightarrow$ Tam giác ABC đều $\Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$

b) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AB và AD vuông góc với SA . Vậy $\widehat{BAD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SA, D]$

Do $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AD = DC = a$

Mà $AC = a$

$\Rightarrow$ Tam giác ADC đều $\Rightarrow \widehat{DAC} = 60^\circ$

$$\widehat{BAD} = \widehat{DAC} + \widehat{BAC} = 120^\circ$$

c) $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$

Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là: $\widehat{SCA}$

Xét tam giác SCA vuông tại A

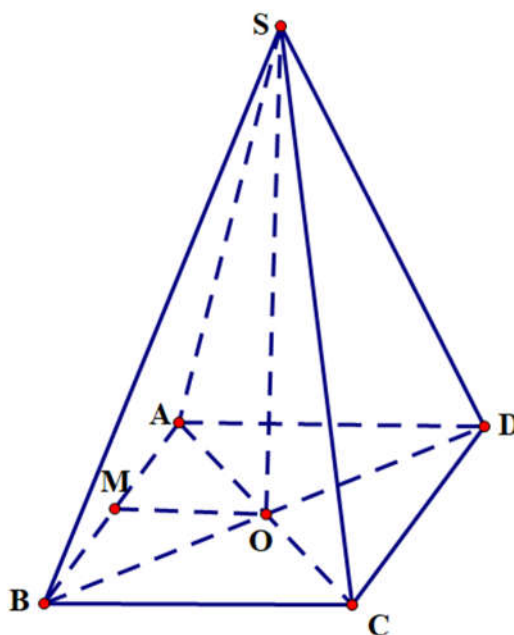
$$\Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = 1$$

$$\Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ$$

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại O , $SO \perp (ABCD)$, tam giác SAC là tam giác đều.

- a) Tính số đo của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.
- b) Chứng minh rằng $AC \perp (SBD)$. Tính số đo của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .
- c) Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính số đo của góc nhị diện $[M, SO, D]$.

Lời giải



$$SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SA, (ABCD)) = (SA, OA) = \widehat{SAO}$$

Tam giác SAC là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{SAO} = 60^\circ$

$$\Rightarrow (SA, (ABCD)) = 60^\circ$$

b) $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$

$$SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AC$$

$$\Rightarrow AC \perp (SBD)$$

$$\Rightarrow (SA, (SBD)) = (SA, SO) = \widehat{ASO} = \frac{1}{2} \widehat{ASC} = 30^\circ$$

c) $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp MO, SO \perp DO$

$\Rightarrow \widehat{MOD}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[M, SO, D]$

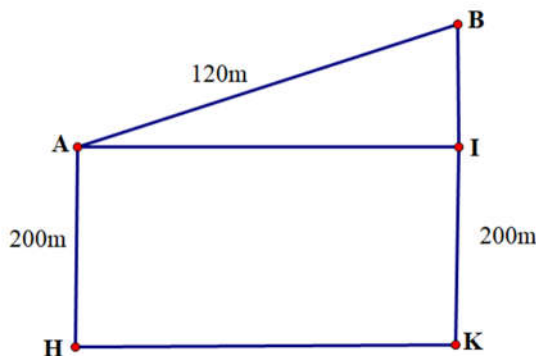
Có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \widehat{AOD} = 90^\circ$

Tam giác AMO vuông cân tại M $\Rightarrow \widehat{AOM} = 45^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{MOD} = \widehat{AOM} + \widehat{AOD} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

Bài 3. Dốc là đoạn đường thẳng nối hai khu vực hay hai vùng có độ cao khác nhau. Độ dốc được xác định bằng góc giữa dốc và mặt phẳng nằm ngang, ở đó độ dốc lớn nhất là 100%, tương ứng với góc 90° (độ dốc 10% tương ứng với góc 9°). Giả sử có hai điểm A, B nằm ở độ cao lần lượt là 200m và 220m so với mực nước biển và đoạn dốc AB dài 120m. Độ dốc đó bằng bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải



Mô hình hoá như hình vẽ, với AB là chiều dài con dốc, AH là độ cao của điểm A so với mặt nước biển, BK là độ cao của điểm B so với mặt nước biển, BI là chiều cao của con dốc, độ lớn của góc $\widehat{BAI}$ chỉ độ dốc.

Ta có: $AH = 200, BK = 220, AB = 120$.

$AHKB$ là hình chữ nhật $\Rightarrow IK = AH = 200 \Rightarrow BI = BK - IK = 220 - 200 = 20$

Vì tam giác ABI vuông tại I nên ta có:

$$\sin \widehat{ABI} = \frac{BI}{AB} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \Rightarrow \widehat{ABI} \approx 9,59^\circ \text{ tương ứng với } 10,66\%$$

Vậy độ dốc của con dốc đó là 10,66%.

Bài 4. Trong hình 42, máy tính xách tay đang mở gợi nên hình ảnh của một góc nhị diện. Ta gọi số đo góc nhị diện đó là độ mở của màn hình máy tính. Tính độ mở của màn hình máy tính theo đơn vị độ, biết tam giác ABC có độ dài các cạnh là $AB = AC = 30$ cm và $BC = 30\sqrt{3}$ cm.



Lời giải

Gọi d là đường thẳng chứa bản lề của máy tính.

$$d \perp AB, d \perp AC$$

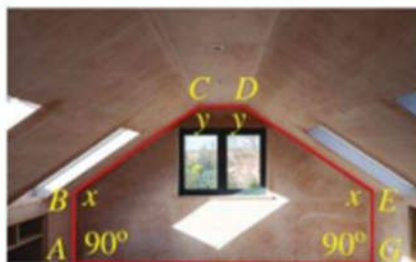
Vậy $\widehat{BAC}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện cần tính.

Xét $\triangle ABC$ có:

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{30^2 + 30^2 - (30\sqrt{3})^2}{2 \cdot 30 \cdot 30} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ$$

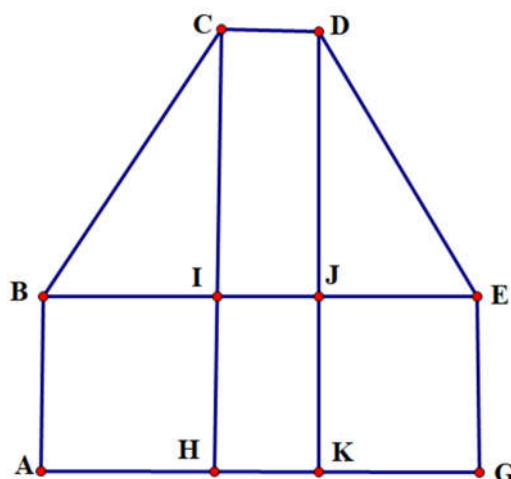
Vậy độ mở của màn hình máy tính bằng 120° .

Bài 5. Trong hình 43, xét các góc nhị diện có góc phẳng nhị diện tương ứng là $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$, $\widehat{E}$ trong cùng mặt phẳng. Lục giác $ABCDEG$ nằm trong mặt phẳng đó có $AB = GE = 2\text{m}$, $BC = DE$, $\widehat{A} = \widehat{G} = 90^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{E} = x$, $\widehat{C} = \widehat{D} = y$. Biết rằng khoảng cách từ C và D đến AG là 4m , $AG = 12\text{m}$, $CD = 1\text{m}$. Tìm x , y (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Hình 43

Lời giải



Kẻ $CH \perp AG (H \in AG)$, $DK \perp AG (K \in AG)$

Gọi $I = BE \cap CH$, $J = BE \cap DK$.

$ABEG$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BE = AB = 12$

$CDKH, CDJI$ là hình chữ nhật $\Rightarrow HK = IJ = CD = 1$

$ABIH, EGKJ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow IH = JK = AB = 2$

$$AH = GK = BI = EJ = \frac{AG - HK}{2} = \frac{12 - 1}{2} = 5,5$$

$$CH = d(C, AG) = 4 \Rightarrow CI = CH - IH = 4 - 2 = 2$$

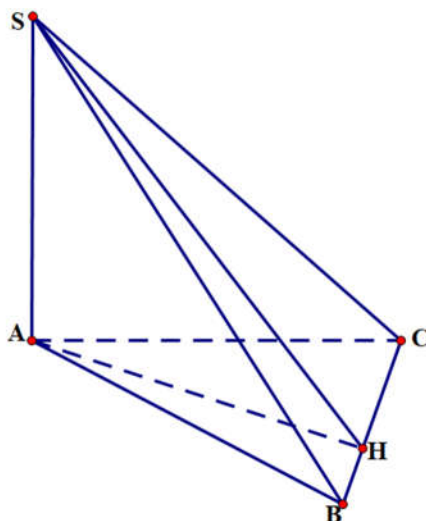
$$\triangle BCI \text{ vuông tại } I \Rightarrow \tan \widehat{CBI} = \frac{CI}{BI} = \frac{2}{5,5} = \frac{4}{11} \Rightarrow \widehat{CBI} \approx 19,98^\circ$$

$$\Rightarrow x = \widehat{ABI} + \widehat{CBI} = 90^\circ + 19,98^\circ = 110,0^\circ$$

$$\Rightarrow y = 180^\circ - x = 180^\circ - 110,0^\circ = 70,0^\circ$$

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi α là số đo của góc nhị diện $[A, BC, S]$. Chứng minh rằng tỉ số diện tích của hai tam giác ABC và SBC bằng $\cos \alpha$.

Lời giải



Kẻ $AH \perp BC (H \in BC)$

$$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$$

$$\Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$$

Vậy $\widehat{SHA}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A, BC, S]$

$$\Rightarrow \widehat{SHA} = \alpha$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH, S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2} BC \cdot SH$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle SBC}} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AH}{\frac{1}{2} BC \cdot SH} = \frac{AH}{SH} = \cos \widehat{SHA} = \cos \alpha$$

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

24. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau, đường thẳng d cắt (P) sao cho góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng $\varphi (0^\circ < \varphi < 90^\circ)$. Khi đó, góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (Q) bằng:

A. $90^\circ - \varphi$.

B. $180^\circ - \varphi$.

C. φ .

D. $90^\circ + \varphi$.

Lời giải

Chọn C

25. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau, mặt phẳng (P) cắt a sao cho góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$). Khi đó, góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) bằng:

- A. $90^\circ - \varphi$. B. φ . C. $90^\circ + \varphi$. D. $180^\circ - \varphi$.

Lời giải

Chọn B

26. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi I là hình chiếu của A trên BC , α là góc giữa đường thẳng SI và mặt phẳng (ABC) , β là số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. $\alpha = 90^\circ - \beta$. B. $\alpha = 180^\circ - \beta$. C. $\alpha = 90^\circ + \beta$. D. $\alpha = \beta$.

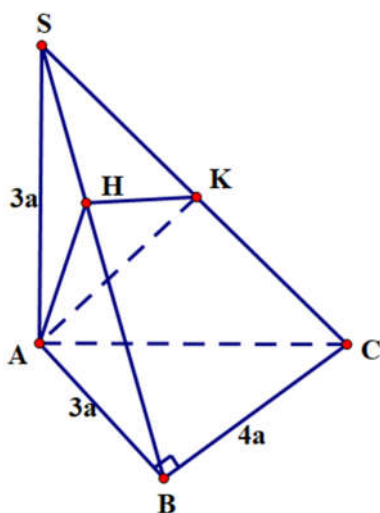
Lời giải

Chọn D

27. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, $SA = AB = 3a$, $BC = 4a$. Gọi α, β, γ lần lượt là số đo của các góc nhị diện $[B, SA, C]$, $[A, BC, S]$, $[A, SC, B]$. Tính:

a) $\cos \alpha, \cos \beta$; b*) $\cos \gamma$.

Lời giải



a) Vì $SA \perp (ABC)$, $AB \subset (ABC)$, $AC \subset (ABC)$ nên $SA \perp AB$, $SA \perp AC$. Suy ra góc BAC là góc phẳng nhị diện của $[B, SA, C]$, hay $\widehat{BAC} = \alpha$. Xét tam giác ABC vuông tại B có:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$$

$$\text{và } \cos \alpha = \cos \widehat{BAC} = \frac{BA}{AC} = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}.$$

Ta có $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp SB$ suy ra góc SBA là góc phẳng nhị diện của $[A, BC, S]$. Như vậy, ta có:

$$SB = \sqrt{AB^2 + SA^2} = \sqrt{(3a)^2 + (3a)^2} = 3\sqrt{2}a$$

$$\text{và } \cos \beta = \cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{3a}{3\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b*) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC . Ta có $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AH$. Mà $AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC)$, suy ra $AH \perp SC$. Mà $SC \perp AK$ nên $SC \perp (AHK)$, suy ra $SC \perp HK$. Do đó góc AKH là góc phẳng nhị diện của $[A, SC, B]$, hay $\widehat{AKH} = \gamma$.

$$\text{Tam giác } SAB \text{ vuông tại } A \text{ có: } AH = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{3a \cdot 3a}{3a\sqrt{2}} = \frac{3a}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Tam giác } SAC \text{ vuông tại } A \text{ có: } AK = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{3a \cdot 5a}{\sqrt{(3a)^2 + (5a)^2}} = \frac{15a}{\sqrt{34}}.$$

Tam giác AHK vuông tại H (vì $AH \perp (SBC)$ mà $HK \subset (SBC)$) có:

$$HK = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{15a}{\sqrt{34}}\right)^2 - \left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{6a}{\sqrt{17}}$$

$$\cos \gamma = \cos \widehat{AKH} = \frac{HK}{AK} = \frac{\frac{6a}{\sqrt{17}}}{\frac{15a}{\sqrt{34}}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông, AC cắt BD tại O , $SO \perp (ABCD)$. Tất cả các cạnh của hình chóp bằng a

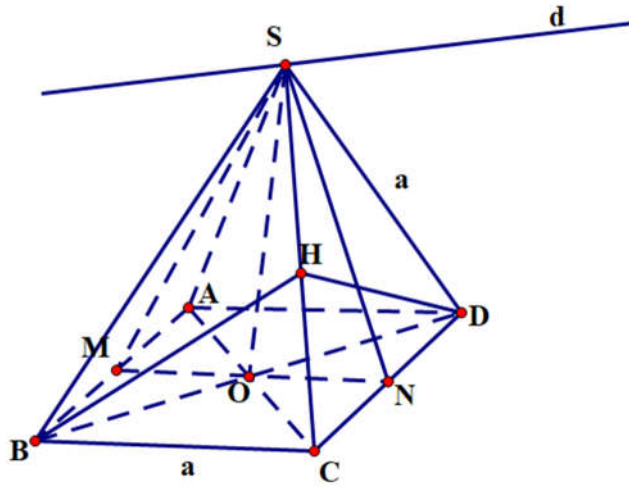
a) Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC)

b) Gọi α là số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$. Tính $\cos \alpha$

c) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) , β là số đo của góc nhị diện $[A, d, D]$. Tính $\cos \beta$

d) Gọi γ là số đo của góc nhị diện $[B, SC, D]$. Tính $\cos \gamma$

Lời giải



a) Vì $BO \perp AC, BO \perp SO$ nên $BO \perp (SAC)$. Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc BSO . Xét tam giác SBD có $SB = SD$ và $SB^2 + SD^2 = BD^2$ nên tam giác SBD vuông cân tại S . Suy ra $\widehat{BSO} = 45^\circ$, hay góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng 45° .

b) Gọi N là hình chiếu của S trên CD . Khi đó, số đo của $[S, CD, A]$ bằng $\widehat{SNO}$, hay $\widehat{SNO} = \alpha$. Ta có:

$$\cos \alpha = \frac{ON}{SN} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

c) Gọi M là hình chiếu của S trên AB . Vì $AB \parallel CD$ nên $d \parallel AB$ và $d \parallel CD$. Khi đó $SM \perp d, SN \perp d$. Suy ra số đo của $[A, d, D]$ bằng $\widehat{MSN}$, hay $\widehat{MSN} = \beta$.

$$\text{Ta có: } \cos \beta = \frac{SM^2 + SN^2 - MN^2}{2SM \cdot SN} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

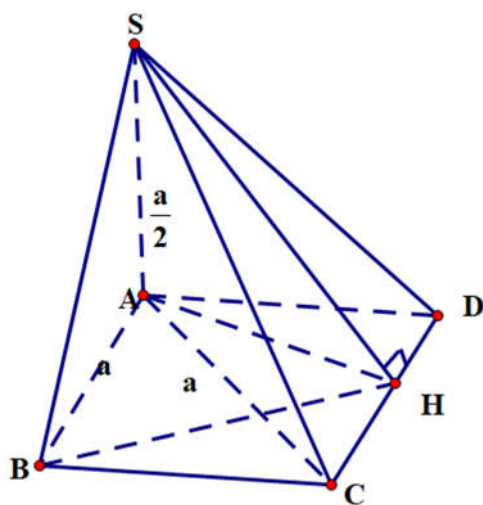
d*) Gọi H là hình chiếu của B trên SC . Vì $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$. Suy ra $SC \perp (BHD)$ nên $SC \perp HD$. Vậy số đo của $[B, SC, D]$ bằng $\widehat{BHD}$, hay $\widehat{BHD} = \gamma$.

Vì hai tam giác SBC, SCD đều nên $BH = DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó, ta có:

$$\cos \gamma = \frac{HB^2 + HD^2 - BD^2}{2HB \cdot HD} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{3}.$$

29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $AC = a$, $SA = \frac{a}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A trên CD . Khi đó, $AH \perp CD$. Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp CD$. Suy ra $CD \perp (SAH)$. Khi đó, $SH \perp CD$. Như vậy, số đo của $[S, CD, A]$ bằng $\widehat{SHA}$. Ta có:

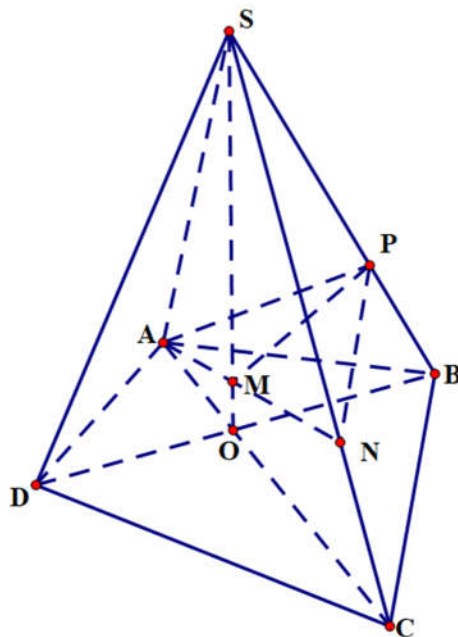
$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SA = \frac{a}{2}$$

$$\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$ bằng $\widehat{SHA} = 30^\circ$.

30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại O . Gọi α, β lần lượt là số đo của các nhị diện $[A, SO, B]$ và $[B, SO, C]$. Tính $\alpha + \beta$

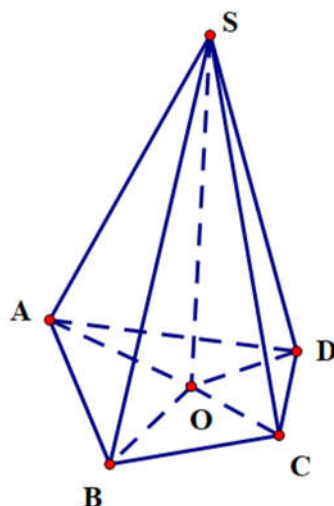
Lời giải



Trong mặt phẳng (SAC) , lấy đường thẳng AN ($N \in SC$) sao cho $AN \perp SO$. Gọi M là giao điểm của AN và SO . Trong mặt phẳng (SOB) , lấy đường thẳng MP ($P \in SB$) sao cho $MP \perp SO$. Khi đó, số đo của $[A, SO, B]$ bằng $\widehat{AMP}$, hay $\widehat{AMP} = \alpha$ và số đo của $[B, SO, C]$ bằng $\widehat{PMN}$, hay $\widehat{PMN} = \beta$. Trong mặt phẳng (APN) có A, M, N thẳng hàng nên $\alpha + \beta = 180^\circ$.

31. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ lần lượt là góc giữa các đường thẳng SA, SB, SC, SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh rằng $SA = SB = SC = SD \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$

Lời giải



Gọi O là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Khi đó, ta có: $\alpha_1 = \widehat{SAO}, \alpha_2 = \widehat{SBO}, \alpha_3 = \widehat{SCO}, \alpha_4 = \widehat{SDO}$. Các tam giác SAO, SBO, SCO, SDO vuông có các góc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ đều nhỏ hơn 90° nên

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = \sin \alpha_3 = \sin \alpha_4$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4.$$

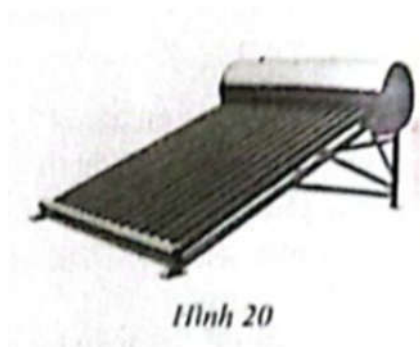
Như vậy, $SA = SB = SC = SD$

$$\Leftrightarrow \frac{SO}{SA} = \frac{SO}{SB} = \frac{SO}{SC} = \frac{SO}{SD}$$

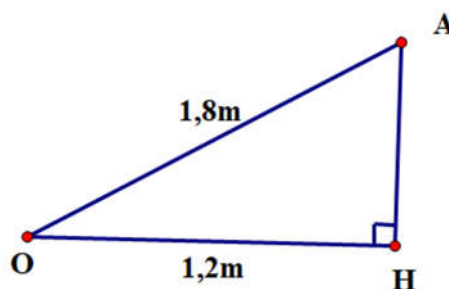
$$\Leftrightarrow \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = \sin \alpha_3 = \sin \alpha_4$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4.$$

32. Một máy nước nóng sử dụng năng lượng mặt trời như ở Hình 20 có các ống hấp nhiệt chân không dài 1,8 m được đặt trên sân thượng của một toà nhà. Khi tia nắng mặt trời chiếu vuông góc với sân thượng, bóng nắng của các ống hấp nhiệt chân không trên mặt sân dài 1,2 m. Các ống hấp nhiệt chân không đó tạo với mặt sân thượng một góc bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Lời giải



Vẽ OA biểu diễn cho ống hấp nhiệt chân không, OH biểu diễn bóng nắng (hình chiếu vuông góc do tia nắng chiếu vuông góc với mặt sân) của ống đó trên mặt sân. Như vậy góc giữa ống hấp nhiệt chân không với mặt sân bằng $\widehat{AOH}$. Ta có:

$$\cos \widehat{AOH} = \frac{OH}{OA} = \frac{1,2}{1,8} = \frac{2}{3} \Rightarrow \widehat{AOH} \approx 48^\circ.$$

Vậy góc giữa ống hấp nhiệt chân không với mặt sân thượng bằng khoảng 48°

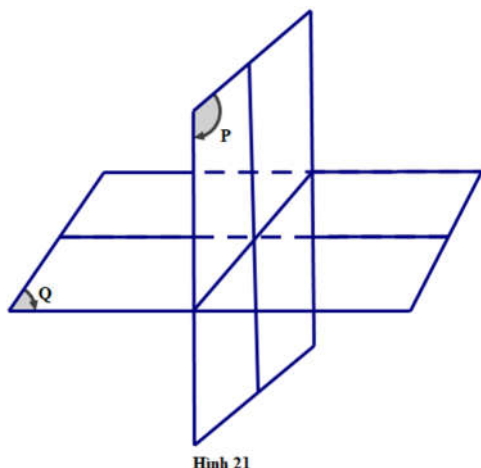
BÀI 4: HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

A- KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Hai mặt phẳng cắt nhau tạo nên bốn góc nhị diện. Nếu một trong các góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì hai mặt phẳng đã cho gọi là vuông góc với nhau.

Ví dụ: Hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau tạo nên bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì ta nói (P) vuông góc với (Q) (Hình 21), kí hiệu là $(P) \perp (Q)$ hoặc $(Q) \perp (P)$.



2. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng mà đường thẳng đó vuông góc với mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

3. Tính chất

- Tính chất 1:** Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
- Tính chất 2:** Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

Nhận xét:

- Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Nếu qua một điểm trong mặt phẳng (P) ta dựng đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (P) .
- Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì hình chiếu của mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này trên mặt phẳng kia đều trùng hoặc nằm trên giao tuyến.
- Ta có thể chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng bằng cách sử dụng Tính chất 1

B. CÁC DẠNG TOÁN

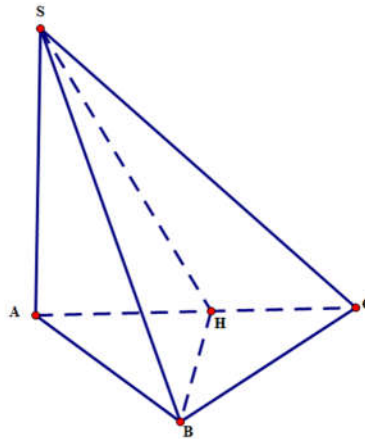
Vấn đề 1. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$. Gọi H là hình chiếu của B trên AC . Chứng minh rằng:

- a) $(SAB) \perp (ABC)$; b) $(SAC) \perp (ABC)$;

c) $(SAB) \perp (SBC)$; d) $(SBH) \perp (SAC)$.

Lời giải



a) Vì $SA \perp (ABC)$ và $SA \subset (SAB)$ nên $(SAB) \perp (ABC)$.

b) Vì $SA \perp (ABC)$ và $SA \subset (SAC)$ nên $(SAC) \perp (ABC)$.

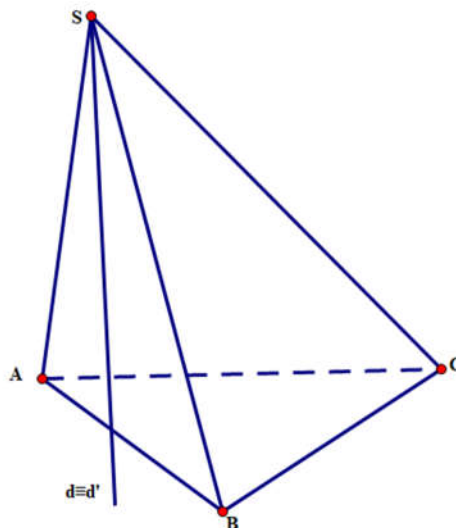
c) Vì $(SAB) \perp (ABC)$, $BC \subset (ABC)$, $(SAB) \cap (ABC) = AB$ và $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$. Mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SAB) \perp (SBC)$.

d) Vì $(SAC) \perp (ABC)$, $BH \subset (ABC)$, $(SAC) \cap (ABC) = AC$ và $BH \perp AC$ nên $BH \perp (SAC)$. Mà $BH \subset (SBH)$ nên $(SBH) \perp (SAC)$.

Vấn đề 2. Vận dụng

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi d là đường thẳng đi qua S và vuông góc với (ABC) . Chứng minh rằng đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (SAB) .

Lời giải



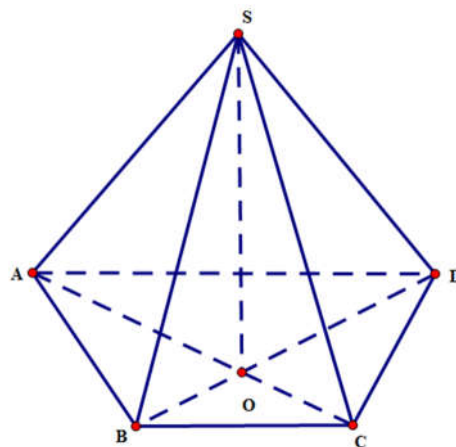
Trong mặt phẳng (SAB) , lấy đường thẳng d' qua S và vuông góc với AB .

Vì $(SAB) \perp (ABC)$, $d' \subset (SAB)$, $(SAB) \cap (ABC) = AB$ và $d' \perp AB$ nên $d' \perp (ABC)$.

Vì qua điểm S có hai đường thẳng d và d' cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên d và d' trùng nhau. Suy ra $d \subset (SAB)$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$, $(SAC) \perp (ABCD)$, $(SBD) \perp (ABCD)$. Tìm điều kiện cần và đủ của tứ giác $ABCD$ để $(SAC) \perp (SBD)$.

Lời giải



Hình 24

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi O là giao điểm của AC và BD .

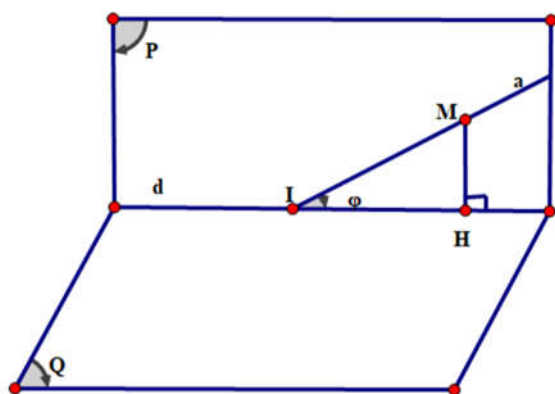
Vì $(SAC) \cap (SBD) = SO$, $(SAC) \perp (ABCD)$, $(SBD) \perp (ABCD)$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Mà $OA \subset (ABCD)$, $OB \subset (ABCD)$ nên $SO \perp OA$ và $SO \perp OB$. Suy ra góc AOB là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A, SO, B]$.

Từ đó, $(SAC) \perp (SBD)$ khi và chỉ khi góc nhị diện $[A, SO, B]$ là góc nhị diện vuông hay $\widehat{AOB} = 90^\circ$, tức là $AC \perp BD$. Vậy $(SAC) \perp (SBD) \Leftrightarrow AC \perp BD$.

Ví dụ 4: Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ cắt nhau theo giao tuyến d và vuông góc với nhau, đường thẳng a nằm trên (P) thỏa mãn góc giữa a và d bằng $\varphi (0^\circ < \varphi < 90^\circ)$. Chứng minh rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) bằng φ .

Lời giải



Hình 25

Hai đường thẳng a và d cùng nằm trong một mặt phẳng và góc giữa chúng là $\varphi (0^\circ < \varphi < 90^\circ)$ nên a, d là hai đường thẳng cắt nhau.

Gọi I là giao điểm của a và d . Lấy M thuộc $a (M \text{ khác } I)$, H là hình chiếu của M trên d . Vì $(P) \perp (Q)$, $MH \subset (P)$, $(P) \cap (Q) = d$ và $MH \perp d$ nên $MH \perp (Q)$, suy ra góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) bằng $\widehat{MIH} = \varphi$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Quan sát ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ ở Hình 57, chỉ ra hai cặp mặt phẳng mà mỗi cặp gồm hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Hãy sử dụng kí hiệu để viết những kết quả đó.



Hình ảnh mô phỏng vệ tinh LOTUSat-1
(Nguồn: JICA Việt Nam)
Hình 57

Lời giải

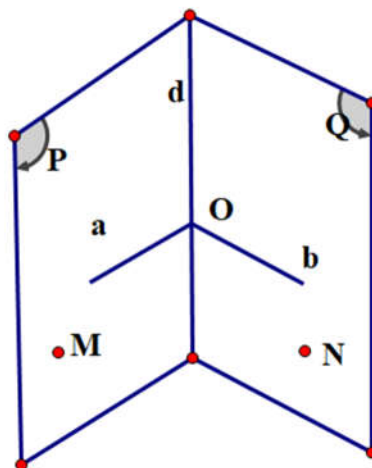
Hai cặp mặt phẳng mà mỗi cặp gồm hai mặt phẳng vuông góc với nhau là :

$$(P) \perp (R)$$

$$(Q) \perp (R)$$

Bài 2. Chứng minh định lí sau: Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải



Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ vuông góc với nhau. Ta cần chứng minh tồn tại một đường thẳng $a \subset (P)$ sao cho $a \perp (Q)$.

Gọi $d = (P) \cap (Q)$. Lấy $M \in (P), N \in (Q)$ sao cho $M, N \notin d$.

Gọi góc $\widehat{aOb}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[M, d, N]$.

Vì $(P) \perp (Q)$ nên góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông. Vậy $\widehat{aOb} = 90^\circ \Rightarrow a \perp b$.

Mà $a \perp d$

$$\Rightarrow a \perp (Q)$$

Bài 3. Chứng minh các định lí sau:

- Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng đó thì vuông góc với mặt phẳng còn lại;
- Nếu hai mặt phẳng (phân biệt) cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau theo một giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

Lời giải

a) Giả sử có hai mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba. Khi đó, các mặt phẳng này sẽ tạo thành một hình hộp chữ nhật. Giả sử chúng không song song với nhau, tức là cắt nhau theo một đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng thứ ba. Khi đó, ta có thể kết nối hai điểm thuộc hai mặt phẳng vuông góc này và kết quả là ta sẽ thu được một đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng thứ ba, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu. Vì vậy, hai mặt phẳng này phải song song với nhau hoặc cắt nhau theo một giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

b) Giả sử có hai mặt phẳng song song và một mặt phẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng đó. Khi đó, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đó sẽ song song với mặt phẳng còn lại. Điều này có thể được chứng minh như sau: Ta chọn một điểm bất kỳ trên mặt phẳng đó, và sau đó kết nối điểm đó với một điểm bất kỳ trên mặt phẳng còn lại. Khi đó, ta thu được một đường thẳng nằm trên mặt

phẳng đó và cắt mặt phẳng còn lại theo một giao tuyến. Vì hai mặt phẳng song song nên đường thẳng này sẽ song song với mặt phẳng còn lại, và do đó đường thẳng này cũng sẽ vuông góc với mặt phẳng còn lại. Vậy mặt phẳng ban đầu cũng phải vuông góc với mặt phẳng còn lại.

Bài 4. Cho một đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng cho trước. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng đó và vuông góc với mặt phẳng đã cho.

Lời giải

Giả sử đường thẳng đó là d và mặt phẳng cho trước là P . Gọi A là một điểm trên đường thẳng d . Theo định nghĩa, ta có thể vẽ một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng P và đi qua điểm A , gọi đường thẳng đó là d' . Vì d' và P vuông góc với nhau nên chúng tạo thành một góc vuông tại A .

Để chứng minh tồn tại mặt phẳng vuông góc với P và chứa đường thẳng d , ta chỉ cần chứng minh rằng mặt phẳng chứa d' cũng vuông góc với P . Điều này tương đương với việc chứng minh rằng đường thẳng d nằm trên mặt phẳng chứa d' và vuông góc với mặt phẳng P .

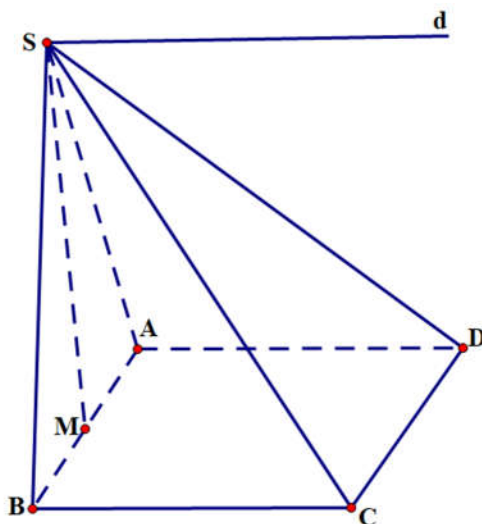
Giả sử tồn tại một mặt phẳng khác Q cũng vuông góc với mặt phẳng P và chứa đường thẳng d . Vì d nằm trên Q , nên d' cũng nằm trên Q , vì nó là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng P và qua điểm A trên d . Như vậy, d' và Q cùng chứa đường thẳng d , do đó chúng trùng nhau, suy ra Q cũng chứa d' . Tức là mặt phẳng Q trùng với mặt phẳng chứa d' , và vì thế mặt phẳng Q cũng vuông góc với P .

Vậy, ta đã chứng minh được rằng tồn tại duy nhất một mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng P và chứa đường thẳng d .

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy, tam giác SAB vuông cân tại S . Gọi M là trung điểm của AB . Chứng minh rằng:

- a) $SM \perp (ABCD)$; b) $AD \perp (SAB)$; c) $(SAD) \perp (SBC)$.

Lời giải



a) Tam giác SAB vuông cân tại $S \Rightarrow SM \perp AB$

Có $(SAB) \perp (ABCD)$ giao tuyến AB

$SM \perp (ABCD)$

b) Có $ABCD$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow AD \perp AB$

Có $SM \perp (ABCD) \Rightarrow AD \perp SM$

$\Rightarrow AD \perp (SAB)$

c) Do $AD \subset (SAD)$, từ ý b $\Rightarrow AD \perp SA$

$SM \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp BC, SM \perp AD$

$\Rightarrow$ Giao tuyến (SAD) và (SBC) là đường thẳng d qua S và song song với BC

$\Rightarrow SM \perp d; d \perp SA; SA \perp SB$

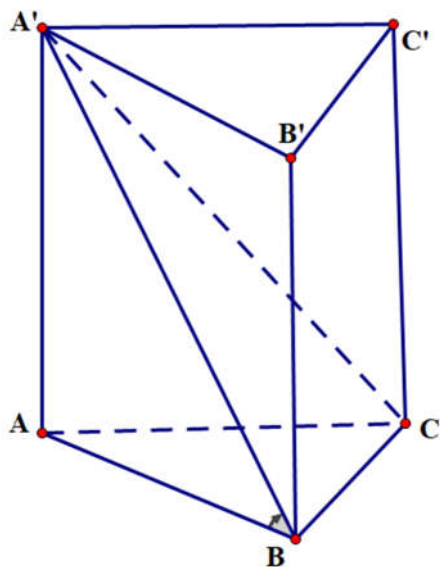
$\Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow (SAD) \perp (SBC)$

Bài 6. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh cùng bằng a , hai mặt phẳng $(A'AB)$ và $(A'AC)$ cùng vuông góc với (ABC) .

a) Chứng minh rằng $AA' \perp (ABC)$.

b) Tính số đo góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải



a)

$(A'AB) \perp (ABC), (A'AC) \perp (ABC)$

$(A'AB) \cap (A'AC) = AA'$

$\Rightarrow AA' \perp (ABC)$

b) $AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AB$

$\Rightarrow$ góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) là: $\widehat{A'BA}$

Xét tam giác $A'BA$ vuông tại A có các cạnh bằng a

$\Rightarrow \widehat{A'BA} = 45^\circ$

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

33. Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ cắt nhau và đường thẳng a nằm trong (P) . Phát biểu nào sau đây là sai?

- A.** Nếu $a \perp (Q)$ thì $(P) \perp (Q)$. **B.** Nếu $a \perp (Q)$ thì $a \perp b$ với mọi $b \subset (Q)$.
C. Nếu $a \perp (Q)$ thì $(P) // (Q)$. **D.** Nếu $a \perp (Q)$ thì $a \perp d$ với $d = (P) \cap (Q)$.

Lời giải

Chọn C

34. Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ vuông góc và cắt nhau theo giao tuyến d , đường thẳng a song song với (P) . Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.** Nếu $a \perp d$ thì $a \perp (Q)$. **B.** Nếu $a \perp d$ thì $a // (Q)$.
C. Nếu $a \perp d$ thì $a // b$ với mọi $b \subset (Q)$. **D.** Nếu $a \perp d$ thì $a // c$ với mọi $c // (Q)$.

Lời giải

Chọn A

35. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì:

- A.** Song song với nhau.
B. Trùng nhau.
C. Không song song với nhau.
D. Song song với nhau hoặc cắt nhau theo giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

Lời giải

Chọn D

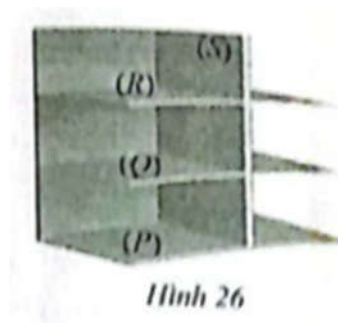
36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khi đó mặt phẳng $(ABCD)$ vuông góc với đường thẳng:

- A.** SA . **B.** SB . **C.** SC . **D.** SD .

Lời giải

Chọn A

37. Hình 26 gợi nên hình ảnh một số cặp mặt phẳng vuông góc với nhau. Hãy chỉ ra 2 cặp mặt phẳng vuông góc với nhau



Lời giải

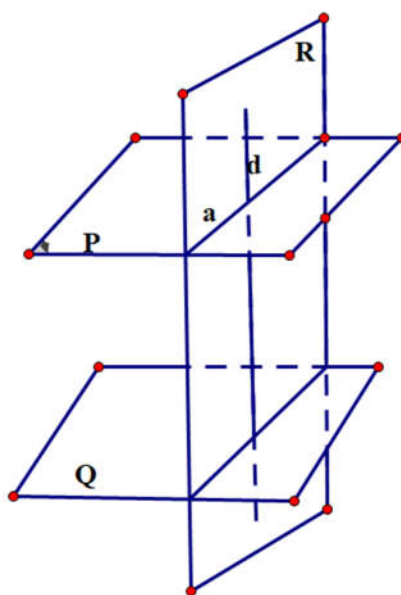
Hai cặp mặt phẳng vuông góc với nhau có thể là (P) và (S) , (Q) và (S) .

38. Chứng minh các định lí sau:

a) Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng đó thì vuông góc với mặt phẳng còn lại

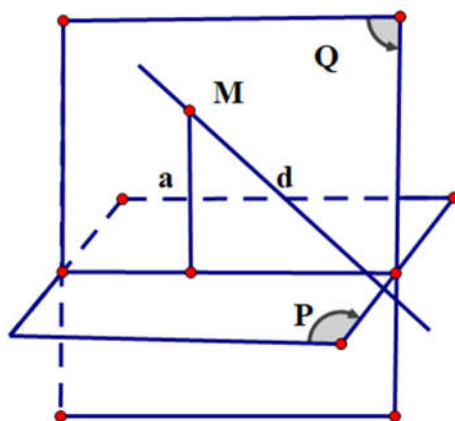
b) Cho một mặt phẳng và một đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng đó. Khi đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng đã cho và vuông góc với mặt phẳng đã cho.

Lời giải



a) Gọi $(P), (Q), (R)$ là ba mặt phẳng thoả mãn $(P) // (Q), (P) \perp (R)$. Gọi a là giao tuyến của (P) và (R) . Lấy đường thẳng d nằm trong (R) sao cho $d \perp a$. Khi đó, $d \perp (P)$. Mà $(P) // (Q)$ nên $d \perp (Q)$. Như vậy $(R) \perp (Q)$.

b)



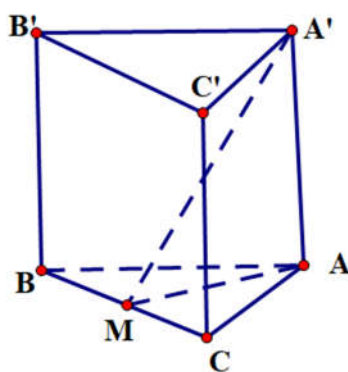
Xét đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (P) . Giả sử d cắt (P) (Hình 73). Lấy M thuộc d , đường thẳng a qua M và vuông góc với (P) . Khi đó, hai đường thẳng a và d xác định mặt phẳng (Q) sao cho $(Q) \perp (P)$.

Các trường hợp $d \subset (P)$ và $d // (P)$ xác định mặt phẳng (Q) tương tự.

Giả sử tồn tại mặt phẳng (Q') khác (Q) sao cho $d \subset (Q')$ và $(Q') \perp (P)$. Khi đó, d là giao tuyến của (Q) và (Q') , đồng thời $d \perp (P)$. Mâu thuẫn với giả thiết d không vuông góc với (P) . Vậy tồn tại duy nhất mặt phẳng (Q) sao cho $d \subset (Q)$ và $(P) \perp (Q)$.

39. Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có $AA' \perp (ABC)$, tam giác ABC cân tại A . Gọi M là trung điểm của BC Chứng minh rằng $(MAA') \perp (BCC'B')$.

Lời giải



Vì $AA' // BB'$ và $AA' \perp (ABC)$ nên $BB' \perp (ABC)$, suy ra $BB' \perp AM$.

Do tam giác ABC cân tại A và M là trung điểm của BC nên $AM \perp BC$.

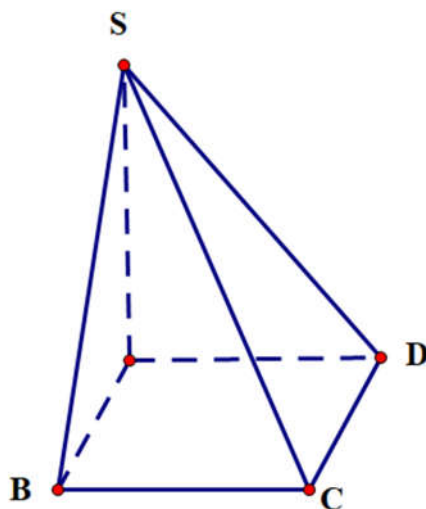
Từ đó suy ra $AM \perp (BCC'B')$.

Mà $AM \subset (MAA')$ nên $(MAA') \perp (BCC'B')$.

40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật. Chứng minh rằng:

a) $(SAB) \perp (SBC)$; b) $(SAD) \perp (SCD)$.

Lời giải

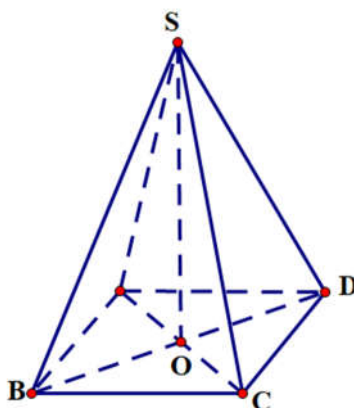


a) Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BC \perp AB$. Do $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BC$. Từ đó suy ra $BC \perp (SAB)$. Mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SAB) \perp (SBC)$.

b) Chứng minh tương tự câu a.

41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi, $(SAC) \perp (ABCD)$, $(SBD) \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SBD)$.

Lời giải



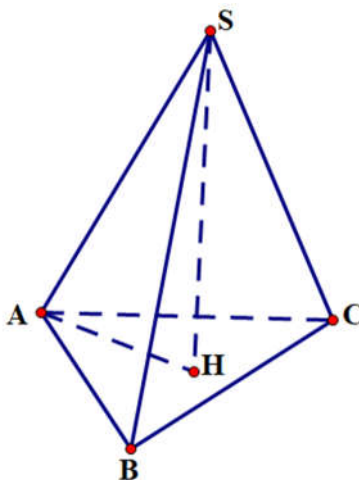
Vì $(SAC) \perp (ABCD)$, $(SBD) \perp (ABCD)$ và $SO = (SAC) \cap (SBD)$ nên $SO \perp (ABCD)$. Suy ra $SO \perp AC$.

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$. Từ đó suy ra $AC \perp (SBD)$.

Mà $AC \subset (SAC)$ nên $(SAC) \perp (SBD)$.

42. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = 90^\circ$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng $(SAH) \perp (ABC)$.

Lời giải



Theo giả thiết ta có $SA \perp SB, SA \perp SC$ nên $SA \perp (SBC)$. Suy ra $SA \perp BC$.

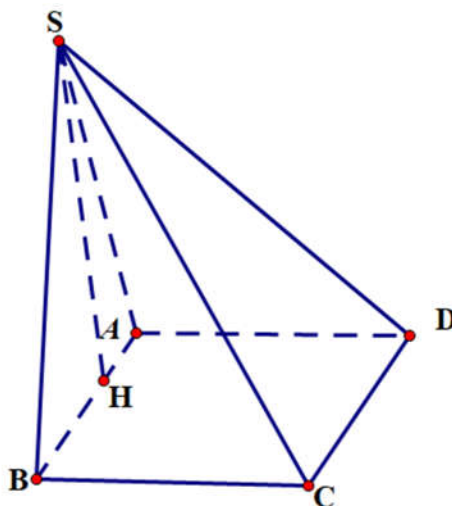
Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên $AH \perp BC$.

Suy ra $BC \perp (SAH)$. Mà $BC \subset (ABC)$ nên $(SAH) \perp (ABC)$.

43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB vuông tại S và nằm trong một phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $(SAD) \perp (SAB)$; b) $(SBC) \perp (SAB)$; c) $(SAD) \perp (SBC)$.

Lời giải



a) Gọi H là hình chiếu của S trên AB . Vì $(SAB) \perp (ABCD), SH \perp AB, SH \subset (SAB)$ nên $SH \perp (ABCD)$. Suy ra $SH \perp AD$.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $AD \perp AB$. Suy ra $AD \perp (SAB)$.

Mà $AD \subset (SAD)$ nên $(SAD) \perp (SAB)$.

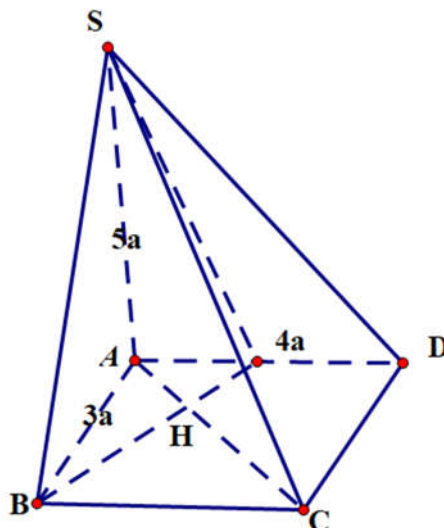
b) Chứng minh tương tự câu a.

c) Vì $AD \perp (SAB)$ nên $AD \perp SB$. Do tam giác SAB vuông tại S nên $SA \perp SB$. Suy ra $SB \perp (SAD)$.

Mà $SB \subset (SBC)$ nên $(SAD) \perp (SBC)$.

44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, $(SAC) \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD , $(SBM) \perp (ABCD)$. Giả sử $SA = 5a$, $AB = 3a$, $AD = 4a$ và góc giữa đường thẳng SA và một phẳng $(ABCD)$ bằng φ . Tính $\cos \varphi$.

Lời giải



Gọi H là giao điểm của BM và AC . Vì $(SAC) \perp (ABCD)$, $(SBM) \perp (ABCD)$ và $SH = (SAC) \cap (SBM)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Khi đó, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\widehat{SAH}$. Ta có:

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a.$$

$$\text{Vì } AM \parallel BC \text{ nên } \frac{AH}{HC} = \frac{AM}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}HC \Rightarrow AH = \frac{1}{3}AC = \frac{5a}{3}.$$

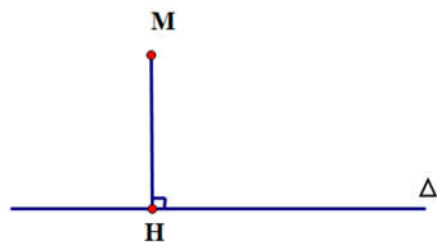
$$\text{Vậy } \cos \varphi = \cos \widehat{SAH} = \frac{AH}{SA} = \frac{1}{3}.$$

BÀI 5: KHOẢNG CÁCH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho đường thẳng Δ và điểm M không thuộc Δ . Gọi H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng Δ . Độ dài đoạn thẳng MH gọi là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ (Hình 27), kí hiệu $d(M, \Delta)$.

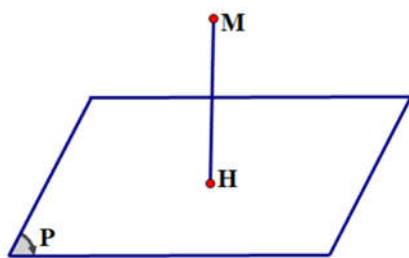


Hình 27

Chú ý: Khi điểm M thuộc đường thẳng Δ thì $d(M, \Delta) = 0$.

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Cho mặt phẳng (P) và điểm M không thuộc mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu của M trên mặt phẳng (P) . Độ dài đoạn thẳng MH gọi là khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) (Hình 28), kí hiệu $d(M, (P))$.



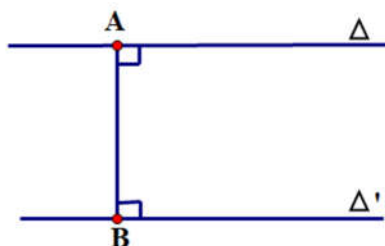
Hình 28

Chú ý: Khi điểm M thuộc mặt phẳng (P) thì $d(M, (P)) = 0$.

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song Δ, Δ' là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia, kí hiệu $d(\Delta, \Delta')$.

Ví dụ: Trong Hình 29, ta có: $d(\Delta, \Delta') = AB$ với $A \in \Delta, B \in \Delta', AB \perp \Delta, AB \perp \Delta'$ và $\Delta // \Delta'$.

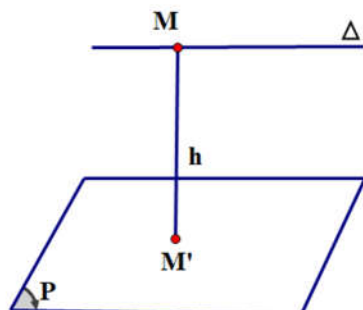


Hình 29

4. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Cho đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) . Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng Δ đến mặt phẳng (P) , kí hiệu $d(\Delta, (P))$.

Ví dụ: Trong Hình 30, ta có: $d(\Delta, (P)) = MM' = h$, trong đó $M \in \Delta, M' \in (P), MM' \perp (P)$ và $\Delta \parallel (P)$.

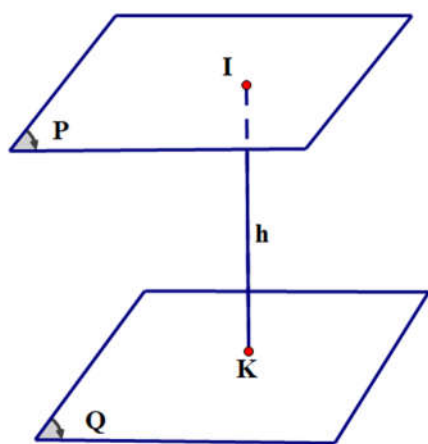


Hình 30

5. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(P), (Q)$ là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia, kí hiệu $d((P), (Q))$.

Ví dụ: Trong Hình 31, ta có: $d((P), (Q)) = IK = h$ với $I \in (P), K \in (Q), IK \perp (P), IK \perp (Q)$ và $(P) \parallel (Q)$.



Hình 31

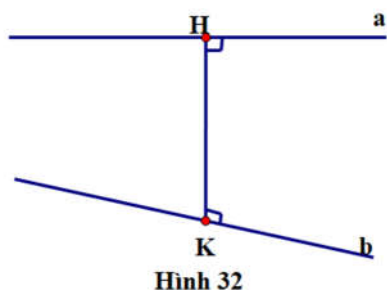
6. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau.

- Đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt cả hai đường thẳng a và b được gọi là đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.
- Đoạn thẳng có hai đầu mút là giao điểm của đường thẳng c với hai đường thẳng a, b được gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

- Độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng a, b gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng đó, kí hiệu $d(a, b)$.

Ví dụ: Trong Hình 32, ta có: $d(a, b) = HK$ với HK là đoạn vuông góc chung của a và b .



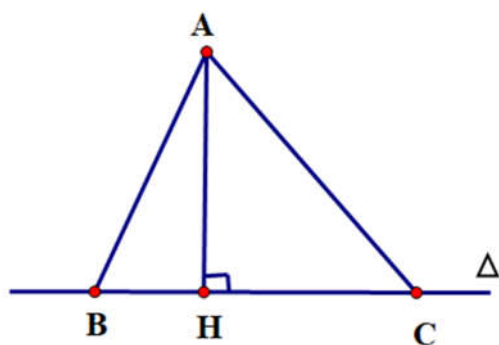
Hình 32

B. CÁC DẠNG TOÁN

Vấn đề 1. Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Ví dụ 1: Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng Δ , hai điểm B, C thuộc Δ sao cho $BC = a$, diện tích tam giác ABC bằng S . Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ theo a, S .

Lời giải



Hình 33

Gọi H là hình chiếu của A trên BC . Khi đó $d(A, \Delta) = AH$.

Vì diện tích tam giác ABC bằng S nên: $S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AH \cdot a$.

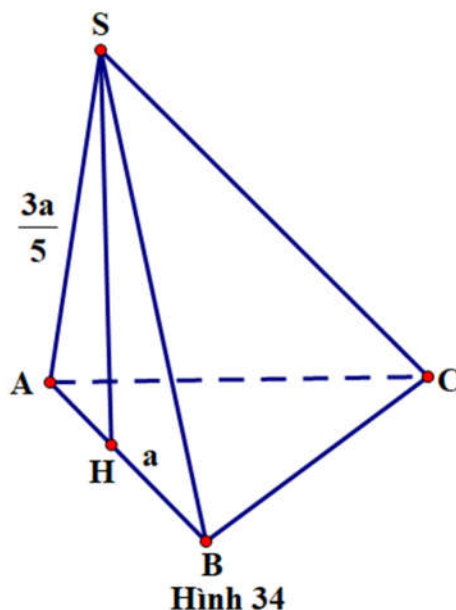
Suy ra: $d(A, \Delta) = AH = \frac{2S}{a}$.

Vậy khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ bằng $\frac{2S}{a}$.

Vấn đề 2. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy, tam giác SAB vuông tại S , $AB = a, SA = \frac{3a}{5}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) .

Lời giải



Hình 34

Gọi H là hình chiếu của S trên AB .

Do $(SAB) \perp (ABC), (SAB) \cap (ABC) = AB, SH \subset (SAB)$ và $SH \perp AB$ nên $SH \perp (ABC)$.

Khi đó: $d(S, (ABC)) = SH$.

Xét tam giác SAB vuông tại S có: $SB^2 = AB^2 - SA^2 = a^2 - \left(\frac{3a}{5}\right)^2 = \frac{16a^2}{25} \Rightarrow SB = \frac{4a}{5}$.

$$\text{Suy ra } d(S, (ABC)) = SH = \frac{SA \cdot SB}{AB} = \frac{\frac{3a}{5} \cdot \frac{4a}{5}}{a} = \frac{12a}{25}.$$

Vậy khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{12a}{25}$.

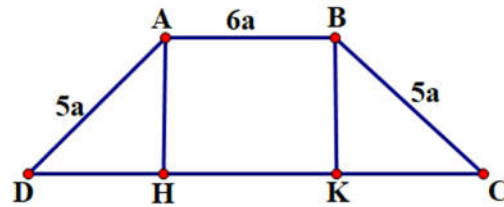
Vấn đề 3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Ví dụ 3. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD, AB = 6a, CD = 14a, AD = BC = 5a$.

a) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên CD . Tính độ dài các đoạn thẳng HK, DH, CK .

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .

Lời giải



Hình 35

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, vì $AH \perp CD, BK \perp CD$ nên $AH \parallel BK$. Mà $AB \parallel HK, \widehat{AHK} = 90^\circ$ nên $ABKH$ là

hình chữ nhật. Suy ra $HK = AB = 6a$.

Ta có $\triangle ADH = \triangle BCK$ nên $DH = CK = \frac{CD - HK}{2} = \frac{14a - 6a}{2} = 4a$.

b) Vì $AB \parallel CD, AH \perp CD$ nên $d(AB, CD) = AH$. Xét tam giác ADH vuông tại H có $AH^2 = AD^2 - DH^2 = (5a)^2 - (4a)^2 = 9a^2$, suy ra $d(AB, CD) = AH = 3a$. Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $3a$.

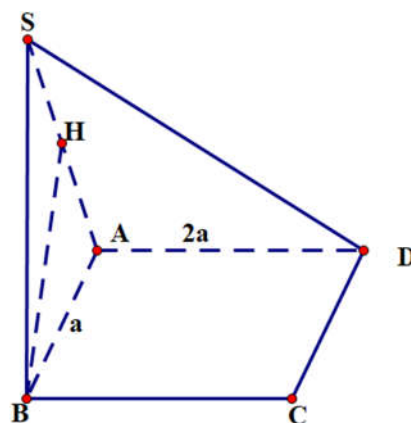
Vấn đề 4. Tính khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, SAB là tam giác đều $(SAB) \perp (ABCD), AB = a, AD = 2a$.

a) Chứng minh rằng $CD \parallel (SAB)$. Tính khoảng cách giữa CD và mặt phẳng (SAB) .

b) Chứng minh rằng $BC \parallel (SAD)$. Tính khoảng cách giữa BC và mặt phẳng (SAD) .

Lời giải



Hình 36

a) Vì $CD \parallel AB, CD \not\subset (SAB)$ và $AB \subset (SAB)$ nên $CD \parallel (SAB)$.

Vì $D \in CD$ nên $d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB))$. Do

$(SAB) \perp (ABCD), (SAB) \cap (ABCD) = AB, DA \subset (ABCD)$ và $DA \perp AB$ nên $DA \perp (SAB)$.

Suy ra: $d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB)) = DA = 2a$

Vậy khoảng cách giữa CD và mặt phẳng (SAB) bằng $2a$.

b) Vì $BC // AD, BC \not\subset (SAD)$ và $AD \subset (SAD)$ nên $BC // (SAD)$. Vì $B \in BC$ nên $d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD))$.

Gọi H là hình chiếu của B trên SA . Vì $AD \perp (SAB), AD \subset (SAD)$ nên $(SAD) \perp (SAB)$. Mà $(SAB) \cap (SAD) = SA, BH \subset (SAB)$ và $BH \perp SA$ nên $BH \perp (SAD)$.

Xét tam giác SAB đều có $BH = AB \sin \widehat{BAS} = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

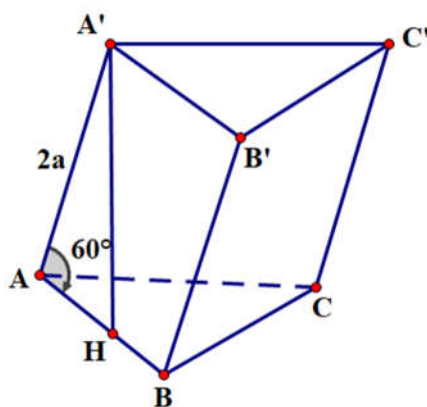
Vậy khoảng cách giữa BC và mặt phẳng (SAD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vấn đề 5. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $(A'ABB') \perp (ABC), AA' = 2a, \widehat{A'AB} = 60^\circ$.

Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$.

Lời giải



Hình 37

Vì $A' \in (A'B'C')$ và $(ABC) // (A'B'C')$ nên $d((ABC), (A'B'C')) = d(A', (ABC))$.

Gọi H là hình chiếu của A' trên AB .

Vì $(A'ABB') \perp (ABC), (A'ABB') \cap (ABC) = AB, A'H \subset (A'ABB')$ và $A'H \perp AB$ nên $A'H \perp (ABC)$.

Xét tam giác $A'AH$ vuông tại H có $A'H = A'A \sin \widehat{AA'H} = 2a \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$.

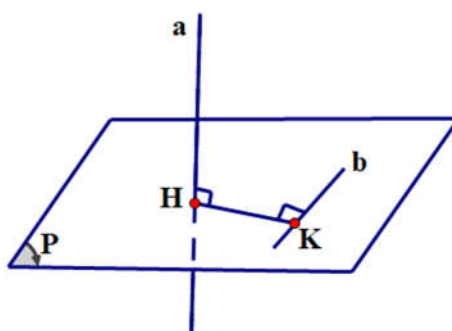
Suy ra $d((ABC), (A'B'C')) = d(A', (ABC)) = A'H = a\sqrt{3}$.

Vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ bằng $a\sqrt{3}$.

Vấn đề 6. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Phương pháp: Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b .

- Xác định mặt phẳng (P) chứa b và song song với a , khi đó $d(a, b) = d(a, (P))$.
- Khi $a \perp b$, ta có thể làm như sau: Xác định mặt phẳng (P) đi qua b và vuông góc với a , giao điểm của a và (P) là H , hình chiếu của H trên b là K . Khi đó, HK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a, b và $d(a, b) = HK$ (Hình 38).

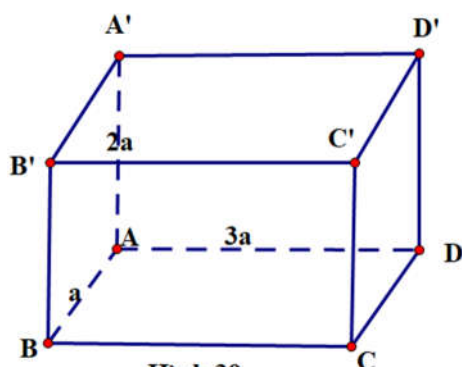


Hình 38

Ví dụ 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 3a, AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) AB và $B'C'$; b) AA' và BC ; c) BB' và $C'D'$.

Lời giải



Hình 39

a) Vì $BB' \perp AB$ và $BB' \perp B'C'$ nên

$$d(AB, B'C') = BB' = AA' = 2a.$$

b) Vì $AB \perp AA'$ và $AB \perp BC$ nên $d(AA', BC) = AB = a$.

c) Vì $B'C' \perp BB'$ và $B'C' \perp C'D'$ nên $d(BB', C'D') = B'C' = AD = 3a$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Hình 76 gợi nên hình ảnh hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Cột gỗ cao 4,2 m. Khoảng cách giữa (P) và (Q) là bao nhiêu mét?



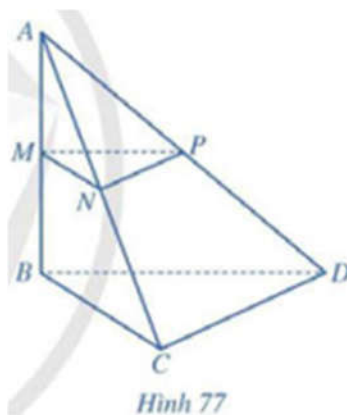
Hình 76

Lời giải

Vì hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau nên khoảng cách giữa (P) và (Q) bằng khoảng cách cột gỗ. Vậy khoảng cách giữa (P) và (Q) bằng 4,2 m.

Bài 2. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AB = a, BC = b, BD = c, \widehat{ABC} = \widehat{ABD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD (Hình 77).

- Tính khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AB .
- Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) .
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .



Hình 77

Lời giải

a) Có $\widehat{ABC} = 90^\circ$
 $\Rightarrow AB \perp BC \Rightarrow d(C, AB) = BC = b$

b) Có $AB \perp BC, AB \perp BD$

$\Rightarrow AB \perp (BCD)$

$\Rightarrow AB \perp CD$

mà $BC \perp CD$ (vì $\widehat{BCD} = 90^\circ$)

$$\Rightarrow CD \perp (ABC)$$

$$\Rightarrow d(D, (ABC)) = CD = \sqrt{BD^2 - BC^2} = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$c) AB \perp BC, BC \perp CD \Rightarrow d(AB, CD) = BC = b$$

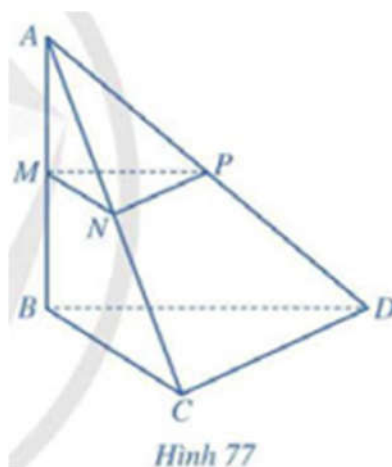
Bài 3. Với giả thiết ở Bài tập 2, hãy:

a) Chứng minh rằng $MN \parallel C$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và BC .

b) Chứng minh rằng $MP \parallel (BCD)$. Tính khoảng cách từ đường thẳng MP đến mặt phẳng (BCD) .

c) Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (BCD)$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (BCD) .

Lời giải



Hình 77

a) M là trung điểm của AB

N là trung điểm của AC

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow MN \parallel BC$

$$AB \perp BC \Rightarrow MB \perp BC \Rightarrow d(MN, BC) = MB = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}$$

b) M là trung điểm của AB

P là trung điểm của AD

$\Rightarrow MP$ là đường trung bình của tam giác ABD

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow MP \parallel BD \\ BD \subset (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow MP \parallel (BCD)$$

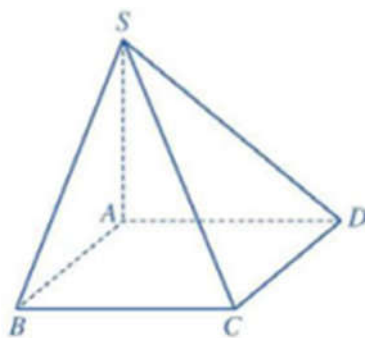
$$AB \perp (BCD) \Rightarrow MB \perp (BCD) \Rightarrow d(MP, (BCD)) = d(M, (BCD)) = MB = \frac{a}{2}$$

$$c) \Rightarrow d((MNP), (BCD)) = d(M, (BCD)) = MB = \frac{a}{2}$$

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a$ (Hình 78).

a) Tính khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng CD .

- b) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SAB) .
 c) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .



Hình 78

Lời giải

a) $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AD \perp CD$

$\Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$

$\Rightarrow d(S, CD) = SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$

b) $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD$

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB \perp AD$

$\Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow d(D, (SAB)) = AD = a$

c) Kẻ $AH \perp SD (H \in SD)$.

$CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$

$\Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = AH$

Tam giác SAD vuông tại A có đường cao AH

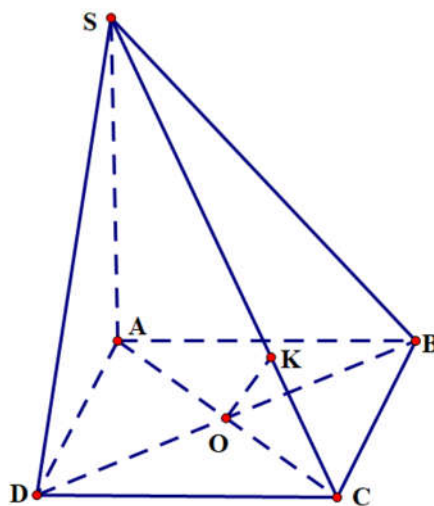
$\Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AD}{SD} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $d(A, (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Baif 5. Với giả thiết ở Bài tập 4, hãy:

- a) Chứng minh rằng $BC \parallel (SAD)$ và tính khoảng cách giữa BC và mặt phẳng (SAD) .
 b) Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC

Lời giải



a) $BC \parallel AD$ do $ABCD$ là hình vuông

$$AD \subset (SAD) \Rightarrow BC \parallel (SAD)$$

$\Rightarrow$ khoảng cách giữa BC và mặt phẳng $(SAD) = d(B, (SAD))$

$$BA \perp SA (SA \perp (ABCD))$$

$$BA \perp AD$$

$$\Rightarrow d(B, (SAD)) = BA = a$$

Vậy khoảng cách giữa BC và mặt phẳng (SAD) bằng a

b) Do $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$

$$BD \perp SA (SA \perp (ABCD))$$

$$\Rightarrow BD \perp (SAC)$$

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Dựng $OK \perp SC \Rightarrow OK$ là đoạn vuông góc chung của BD và SC

$$\text{Khi đó } d(BD; SC) = OK = \frac{1}{2} d(A; SC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}}$$

$$\text{Với } AC = a\sqrt{2} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

45. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3a, AD = 4a$.

a) Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC bằng:

A. $2, 4a$.

B. $3a$.

C. $4a$.

D. $5a$.

Lời giải

Chọn B

b) Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BD bằng:

A. $2,4a$.

B. $3a$.

C. $4a$.

D. $5a$.

Lời giải

Chọn A

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng:

A. $2,4a$.

B. $3a$.

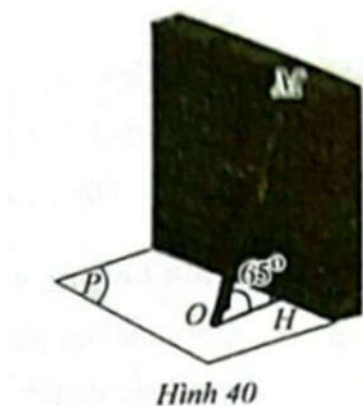
C. $4a$.

D. $5a$.

Lời giải

Chọn C

46. Hình 40 minh hoạ hình ảnh một chiếc gậy dài 3 m đặt dựa vào tường, góc nghiêng giữa chiếc gậy và mặt đất là 65° . Đầu trên của chiếc gậy đặt vào vị trí M của tường. Khoảng cách từ vị trí M đến mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét) bằng:



A. 2,7 m.

B. 2,8 m.

C. 2,9 m.

D. 3,0 m.

Lời giải

Chọn A

47. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, $SA = AB = 3a$, $BC = 4a$. Tính khoảng cách:

a) Từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) ;

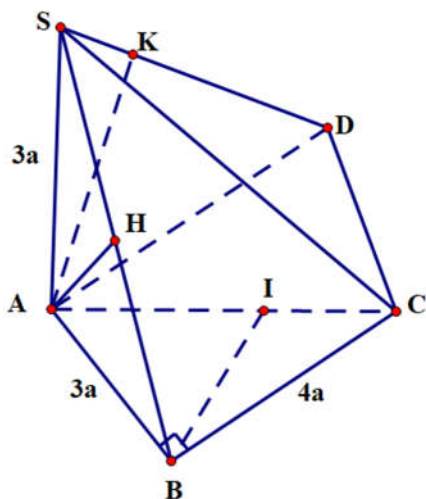
b) Giữa hai đường thẳng SA và BC ;

c) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) ;

d) Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) ;

e*) Giữa hai đường thẳng AB và SC .

Lời giải



a) $d(C, (SAB)) = BC = 4a$.

b) $d(SA, BC) = AB = 3a$.

c) Gọi H là hình chiếu của A trên SB . Khi đó, $AH \perp (SBC)$. Suy ra $d(A, (SBC)) = AH = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

d) Gọi I là hình chiếu của B trên AC . Khi đó, $BI \perp (SAC)$. Suy ra

$$d(B, (SAC)) = BI = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{3a \cdot 4a}{5a} = 2,4a.$$

e*) Lấy điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành, gọi K là hình chiếu của A trên SD . Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật do $AB \perp BC$. Suy ra $CD \perp (SAD)$ nên $CD \perp AK$. Do đó, $AK \perp (SDC)$.

Vì $AB \parallel (SCD)$ nên $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AK$.

Xét tam giác SAD vuông tại A có: $AK = \frac{SA \cdot AD}{SD} = \frac{3a \cdot 4a}{\sqrt{(3a)^2 + (4a)^2}} = 2,4a$. Vậy $d(AB, SC) = 2,4a$.

48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = 3a$, tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính khoảng cách:

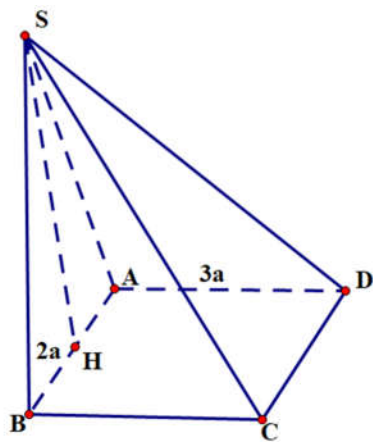
a) Từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) ;

b) Giữa hai đường thẳng SB và CD ;

c) Giữa hai đường thẳng BC và SA ;

d) Từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



a) $d(C, (SAB)) = BC = 3a$.

b) Vì $CD \parallel (SAB)$ nên $d(SB, CD) = d(CD, (SAB)) = BC = 3a$.

c) Vì $BC \parallel (SAD)$ nên $d(BC, SA) = d(B, (SAD))$. Vì $SB \perp SA, SB \perp AD$ nên $SB \perp (SAD)$, suy ra $d(B, (SAD)) = SB$. Ta có:

$$AB^2 = 2SB^2 \Rightarrow SB = \sqrt{\frac{AB^2}{2}} = \sqrt{\frac{(2a)^2}{2}} = a\sqrt{2}.$$

Vậy $d(BC, SA) = a\sqrt{2}$.

d) Gọi H là trung điểm AB . Vì tam giác SAB cân nên $SH \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$. Vậy $d(S, (ABCD)) = SH = \frac{AB}{2} = a$.

49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , AC cắt BD tại O , $SO \perp (ABCD)$, $SA = 2a$. Tính khoảng cách:

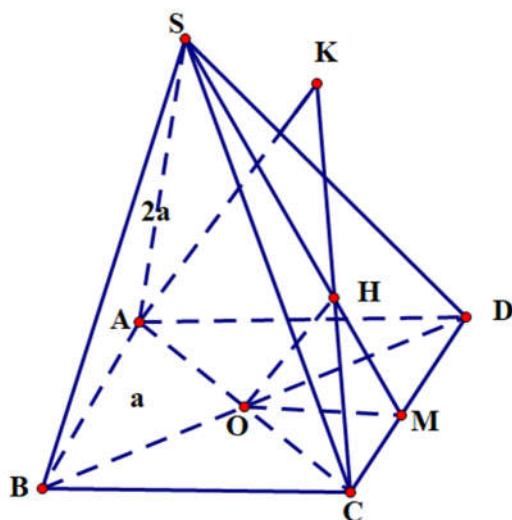
a) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) ;

b) Giữa hai đường thẳng SO và CD ;

c) Từ điểm O đến mặt phẳng (SCD) ;

d*) Giữa hai đường thẳng AB và SD .

Lời giải



a) $d(A, (SBD)) = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Gọi M là hình chiếu của O trên CD . Khi đó, $d(SO, CD) = OM = \frac{a}{2}$.

c) Gọi H là hình chiếu của O trên SM . Khi đó, $OH \perp (SCD)$ nên $d(O, (SCD)) = OH$. Ta có:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$$

$$OH = \frac{SO \cdot OM}{SM} = \frac{\frac{a\sqrt{14}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{14}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{210}}{30}.$$

d*) Vì $AB \parallel (SCD)$ nên $d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$. Gọi K là hình chiếu của A trên (SCD) . Vì H là hình chiếu của O trên (SCD) mà C, O, A thẳng hàng nên C, H, K thẳng hàng. Ngoài ra, ta có $OH \parallel AK$. Do đó, $\frac{OH}{AK} = \frac{OC}{AC} = \frac{1}{2}$. Suy ra $d(AB, SD) = d(A, (SCD)) = AK = 2OH = \frac{a\sqrt{210}}{15}$.

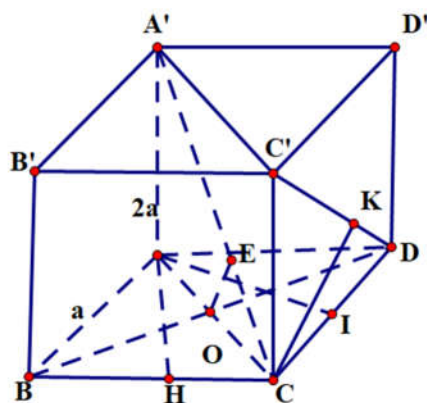
50. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $AA' \perp (ABCD)$, $AA' = 2a$, $AC = a$. Tính khoảng cách:

a) Từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$;

b) Giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$;

c*) Giữa hai đường thẳng BD và $A'C$.

Lời giải



a) Gọi H là hình chiếu của A trên BC . Khi đó, $AH \perp (BCC'B')$. Vì tam giác ABC đều cạnh a nên

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } d(A, (BCC'B')) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

b) Vì $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình hộp nên $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$.

Gọi I là hình chiếu của A trên CD . Vì tam giác ACD đều cạnh a nên $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Khi đó, } d((ABB'A'), (CDD'C')) = AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

c*) Gọi E là hình chiếu của O trên $A'C$. Vì $BD \perp (A'AC)$ nên $BD \perp OE$. Suy ra $d(BD, A'C) = OE$.

Ta có:

$$A'C = \sqrt{A'A^2 + AC^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$$

$$\text{Vì } \triangle CEO \sim \triangle CAA' \text{ nên } \frac{OE}{AA'} = \frac{OC}{A'C} \Rightarrow OE = \frac{AA' \cdot OC}{A'C} = \frac{2a \cdot \frac{a}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy } d(BD, A'C) = OE = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

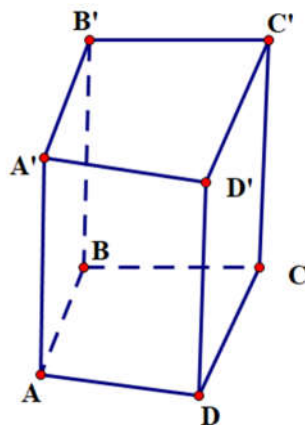
BÀI 6: HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH CHÓP ĐỀU. THỂ TÍCH MỘT SỐ HÌNH KHỐI.

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hình lăng trụ đứng. Hình lăng trụ đều

- Hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy được gọi là hình lăng trụ đứng.
- Hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều gọi là hình lăng trụ đều.
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng.

Ví dụ: Hình 41 biểu diễn hình lăng trụ đứng tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$.



Hình 41

Nhận xét

- Mỗi mặt bên của hình lăng trụ đứng là một hình chữ nhật, mặt phẳng chứa nó vuông góc với mặt đáy.
- Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Hình hộp chữ nhật có 6 mặt là hình chữ nhật.

Nếu mỗi mặt của hình hộp là hình chữ nhật thì hình hộp đó là hình hộp chữ nhật.

Độ dài các đường chéo của hình hộp chữ nhật là bằng nhau.

- Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các mặt là hình vuông.

Hình lập phương là hình lăng trụ tứ giác đều có cạnh bên bằng cạnh đáy.

2. Hình chóp đều. Hình chóp cụt đều

a) Hình chóp đều

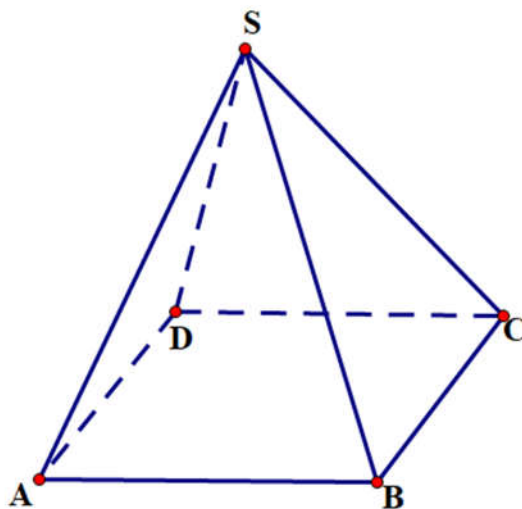
Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Chú ý

Hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng cạnh đáy là tứ diện đều.

Đoạn thẳng nối đỉnh với hình chiếu của đỉnh trên mặt đáy là đường cao

Ví dụ: Hình 42 biểu diễn hình chóp tứ giác đều SABCD



Hình 42

b) Hình chóp cắt đều

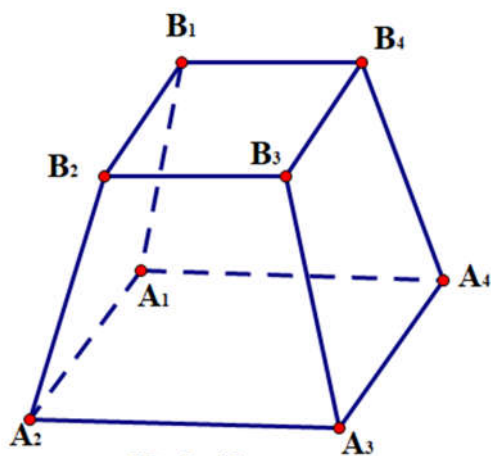
Cho hình chóp đều $S.A_1A_2A_3 \dots A_n$. Mặt phẳng (P) song song với đáy của hình chóp và cắt các cạnh $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ lần lượt tại $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Phần của hình chóp đã cho giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và $(A_1A_2A_3 \dots A_n)$ được gọi là hình chóp cắt đều $A_1A_2 \dots A_n \cdot B_1B_2 \dots B_n$.

Trong hình chóp cắt đều $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$, ta gọi:

- Các đa giác $A_1A_2 \dots A_n, B_1B_2 \dots B_n$ lần lượt là đáy lớn, đáy nhỏ;
- Các tứ giác $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n$ là các mặt bên;
- Các đoạn thẳng $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ là các cạnh bên;
- Các cạnh của hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n, B_1B_2 \dots B_n$ là các cạnh đáy;

Ví dụ: Hình 43 biểu diễn hình chóp cắt tứ giác đều $A_1A_2A_3A_4 \cdot B_1B_2B_3B_4$



Hình 43

Nhận xét:

- Hai đáy của hình chóp cắt đều nằm trên hai mặt phẳng song song và có các cạnh tương ứng song song; đồng thời hai đáy đó là các đa giác đều có cùng số cạnh;

- Mỗi mặt bên của hình chóp cắt đều là một hình thang cân;
- Các đường thẳng chứa cạnh bên của hình chóp cắt đều cùng đi qua một điểm;
- Đường cao của hình chóp cắt đều thì vuông góc với hai đáy của hình chóp cắt đều đó

3. Thể tích của một số hình khối

Phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ(kể cả hình lăng trụ đáy) được gọi là khối lăng trụ. Các khối khác được định nghĩa tương tự.

a) Thể tích của khối lăng trụ

- Chiều cao của khối lăng trụ bằng khoảng cách giữa hai mặt đáy.
- Thể tích của khối lăng trụ được tính theo công thức: $V = Sh$, trong đó h là chiều cao, S là diện tích đáy của khối lăng trụ.

b) Thể tích của khối chóp

- Chiều cao của khối chóp bằng khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy.
- Thể tích của khối chóp được tính theo công thức: $V = \frac{1}{3}Sh$, trong đó h là chiều cao, S là diện tích đáy của khối chóp.

B. CÁC DẠNG TOÁN

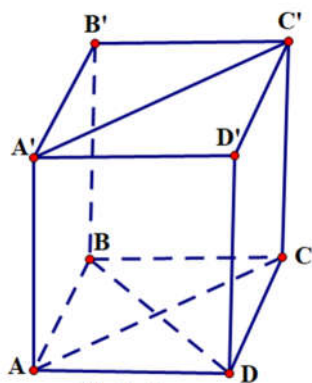
Vấn đề 1. Chứng minh quan hệ vuông góc trong không gian liên quan đến các hình khối đặc biệt

Ví dụ 1: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $AC \perp (BDD'B')$.

Lời giải

Vì $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình lăng trụ tứ giác đều nên $BB' \perp (ABCD)$. Mà $AC \subset (ABCD)$ nên $BB' \perp AC$.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$. Mà BB' và BD cắt nhau trong mặt phẳng $(BDD'B')$ nên $AC \perp (BDD'B')$.



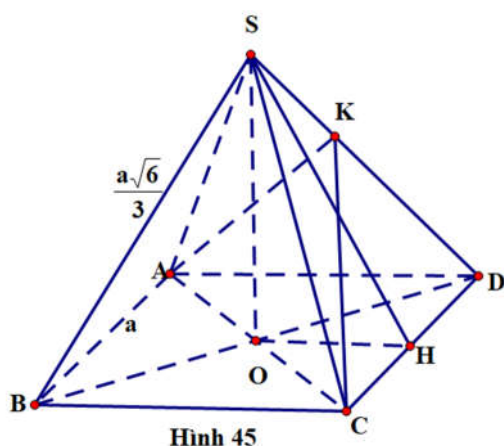
Hình 44

Vấn đề 2. Tính góc, độ dài, khoảng cách và thể tích liên quan đến các hình khối đặc biệt

Ví dụ 2 Cho khối chóp tứ giác đều $S \cdot ABCD$ có $AB = a, SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

- Tính chiều cao của khối chóp $S \cdot ABCD$.
- Tính thể tích của khối chóp $S \cdot ABCD$.
- Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.
- Tính cosin của số đo góc nhị diện $[S, CD, B]$.
- Tính cosin của số đo góc nhị diện $[A, SD, C]$.

Lời giải



a) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Vì $ABCD$ là hình vuông nên $OA = OB = OC = OD$,
Suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ nên O là chân đường cao của khối chóp $S \cdot ABCD$.
Khi đó, chiều cao của khối chóp $S \cdot ABCD$ bằng SO .

Trong hình vuông $ABCD$, ta có:

$$AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Xét tam giác SAO vuông tại O có:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Vậy chiều cao của khối chóp $S \cdot ABCD$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

b) Diện tích đáy $ABCD$ là: $S_{ABCD} = a^2$. Suy ra thể tích khối chóp $S \cdot ABCD$ là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{AHCD} \cdot SO = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}.$$

c) Vì $SO \perp (ABCD)$ nên OA là hình chiếu của SA trên $(ABCD)$. Khi đó góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SAO}$.

$$\text{Xét tam giác } SAO \text{ vuông tại } O \text{ có: } \cos \widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $\widehat{SAO} = 30^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° .

d) Gọi H là hình chiếu của O trên CD . Vì OCD là tam giác vuông cân tại O nên H là trung điểm CD . Mà tam giác SCD cân tại S nên $SH \perp CD$.

Suy ra $\widehat{SHO}$ là góc nhị diện của góc nhị diện $[S, CD, B]$

$$\text{Xét tam giác } DBC \text{ có } OH \text{ là đường trung bình nên } OH = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2}$$

$$SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$$

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{SHO} = \frac{OH}{SH} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{15}}{6} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

Vậy cosin của số đo góc nhị diện $[S, CD, B]$ bằng $\frac{\sqrt{15}}{5}$

e) Gọi K là hình chiếu của A trên SD . Vì $AC \perp BD$, $AC \perp SO$ và BD, SO cắt nhau trong mặt phẳng (SBD) nên

$$AC \perp (SBD). \text{ Mà } SD \subset (SBD) \text{ nên } AC \perp SD.$$

Ngoài ra, $SD \perp AK$ và AK, AC cắt nhau trong mặt phẳng (ACK) nên $SD \perp (ACK)$. Mà $CK \subset (ACK)$ nên $SD \perp CK$

Từ đó ta có $\widehat{AKC}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A, SD, C]$.

$$\text{Xét tam giác } SCD \text{ có: } KC = \frac{SH \cdot CD}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{6} \cdot a}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{a\sqrt{15}}{6} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

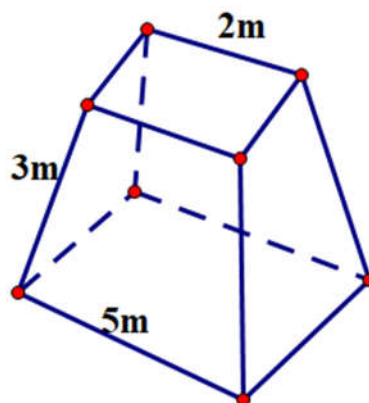
$$\text{Tương tự ta có: } KA = \frac{a\sqrt{10}}{4}. \text{ Xét tam giác } AKC, \text{ ta có:}$$

$$\cos \widehat{AKC} = \frac{KA^2 + KC^2 - AC^2}{2KA.KC} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{10}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{4}} = \frac{-3}{5}$$

Vậy cosin của số đo góc nhị diện $[A, SD, C]$ là: $\frac{-3}{5}$

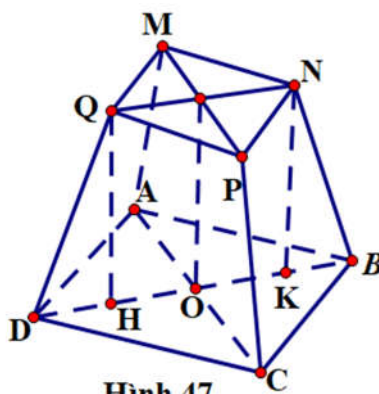
Vấn đề 3: ứng dụng

Ví dụ 3: Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cắt tứ giác đều. cạnh đáy dưới dài 5m, cạnh đáy trên dài 2m, cạnh bên dài 3m. biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1470000 đồng/ m^3 . Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng (làm tròn kết quả hàng nghìn)



Hình 46

Lời giải



Hình 47

Giả sử chân tháp là khối chóp cắt tứ giác đều $ABCD.MNPQ$ với $ABCD$ là hình vuông cạnh 5 m, $MNPQ$ là hình vuông cạnh 2 m, $AM = BN = CP = DQ = 3$ m.

Vì DQ, NB cắt nhau nên D, Q, N, B đồng phẳng. Mà $(ABCD) // (MNPQ)$ nên $NQ // BD$.

Gọi I là giao điểm của MP và NQ , O là giao điểm của AC và BD . Khi đó $IO \perp (MNPQ), IO \perp (ABCD)$.

Xét hình thang $QNBD$, gọi H là hình chiếu của Q trên BD , K là hình chiếu của N trên BD . Vì $IO \perp BD$, $QH \perp BD$, $NK \perp BD$ trong $(QNBD)$ nên $IO \parallel QH \parallel NK$.

Suy ra $QH \perp (MNPQ)$, $QH \perp (ABCD)$ nên QH bằng chiều cao của khối chóp cụt đều.

Ngoài ra, ta có $QH = NK = IO$ và $QD = NB$. Suy ra $\triangle QHD = \triangle NKB$ nên ta có $HD = BK$.

Bên cạnh đó, $QNKH$ là hình chữ nhật nên $QN = HK$. Từ đó ta có:

$$HD = \frac{BD - HK}{2} = \frac{\sqrt{AD^2 + AB^2} - \sqrt{MN^2 + MQ^2}}{2} = \frac{\sqrt{5^2 + 5^2} - \sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (m)}.$$

Xét tam giác QHD vuông tại H có:

$$QH = \sqrt{QD^2 - HD^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (m)}.$$

Diện tích của hai đáy là: $S_{ABCD} = AB^2 = 5^2 = 25 \text{ (m}^2\text{)}$, $S_{MNPQ} = MN^2 = 2^2 = 4 \text{ (m}^2\text{)}$.

Suy ra thể tích của khối chóp cụt đều là:

$$V = \frac{1}{3}QH(S_{ABCD} + \sqrt{S_{ABCD} \cdot S_{MNPQ}} + S_{MNPQ}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} (25 + \sqrt{25 \cdot 4} + 4) = \frac{39\sqrt{2}}{2} \text{ (m}^3\text{)}.$$

Số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp là:

$$1470000 \cdot \frac{39\sqrt{2}}{2} \approx 40538000 \text{ (đồng)}$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Quan sát và cho biết chiếc đèn treo ở Hình 96a, trạm khảo sát trắc địa ở Hình 96b có dạng hình gì.



a) b)

Hình 96

Lời giải

Hình 96a có dạng hình khối lăng trụ

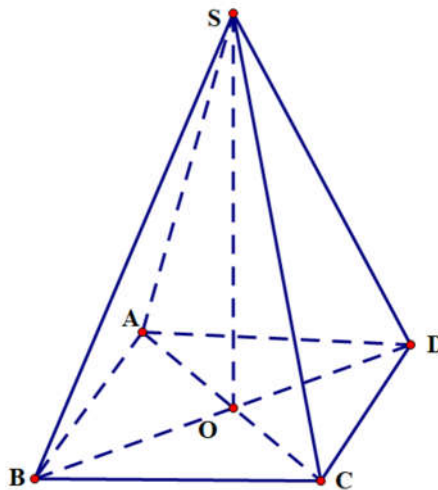
Hình 96b có dạng hình khối chóp cụt đều

Bài 2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a .

a) Chứng minh rằng các tam giác ASC và BSD là tam giác vuông cân.

- b) Gọi O là giao điểm của AC và BD , chứng minh rằng đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.
- c) Chứng minh rằng góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .

Lời giải



a) $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC = BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$

Xét $\triangle ASC$ có: $SA^2 + SC^2 = 2a^2 = AC^2, SA = SC$

Vậy tam giác ASC là tam giác vuông cân tại S .

Xét $\triangle BSD$ có: $SB^2 + SD^2 = 2a^2 = BD^2, SB = SD$

Vậy tam giác BSD là tam giác vuông cân tại S .

b) $\triangle ASC$ vuông cân tại $S \Rightarrow SO \perp AC$

$\triangle BSD$ vuông cân tại $S \Rightarrow SO \perp BD$

$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

c) $SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SA, (ABCD)) = (SA, OA) = \widehat{SAO}$

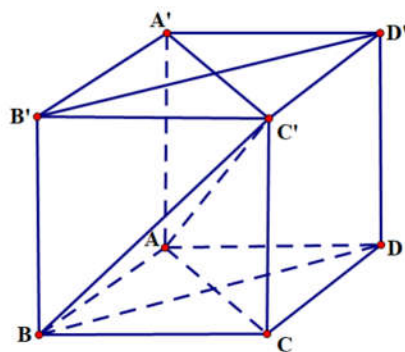
$\triangle ASC$ vuông cân tại $S \Rightarrow \widehat{SAO} = 45^\circ$

Vậy $(SA, (ABCD)) = 45^\circ$.

Bài 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° .

- a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ vuông góc với nhau.
- b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $C'D'$.

Lời giải



a) $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$

$$BB' \perp (ABCD) \Rightarrow BB' \perp AC$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow AC \perp (BDD'B') \\ AC \subset (ACC'A') \end{array} \right\} \Rightarrow (ACC'A') \perp (BDD'B')$$

b) $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB \parallel CD$

$CDD'C'$ là hình chữ nhật $\Rightarrow CD \parallel C'D'$

$$\Rightarrow AB \parallel C'D' \Rightarrow d(AB, C'D') = d(B, C'D')$$

$A'B'C'D'$ là hình vuông $\Rightarrow C'D' \perp B'C'$

$CDD'C'$ là hình chữ nhật $\Rightarrow C'D' \perp CC'$

$$\Rightarrow C'D' \perp (BCC'B') \Rightarrow C'D' \perp BC' \Rightarrow d(B, C'D') = BC'$$

$$ABCD \text{ là hình vuông } \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$$

$$CC' \perp (ABCD) \Rightarrow (\angle AC', (ABCD)) = (\angle AC', AC) = \widehat{CAC'} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow CC' = AC \cdot \tan \widehat{CAC'} = a\sqrt{6}$$

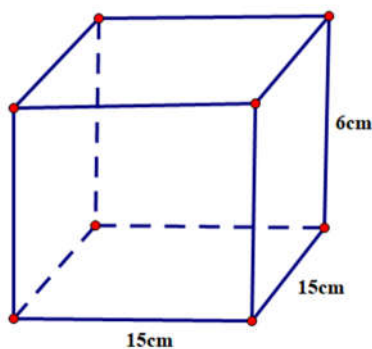
$$\triangle BCC' \text{ vuông tại } C \Rightarrow BC^2 = \sqrt{BC^2 + CC^2} = a\sqrt{7}$$

$$\triangle BCC' \text{ vuông tại } C \Rightarrow BC'^2 = \sqrt{BC^2 + CC^2} = a\sqrt{7}$$

$$\text{Vậy } d(AB, C'D') = a\sqrt{7}.$$

Bài 4. Một chiếc bánh chưng có dạng khối hộp chữ nhật với kích thước ba cạnh là 15 cm, 15 cm và 6 cm. Tính thể tích của chiếc bánh chưng đó.

Lời giải



Thể tích của chiếc bánh chưng đó là: $V = 15.15 \cdot 6 = 1350 \text{ (cm}^3\text{)}.$

Bài 5. Một miếng pho mát có dạng khối lăng trụ đứng với chiều cao 10 cm và đáy là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 12 cm. Tính khối lượng của miếng pho mát theo đơn vị gam, biết khối lượng riêng của loại pho mát đó là 3 g/cm^3 .

Lời giải

Diện tích đáy của miếng phomat là:

$$\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 12\sqrt{2} = 36\sqrt{6}$$

Thể tích của miếng phomat là: $36\sqrt{6} \cdot 10 \approx 882 \text{ (cm}^3\text{)}$

Vậy khối lượng của miếng phomat là: $882 \cdot 3 = 2646 \text{ (g)}$

Bài 6. Một loại đèn đá muối có dạng khối chóp tứ giác đều (Hình 97). Tính theo a thể tích của đèn đá muối đó, giả sử các cạnh đáy và các cạnh bên đều bằng a .



Hình 97

Lời giải

Mô hình hoá đèn đá muối bằng hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.

Gọi O là tâm của đáy.

$$\Delta SAC \text{ cân tại } S \Rightarrow SO \perp AC$$

$$\Delta SBD \text{ cân tại } S \Rightarrow SO \perp BD$$

$$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

$$ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

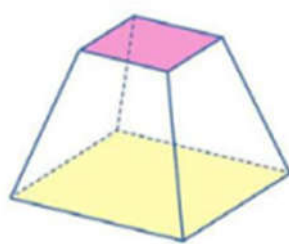
$$\Delta SAO \text{ vuông tại } O \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{ABCD} = AB^2 = a^2$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Bài 7. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình 98). Cạnh đáy dưới dài 5 m, cạnh đáy trên dài 2 m, cạnh bên dài 3 m. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1470000 đồng /m³. Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng.

Lời giải



Hình 98

Theo đề bài, ta có $AB = 5, A'B' = 2, CC' = 3$

Có ABCD là hình vuông

$$\Rightarrow CO = \frac{1}{2}AC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Có $A'B'C'D'$ là hình vuông

$$A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow C'O' = \frac{1}{2}A'C' = \sqrt{2}$$

Kẻ $C'H \perp OC$

$\Rightarrow OHC'O'$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow OH = O'C' = \sqrt{2}, OO' = C'H = CH = OC - OH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Có tam giác } CC'H \text{ vuông tại } H \Rightarrow C'H = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OO' = C'H = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Diện tích đáy lớn là } S = AB^2 = 5^2 = 25 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$\text{Diện tích đáy bé là } S' = A'B'^2 = 2^2 = 4 \text{ (m}^2\text{)}$$

Thể tích hình chóp cụt là

$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S')$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} (25 + \sqrt{25 \cdot 4} + 4) = \frac{39\sqrt{2}}{2} (m^3)$$

Số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp là: $\frac{39\sqrt{2}}{2} \cdot 1470000 \approx 40538432$ (đồng)

D. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

51. Một khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $2a^2$ và có chiều cao bằng $3a$ thì có thể tích bằng:

- A.** $\frac{a^3}{3}$. **B.** $6a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3 .

Lời giải

Chọn B

52. Một khối chóp có diện tích đáy bằng $2a^2$ và có chiều cao bằng $3a$ thì có thể tích bằng:

- A.** $\frac{a^3}{3}$. **B.** $6a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3 .

Lời giải

Chọn C

53. Một khối chóp cụt đều có chiều cao bằng $6a$, diện tích của hai đáy lần lượt bằng $4a^2$ và $9a^2$ thì có thể tích bằng:

- A.** $38a^3$. **B.** $76a^3$. **C.** $114a^3$. **D.** $\frac{19a^3}{3}$.

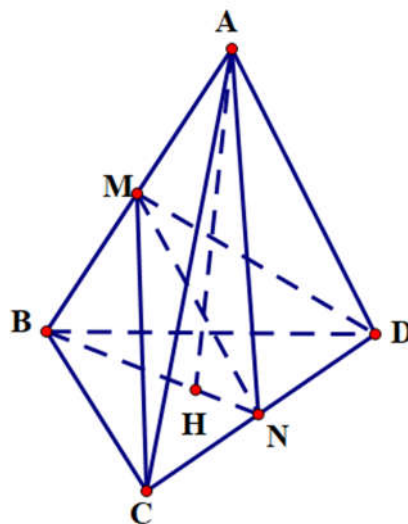
Lời giải

Chọn A

54. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính:

- a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD ;
- b) Chiều cao và thể tích của khối tứ diện đều $ABCD$;
- c) Côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) ;
- d) Côsin của số đo góc nhị diện $[C, AB, D]$.

Lời giải



a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Vì tứ diện $ABCD$ đều nên các tam giác ABC và ABD đều. Suy ra $CM \perp AB, DM \perp AB$ nên $AB \perp (CDM)$. Do đó, $AB \perp MN$. Tương tự ta có $CD \perp MN$. Vậy MN là đoạn vuông góc chung của AB, CD . Ta có:

$$MN = \sqrt{MC^2 - NC^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(AB, CD) = MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

b) Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD) . Khi đó, H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Vì tam giác BCD đều nên H thuộc BN và $BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Ta có:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

hay chiều cao của khối tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Diện tích của tam giác BCD là $S_{BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Vậy thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

c) Côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng:

$$\cos \widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

d) Vì $CM \perp AB, DM \perp AB$ nên số đo của góc nhị diện $[C, AB, D]$ bằng $\widehat{CMD}$.

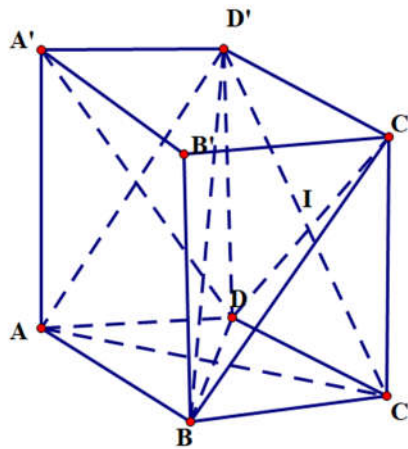
$$\text{Ta có: } \cos \widehat{CMD} = \frac{CM^2 + DM^2 - CD^2}{2CM \cdot DM} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Vậy cosin của số đo góc nhị diện $[C, AB, D]$ bằng $\frac{1}{3}$.

55. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ cạnh a . Tính:

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$;
- Số đo của góc nhị diện $[A, CD, B']$;
- Tang của góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$;
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng $C'D$ và BC ;
- Góc giữa hai đường thẳng BC' và CD' .

Lời giải



a) $d((ABCD), (A'B'C'D')) = a$.

b) Vì $A'B' \parallel DC$ nên A', B', C, D đồng phẳng. Khi đó, góc nhị diện $[A, CD, B']$ là $[A, CD, A']$. Ta có $AD \perp DC, A'D \perp DC$. Số đo của góc nhị diện $[A, CD, B']$ bằng $\widehat{ADA'} = 45^\circ$.

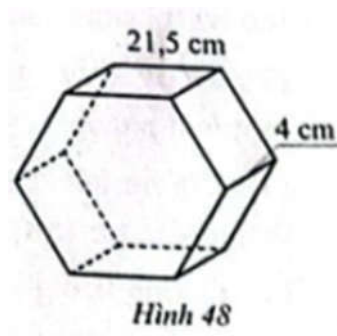
c) Vì $DD' \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\widehat{D'BD}$.

Khi đó, tang của góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\tan \widehat{D'BD} = \frac{D'D}{BD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Gọi I là giao điểm của CD' và $C'D$. Khi đó $IC \perp BC, IC \perp C'D$. Suy ra $d(C'D, BC) = IC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

e*) Vì $BC' // AD'$ nên góc giữa hai đường thẳng BC' và CD' bằng góc giữa hai đường thẳng AD' và CD' . Vì tam giác $AD'C$ đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên $\widehat{AD'C} = 60^\circ$. Vậy góc giữa hai đường thẳng BC' và CD' bằng 60° .

56. Người ta cần đổ bê tông để làm những viên gạch có dạng khối lăng trụ lục giác đều (Hình 48) với chiều cao là 4 cm và cạnh lục giác dài 21,5 cm. Tính thể tích bê tông theo đơn vị centimet khối để làm một viên gạch như thế (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

Chia hình lục giác đều trên hai mặt đáy thành 6 hình tam giác đều cạnh 21,5 cm.

Khi đó diện tích đáy của viên gạch bằng: $6 \cdot \frac{(21,5)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{5547\sqrt{3}}{8} (\text{cm}^2)$. Thể tích bê tông cần dùng bằng thể tích viên gạch, tức là: $\frac{5547\sqrt{3}}{8} \approx 4803,8 (\text{cm}^3)$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

PHẦN 1: BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Câu 1: Cho hình lập phương $MNPQ.M'N'P'Q'$ có cạnh bằng a .

a. Góc giữa hai đường thẳng MN và $M'P'$ bằng:

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

b. Gọi α là số đo góc giữa đường thẳng MP và mặt phẳng $(MNPQ)$. Giá trị $\tan \alpha$ bằng:

- A. 1. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

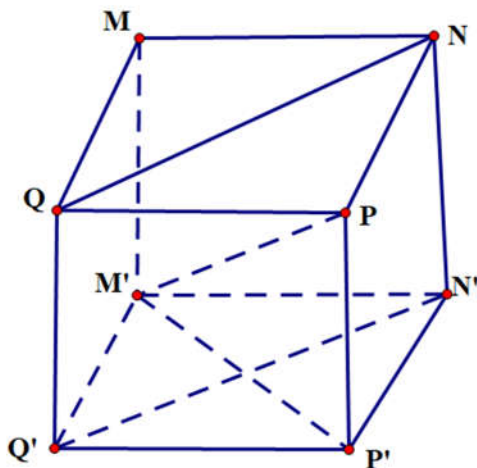
c. Số đo của góc nhị diện $[N, MM', P]$ bằng:

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

d. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(NQQ'N')$ bằng:

- A. a . B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $\frac{a}{2}$.

Lời giải



a) Có $M'P' \parallel MP$

$\Rightarrow$ Góc giữa đường thẳng $M'P'$ và MN bằng góc giữa đường thẳng MP và MN là $\widehat{NMP} = 45^\circ$

$\Rightarrow$ **Chọn B**

b) Có $MM' \perp (MNPQ)$

$\Rightarrow$ Góc giữa đường thẳng $M'P$ và $(MNPQ)$ là $\widehat{MPM'}$

$$MP = \sqrt{MN^2 + NP^2} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \tan \widehat{MPM'} = \frac{MM'}{MP} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Chọn D

c) $MM' \perp (MNPQ) \Rightarrow MM' \perp MN, MM' \perp MP$

$$\Rightarrow \widehat{NMP} = 45^\circ$$

Chọn B

d) Gọi $O = MP \cap NQ$

$MNPQ$ là hình vuông $\Rightarrow MO \perp NQ$

$NN' \perp (MNPQ) \Rightarrow NN' \perp MO$

$$\Rightarrow d(M, (NQQ'N')) = MO = \frac{1}{2}MP = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Chọn B

Câu 2: Cho hình hộp chữ nhật $MNPQ.M'N'P'Q'$ có $MN = 2a$, $MQ = 3a$, $MM' = 4a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng NP và $M'N'$ bằng:

A. $2a$.

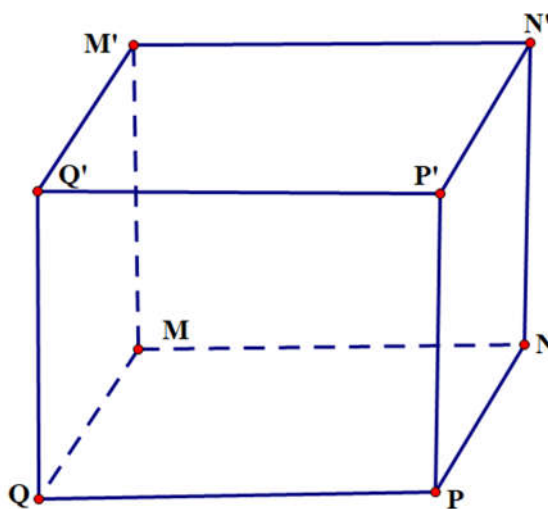
B. $3a$.

C. $4a$.

D. $5a$.

Lời giải

Chọn C



$NN' \perp (MNPQ) \Rightarrow NN' \perp NP$

$NN' \perp (M'N'P'Q') \Rightarrow NN' \perp M'N'$

$\Rightarrow d(NP, M'N') = NN' = MM' = 4a$

Câu 3: Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng a^2 và chiều cao bằng $3a$. Thể tích của khối lăng trụ đó bằng:

A. a^3 .

B. $3a^3$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. $9a^3$.

Lời giải

Chọn B

Có $V = a^2 \cdot 3a = 3a^3$

Thể tích của khối lăng trụ đó bằng $3a^3$

Câu 4: Cho khối chóp diện tích đáy là a^2 và chiều cao là $3a$. Thể tích của khối chóp bằng:

- A. a^3 . B. $3a^3$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $9a^3$.

Lời giải

Chọn A

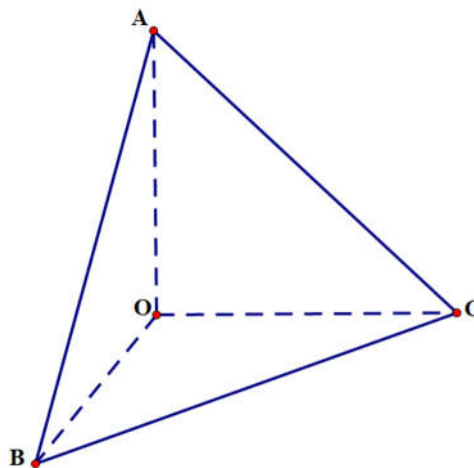
Thể tích của khối chóp bằng: $\frac{1}{3} \cdot 3a \cdot a^2 = a^3$

Câu 5: Cho tứ diện $OABC$ thỏa mãn $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 90^\circ$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ bằng

- A. abc . B. $\frac{abc}{2}$. C. $\frac{abc}{3}$. D. $\frac{abc}{6}$.

Lời giải

Chọn D



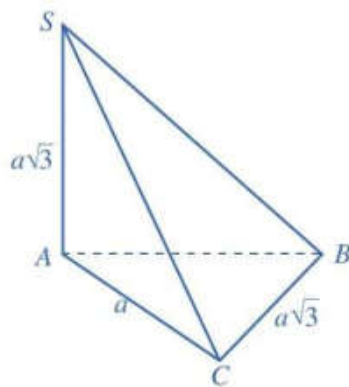
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow OA \perp OB \\ \widehat{COA} = 90^\circ \Rightarrow OA \perp OC \end{array} \right\} \Rightarrow OA \perp (OBC)$$

$$S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC = \frac{1}{2} bc, h = OA = a$$

$$\Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle OBC} \cdot OA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} bc \cdot a = \frac{abc}{6}$$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AC \perp BC$, $SA = BC = a\sqrt{3}$, $AC = a$ (Hình 99).

- Tính góc giữa hai đường thẳng SA và BC .
- Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) .
- Tính số đo của góc nhị diện $[B, SA, C]$.
- Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .
- Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.



Hình 99

Lời giải

a) $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow (SA, BC) = 90^\circ$.

b) $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SC, (ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$

$$\triangle SAC \text{ vuông tại } A \Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$$

Vậy $(SC, (ABC)) = 60^\circ$.

c) $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB, SA \perp AC$

Vậy $\widehat{BAC}$ là góc nhị diện $[B, SA, C]$.

$$\triangle ABC \text{ vuông tại } C \Rightarrow \tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ.$$

d)

$$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$$

$$AC \perp BC$$

$$\Rightarrow d(B, (SAC)) = BC = a\sqrt{3}$$

e) $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC, AC \perp BC$

$$\Rightarrow d(SA, BC) = AC = a$$

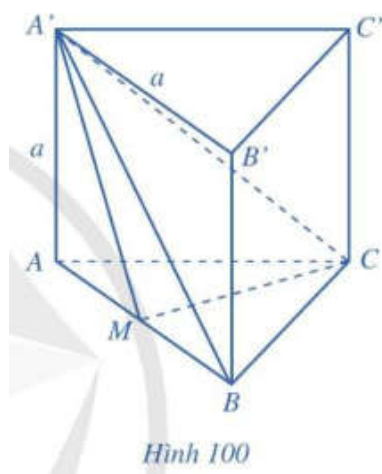
$$g) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$h = SA = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{2}$$

- Câu 7:** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của AB (Hình 100).
- Tính góc giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$.
 - Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) . Hình 99
 - Tính số đo của góc nhị diện $[B, CC', M]$.
 - Chứng minh rằng $CC' \parallel (ABB'A')$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng CC' và mặt phẳng $(ABB'A')$.
 - Chứng minh rằng $CM \perp (ABB'A')$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CC' và $A'M$.
 - Tính thể tích của khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ và thể tích khối chóp $A'.MBC$.

Lời giải



Hình 100

a) $BCC'B'$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BC \parallel B'C'$

$$\Rightarrow (AB, B'C') = (AB, BC) = \widehat{ABC} = 60^\circ.$$

b)

$$\Delta AA'B \text{ vuông tại } A \Rightarrow \tan \widehat{ABA'} = \frac{AA'}{AB} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{ABA'} = 45^\circ$$

$$\text{Vậy } (A'B, (ABC)) = 45^\circ.$$

c) $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp BC, CC' \perp CM$

Vậy $\widehat{BCM}$ là góc nhị diện $[B, CC', M]$.

$$\Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow \widehat{BCM} = \frac{1}{2} \widehat{ACB} = 30^\circ.$$

d) $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CM$

$$\Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow CM \perp AB.$$

$$\Rightarrow CM \perp (ABB'A')$$

$$\Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} CC' \parallel AA' \\ AA' \subset (ABB'A') \end{array} \right\} \Rightarrow CC' \parallel (ABB'A')$$

$$\Rightarrow d(CC', (ABB'A')) = d(C, (ABB'A')) = CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{e) } SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CM$$

$$\Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow CM \perp AB.$$

$$\Rightarrow CM \perp (ABB'A') \Rightarrow CM \perp A'M$$

$$CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp CM$$

$$\Rightarrow d(CC', A'M) = CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{g) } S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, h = AA' = a$$

$$\Rightarrow V_{ABC \cdot A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}, h = AA' = a$$

$$\Rightarrow V_{A' \cdot MBC} = \frac{1}{3} S_{\Delta MBC} \cdot AA' = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$$

Câu 8: Hình 101 là hình chụp đền Kukulkan, là một kim tự tháp Trung Mỹ nằm ở khu di tích Chichen Itza, Mexico, được người Maya xây vào khoảng từ thế kỉ IX đến thế kỉ XIII. Phần thân của đền, không bao gồm ngói đền nằm phía trên, có dạng một khối chóp cụt tứ giác đều (không tính cầu thang và coi các mặt bên là phẳng) với độ dài đáy dưới là 55,3 m, chiều cao là 24 m, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy là khoảng 47° .

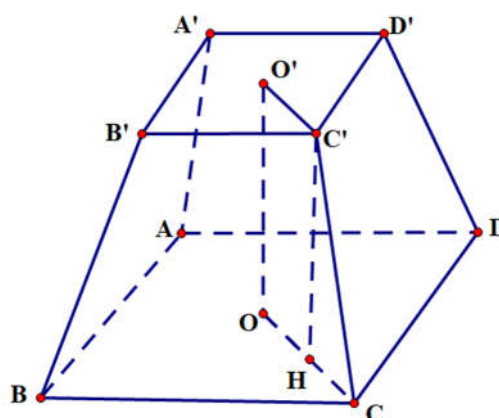


(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 101

Tính thể tích phần thân ngôi đền có dạng khối chóp cắt tứ giác đều đó theo đơn vị mét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải



Mô hình hoá phần thân của đền bằng cắt chóp tứ giác đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$ với O, O' là tâm của hai đáy. Vậy $AB = 55,3; OO' = 24; (\angle CC', (ABCD)) = 47^\circ$.

$ABCD$ là hình vuông

$$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 55,3\sqrt{2} \Rightarrow CO = \frac{1}{2} AC = 27,65\sqrt{2}$$

$$\text{Kẻ } C'H \perp OC (H \in OC) \Rightarrow C'H \parallel OO' \Rightarrow C'H \perp (ABCD)$$

$$\Rightarrow (\angle CC', (ABCD)) = (\angle CC', CH) = \widehat{HCC'} = 47^\circ$$

$$OHC'O' \text{ là hình chữ nhật } \Rightarrow OO' = C'H = 24, CH = O'C'$$

$$\triangle CC'H \text{ vuông tại } H \Rightarrow CH = \frac{C'H}{\tan \widehat{HCC'}} = \frac{24}{\tan 47^\circ} \approx 22,38$$

$$O'C' = OH = CO - CH \approx 16,72 \Rightarrow A'C' = 2O'C' = 33,44$$

$$A'B'C'D' \text{ là hình vuông } \Rightarrow A'B' = \frac{A'C'}{\sqrt{2}} \approx 23,65$$

$$\text{Diện tích đáy lớn là: } S = AB^2 = 55,3^2 = 3058,09 \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích đáy bé là: $S' = A'B'^2 = 23,65^2 = 545,2225 \text{ (m}^2\text{)}$

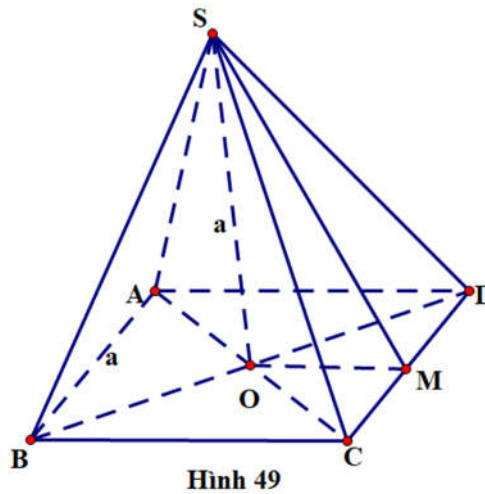
Thể tích hình chóp cắt là:

$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S') = \frac{1}{3} \cdot 24(3058,09 + \sqrt{3058,09 \cdot 545,2225} + 545,2225) \approx 39156,53 \text{ (m}^3\text{)}$$

Vậy thể tích phần thân ngôi đền có dạng khối chóp cắt tứ giác đều đó là $39156,53 \text{ (m}^3\text{)}$

PHẦN 2: BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

57. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, O là hình chiếu của S trên $(ABCD)$, $SO = a$. Gọi M là hình chiếu của O trên CD (Hình 49).



a) Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

- A.** (SAB) . **B.** (SAD) . **C.** (SBC) . **D.** (SBD) .

Lời giải

Chọn D

b) Số đo của góc nhị diện $[A, SO, M]$ bằng:

- A.** 30° . **B.** 45° . **C.** 135° . **D.** 150° .

Lời giải

Chọn C

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SO và BC bằng:

- A.** a . **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

d) Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. a^3 .

B. $\frac{a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. $3a^3$.

Lời giải

Chọn C

e) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SOM) bằng:

A. a .

B. $\frac{a}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

g) Côtang của góc giữa đường thẳng SM và $(ABCD)$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. 1.

D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn A

58. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

- (1): Trong không gian, hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- (2): Trong không gian, hai đường thẳng vuông góc với nhau thì cùng nằm trên một mặt phẳng.
- (3): Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.
- (4): Đường thẳng song song với một trong hai mặt phẳng vuông góc thì song song hoặc nằm trên mặt phẳng còn lại.
- (5): Ba mặt phẳng đôi một vuông góc với nhau thì ba giao tuyến tạo thành cũng đôi một vuông góc với nhau.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

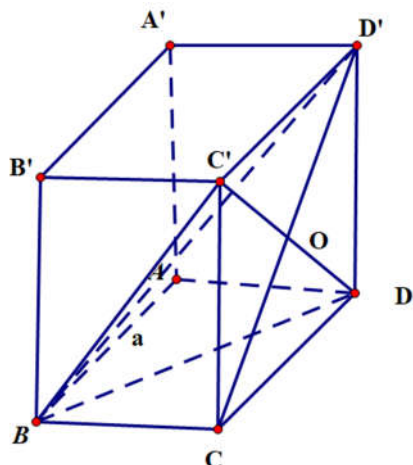
Chọn A

59. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = a$.

- a) Chứng minh rằng $C'D \perp (BCD')$, $BD' \perp C'D$ và $(BC'D) \perp (BCD')$.
- b) Tính góc giữa hai đường thẳng BD và $A'D'$.
- c) Tính góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng $(CDD'C')$.
- d) Tính số đo của góc nhị diện $[B, DD', C]$.
- e) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (BCD') .
- g) Chứng minh $B'C' \parallel (BCD)$ và tính khoảng cách giữa đường thẳng $B'C'$ và mặt phẳng (BCD') .

h) Tính thể tích của khối tứ diện $C'BCD$ và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(BC'D)$.

Lời giải



a) Vì $BC \perp (CDD'C')$ nên $BC \perp C'D$. Mà $C'D \perp CD'$ nên $C'D \perp (BCD)$. Suy ra $C'D \perp BD'$ và $(BC'D) \perp (BCD')$.

Ta có: $(BD, A'D') = (BD, AD) = \widehat{BDA} = 45^\circ$.

c) Góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng $(CDD'C')$ bằng $(BD, CD) = \widehat{BDC} = 45^\circ$.

d) Vì $DD' \perp (BCD)$ nên $DD' \perp BD, DD' \perp CD$. Suy ra số đo của góc nhị diện $[B, DD', C]$ bằng $(BD, CD) = 45^\circ$.

c) Gọi O là giao điểm của $C'D$ và CD' . Vì $DO \perp BC, DO \perp CD'$ nên $DO \perp (BCD')$.

$$\text{Vậy } d(D, (BCD')) = DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

g) Vì $B'C' \parallel BC$ nên $B'C' \parallel (BCD')$. Khi đó, $d(B'C', (BCD')) = d(C', (BCD'))$. Vì $C'O \perp (BCD')$ nên

$$d(B'C', (BCD')) = C'O = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

h) Thể tích khối tứ diện $C'BCD$ bằng $V_{C'BCD} = \frac{1}{3} \cdot CC' \cdot \left(\frac{1}{2} BC \cdot CD \right) = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \right) = \frac{a^3}{6}$.

$$\text{Diện tích tam giác đều } BC'D \text{ cạnh } a\sqrt{2} \text{ bằng: } S_{BC'D} = \frac{(a\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Xét khối tứ diện $C'BCD$ có C là đỉnh, $BC'D$ là đáy thì khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(BC'D)$ bằng:

$$d(C, (BC'D)) = \frac{3V_{C'BCD}}{S_{BC'D}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3}{6}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

60. Một chì neo câu cá có dạng khối chóp cắt tứ giác đều được làm hoàn toàn bằng chì có khối lượng 137 g. Biết cạnh đáy nhỏ và cạnh đáy lớn của khối chóp cắt đều dài lần lượt 1 cm và 3 cm, khối lượng riêng của chì bằng 11,3 g/cm³. Tính chiều cao của chì neo câu cá đó theo đơn vị centimét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

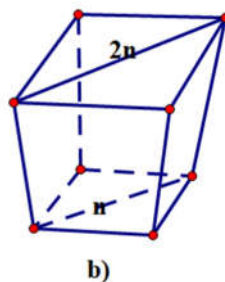
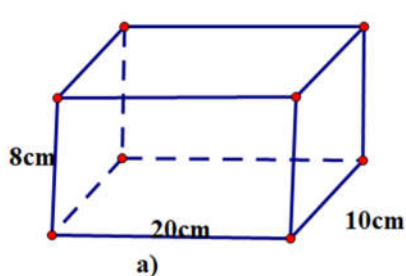
Lời giải

Thể tích của chì neo câu cá bằng $V = \frac{137}{11,3} \text{ (cm}^3\text{)}.$

Vậy chiều cao của chì neo câu cá bằng

$$h = \frac{3V}{1^2 + \sqrt{1^2 \cdot 3^2} + 3^2} = \frac{3 \cdot \frac{137}{11,3}}{13} \approx 2,8 \text{ (cm)}.$$

61*. Một chiếc khay đựng đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước: chiều dài 20 cm, chiều rộng 10 cm, chiều cao 8 cm (Hình 50a). Để san bớt nước cho đầy, người ta đổ nước từ chiếc khay thứ nhất đó sang chiếc khay thứ hai có dạng hình chóp cắt tứ giác đều với đáy khay là hình vuông nhỏ có đường chéo d (cm), miệng khay là hình vuông lớn có đường chéo dài $2n$ (cm). Sau khi đổ, mực nước ở khay thứ hai cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của khay đó lượng nước trong khay thứ nhất giảm đi $\frac{1}{4}$ so với ban đầu. Tính thể tích của chiếc khay thứ hai theo đơn vị centimét khối.



Hình 50

Lời giải

59 Thể tích nước có trong khay thứ nhất trước khi đổ bằng

$$20 \cdot 10 \cdot 8 = 1600 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

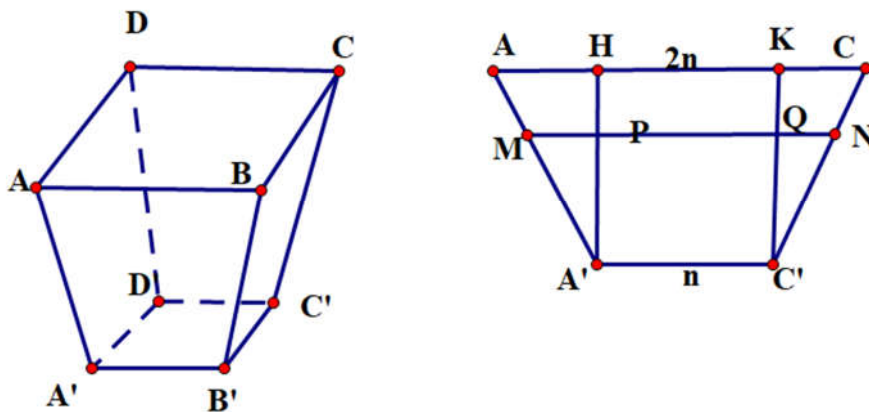
Sau khi đổ, thể tích nước có trong khay thứ hai bằng

$$1600 \cdot \frac{1}{4} = 400 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Gọi chiều cao của khay thứ hai là h (cm).

Giả sử khay thứ hai có dạng hình chóp cắt tứ giác đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

Xét hình thang $ACC'A'$, lấy MN song song với AC ; H, K lần lượt là hình chiếu của A', C' trên AC ; P, Q lần lượt là giao điểm của $A'H$ và MN , $C'K$ và MN



Theo giả thiết, mực nước (ngang với MN) trong khay thứ hai cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của khay đó, suy ra

$$\frac{A'P}{A'H} = \frac{C'Q}{C'K} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MP}{AH} = \frac{NQ}{CK} = \frac{2}{3}.$$

Ta có: $AH = CK = \frac{n}{2}$, $HK = n$, nên $MN = \frac{5}{3}n$. Thể tích của nước trong khay thứ hai bằng thể tích khối chóp cắt tứ giác đều với đáy lớn nhận MN là đường chéo và đáy nhỏ nhận $A'C'$ là đường chéo, chiều cao bằng $\frac{2}{3}h$. Vì thể tích nước trong khay thứ hai bằng 400 cm^3 nên ta có

$$\frac{1}{3} \left[\frac{\left(\frac{5}{3}n\right)^2}{2} + \sqrt{\frac{\left(\frac{5}{3}n\right)^2}{2} \cdot \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2}} \right] \cdot \frac{2}{3}h = \frac{49}{81}n^2h = 400 \Rightarrow n^2h = \frac{32400}{49}.$$

Thể tích của chiếc khay thứ hai bằng

$$V = \frac{h}{3} \left[\frac{(2n)^2}{2} + \sqrt{\frac{(2n)^2}{2} \cdot \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2}} \right] = \frac{7}{6}n^2h = \frac{7}{6} \cdot \frac{32400}{49} = \frac{5400}{7} (\text{ cm}^3).$$