

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 1. GÓC LƯỢNG GIÁC. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

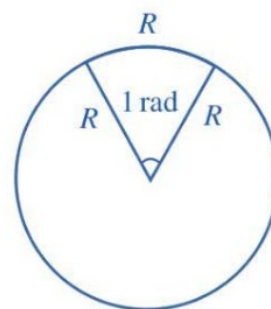
### I LÝ THUYẾT.

#### I. GÓC LƯỢNG GIÁC

##### 1. Góc hình học và số đo của chúng

Số đo của một góc (hình học) không vượt quá  $180^\circ$ .

Một đơn vị khác được sử dụng nhiều khi đo góc là radian (đọc là ra-di-an). Nếu trên đường tròn, ta lấy một cung tròn có độ dài bằng bán kính thì góc ở tâm chắn cung đó gọi là góc có số đo 1 radian, gọi tắt là góc 1 radian (Hình 2). 1 radian còn viết tắt là 1 rad.



Hình 2

##### Quan hệ giữa độ và radian

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad và } 1 \text{ rad} = \left( \frac{180}{\pi} \right)^\circ.$$

##### 2. Góc lượng giác và số đo của chúng

**a. Khái niệm:** Trong mặt phẳng cho hai tia  $Ou$ ,  $Ov$ . Nếu tia  $Om$  quay chỉ theo chiều dương (hay chỉ theo chiều âm) từ tia  $Ou$  đến trùng với tia  $Ov$ , thì ta nói: tia  $Om$  quét một **góc lượng giác** với tia đầu  $Ou$ , tia cuối  $Ov$  và kí hiệu là  $(Ou, Ov)$ .

**Nhận xét:** Góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  chỉ được xác định khi ta biết được chiều chuyển động quay của tia  $Om$  từ tia đầu  $Ou$  đến tia cuối  $Ov$ . Ta quy ước: chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương, chiều quay cùng với chiều quay của kim đồng hồ là chiều âm.

Khi tia  $Om$  quay góc  $a^\circ$  thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo  $a^\circ$  hay  $\left( \frac{\pi a}{180} \right) \text{ rad}$

). Vì thế, mỗi một góc lượng giác đều có 1 số đo, đơn vị đo góc lượng giác là độ hoặc radian. Nếu **góc lượng giác**  $(Ou, Ov)$  có số đo là  $\alpha$  thì ta kí hiệu là  $sd(Ou, Ov) = \alpha$  hoặc  $(Ou, Ov) = \alpha$ .



Mỗi góc lượng giác gốc  $O$  được xác định bởi tia đầu  $Ou$ , tia cuối  $Ov$  và số đo của góc đó.

**b. Tính chất:**



Cho hai góc lượng giác  $(Ou, Ov)$ ,  $(O'u', O'v')$  có tia đầu trùng nhau ( $Ou \equiv O'u'$ ), tia cuối trùng nhau ( $Ov \equiv O'v'$ ). Khi đó, nếu sử dụng đơn vị đo là độ thì ta có:

$$(Ou, Ov) = (O'u', O'v') + k360^\circ \text{ với } k \text{ là số nguyên.}$$

Nếu sử dụng đơn vị đo là radian thì công thức trên có thể viết như sau:

$$(Ou, Ov) = (O'u', O'v') + k2\pi \text{ với } k \text{ là số nguyên.}$$

Cho hai tia  $Ou$ ,  $Ov$  thì có vô số **góc lượng giác** tia đầu  $Ou$ , tia cuối  $Ov$ . Mỗi **góc lượng giác** như thế đều kí hiệu là  $(Ou, Ov)$ . Số đo của các góc lượng giác này sai khác nhau một bội nguyên của  $360^\circ$ .

**Hệ thức Chasles:** với 3 tia  $Ou$ ,  $Ov$ ,  $OW$  bất kì ta có:

$$(Ou, Ov) + (Ov, Ow) = (Ou, Ow) + k.2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

## II. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

### 1. Đường tròn lượng giác

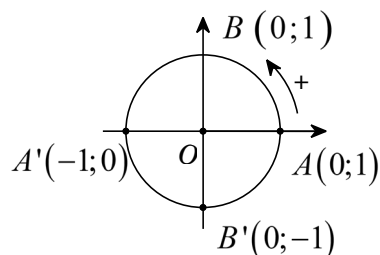


Trong mặt phẳng tọa độ đã được định hướng  $Oxy$ , lấy điểm  $A(1; 0)$ . Đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $OA = 1$  được gọi là **đường tròn lượng giác** (hay **đường tròn đơn vị**) gốc  $A$ .

Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm  $A(1; 0)$

$A'(-1; 0)$ ,  $B(0; 1)$ ,  $B'(0; -1)$ .

Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo  $\alpha$  là điểm  $M$  trên đường tròn lượng giác sao cho  $(OA, OM) = \alpha$ .



### 2. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Giả sử  $M(x; y)$  là điểm trên đường tròn lượng giác, biểu diễn góc lượng giác có số đo  $\alpha$ .

• Hoành độ  $x$  của điểm  $M$  gọi là cosin của  $\alpha$  và kí hiệu là  $\cos \alpha$ ,  $\cos \alpha = x$

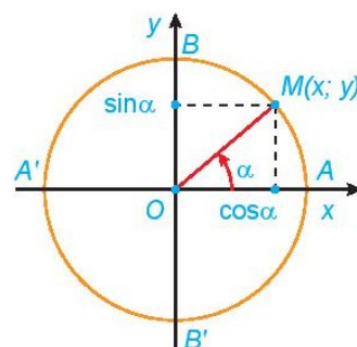
• Tung độ  $y$  của điểm  $M$  gọi là sin của  $\alpha$  và kí hiệu là  $\sin \alpha$ ,  $\sin \alpha = y$

• Nếu  $\cos \alpha \neq 0$ , tỉ số  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  gọi là tang của  $\alpha$  và kí hiệu là  $\tan \alpha$  (người ta còn dùng kí hiệu

$\text{tg } \alpha$ ):  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

• Nếu  $\sin \alpha \neq 0$ , tỉ số  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  gọi là cotang của  $\alpha$  và kí hiệu là  $\cot \alpha$  (người ta còn dùng kí hiệu

$\text{cotg } \alpha$ ):  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ .



## CHUYÊN ĐỀ I – TOÁN – 11 – HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Các giá trị  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$  được gọi là các **giá trị lượng giác của cung  $\alpha$** .

**Chú ý:**

a) Ta cũng gọi trục tung là **trục sin**, còn trục hoành là **trục cosin**

b) Từ định nghĩa ta suy ra:

1)  $\sin \alpha$  và  $\cos \alpha$  xác định với mọi  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

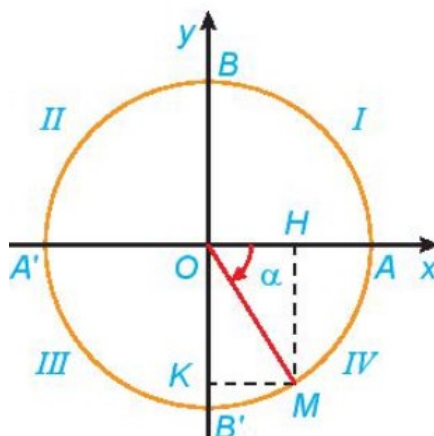
Hơn nữa, ta có:

|                                                                                                                                    |                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z};$<br>$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}.$ | $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$<br>$-1 \leq \cos \alpha \leq 1.$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|

2)  $\tan \alpha$  xác định với mọi  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

3)  $\cot \alpha$  xác định với mọi  $\alpha \neq k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

4) Dấu của các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$  phụ thuộc vào vị trí điểm biểu diễn  $M$  trên đường tròn lượng giác.



**Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác**

| <div>Giá trị lượng giác \ Góc phần tư</div> | I | II | III | IV |
|---------------------------------------------|---|----|-----|----|
| $\cos \alpha$                               | + | -  | -   | +  |
| $\sin \alpha$                               | + | +  | -   | -  |
| $\tan \alpha$                               | + | -  | +   | -  |
| $\cot \alpha$                               | + | -  | +   | -  |

c. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

|               |                |                      |                      |                      |                 |
|---------------|----------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\alpha$      | 0              | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin \alpha$ | 0              | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\cos \alpha$ | 1              | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\tan \alpha$ | 0              | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | Không xác định  |
| $\cot \alpha$ | Không xác định | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0               |

### Công thức lượng giác cơ bản

Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau

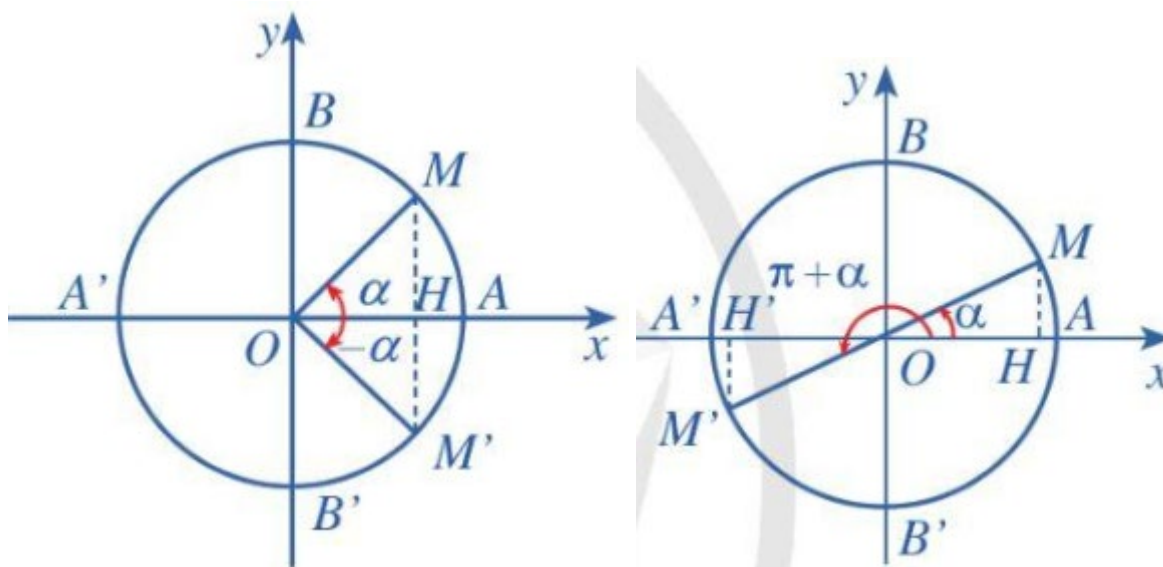
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

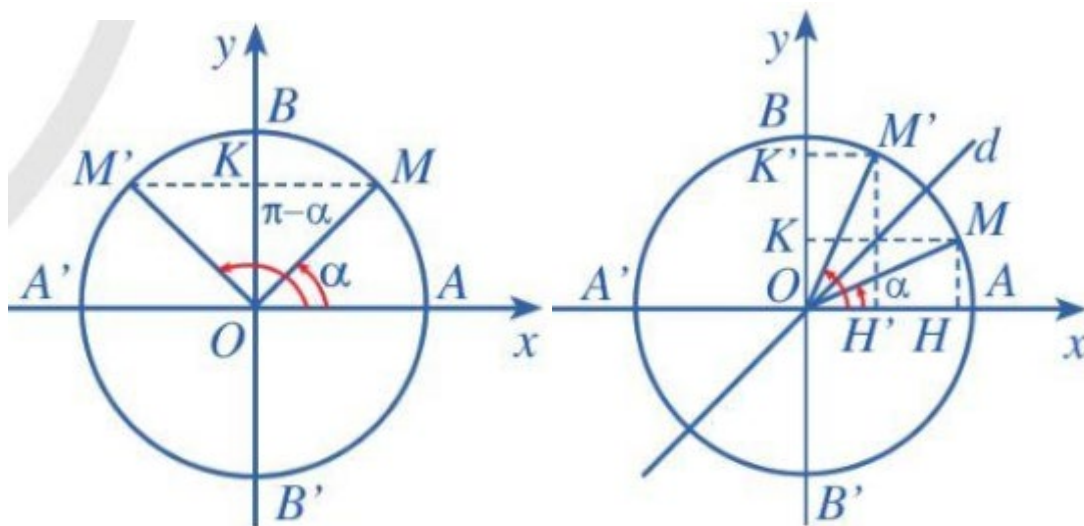
$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

### 3. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt





| Góc đối nhau                   | Góc bù nhau                         | Góc phụ nhau                                            |
|--------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$  | $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$  | $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ |
| $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ | $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ |
| $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ | $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ | $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ |
| $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$ | $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$ | $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$ |

| Góc hơn kém $\pi$                   | Góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$                              |
|-------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$  |
| $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ |
| $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$  | $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$ |
| $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$  | $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$ |

**II** HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**DẠNG 1: XÁC ĐỊNH ĐỘ DÀI CUNG TRÒN**

Một cung tròn có số đo  $a^\circ$  (hoặc  $\alpha$  rad) có độ dài là  $l = \frac{a\pi R}{180}$  (hoặc  $l = \alpha R$ )

- Câu 1:** Một đường tròn có bán kính 10. Tính độ dài cung tròn có số đo  $30^\circ$
- Câu 2:** Một bánh xe máy có đường kính 60. Nếu xe chạy với vận tốc  $50(km/h)$  thì trong 5 giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng.
- Câu 3:** Một đu quay ở công viên có bán kính bằng 10m. Tốc độ của đu quay là 3 vòng/phút. Hỏi mất bao lâu để đu quay quay được góc  $270^\circ$ ?
- Câu 4:** Một đồng hồ treo tường có kim giờ dài 10,25cm, kim phút dài 13,25cm. Trong 30 phút kim giờ vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu?

**DẠNG 2: TÍNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC HOẶC MỘT BIỂU THỨC**

**Sử dụng công thức lượng giác cơ bản trong các bài toán:**

- |                                                                                      |                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$                                               | 2) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ |
| 3) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ | 4) $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$                 |
| 5) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$                                  | 6) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$                                                  |

**Câu 5:** Cho  $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}} \left( -\frac{\pi}{2} < x < 0 \right)$ . Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

**Câu 6:** Cho  $\sin x = \frac{3}{5} \left( \frac{\pi}{2} < x < \pi \right)$ . Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

**Câu 7:** Cho  $\tan x = \frac{3}{4} \left( -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \right)$ . Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

**Câu 8:** Cho  $\cot x = \frac{3}{4} \left( \pi < x < \frac{3\pi}{2} \right)$ . Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

**Câu 9:** Biết  $\tan \alpha = 2$  và  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ . Tính giá trị của biểu thức:  $\sin \alpha + \cos \alpha$

**Câu 10:** Cho  $\tan \alpha = 2$ . Tính giá trị của biểu thức:  $A = \frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$

**Câu 11:** Cho  $\tan x = 3$ . Tính  $P = \frac{2 \sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ .

**Câu 12:** Cho  $\sin a = \frac{1}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{\cot a - \tan a}{\tan a + 2 \cot a}$  bằng

**Câu 13:** Cho  $\tan x = -4$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{2 \sin x - 5 \cos x}{3 \cos x + \sin x}$  là

**Câu 14:** Cho  $\tan \alpha = 3$ , khi đó giá trị của biểu thức  $P = \frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$  là

**Câu 15:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$  và  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ . Giá trị của biểu thức  $P = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}$  bằng

**Câu 16:** Cho  $\tan \alpha = 2$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{\sin^4 \alpha - 3 \sin^3 \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}$ .

**Câu 17:** Cho  $2 \tan a - \cot a = 1$  với  $-\frac{\pi}{2} < a < 0$ . Tính giá trị biểu thức  $P = \frac{\tan(8\pi - a) + 2 \cot(\pi + a)}{3 \tan\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)}$

**Câu 18:** Cho  $\sin x + \cos x = m$ . Tính giá trị của biểu thức:  $M = |\sin x - \cos x|$

**Câu 19:** Cho  $\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$  Tính giá trị của biểu thức:  $A = \frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3}$

### **DẠNG 3: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT**

**Câu 20:** Tính giá trị của biểu thức:  $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$

**Câu 21:** Rút gọn biểu thức  $D = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(13\pi + \alpha) - 3 \sin(\alpha - 5\pi)$ .

**Câu 22:** Tính giá trị của biểu thức:  $\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$

**Câu 23:** Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 80^\circ + \\ + \cos^2 90^\circ + \cos^2 100^\circ + \cos^2 110^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 130^\circ + \cos^2 140^\circ + \cos^2 150^\circ + \cos^2 160^\circ + \\ + \cos^2 170^\circ + \cos^2 180^\circ$$

### **DẠNG 4: RÚT GỌN BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC. ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC**

**Câu 24:** Rút gọn biểu thức  $A = (1 - \sin^2 x) \cdot \cot^2 x + (1 - \cot^2 x)$

**Câu 25:** Rút gọn biểu thức  $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$ .

**Câu 26:** Rút gọn biểu thức  $C = 2(\cos^4 x + \sin^4 x + \cos^2 x \sin^2 x)^2 - (\cos^8 x + \sin^8 x)$

**Câu 27:** Đơn giản biểu thức  $A = \frac{(\sin x - \cos x)^2 - 1}{\tan x - \sin x \cdot \cos x}$

**Câu 28:** Tính giá trị của biểu thức  $A = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ .

**Câu 29:** Cho  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Tính  $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$

### **DẠNG 5: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC**

**Câu 30:** Giá trị lớn nhất của  $Q = \sin^6 x + \cos^6 x$  bằng:

**Câu 31:** Giá trị lớn nhất của biểu thức  $M = 7 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$  là.

**Câu 32:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \cot^4 a + \cot^4 b + 2 \tan^2 a \cdot \tan^2 b + 2$

**Câu 33:** Tính giá trị lượng giác còn lại của góc  $x$  biết:

**a.**  $\sin x = -\frac{3}{5}$  với  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ .      **b.**  $\cos x = \frac{1}{4}$  với  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

**c.**  $\cos x = \frac{3}{5}$  với  $0 < x < 90^\circ$ .      **d.**  $\cos x = -\frac{5}{13}$  với  $180^\circ < x < 270^\circ$ .

**Câu 34:** Tính giá trị lượng giác còn lại của góc  $x$  biết

a)  $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$  với  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ . b)  $\cos x = \frac{4}{5}$  với  $270^\circ < x < 360^\circ$ .

c)  $\sin x = \frac{5}{13}$  với  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  d)  $\sin x = -\frac{1}{3}$  với  $180^\circ < x < 270^\circ$ .

**Câu 35:** Tính giá trị lượng giác còn lại của góc  $x$  biết

a)  $\tan x = 3$  với  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ . b)  $\tan x = -2$  với  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ .

c)  $\tan x = -\frac{1}{2}$  với  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  d)  $\cot x = 3$  với  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ .

**Câu 36:** Tính giá trị lượng giác của các biểu thức sau:

a) Cho  $\tan x = -2$ . Tính:  $A_1 = \frac{5 \cot x + 4 \tan x}{5 \cot x - 4 \tan x}$ ,  $A_2 = \frac{2 \sin x + \cos x}{\cos x - 3 \sin x}$ .

b) Cho  $\cot x = \sqrt{2}$ . Tính:  $B_1 = \frac{3 \sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ ,  $B_2 = \frac{\sin x - 3 \cos x}{\sin x + 3 \cos x}$ .

c) Cho  $\cot x = 2$ . Tính:  $C_1 = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x}$ ,  $C_2 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$ .

d) Cho  $\sin x = \frac{3}{5}$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Tính:  $E = \frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x}$ .

e) Cho  $\sin x = \frac{1}{5}$ ,  $90^\circ < x < 180^\circ$ . Tính:  $F = \frac{8 \tan^2 x + 3 \cot x - 1}{\tan x + \cot x}$ .

**Câu 37:** Chứng minh các đẳng thức sau:

a)  $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$ . b)  $2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

c)  $3 - 4 \sin^2 x = 4 \cos^2 x - 1$  d)  $\sin x \cot x + \cos x \tan x = \sin x + \cos x$

**Câu 38:** Chứng minh các đẳng thức sau:

a.  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$  b.  $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

c.  $4 \cos^2 x - 3 = (1 - 2 \sin x)(1 + 2 \sin x)$  d.  $(1 + \cos x)(\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x) = \sin^2 x$

**Câu 39:** Chứng minh các đẳng thức sau:

a.  $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x = 2 \sin^2 x - 1$  b.  $\sin^3 x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos^3 x = \sin x \cdot \cos x$

c.  $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$  d.  $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$

**Câu 40:** Chứng minh các đẳng thức sau:

a.  $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$  b.  $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

c.  $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = 1$  d.  $\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) + \tan^2 x = 0$

**Câu 41:** Chứng minh các đẳng thức sau không phụ thuộc vào biến  $x$ :

a)  $A = -\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x$ .

b)  $B = \sin^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \cos^2 x$ .

c)  $B = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 1. GÓC LƯỢNG GIÁC. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

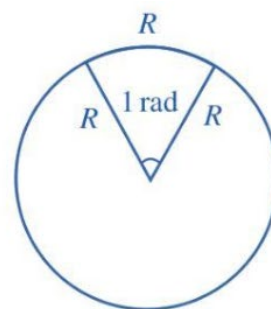
### I LÝ THUYẾT.

#### I. GÓC LƯỢNG GIÁC

##### 1. Góc hình học và số đo của chúng

Số đo của một góc (hình học) không vượt quá  $180^\circ$ .

Một đơn vị khác được sử dụng nhiều khi đo góc là radian (đọc là ra-di-an). Nếu trên đường tròn, ta lấy một cung tròn có độ dài bằng bán kính thì góc ở tâm chắn cung đó gọi là góc có số đo 1 radian, gọi tắt là góc 1 radian (Hình 2). 1 radian còn viết tắt là 1 rad.



Hình 2

##### Quan hệ giữa độ và radian

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad và } 1 \text{ rad} = \left( \frac{180}{\pi} \right)^\circ.$$

##### 2. Góc lượng giác và số đo của chúng

**a. Khái niệm:** Trong mặt phẳng cho hai tia  $Ou$ ,  $Ov$ . Nếu tia  $Om$  quay chỉ theo chiều dương (hay chỉ theo chiều âm) từ tia  $Ou$  đến trùng với tia  $Ov$ , thì ta nói: tia  $Om$  quét một **góc lượng giác** với tia đầu  $Ou$ , tia cuối  $Ov$  và kí hiệu là  $(Ou, Ov)$ .

**Nhận xét:** Góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  chỉ được xác định khi ta biết được chiều chuyển động quay của tia  $Om$  từ tia đầu  $Ou$  đến tia cuối  $Ov$ . Ta quy ước: chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương, chiều quay cùng với chiều quay của kim đồng hồ là chiều âm.

Khi tia  $Om$  quay góc  $a^\circ$  thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo  $a^\circ$  hay  $\left( \frac{\pi a}{180} \right) \text{ rad}$

). Vì thế, mỗi một góc lượng giác đều có 1 số đo, đơn vị đo góc lượng giác là độ hoặc radian. Nếu **góc lượng giác**  $(Ou, Ov)$  có số đo là  $\alpha$  thì ta kí hiệu là  $sd(Ou, Ov) = \alpha$  hoặc  $(Ou, Ov) = \alpha$ .



Mỗi góc lượng giác gốc  $O$  được xác định bởi tia đầu  $Ou$ , tia cuối  $Ov$  và số đo của góc đó.

**b. Tính chất:**



Cho hai góc lượng giác  $(Ou, Ov)$ ,  $(O'u', O'v')$  có tia đầu trùng nhau ( $Ou \equiv O'u'$ ), tia cuối trùng nhau ( $Ov \equiv O'v'$ ). Khi đó, nếu sử dụng đơn vị đo là độ thì ta có:

$$(Ou, Ov) = (O'u', O'v') + k360^\circ \text{ với } k \text{ là số nguyên.}$$

Nếu sử dụng đơn vị đo là radian thì công thức trên có thể viết như sau:

$$(Ou, Ov) = (O'u', O'v') + k2\pi \text{ với } k \text{ là số nguyên.}$$

Cho hai tia  $Ou$ ,  $Ov$  thì có vô số **góc lượng giác** tia đầu  $Ou$ , tia cuối  $Ov$ . Mỗi **góc lượng giác** như thế đều kí hiệu là  $(Ou, Ov)$ . Số đo của các góc lượng giác này sai khác nhau một bội nguyên của  $360^\circ$ .

**Hệ thức Chasles:** với 3 tia  $Ou$ ,  $Ov$ ,  $Ow$  bất kì ta có:

$$(Ou, Ov) + (Ov, Ow) = (Ou, Ow) + k.2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

## II. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

### 1. Đường tròn lượng giác

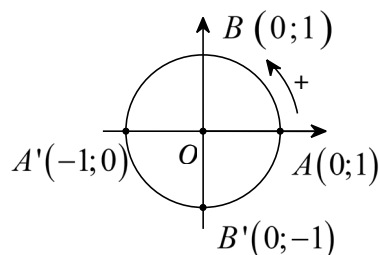


Trong mặt phẳng tọa độ đã được định hướng  $Oxy$ , lấy điểm  $A(1; 0)$ . Đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $OA = 1$  được gọi là **đường tròn lượng giác** (hay **đường tròn đơn vị**) gốc  $A$ .

Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm  $A(1; 0)$

$A'(-1; 0)$ ,  $B(0; 1)$ ,  $B'(0; -1)$ .

Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo  $\alpha$  là điểm  $M$  trên đường tròn lượng giác sao cho  $(OA, OM) = \alpha$ .



### 2. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Giả sử  $M(x; y)$  là điểm trên đường tròn lượng giác, biểu diễn góc lượng giác có số đo  $\alpha$ .

• Hoành độ  $x$  của điểm  $M$  gọi là cosin của  $\alpha$  và kí hiệu là  $\cos \alpha$ ,  $\cos \alpha = x$

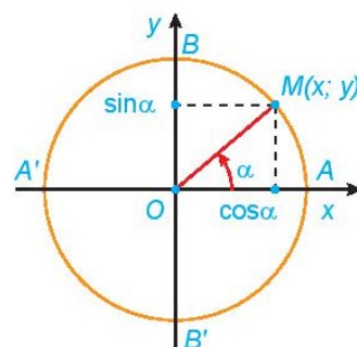
• Tung độ  $y$  của điểm  $M$  gọi là sin của  $\alpha$  và kí hiệu là  $\sin \alpha$ ,  $\sin \alpha = y$

• Nếu  $\cos \alpha \neq 0$ , tỉ số  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  gọi là tang của  $\alpha$  và kí hiệu là  $\tan \alpha$  (người ta còn dùng kí hiệu

$\text{tg } \alpha$ ):  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

• Nếu  $\sin \alpha \neq 0$ , tỉ số  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  gọi là cotang của  $\alpha$  và kí hiệu là  $\cot \alpha$  (người ta còn dùng kí hiệu

$\text{cotg } \alpha$ ):  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ .



## CHUYÊN ĐỀ I – TOÁN – 11 – HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Các giá trị  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$  được gọi là các **giá trị lượng giác của cung  $\alpha$** .

**Chú ý:**

a) Ta cũng gọi trục tung là **trục sin**, còn trục hoành là **trục cosin**

b) Từ định nghĩa ta suy ra:

1)  $\sin \alpha$  và  $\cos \alpha$  xác định với mọi  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

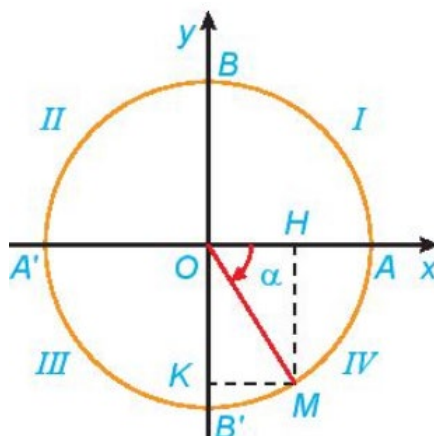
Hơn nữa, ta có:

|                                                                                                                                    |                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z};$<br>$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}.$ | $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$<br>$-1 \leq \cos \alpha \leq 1.$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|

2)  $\tan \alpha$  xác định với mọi  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

3)  $\cot \alpha$  xác định với mọi  $\alpha \neq k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

4) Dấu của các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$  phụ thuộc vào vị trí điểm biểu diễn  $M$  trên đường tròn lượng giác.



**Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác**

| <div>Giá trị lượng giác \ Góc phần tư</div> | I | II | III | IV |
|---------------------------------------------|---|----|-----|----|
| $\cos \alpha$                               | + | -  | -   | +  |
| $\sin \alpha$                               | + | +  | -   | -  |
| $\tan \alpha$                               | + | -  | +   | -  |
| $\cot \alpha$                               | + | -  | +   | -  |

c. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

|               |                |                      |                      |                      |                 |
|---------------|----------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\alpha$      | 0              | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin \alpha$ | 0              | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\cos \alpha$ | 1              | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\tan \alpha$ | 0              | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | Không xác định  |
| $\cot \alpha$ | Không xác định | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0               |

### Công thức lượng giác cơ bản

Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau

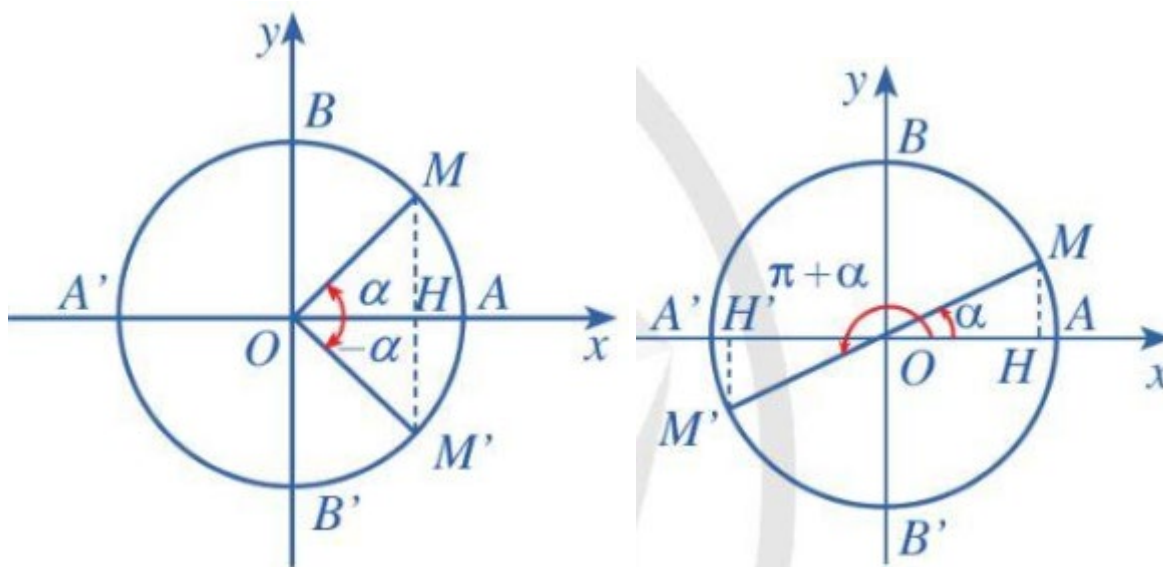
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

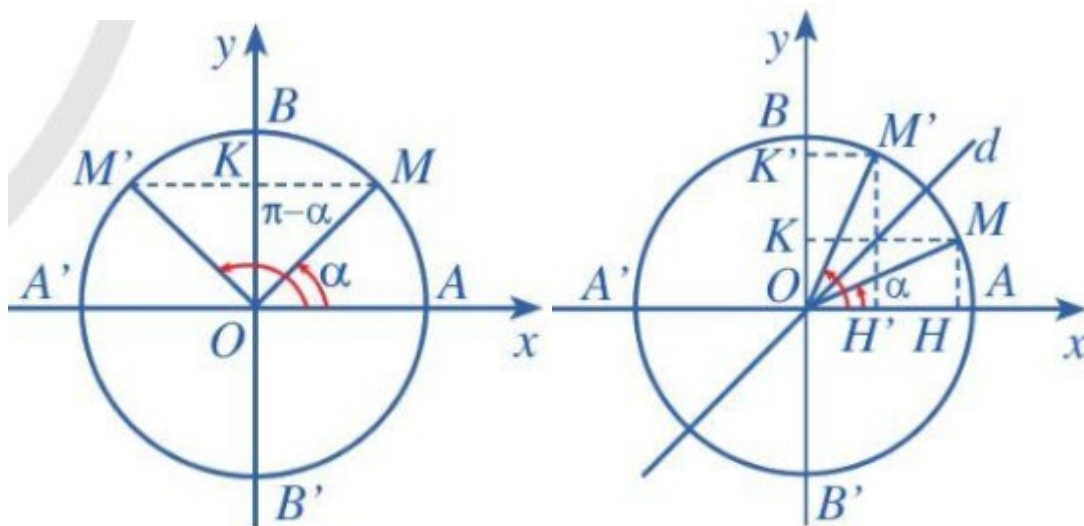
$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

### 3. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt





| Góc đối nhau                   | Góc bù nhau                         | Góc phụ nhau                                            |
|--------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$  | $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$  | $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ |
| $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ | $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ |
| $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ | $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ | $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ |
| $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$ | $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$ | $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$ |

| Góc hơn kém $\pi$                   | Góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$                              |
|-------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$  |
| $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ |
| $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$  | $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$ |
| $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$  | $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$ |

**II** HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**DẠNG 1: XÁC ĐỊNH ĐỘ DÀI CUNG TRÒN**

Một cung tròn có số đo  $a^\circ$  (hoặc  $\alpha$  rad) có độ dài là  $l = \frac{a\pi R}{180}$  (hoặc  $l = \alpha R$ )

**Câu 1:** Một đường tròn có bán kính 10. Tính độ dài cung tròn có số đo  $30^\circ$

**Lời giải**

Độ dài cung tròn có số đo  $30^\circ$  là  $l = \frac{\pi \cdot 30}{180} \cdot R = \frac{\pi \cdot 30}{180} \cdot 10 \approx 5,26(\text{cm})$

**Câu 2:** Một bánh xe máy có đường kính 60. Nếu xe chạy với vận tốc  $50(\text{km/h})$  thì trong 5 giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng.

**Lời giải**

Trong một phút bánh xe quay được:  $\left[ \frac{50 \cdot 1000}{3600} : (0,6\pi) \right] \cdot 5 \approx 36,9$ .

**Câu 3:** Một đu quay ở công viên có bán kính bằng 10m. Tốc độ của đu quay là 3 vòng/phút. Hỏi mất bao lâu để đu quay quay được góc  $270^\circ$ ?

**Lời giải**

Tính được:  $270^\circ = \frac{270}{180}\pi = \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4} \cdot 2\pi$

Vậy đu quay quay được góc  $270^\circ$  khi nó quay được  $\frac{3}{4}$  vòng

Ta có: Đu quay quay được 1 vòng trong  $\frac{1}{3}$  phút

Đu quay quay được  $\frac{3}{4}$  vòng trong  $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$  phút.

**Câu 4:** Một đồng hồ treo tường có kim giờ dài 10,25cm, kim phút dài 13,25cm. Trong 30 phút kim giờ vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu?

**Lời giải**

Trong 6 giờ kim giờ vạch nên một cung có số đo là  $\pi$ (rad), vậy trong 30 phút kim giờ vạch nên cung có số đo là  $\frac{\pi}{12}$ (rad). Khi đó độ dài cung tròn mà kim giờ vạch ra trong 30 phút là

$$l = R \cdot \alpha \Rightarrow l = 10,25 \cdot \frac{\pi}{12} = 2,68(\text{cm}).$$

**DẠNG 2: TÍNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC HOẶC MỘT BIỂU THỨC**

**Sử dụng công thức lượng giác cơ bản trong các bài toán:**

1)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

2)  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$3) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$4) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$5) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$6) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

**Câu 5:** Cho  $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}} \left( -\frac{\pi}{2} < x < 0 \right)$ . Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

**Lời giải**

$$\text{Vì } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow \sin x < 0$$

$$\text{Ta có } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left( \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{1}{5}$$

$$\text{Vậy } \sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2}; \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = -2$$

**Câu 6:** Cho  $\sin x = \frac{3}{5} \left( \frac{\pi}{2} < x < \pi \right)$ . Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

**Lời giải**

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$$

$$\text{Ta có } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left( \frac{3}{5} \right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\text{Vậy } \cos x = -\frac{4}{5}.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}; \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

**Câu 7:** Cho  $\tan x = \frac{3}{4} \left( -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \right)$ . Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

**Lời giải**

$$\text{Vì } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x < 0$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\text{Vậy } \cos x = -\frac{4}{5}.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \tan x \cdot \cos x = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}$$

**Câu 8:** Cho  $\cot x = \frac{3}{4}$   $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$ . Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

**Lời giải**

$$\text{Vì } \pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin x < 0$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\cot x} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\text{Vậy } \sin x = -\frac{4}{5}.$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cos x = \cot x \cdot \sin x = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}$$

**Câu 9:** Biết  $\tan \alpha = 2$  và  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ . Tính giá trị của biểu thức:  $\sin \alpha + \cos \alpha$

**Lời giải**

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Do } 180^\circ < \alpha < 270^\circ \text{ nên } \cos \alpha < 0. \text{ Suy ra, } \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Do đó, } \sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

**Câu 10:** Cho  $\tan \alpha = 2$ . Tính giá trị của biểu thức:  $A = \frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$

**Lời giải**

$$A = \frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{3 \tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = 7.$$

**Câu 11:** Cho  $\tan x = 3$ . Tính  $P = \frac{2 \sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \tan x = 3 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 3 \Rightarrow \sin x = 3 \cos x. \text{ Khi đó } P = \frac{2 \cdot 3 \cos x - \cos x}{3 \cos x + \cos x} = \frac{5 \cos x}{4 \cos x} = \frac{5}{4}.$$

**Câu 12:** Cho  $\sin a = \frac{1}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{\cot a - \tan a}{\tan a + 2 \cot a}$  bằng

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{\cot a - \tan a}{\tan a + 2 \cot a} = \frac{\frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\sin a}{\cos a}}{\frac{\sin a}{\cos a} + 2 \frac{\cos a}{\sin a}} = \frac{\frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin a \cos a}}{\frac{\sin^2 a + 2 \cos^2 a}{\sin a \cos a}} \\ &= \frac{(1 - \sin^2 a) - \sin^2 a}{\sin^2 a + 2(1 - \sin^2 a)} = \frac{1 - 2 \sin^2 a}{2 - \sin^2 a} = \frac{7}{17} \end{aligned}$$

**Câu 13:** Cho  $\tan x = -4$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{2 \sin x - 5 \cos x}{3 \cos x + \sin x}$  là

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } A = \frac{2 \sin x - 5 \cos x}{3 \cos x + \sin x} = \frac{2 \frac{\sin x}{\cos x} - 5 \frac{\cos x}{\cos x}}{3 \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{2 \tan x - 5}{3 + \tan x} = \frac{2 \cdot (-4) - 5}{3 + (-4)} = 13.$$

**Câu 14:** Cho  $\tan \alpha = 3$ , khi đó giá trị của biểu thức  $P = \frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$  là

**Lời giải**

$$\text{Chia cả tử và mẫu của } P \text{ cho } \cos \alpha \neq 0 \text{ ta được: } P = \frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 5 \cos \alpha} = \frac{2 \tan \alpha - 1}{3 \tan \alpha - 5} = \frac{5}{4}.$$

**Câu 15:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$  và  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ . Giá trị của biểu thức  $P = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}$  bằng

**Lời giải**

$$\text{Cách 1: Ta có: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\text{Với } \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vì } -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \text{ nên } \sin \alpha < 0 \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy: } P = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}.$$

**Cách 2:** Theo giả thiết: 
$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Vậy } P = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}.$$

**Câu 16:** Cho  $\tan \alpha = 2$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{\sin^4 \alpha - 3 \sin^3 \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}$ .

**Lời giải**

Do  $\tan \alpha = 2$  nên  $\cos \alpha \neq 0$ . Chia cả tử và mẫu của biểu thức  $P$  cho  $\cos^4 \alpha$  ta được:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} - 3 \cdot \frac{\sin^3 \alpha \cos \alpha}{\cos^4 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^4 \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^4 \alpha} + 2 \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^4 \alpha}} = \frac{\tan^4 \alpha - 3 \tan^3 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha}}{\tan^2 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha + 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}} \\ &= \frac{\tan^4 \alpha - 3 \tan^3 \alpha + (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^2 \alpha \cdot (\tan^2 \alpha + 1) + \tan^2 \alpha + 2 \cdot (\tan^2 \alpha + 1)} = \frac{\tan^4 \alpha - 3 \tan^3 \alpha + \tan^2 \alpha + 1}{\tan^4 \alpha + 4 \tan^2 \alpha + 2} \\ &= \frac{2^4 - 3 \cdot 2^3 + 2^2 + 1}{2^4 + 4 \cdot 2^2 + 2} = -\frac{3}{34}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = -\frac{3}{34}.$$

**Câu 17:** Cho  $2 \tan a - \cot a = 1$  với  $-\frac{\pi}{2} < a < 0$ . Tính giá trị biểu thức  $P = \frac{\tan(8\pi - a) + 2 \cot(\pi + a)}{3 \tan\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)}$

**Lời giải**

$$2 \tan a - \cot a = 1 \Leftrightarrow 2 \tan a - \frac{1}{\tan a} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan a = 1 \\ \tan a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vì  $-\frac{\pi}{2} < a < 0$  nên  $\tan a < 0$ , suy ra  $\tan a = -\frac{1}{2}$ ,  $\cot a = -2$

Ta có:  $\tan(8\pi - a) = -\tan a$ ;  $\cot(\pi + a) = \cot a$ ;  $\tan\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) = -\cot a$ .

$$P = \frac{\tan(8\pi - a) + 2 \cot(\pi + a)}{3 \tan\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)} = \frac{-\tan a + 2 \cot a}{-3 \cot a} = \frac{\frac{1}{2} - 4}{6} = \frac{-7}{12}.$$

**Câu 18:** Cho  $\sin x + \cos x = m$ . Tính giá trị của biểu thức:  $M = |\sin x - \cos x|$

**Lời giải**

Ta có:  $M^2 = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin x \cdot \cos x$ .

Mặt khác:  $M^2 = (\sin x - \cos x)^2 = (\sin x + \cos x)^2 - 4 \sin x \cdot \cos x = m^2 - 4 \sin x \cdot \cos x$ .

Suy ra:  $1 - 2 \sin x \cdot \cos x = m^2 - 4 \sin x \cdot \cos x \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}$ .

Do đó:  $M^2 = 2 - m^2 \Rightarrow M = \sqrt{2 - m^2}$ .

**Câu 19:** Cho  $\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$  Tính giá trị của biểu thức:  $A = \frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3}$

**Lời giải**

Đặt  $\cos^2 \alpha = t \Rightarrow \frac{(1-t)^2}{a} + \frac{t^2}{b} = \frac{1}{a+b}$

$$\Leftrightarrow b(1-t)^2 + at^2 = \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow at^2 + bt^2 - 2bt + b = \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)t^2 - 2bt + b = \frac{ab}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)t^2 - 2b(a+b)t + b^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{b}{a+b}$$

Suy ra  $\cos^2 \alpha = \frac{b}{a+b}; \sin^2 \alpha = \frac{a}{a+b}$

Vậy:  $\frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3} = \frac{a}{(a+b)^4} + \frac{b}{(a+b)^4} = \frac{1}{(a+b)^3}$ .

### DẠNG 3: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

**Câu 20:** Tính giá trị của biểu thức:  $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$

**Lời giải**

Ta có  $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ = 3 - 1^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot 1^2 = -\frac{1}{2}$ .

**Câu 21:** Rút gọn biểu thức  $D = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(13\pi + \alpha) - 3 \sin(\alpha - 5\pi)$ .

**Lời giải**

Ta có  $D = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(13\pi + \alpha) - 3 \sin(\alpha - 5\pi)$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi + \alpha) + 3\sin(\pi - \alpha) = \cos \alpha - \cos \alpha + 3\sin \alpha = 3\sin \alpha.$$

**Câu 22:** Tính giá trị của biểu thức:  $\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$

**Lời giải**

$$\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$$

$$\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots \cos^2 30^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 10^\circ$$

**Câu 23:** Tính giá trị của biểu thức:

$$\begin{aligned} M &= \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 80^\circ + \\ &+ \cos^2 90^\circ + \cos^2 100^\circ + \cos^2 110^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 130^\circ + \cos^2 140^\circ + \cos^2 150^\circ + \cos^2 160^\circ + \\ &+ \cos^2 170^\circ + \cos^2 180^\circ \end{aligned}$$

**Lời giải**

Áp dụng công thức  $\cos \alpha = \cos(180^\circ - \alpha)$ ,  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  ta có:

$$\begin{aligned} M &= \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 170^\circ + \cos^2 180^\circ \\ &= \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ + \cos^2 90^\circ + \cos^2 80^\circ + \dots + \cos^2 20^\circ + \cos^2 10^\circ + \cos^2 90^\circ \\ &= 2(\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ + \cos^2 90^\circ) \\ &= 2(\sin^2 80^\circ + \dots + \sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ + \cos^2 90^\circ) = 8 \end{aligned}$$

#### **DẠNG 4: RÚT GỌN BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC. ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC**

**Câu 24:** Rút gọn biểu thức  $A = (1 - \sin^2 x) \cdot \cot^2 x + (1 - \cot^2 x)$

**Lời giải**

$$A = (1 - \sin^2 x) \cdot \cot^2 x + (1 - \cot^2 x) = \cot^2 x - \cos^2 x + 1 - \cot^2 x = \sin^2 x.$$

**Câu 25:** Rút gọn biểu thức  $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$ .

**Lời giải**

$$M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x + 1 - 2\sin x \cos x = 2.$$

**Câu 26:** Rút gọn biểu thức  $C = 2(\cos^4 x + \sin^4 x + \cos^2 x \sin^2 x)^2 - (\cos^8 x + \sin^8 x)$

**Lời giải**

Ta có :

$$\begin{aligned} \cos^8 x + \sin^8 x &= (\cos^2 x + \sin^2 x)^4 - 2\cos^2 x \sin^2 x = 1 - 2\cos^2 x \sin^2 x \\ &= (\cos^4 x + \sin^4 x)^2 - 2\cos^4 x \sin^4 x = 1 - 4\cos^2 x \sin^2 x + 2\cos^4 x \sin^4 x \end{aligned}$$

$$= (1 - 2\cos^2 x \sin^2 x)^2 - 2\cos^4 x \sin^4 x = 1 - 4\cos^2 x \sin^2 x + 2\cos^4 x \sin^4 x.$$

Suy ra :  $C = 2(1 - \cos^2 x \sin^2 x)^2 - (1 - 4\cos^2 x \sin^2 x + 2\cos^4 x \sin^4 x)$ .

$$C = 2(1 - 2\cos^2 x \sin^2 x + \cos^4 x \sin^4 x) - (1 - 4\cos^2 x \sin^2 x + 2\cos^4 x \sin^4 x) = 1.$$

**Câu 27:** Đơn giản biểu thức  $A = \frac{(\sin x - \cos x)^2 - 1}{\tan x - \sin x \cdot \cos x}$

**Lời giải**

Ta có:  $A = \frac{(\sin x - \cos x)^2 - 1}{\tan x - \sin x \cdot \cos x} = \frac{-2\cos x \cdot \sin x}{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x \cdot \cos x} = \frac{-2\cos x \cdot \sin x \cos x}{\sin x(1 - \cos^2 x)} = \frac{-2\cos^2 x}{\sin^2 x} = -2\cot^2 x$

**Câu 28:** Tính giá trị của biểu thức  $A = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

Suy ra:  $A = 1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1.$

**Câu 29:** Cho  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Tính  $\sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}}$

**Lời giải**

Đặt  $A = \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}}$

Khi đó  $A^2 = \left( \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}} \right)^2 = \frac{4}{\cos^2 \alpha}$

Vì  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  nên  $\cos \alpha > 0$  do đó  $A = \frac{2}{\cos \alpha}$

**DẠNG 5: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC**

**Câu 30:** Giá trị lớn nhất của  $Q = \sin^6 x + \cos^6 x$  bằng:

**Lời giải**

Ta có  $Q = \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x.$

Vì  $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq -\frac{3}{4}\sin^2 2x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x \leq 1.$

Nên giá trị lớn nhất là 1..

**Câu 31:** Giá trị lớn nhất của biểu thức  $M = 7\cos^2 x - 2\sin^2 x$  là.

**Lời giải**

$$M = 7(1 - \sin^2 x) - 2\sin^2 x = 7 - 9\sin^2 x.$$

Ta có:  $0 \leq \sin^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 0 \geq -9\sin^2 x \geq -9, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 7 \geq 7 - 9\sin^2 x \geq -2, \forall x \in \mathbb{R}.$

Giá trị lớn nhất là 7.

**Câu 32:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \cot^4 a + \cot^4 b + 2 \tan^2 a \cdot \tan^2 b + 2$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} P &= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2\cot^2 a \cdot \cot^2 b + 2\tan^2 a \cdot \tan^2 b + 2 \\ &= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2(\cot^2 a \cdot \cot^2 b + \tan^2 a \cdot \tan^2 b - 2) + 6 \\ &= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2(\cot^2 a \cdot \cot^2 b + \tan^2 a \cdot \tan^2 b - 2\cot a \cdot \cot b \cdot \tan a \cdot \tan b) + 6 \\ &= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2(\cot a \cdot \cot b - \tan a \cdot \tan b)^2 + 6 \geq 6 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} \cot^2 a = \cot^2 b \\ \cot a \cdot \cot b = \tan a \cdot \tan b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot^2 a = 1 \\ \cot^2 b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = b = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 33:** Tính giá trị lượng giác còn lại của góc  $x$  biết:

**a.**  $\sin x = -\frac{3}{5}$  với  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ .      **b.**  $\cos x = \frac{1}{4}$  với  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

**c.**  $\cos x = \frac{3}{5}$  với  $0 < x < 90^\circ$ .      **d.**  $\cos x = -\frac{5}{13}$  với  $180^\circ < x < 270^\circ$ .

**Lời giải**

**a.** Do  $\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \\ \tan x > 0 \\ \cot x > 0 \end{cases}$

Từ đó với  $\sin x = -\frac{3}{5} \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4} \\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{4}{3} \end{cases}$

**b.** Do  $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \tan x > 0 \\ \cot x > 0 \end{cases}$

$$\text{Từ đó với } \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{15} \\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{15}} \end{cases}.$$

$$\text{c. Do } 0 < x < 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \tan x > 0 \\ \cot x > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó với } \cos x = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3} \\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

$$\text{d. Do } 180^\circ < x < 270^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \\ \tan x > 0 \\ \cot x > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó với } \cos x = -\frac{5}{13} \Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\frac{12}{13} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{12}{5} \\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{5}{12} \end{cases}.$$

**Câu 34:** Tính giá trị lượng giác còn lại của góc  $x$  biết

a)  $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$  với  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ . b)  $\cos x = \frac{4}{5}$  với  $270^\circ < x < 360^\circ$ .

c)  $\sin x = \frac{5}{13}$  với  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  d)  $\sin x = -\frac{1}{3}$  với  $180^\circ < x < 270^\circ$ .

**Lời giải**

$$\text{a) Do } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x > 0 \\ \tan x < 0 \\ \cot x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó với } \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{1}{2} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} = -2 \end{cases}.$$

$$\text{b) Do } 270^\circ < x < 360^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x > 0 \\ \tan x < 0 \\ \cot x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó với } \cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{3}{4} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

$$\text{c) Do } \frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \\ \tan x < 0 \\ \cot x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó với } \sin x = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\frac{12}{13} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{5}{12} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{12}{5} \end{cases}.$$

$$\text{d) Do } 180^\circ < x < 270^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \\ \tan x > 0 \\ \cot x > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó với } \sin x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} = 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

**Câu 35:** Tính giá trị lượng giác còn lại của góc  $x$  biết

$$\text{a) } \tan x = 3 \text{ với } \pi < x < \frac{3\pi}{2}. \quad \text{b) } \tan x = -2 \text{ với } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

$$\text{c) } \tan x = -\frac{1}{2} \text{ với } \frac{\pi}{2} < x < \pi \quad \text{d) } \cot x = 3 \text{ với } \pi < x < \frac{3\pi}{2}.$$

**Lời giải**

$$\text{a) } \tan x = 3 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{3}$$

$$\tan x = 3 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 3 \Rightarrow \sin^2 x = 9 \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x - 9(1 - \sin^2 x) = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{9}{10}.$$

$$\text{Vì } \pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \sin x = -\frac{3\sqrt{10}}{10}; \cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{b) } \tan x = -2 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2}$$

$$\tan x = -2 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -2 \Rightarrow \sin^2 x = 4 \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x - 4(1 - \sin^2 x) = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$$

Do đó  $\sin x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ;  $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

c)  $\tan x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cot x = -2$

$\tan x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 4\sin^2 x = \cos^2 x \Rightarrow 4\sin^2 x - 1(1 - \sin^2 x) = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{5}$ .

Vì  $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$

Do đó  $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ;  $\cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

d)  $\cot x = 3 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{3}$

$\tan x = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{3} \Rightarrow 9\sin^2 x = \cos^2 x \Rightarrow 9\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{10}$ .

Vì  $\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$

Do đó  $\sin x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ ;  $\cos x = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$ .

**Câu 36:** Tính giá trị lượng giác của các biểu thức sau:

a) Cho  $\tan x = -2$ . Tính:  $A_1 = \frac{5\cot x + 4\tan x}{5\cot x - 4\tan x}$ ,  $A_2 = \frac{2\sin x + \cos x}{\cos x - 3\sin x}$ .

b) Cho  $\cot x = \sqrt{2}$ . Tính:  $B_1 = \frac{3\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ ,  $B_2 = \frac{\sin x - 3\cos x}{\sin x + 3\cos x}$ .

c) Cho  $\cot x = 2$ . Tính:  $C_1 = \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x - 2\cos x}$ ,  $C_2 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$ .

d) Cho  $\sin x = \frac{3}{5}$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Tính:  $E = \frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x}$ .

e) Cho  $\sin x = \frac{1}{5}$ ,  $90^\circ < x < 180^\circ$ . Tính:  $F = \frac{8\tan^2 x + 3\cot x - 1}{\tan x + \cot x}$ .

**Lời giải**

a)  $\tan x = -2 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2} \Rightarrow A_1 = A_1 = \frac{5\cot x + 4\tan x}{5\cot x - 4\tan x} = \frac{-\frac{5}{2} + 4 \cdot (-2)}{-\frac{5}{2} - 4 \cdot (-2)} = -\frac{21}{11}$

$\tan x = -2 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -2 \Rightarrow \sin^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x - 4(1 - \sin^2 x) = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{4}{5}$

+) TH1:  $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Rightarrow \sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}; \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{2 \sin x + \cos x}{\cos x - 3 \sin x} = \frac{2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}} - 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} = -1$$

$$+ \text{) TH2: } \frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Rightarrow \sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}; \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{2 \sin x + \cos x}{\cos x - 3 \sin x} = \frac{2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}} + 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{3}{7}.$$

$$\text{b) } \cot x = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{2} \Rightarrow \cos^2 x = 2 \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 2(1 - \cos^2 x) \Rightarrow \cos^2 x = \frac{2}{3}$$

$$+ \text{) TH1: } 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = \sqrt{\frac{2}{3}}; \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_1 = \frac{3 \sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{3 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = -5 + 4\sqrt{2} \\ B_2 = \frac{\sin x - 3 \cos x}{\sin x + 3 \cos x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{1 - 3\sqrt{2}}{1 + 3\sqrt{2}} = \frac{-19 + 6\sqrt{2}}{17} \end{array} \right.$$

$$+ \text{) TH2: } \frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = -\sqrt{\frac{2}{3}}; \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_1 = \frac{3 \sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{3 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = -1 + 2\sqrt{2} \\ B_2 = \frac{\sin x - 3 \cos x}{\sin x + 3 \cos x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{1 + 3\sqrt{2}}{1 - 3\sqrt{2}} = -\frac{19 + 6\sqrt{2}}{17} \end{array} \right.$$

$$\text{c) } \cot x = 2 \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = 2 \Rightarrow \cos^2 x = 4 \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 4(1 - \cos^2 x) \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{5}$$

$$+ \text{) TH1: } 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}; \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x} = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}}{3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{2 + 3 \cdot 2}{3 - 2 \cdot 2} = -8 \\ C_2 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x} = \frac{2}{\frac{4}{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{2}{\frac{2}{5}} = 5 \end{cases}$$

$$\text{+) TH2: } \frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x} = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}}{3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{2 - 3 \cdot 2}{3 + 2 \cdot 2} = -\frac{4}{7} \\ C_2 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x} = \frac{2}{\frac{4}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{2}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{d) } 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4}; \cot x = \frac{4}{3}.$$

$$\rightarrow E = \frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}} = \frac{25}{7}.$$

$$\text{e) Ta có } 90^\circ < x < 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}; \cot x = -2\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó } F = \frac{8 \tan^2 x + 3 \cot x - 1}{\tan x + \cot x} = \frac{8 \cdot \left(\frac{-1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 3 \cdot 2\sqrt{2} - 1}{-\frac{1}{2\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}} = \frac{8}{3}.$$

**Câu 37:** Chứng minh các đẳng thức sau:

a)  $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$ .      b)  $2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

c)  $3 - 4 \sin^2 x = 4 \cos^2 x - 1$       d)  $\sin x \cot x + \cos x \tan x = \sin x + \cos x$

**Lời giải**

a) Ta có  $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$ .

b) Ta có  $2 \cos^2 x - 1 = 2(1 - \sin^2 x) - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$ .

c) Có  $3 - 4 \sin^2 x = 3 - 4(1 - \cos^2 x) = 4 \cos^2 x - 1$ .

d) Ta có  $\sin x \cot x + \cos x \tan x = \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x + \cos x$ .

**Câu 38:** Chứng minh các đẳng thức sau:

**a.**  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$       **b.**  $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$   
**c.**  $4\cos^2 x - 3 = (1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x)$       **d.**  $(1 + \cos x)(\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x) = \sin^2 x$

**Lời giải**

**a.**  $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$   
**b.**  $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x$   
**c.**  $(1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x) = 1 - 4\sin^2 x = 1 - 4(1 - \cos^2 x) = 4\cos^2 x - 3$   
**d.**  $(1 + \cos x)(\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x) = (1 + \cos x)(1 - \cos x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

**Câu 39:** Chứng minh các đẳng thức sau:

**a.**  $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x = 2\sin^2 x - 1$       **b.**  $\sin^3 x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos^3 x = \sin x \cdot \cos x$   
**c.**  $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$       **d.**  $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$

**Lời giải**

**a.**  $\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = -\cos^2 x + \sin^2 x$   
 $= -1 + \sin^2 x + \sin^2 x = 2\sin^2 x - 1 = 2(1 - \cos^2 x) - 1 = 1 - 2\cos^2 x$   
**b.**  $\sin^3 x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos^3 x = \sin x \cdot \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x \cdot \cos x$   
**c.**  $\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$   
**d.**  $\cot^2 x - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \cos^2 x \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \cos^2 x \cdot \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$

**Câu 40:** Chứng minh các đẳng thức sau:

**a.**  $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$       **b.**  $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$   
**c.**  $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = 1$       **d.**  $\left( 1 - \frac{1}{\cos x} \right) \left( 1 + \frac{1}{\cos x} \right) + \tan^2 x = 0$

**Lời giải**

**a.**  $\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$

**b.**

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x = \sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

**c.** 
$$\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = \frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan x}} = \frac{1}{1 + \tan x} + \frac{\tan x}{1 + \tan x} = 1$$

**d.** 
$$\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) + \tan^2 x = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 1}{\cos^2 x} = 0$$

**Câu 41:** Chứng minh các đẳng thức sau không phụ thuộc vào biến  $x$ :

a)  $A = -\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x$ .

b)  $B = \sin^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \cos^2 x$ .

c)  $B = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$

**Lời giải**

a) Ta có  $-\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin^2 x$   
 $= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

b) Ta có  $B = \sin^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x$   
 $= 1 \cdot (\sin^2 x) + \cos^2 x = 1$ .

c) Ta có  $B = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x$   
 $= \cos^2 x \cdot 1 + \sin^2 x = 1$ .

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 1. GÓC LƯỢNG GIÁC. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

### II HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

#### DẠNG 1: ĐỔI ĐƠN VỊ ĐO GÓC

**Câu 1:** Góc có số đo  $108^\circ$  đổi ra radian là:

- A.  $\frac{3\pi}{5}$ .      B.  $\frac{\pi}{10}$ .      C.  $\frac{3\pi}{2}$ .      D.  $\frac{\pi}{4}$ .

**Câu 2:** Nếu một cung tròn có số đo là  $a^\circ$  thì số đo radian của nó là:

- A.  $180\pi a$ .      B.  $\frac{180\pi}{a}$ .      C.  $\frac{a\pi}{180}$ .      D.  $\frac{\pi}{180a}$ .

**Câu 3:** Cho góc có số đo  $405^\circ$ , khi đổi góc này sang đơn vị radian ta được

- A.  $\frac{8\pi}{9}$ .      B.  $\frac{9\pi}{4}$ .      C.  $\frac{9}{4}$ .      D.  $\frac{9\pi}{8}$ .

**Câu 4:** Đổi số đo của góc 10 rad sang đơn vị độ, phút, giây ta được

- A.  $572^\circ 57' 28''$ .      B.  $1800^\circ$ .      C.  $\frac{\pi}{18}$ .      D.  $527^\circ 57' 28''$ .

**Câu 5:** Góc có số đo  $-\frac{7\pi}{4}$  thì góc đó có số đo là

- A.  $-315^\circ$ .      B.  $-630^\circ$ .      C.  $-1^\circ 45'$ .      D.  $-135^\circ$ .

**Câu 6:** Số đo theo đơn vị radian của góc  $405^\circ$  là:

- A.  $\frac{9\pi}{4}$ .      B.  $\frac{7\pi}{4}$ .      C.  $\frac{5\pi}{4}$ .      D.  $\frac{4\pi}{7}$ .

**Câu 7:** Góc  $70^\circ$  có số đo bằng radian là:

- A.  $\frac{18\pi}{7}$ .      B.  $\frac{7\pi}{18}$ .      C.  $\frac{9\pi}{7}$ .      D.  $\frac{7\pi}{9}$ .

**Câu 8:** Góc có số đo  $120^\circ$  đổi sang radian là

A.  $\frac{3\pi}{2}$ .

B.  $\frac{2\pi}{3}$ .

C.  $\frac{\pi}{4}$ .

D.  $\frac{\pi}{10}$ .

**Câu 9:** Góc lượng giác có số đo  $\alpha$  thì mọi góc lượng giác cùng tia đầu và tia cuối với nó có số đo dạng nào trong các dạng sau?

A.  $\alpha + k180^\circ$

B.  $\alpha + k360^\circ$ .

C.  $\alpha + k2\pi$ .

D.  $\alpha + k\pi$ .

**Câu 10:** Trên đường tròn lượng giác

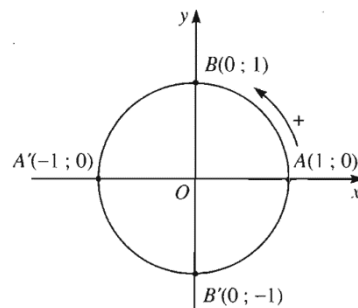
Số đo của góc lượng giác  $(OA, OB')$  là

A.  $-\frac{\pi}{4}$ .

B.  $-\frac{\pi}{2}$ .

C.  $\frac{\pi}{4}$ .

D.  $\frac{\pi}{2}$ .



**Câu 11:** Trên đường tròn lượng giác, cho góc lượng giác có số đo  $\frac{\pi}{2}$  (rad) thì mọi góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối với góc lượng giác trên đều có số đo dạng:

A.  $\frac{\pi}{2}$ .

B.  $\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $\frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 12:** Kết quả nào sau đây là đúng?

A.  $1(rad) = 1^\circ$ .

B.  $1(rad) = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ .

C.  $1(rad) = 180^\circ$ .

D.  $1(rad) = 100^\circ$ .

**Câu 13:** Kết quả nào sau đây là đúng?

A.  $\pi(rad) = 360^\circ$ .

B.  $\pi(rad) = 180^\circ$ .

C.  $\pi(rad) = 1^\circ$ .

D.  $\pi(rad) = 360^\circ$ .

**Câu 14:** Góc lượng giác  $(Ox, Ot)$  có một số đo là  $\frac{\pi}{2} + 2017\pi$ , số đo tổng quát của góc lượng giác  $(Ox, Ot)$  là

A.  $\frac{\pi}{2} + k2\pi$ .

B.  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ .

C.  $\frac{3\pi}{2} + k2\pi$ .

D.  $\frac{3\pi}{2} + k\pi$ .

**Câu 15:** Cho góc lượng giác  $\alpha = (OA; OB) = \frac{\pi}{5}$ . Trong các góc lượng giác sau, góc nào có tia đầu và tia cuối lần lượt trùng với  $OA, OB$ .

A.  $\frac{6\pi}{5}$

B.  $-\frac{11\pi}{5}$ .

C.  $\frac{31\pi}{5}$ .

D.  $\frac{9\pi}{5}$ .

**Câu 16:** Cho  $(Ou, Ov) = 25^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$  với giá trị nào của  $k$  thì  $(Ou, Ov) = -1055^\circ$ ?

A.  $k = -1$ .

B.  $k = 2$ .

C.  $k = -3$ .

D.  $k = 4$ .

**Câu 17:** Cho  $(Ou, Ov) = 12^\circ + k360^\circ$  với giá trị nào của  $k$  thì số đo  $(Ou, Ov) = \frac{59\pi}{15}$ ?

- A.**  $k = -1$ .                      **B.**  $k = 2$ .                      **C.**  $k = -3$ .                      **D.**  $k = 4$ .

**Câu 18:** Nếu số đo góc lượng giác  $(Ou, Ov) = \frac{2006\pi}{5}$  thì số đo góc hình học  $\widehat{uOv}$  bằng

- A.**  $\frac{\pi}{5}$ .                      **B.**  $\frac{4\pi}{5}$ .                      **C.**  $\frac{6\pi}{5}$ .                      **D.**  $\frac{9\pi}{5}$ .

**DẠNG 2: XÁC ĐỊNH ĐỘ DÀI CUNG TRÒN**

Một cung tròn có số đo  $a^\circ$  có độ dài là  $l = \frac{a\pi R}{180}$

**Câu 19:** Trên đường tròn bán kính 7 cm, lấy cung có số đo  $54^\circ$ . Độ dài  $l$  của cung tròn bằng

- A.**  $\frac{21}{10}\pi$  (cm).                      **B.**  $\frac{11}{20}\pi$  (cm).                      **C.**  $\frac{63}{20}\pi$  (cm).                      **D.**  $\frac{20}{11}\pi$  (cm).

**Câu 20:** Trên đường tròn đường kính 8cm, tính độ dài cung tròn có số đo bằng 1,5 rad.

- A.** 12cm.                      **B.** 4cm.                      **C.** 6cm.                      **D.** 15cm.

**Câu 21:** Một đường tròn có bán kính 15(cm). Tìm độ dài cung tròn có góc ở tâm bằng  $30^\circ$  là:

- A.**  $\frac{5\pi}{2}$ .                      **B.**  $\frac{5\pi}{3}$ .                      **C.**  $\frac{2\pi}{5}$ .                      **D.**  $\frac{\pi}{3}$ .

**Câu 22:** Một đường tròn có bán kính 10, độ dài cung tròn  $40^\circ$  trên đường tròn gần bằng

- A.** 7.                      **B.** 9.                      **C.** 11.                      **D.** 13.

**Câu 23:** Một đường tròn có bán kính  $R = \frac{10}{\pi}$ , độ dài cung tròn  $\frac{\pi}{2}$  là

- A.** 5.                      **B.**  $5\pi$ .                      **C.**  $\frac{5}{\pi}$ .                      **D.**  $\frac{\pi}{5}$ .

**Câu 24:** Chọn khẳng định sai

- A.** Cung tròn có bán kính  $R = 5\text{cm}$  và có số đo  $1,5(\text{rad})$  thì có độ dài là  $7,5\text{ cm}$ .  
**B.** Cung tròn có bán kính  $R = 8\text{cm}$  và có độ dài  $8\text{cm}$  thì có số đo độ là  $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ .  
**C.** Độ dài cung tròn phụ thuộc vào bán kính của nó.  
**D.** Góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  có số đo dương thì mọi góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  có số đo âm.

**Câu 25:** Cho đường tròn có bán kính 6 cm. Tìm số đo của cung có độ dài là 3cm :

- A.** 0,5.                      **B.**  $\frac{0,5}{\pi}$ .                      **C.**  $0,5\pi$ .                      **D.** 1.

**Câu 26:** Cung tròn bán kính bằng 8,43(cm) có số đo  $3,85(\text{rad})$  có độ dài là

- A.** 32,46cm                      **B.** 32,45cm                      **C.** 32,47cm                      **D.** 32,5cm.

- Câu 27:** Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài  $10,57\text{cm}$ . Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài là
- A.  $2,77\text{cm}$ .                      B.  $2,78\text{cm}$ .                      C.  $2,76\text{cm}$ .                      D.  $2,8\text{cm}$ .
- Câu 28:** Bánh xe đạp có bán kính  $50\text{cm}$ . Một người quay bánh xe 5 vòng quanh trục thì quãng đường đi được là
- A.  $250\pi(\text{cm})$ .                      B.  $1000\pi(\text{cm})$ .                      C.  $500\pi(\text{cm})$ .                      D.  $200\pi(\text{cm})$ .
- Câu 29:** Một đu quay ở công viên có bán kính bằng  $10\text{m}$ . Tốc độ của đu quay là 3 vòng/phút. Hỏi mất bao lâu để đu quay quay được góc  $270^\circ$ ?
- A.  $\frac{1}{3}$  phút.                      B.  $\frac{1}{6}$  phút.                      C.  $\frac{1}{4}$  phút.                      D. 1,5 phút.
- Câu 30:** Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc A, cung lượng giác có số đo  $30^\circ$  có điểm đầu A, có bao nhiêu điểm cuối N?
- A. Có duy nhất một điểm N.                      B. Có hai điểm N.  
C. Có 4 điểm N.                      D. Có vô số điểm N.
- Câu 31:** Trên đường tròn lượng giác gốc A cho các cung có số đo:
- I.  $\frac{\pi}{4}$                       II.  $-\frac{7\pi}{4}$                       III.  $\frac{13\pi}{4}$                       IV.  $-\frac{71\pi}{4}$
- Hỏi các cung nào có điểm cuối trùng nhau?
- A. Chỉ I và II.                      B. Chỉ I, II và III.                      C. Chỉ II, III và IV.                      D. Chỉ I, II và IV.
- Câu 32:** Lục giác ABCDEF nội tiếp trong đường tròn tâm O, điểm A cố định, điểm B, C có tung độ dương. Khi đó số đo lượng giác của cung  $(OA, OC)$  là
- A.  $120^\circ$ .                      B.  $-240^\circ$ .                      C.  $120^\circ$  hoặc  $240^\circ$ .                      D.  $120^\circ + k360^\circ$ .
- Câu 33:** Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là điểm A, điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo bằng  $45^\circ$ . Điểm N đối xứng với M qua trục Ox, số đo cung AN là?
- A.  $45^\circ$ .                      B.  $45^\circ$  hoặc  $315^\circ$ .                      C.  $45^\circ + k360^\circ$ .                      D.  $315^\circ + k360^\circ$ .
- Câu 34:** Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là điểm A, điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo bằng  $60^\circ$ . Điểm N đối xứng với M qua trục Oy, số đo cung NA là?
- A.  $120^\circ + k180^\circ$ .                      B.  $120^\circ$  hoặc  $-240^\circ$ .                      C.  $-240^\circ + k360^\circ$ .                      D.  $120^\circ + k360^\circ$ .
- Câu 35:** Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là điểm A, điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo bằng  $75^\circ$ . Điểm N đối xứng với M qua gốc tọa độ, số đo cung AN là?
- A.  $-105^\circ + k360^\circ$ .                      B.  $-105^\circ$  hoặc  $255^\circ$ .                      C.  $-255^\circ + k360^\circ$ .                      D.  $-105^\circ$ .
- Câu 36:** Cho hình vuông ABCD tâm O, đường thẳng a qua O và trung điểm AB. Xác định góc tạo bởi đường thẳng a và tia OA
- A.  $45^\circ + k300^\circ$ .                      B.  $15^\circ + k360^\circ$ .                      C.  $135^\circ$ .                      D.  $155^\circ$ .

- Câu 37:** Một bánh xe có 72 răng, số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là  
**A.**  $50^\circ$ . **B.**  $60^\circ$ . **C.**  $120^\circ$ . **D.**  $70^\circ$ .
- Câu 38:** Sau một quãng thời gian 3 giờ thì kim giây sẽ quay được một góc có số đo là:  
**A.**  $12960^\circ$ . **B.**  $32400^\circ$ . **C.**  $324000^\circ$ . **D.**  $64800^\circ$ .
- Câu 39:** Sau quãng thời gian 4 giờ kim giờ sẽ quay được một góc là  
**A.**  $\frac{\pi}{3}$ . **B.**  $\frac{2\pi}{3}$ . **C.**  $\frac{3\pi}{4}$ . **D.**  $\frac{\pi}{4}$ .
- Câu 40:** Trên đồng hồ tại thời điểm đang xét kim giờ OG chỉ số 3, kim phút OP chỉ số 12. Lúc đó số  $(OP; OG)$  là  
**A.**  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . **B.**  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ . **C.**  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ . **D.**  $\alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ .
- Câu 41:** Trên đồng hồ tại thời điểm đang xét kim giây ON chỉ số 5, kim phút OP chỉ số 6. Lúc đó số  $(ON, OG)$  là  
**A.**  $\alpha = \frac{\pi}{12}$ . **B.**  $\alpha = -\frac{\pi}{12}$ . **C.**  $\alpha = \frac{\pi}{12} + k2\pi$ . **D.**  $\alpha = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$ .
- Câu 42:** Trên đồng hồ tại thời điểm đang xét kim giờ OG chỉ số 3, kim phút OP chỉ số 12. Đến khi kim phút và kim giờ gặp nhau lần đầu tiên, tính số đo góc lượng giác mà kim giờ quét được  
**A.**  $\alpha = \frac{\pi}{22} + k2\pi$ . **B.**  $\alpha = -\frac{\pi}{22} + k\pi$ . **C.**  $\alpha = \frac{\pi}{22} + k\pi$ . **D.**  $\alpha = -\frac{\pi}{22} + k2\pi$ .
- Câu 43:** Trên đường tròn định hướng cho ba điểm A, M, N sao cho số đo cung  $AM = \frac{\pi}{3}$ , số đo cung  $AN = \pi$ . Lấy điểm P trên đường tròn sao cho tam giác MNP cân tại P, tìm số đo cung  $AP$   
**A.**  $\frac{2\pi}{3} + k\pi$ . **B.**  $\frac{2\pi}{3} + k2\pi$ . **C.**  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ . **D.**  $\frac{\pi}{2} + k2\pi$ .
- Câu 44:** Trên đường tròn định hướng cho ba điểm A, M, N sao cho số đo cung  $AM = \frac{\pi}{3}$ , số đo cung  $AN = \frac{3\pi}{4}$ . Lấy điểm P trên đường tròn sao cho tam giác MNP cân tại N, tìm số đo cung  $AP$   
**A.**  $\frac{7\pi}{6} + k\pi$ . **B.**  $\frac{7\pi}{6} + k2\pi$ . **C.**  $\frac{\pi}{3} + k\pi$ . **D.**  $\frac{\pi}{3} + k2\pi$ .
- Câu 45:** Trên đường tròn định hướng cho ba điểm A, M, N sao cho  $sđ\widehat{AM} = \frac{\pi}{5}$ , số đo cung  $sđ\widehat{AN} = \frac{k\pi}{80}$ , tìm k để M trùng với N  
**A.**  $15(1+20m), m \in \mathbb{Z}$ . **B.**  $15(1+10m), m \in \mathbb{Z}$ . **C.**  $16(1+10m), m \in \mathbb{Z}$ . **D.**  $16(1+20m), m \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 46:** Trên đường tròn định hướng cho ba điểm A, M, N sao cho  $s\widehat{AM} = \frac{\pi}{6}$ ,  $s\widehat{AN} = \frac{k\pi}{798}$ , tìm k để M đối xứng với N qua gốc tọa độ

- A.**  $133(7+12m), m \in \mathbb{Z}$ . **B.**  $133(5+12m), m \in \mathbb{Z}$ .  
**C.**  $133(7+16m), m \in \mathbb{Z}$  **D.**  $133(5+12m), m \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 47:** Trên đường tròn định hướng, điểm gốc **A.** Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn số đo cung  $AM = \frac{k2\pi}{5}$

- A.** 5.                      **B.** 4.                      **C.** 6.                      **D.** 3.

**Câu 48:** Trên đường tròn định hướng, điểm gốc A. Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn số đo cung

$$AM = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

- A.** 3.                      **B.** 4.                      **C.** 5.                      **D.** 6.

**Câu 49:** Trên đường tròn định hướng góc  $\mathcal{A}$  có bao nhiêu điểm  $M$  thỏa mãn số  $\widehat{AM} = 30^\circ + k45^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ?

- A.** 6.                      **B.** 4.                      **C.** 8.                      **D.** 10.

**Câu 50:** Cho hai góc lượng giác có  $\text{sđ}(Ox, Ou) = 45^\circ + m360^\circ, m \in \mathbb{Z}$  và  $\text{sđ}(Ox, Ov) = -135^\circ + n360^\circ, n \in \mathbb{Z}$ . Ta có hai tia  $Ou$  và  $Ov$

- A.** Tạo với nhau góc  $45^0$ .                      **B.** Trùng nhau.  
**C.** Đối nhau.                                      **D.** Vuông góc.

**Câu 51:** Cho hai góc lượng giác có  $\text{sđ}(Ox, Ou) = \frac{\pi}{4} + m2\pi, m \in \mathbb{Z}$  và  $\text{sđ}(Ox, Ov) = -\frac{\pi}{4} + n2\pi, n \in \mathbb{Z}$ . Ta có hai tia  $Ou$  và  $Ov$

- A.** Tạo với nhau góc  $45^0$ . **B.** Trùng nhau.  
**C.** Đối nhau. **D.** Vuông góc.

**Câu 52:** Cho hai góc lượng giác có  $\text{sđ}(Ox, Ou) = 45^\circ + m360^\circ, m \in \mathbb{Z}$  và  $\text{sđ}(Ox, Ov) = -315^\circ + n360^\circ, n \in \mathbb{Z}$ . Ta có hai tia  $Ou$  và  $Ov$

- A.** Tạo với nhau góc  $45^0$ .                      **B.** Trùng nhau.  
**C.** Đối nhau.                                        **D.** Vuông góc.

**Câu 53:** Cho hai góc lượng giác có số đo  $(Ox, Ou) = -\frac{5\pi}{2} + m2\pi, m \in \mathbb{Z}$  và số đo  $(Ox, Ov) = -\frac{\pi}{2} + n2\pi, n \in \mathbb{Z}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.**  $O_u$  và  $O_v$  trùng nhau.
- B.**  $O_u$  và  $O_v$  đối nhau.
- C.**  $O_u$  và  $O_v$  vuông góc.
- D.** Tạo với nhau một góc  $\frac{\pi}{4}$ .

**Câu 54:** Biết góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  có số đo là  $-\frac{137}{5}\pi$  thì góc  $(Ou, Ov)$  có số đo dương nhỏ nhất là:

- A.  $0,6\pi$  .                      B.  $27,4\pi$  .                      C.  $1,4\pi$  .                      D.  $0,4\pi$  .

**Câu 55:** Có bao nhiêu điểm  $M$  trên đường tròn định hướng gốc  $A$  thỏa mãn số  $\widehat{AM} = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ?

- A. 6.                      B. 4.                      C. 3.                      D. 12.

**Câu 56:** Hai góc lượng giác  $\frac{\pi}{3}$  và  $\frac{m\pi}{12}$  có cùng tia đầu và tia cuối khi  $m$  có giá trị là

- A.  $m = 4 + 24k$  .                      B.  $m = 4 + 14k$  .                      C.  $m = 4 + 20k$  .                      D.  $m = 4 + 22k$  .

**Câu 57:** Cho lục giác đều  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ,  $A_1$  là điểm gốc, thứ tự các điểm sắp xếp ngược chiều kim đồng hồ. Số đo cung  $A_2A_4$  là

- A.  $240^\circ + k360^\circ$  .                      B.  $-240^\circ + k360^\circ$  .                      C.  $240^\circ + k180^\circ$  .                      D.  $-240^\circ + k180^\circ$  .

**Câu 58:** Cho góc lượng giác  $(Ou, Ov) = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{12}$ , tìm  $k$  để  $Ou$  vuông góc với  $Ov$

- A.  $k = 3 + 12l$  .                      B.  $k = 4 + 12l$  .                      C.  $k = 3 + 6l$  .                      D.  $k = 4 + 6l$

### **DẠNG 3: XÉT DẤU CỦA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC**

**Câu 59:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.  $\sin \alpha < 0$  .                      B.  $\cos \alpha \geq 0$  .                      C.  $\tan \alpha < 0$  .                      D.  $\cot \alpha > 0$  .

**Câu 60:** Cho  $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$ . Chọn mệnh đề đúng.

- A.  $\tan \alpha > 0$  .                      B.  $\cot \alpha < 0$  .                      C.  $\sin \alpha < 0$  .                      D.  $\cos \alpha < 0$  .

**Câu 61:** Cho  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , tìm phát biểu **đúng** trong các phát biểu sau:

- A.  $\sin x > 0$  .                      B.  $\cos x > 0$  .                      C.  $\tan x > 0$  .                      D.  $\cot x < 0$  .

**Câu 62:** Cho góc  $\alpha$  thỏa  $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$ . Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

- A.  $\cos \alpha > 0$  .                      B.  $\cot \alpha > 0$  .                      C.  $\sin \alpha > 0$  .                      D.  $\tan \alpha > 0$  .

**Câu 63:** Cho  $\frac{2021\pi}{4} < x < \frac{2023\pi}{4}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\sin x > 0, \cos 2x > 0$  .                      B.  $\sin x < 0, \cos 2x > 0$  .                      C.  $\sin x > 0, \cos 2x < 0$  .                      D.  $\sin x < 0, \cos 2x < 0$  .

**Câu 64:** Ở góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A.  $\sin \alpha > 0$  .                      B.  $\cos \alpha < 0$  .                      C.  $\tan \alpha < 0$  .                      D.  $\cot \alpha < 0$  .

**Câu 65:** Cho  $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$ . Kết quả đúng là:

- A.**  $\tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0$ . **B.**  $\tan \alpha < 0; \cot \alpha < 0$ . **C.**  $\tan \alpha > 0; \cot \alpha < 0$ . **D.**  $\tan \alpha < 0; \cot \alpha > 0$ .

**Câu 66:** Điểm cuối của góc lượng giác  $\alpha$  ở góc phần tư thứ mấy nếu  $\sin \alpha, \cos \alpha$  cùng dấu?

- A.** Thứ II. **B.** Thứ IV. **C.** Thứ II hoặc IV. **D.** Thứ I hoặc III.

**Câu 67:** Điểm cuối của góc lượng giác  $\alpha$  ở góc phần tư thứ mấy nếu  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ .

- A.** Thứ II. **B.** Thứ I hoặc II. **C.** Thứ II hoặc III. **D.** Thứ I hoặc IV.

**Câu 68:** Cho  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Kết quả đúng là:

- A.**  $\sin \alpha > 0; \cos \alpha > 0$ . **B.**  $\sin \alpha < 0; \cos \alpha < 0$ . **C.**  $\sin \alpha > 0; \cos \alpha < 0$ . **D.**  $\sin \alpha < 0; \cos \alpha > 0$ .

**Câu 69:** Ở góc phần tư thứ tư của đường tròn lượng giác, hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A.**  $\tan \alpha > 0$ . **B.**  $\sin \alpha > 0$ . **C.**  $\cos \alpha > 0$ . **D.**  $\cot \alpha > 0$ .

**Câu 70:** Cho  $\alpha$  thuộc góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A.**  $\sin \alpha > 0$ . **B.**  $\cos \alpha < 0$ . **C.**  $\tan \alpha < 0$ . **D.**  $\cot \alpha < 0$ .

**Câu 71:** Điểm cuối của góc lượng giác  $\alpha$  ở góc phần tư thứ mấy nếu  $\sin \alpha, \tan \alpha$  trái dấu?

- A.** Thứ I. **B.** Thứ II hoặc IV. **C.** Thứ II hoặc III. **D.** Thứ I hoặc IV.

**Câu 72:** Điểm cuối của góc lượng giác  $\alpha$  ở góc phần tư thứ mấy nếu  $\sqrt{\sin^2 \alpha} = \sin \alpha$ .

- A.** Thứ III. **B.** Thứ I hoặc III. **C.** Thứ I hoặc II. **D.** Thứ III hoặc IV.

**Câu 73:** Cho  $a = 1500^\circ$ . Xét câu nào sau đây đúng?

- I.  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . II.  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ . III.  $\tan \alpha = \sqrt{3}$ .

- A.** Chỉ I và II. **B.** Chỉ II và III. **C.** Cả I, II và III. **D.** Chỉ I và III.

**Câu 74:** Cho  $3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3}$ . Xét câu nào sau đây đúng?

- A.**  $\cos \alpha > 0$ . **B.**  $\sin \alpha < 0$ . **C.**  $\tan \alpha < 0$ . **D.**  $\cot \alpha < 0$ .

**Câu 75:** Cho  $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.**  $\cos \alpha > 0$ . **B.**  $\sin \alpha > 0$ . **C.**  $\tan \alpha > 0$ . **D.**  $\cot \alpha > 0$ .

**Câu 76:** Cho  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Xét các mệnh đề sau:

- I.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > 0$ . II.  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > 0$ . III.  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > 0$ .

Mệnh đề nào **sai**?

- A.** Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** Chỉ II và III. **D.** Cả I, II và III.

**Câu 77:** Cho  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Xét các mệnh đề sau đây:

I.  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0$ .      II.  $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0$ .      III.  $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0$ .

Mệnh đề nào đúng?

- A.** Chỉ I.      **B.** Chỉ I và II.      **C.** Chỉ II và III.      **D.** Cả I, II và III.

**Câu 78:** Bất đẳng thức nào dưới đây là đúng?

- A.**  $\sin 90^\circ < \sin 150^\circ$ .      **B.**  $\sin 90^\circ 15' < \sin 90^\circ 30'$ .  
**C.**  $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$ .      **D.**  $\cos 150^\circ > \cos 120^\circ$ .

**Câu 79:** Cho hai góc nhọn  $\alpha$  và  $\beta$  phụ nhau. Hệ thức nào sau đây là **sai**?

- A.**  $\sin \alpha = -\cos \beta$ .      **B.**  $\cos \alpha = \sin \beta$ .      **C.**  $\cos \beta = \sin \alpha$ .      **D.**  $\cot \alpha = \tan \beta$ .

**Câu 80:** Cho  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.**  $\sin(\alpha - \pi) \geq 0$ .      **B.**  $\sin(\alpha - \pi) \leq 0$ .      **C.**  $\sin(\alpha - \pi) > 0$ .      **D.**  $\sin(\alpha - \pi) < 0$ .

**Câu 81:** Cho  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.**  $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0$ .      **B.**  $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \geq 0$ .      **C.**  $\tan(\alpha + \pi) < 0$ .      **D.**  $\tan(\alpha + \pi) > 0$ .

**Câu 82:** Cho  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Giá trị lượng giác nào sau đây luôn dương?

- A.**  $\sin(\pi + \alpha)$ .      **B.**  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ .      **C.**  $\cos(-\alpha)$ .      **D.**  $\tan(\pi + \alpha)$ .

**Câu 83:** Cho  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.**  $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$ .      **B.**  $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0$ .      **C.**  $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \leq 0$ .      **D.**  $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \geq 0$ .

**Câu 84:** Cho  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Xác định dấu của biểu thức  $M = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$ .

- A.**  $M \geq 0$ .      **B.**  $M > 0$ .      **C.**  $M \leq 0$ .      **D.**  $M < 0$ .

**Câu 85:** Cho  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Xác định dấu của biểu thức  $M = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cot(\pi + \alpha)$ .

- A.**  $M \geq 0$ .      **B.**  $M > 0$ .      **C.**  $M \leq 0$ .      **D.**  $M < 0$ .

DẠNG 4: TÍNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

**Câu 86:** Cho  $\cos \alpha = -\frac{1}{6}; \left(-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}\right)$ . Tính  $\sin \alpha$ .

- A.  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{35}}{6}$ .      B.  $\sin \alpha = \frac{35}{36}$ .      C.  $\sin \alpha = \frac{5}{6}$ .      D.  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$ .

**Câu 87:** Tính  $\sin \alpha$ , biết  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$  và  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ .

- A.  $\frac{1}{3}$ .      B.  $-\frac{1}{3}$ .      C.  $\frac{2}{3}$ .      D.  $-\frac{2}{3}$ .

**Câu 88:** Cho  $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(-\frac{\pi}{2} < x < 0\right)$  thì  $\sin x$  có giá trị bằng

- A.  $\frac{3}{\sqrt{5}}$ .      B.  $-\frac{3}{\sqrt{5}}$ .      C.  $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ .      D.  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

**Câu 89:** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$  biết  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính  $\cos \alpha; \tan \alpha$

- A.  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}; \tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$ .      B.  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}; \tan \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$ .  
C.  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}; \tan \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$ .      D.  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}; \tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$ .

**Câu 90:** Cho  $\cos \alpha = -\frac{2}{5} \left(90^\circ < \alpha < 180^\circ\right)$ , khi đó  $\tan \alpha$  bằng:

- A.  $\frac{\sqrt{21}}{5}$ .      B.  $-\frac{\sqrt{21}}{2}$ .      C.  $-\frac{\sqrt{21}}{5}$ .      D.  $\frac{\sqrt{21}}{3}$ .

**Câu 91:** Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Giá trị của  $\cos \alpha$  là:

- A.  $\frac{4}{5}$ .      B.  $-\frac{4}{5}$ .      C.  $\pm \frac{4}{5}$ .      D.  $\frac{16}{25}$ .

**Câu 92:** Cho  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$  và  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Khi đó giá trị của  $\cos \alpha$  và  $\tan \alpha$  lần lượt là

- A.  $-\frac{4}{5}; \frac{3}{4}$ .      B.  $-\frac{4}{5}; -\frac{3}{4}$ .      C.  $\frac{4}{5}; -\frac{3}{4}$ .      D.  $\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}$ .

**Câu 93:** Cho  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$  với  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Tính giá trị của biểu thức  $M = 10\sin \alpha + 5\cos \alpha$ .

- A.  $-10$ .      B.  $2$ .      C.  $1$ .      D.  $\frac{1}{4}$ .

**Câu 94:** Cho  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$  và  $\frac{7\pi}{2} < \alpha < 4\pi$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.**  $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .      **B.**  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .      **C.**  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ .      **D.**  $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ .

**Câu 95:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$  và  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ . Giá trị của biểu thức  $P = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}$  bằng

- A.**  $\frac{4+\sqrt{3}}{2}$ .      **B.**  $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$ .      **C.**  $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ .      **D.**  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 96:** Nếu  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$  thì  $\sin^2 \alpha$  bằng

- A.**  $\frac{16}{25}$ .      **B.**  $\frac{9}{25}$ .      **C.**  $\frac{25}{16}$ .      **D.**  $\frac{25}{9}$ .

**Câu 97:** Cho  $\tan x = 3$ . Tính  $P = \frac{2\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ .

- A.**  $P = \frac{3}{2}$ .      **B.**  $P = \frac{5}{4}$ .      **C.**  $P = 3$ .      **D.**  $P = \frac{2}{5}$ .

**Câu 98:** Cho  $\sin a = \frac{1}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{\cot a - \tan a}{\tan a + 2 \cot a}$  bằng

- A.**  $\frac{1}{9}$ .      **B.**  $\frac{7}{9}$ .      **C.**  $\frac{17}{81}$ .      **D.**  $\frac{7}{17}$ .

**Câu 99:** Cho  $\tan x = -4$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{2\sin x - 5\cos x}{3\cos x + \sin x}$  là

- A.** 13.      **B.** -13.      **C.**  $\frac{13}{11}$ .      **D.** 5.

**Câu 100:** Cho  $\tan \alpha = 3$ , khi đó giá trị của biểu thức  $P = \frac{2\sin \alpha - \cos \alpha}{3\sin \alpha - 5\cos \alpha}$  là

- A.**  $P = -\frac{5}{2}$ .      **B.**  $P = \frac{5}{4}$ .      **C.**  $P = 1$ .      **D.**  $P = -3$ .

**Câu 101:** Cho  $\cot \alpha = -3$ . Giá trị của biểu thức  $P = \frac{3\cos \alpha - 4\sin \alpha}{2\sin \alpha + \cos \alpha}$  bằng

- A.** -13.      **B.** 13.      **C.** -3.      **D.** 3.

**Câu 102:** Cho  $\cot \alpha = 4 \tan \alpha$  và  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ . Khi đó  $\sin \alpha$  bằng

- A.**  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ .      **B.**  $\frac{1}{2}$ .      **C.**  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .      **D.**  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**Câu 103:** Nếu  $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$  thì  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$  bằng bao nhiêu?

- A. 1.                                      B. 4.                                      C. 2.                                      D. 3.

**Câu 104:** Biết  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Trong các kết quả sau, kết quả nào **sai**?

- A.  $\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4}$ .                                      B.  $\sin \alpha - \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ .  
C.  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{7}{8}$ .                                      D.  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 12$ .

**Câu 105:** Nếu  $\cot(x + \pi) - \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2(-1445^\circ) + \cos^2(1085^\circ)$  thì  $\sin x$  bằng.

- A.  $\pm \frac{1}{5}$ .                                      B.  $\pm \frac{2}{5}$ .                                      C.  $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ .                                      D.  $\pm \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

**Câu 106:** Cho biết  $\sin a - \cos a = \frac{1}{2}$ . Kết quả nào sau đây **đúng**?

- A.  $\sin a \cdot \cos a = \frac{3}{8}$ .                                      B.  $\sin a + \cos a = \frac{\sqrt{7}}{4}$ .  
C.  $\sin^4 a + \cos^4 a = \frac{21}{32}$ .                                      D.  $\tan^2 a + \cot^2 a = \frac{14}{3}$ .

**Câu 107:** Biết  $\tan x = \frac{1}{2}$ , giá trị của biểu thức  $M = \frac{2\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4\cos^2 x}{5\cos^2 x - \sin^2 x}$  bằng:

- A.  $-\frac{8}{13}$ .                                      B.  $\frac{2}{19}$ .                                      C.  $-\frac{2}{19}$ .                                      D.  $-\frac{8}{19}$ .

**Câu 108:** Nếu  $\cot 1,25 \cdot \tan(4\pi + 1,25) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(6\pi - x) = 0$  thì  $\tan x$  bằng

- A. 1.                                      B. -1.                                      C. 0.                                      D. Giá trị khác.

**Câu 109:** Biết  $\tan x = \frac{2b}{a-c}$ . Giá trị của biểu thức  $A = a\cos^2 x + 2b\sin x \cdot \cos x + c\sin^2 x$  bằng

- A.  $-a$ .                                      B.  $a$ .                                      C.  $-b$ .                                      D.  $b$ .

**Câu 110:** Nếu biết  $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$  thì biểu thức  $\frac{\sin^3 x}{a^3} + \frac{\cos^3 x}{b^3}$  bằng:

- A.  $\frac{1}{(a+b)^2}$ .                                      B.  $\frac{1}{a^2 + b^2}$ .                                      C.  $\frac{1}{(a+b)^3}$ .                                      D.  $\frac{1}{a^3 + b^3}$ .

**Câu 111:** Nếu biết  $3\sin^4 x + 2\cos^4 x = \frac{98}{81}$  thì giá trị biểu thức  $A = 2\sin^4 x + 3\cos^4 x$  bằng

- A.  $\frac{101}{81}$  hay  $\frac{601}{504}$ .                                      B.  $\frac{103}{81}$  hay  $\frac{603}{405}$ .                                      C.  $\frac{105}{81}$  hay  $\frac{605}{504}$ .                                      D.  $\frac{107}{81}$  hay  $\frac{607}{405}$ .

**Câu 112:** Nếu  $\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$  thì biểu thức  $M = \frac{\sin^{10} \alpha}{a^4} + \frac{\cos^{10} \alpha}{b^4}$  bằng.

- A.  $\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5}$ .      B.  $\frac{1}{(a+b)^5}$ .      C.  $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}$ .      D.  $\frac{1}{(a+b)^4}$ .

**Câu 113:** Nếu biết  $\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$  thì biểu thức  $A = \frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3}$  bằng:

- A.  $\frac{1}{(a+b)^2}$ .      B.  $\frac{1}{a^2 + b^2}$ .      C.  $\frac{1}{(a+b)^3}$ .      D.  $\frac{1}{a^3 + b^3}$ .

**Câu 114:** Nếu  $3 \cos x + 2 \sin x = 2$  và  $\sin x < 0$  thì giá trị đúng của  $\sin x$  là:

- A.  $-\frac{5}{13}$ .      B.  $-\frac{7}{13}$ .      C.  $-\frac{9}{13}$ .      D.  $-\frac{12}{13}$ .

**Câu 115:** Nếu  $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$  thì  $3 \sin x + 2 \cos x$  bằng:

- A.  $\frac{5-\sqrt{7}}{4}$  hay  $\frac{5+\sqrt{7}}{4}$ .      B.  $\frac{5-\sqrt{5}}{7}$  hay  $\frac{5+\sqrt{5}}{4}$ .  
C.  $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$  hay  $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$ .      D.  $\frac{3-\sqrt{2}}{5}$  hay  $\frac{3+\sqrt{2}}{5}$ .

**DẠNG 5: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT**

**Câu 116:** Tính  $L = \tan 20^\circ \tan 45^\circ \tan 70^\circ$

- A. 0.      B. 1.      C. -1.      D. 2.

**Câu 117:** Tính  $G = \cos^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{2\pi}{6} + \dots + \cos^2 \frac{5\pi}{6} + \cos^2 \pi$

- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 3.

**Câu 118:** Tính  $A = \sin 390^\circ - 2 \sin 1140^\circ + 3 \cos 1845^\circ$

- A.  $\frac{1}{2}(1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ .      B.  $\frac{1}{2}(1-3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ .      C.  $\frac{1}{2}(1+2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$ .      D.  $\frac{1}{2}(1+2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$ .

**Câu 119:** Giá trị đúng của biểu thức  $\frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ}$  bằng:

- A.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .      B.  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ .      C.  $\sqrt{3}$ .      D.  $-\sqrt{3}$ .

**Câu 120:** Với mọi góc  $\alpha$ , biểu thức  $\cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) + \dots + \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right)$  nhận giá trị bằng

- A. 10.      B. -10.      C. 1.      D. 0.

**Câu 121:** Tính  $F = \sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{2\pi}{6} + \dots + \sin^2 \frac{5\pi}{6} + \sin^2 \pi$ .

- A. 3.                                      B. 2.                                      C. 1.                                      D. 4.

**Câu 122:** Đơn giản biểu thức  $D = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(13\pi + \alpha) - 3\sin(\alpha - 5\pi)$ .

- A.  $3\sin\alpha - 2\cos\alpha$ .      B.  $3\sin\alpha$ .                                      C.  $-3\sin\alpha$ .                                      D.  $2\cos\alpha + 3\sin\alpha$ .

**Câu 123:** Giả sử  $A = \tan x \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$  được rút gọn thành  $A = \tan nx$  khi đó  $n$  bằng

- A. 2.                                      B. 1.                                      C. 4.                                      D. 3.

**Câu 124:** Nếu  $\sin x = 3\cos x$  thì  $\sin x \cos x$  bằng

- A.  $\frac{3}{10}$ .                                      B.  $\frac{2}{9}$ .                                      C.  $\frac{1}{4}$ .                                      D.  $\frac{1}{6}$ .

**Câu 125:** Với mọi  $\alpha$  thì  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$  bằng

- A.  $-\sin\alpha$ .                                      B.  $-\cos\alpha$ .                                      C.  $\cos\alpha$ .                                      D.  $\sin\alpha$ .

**Câu 126:** Giá trị  $\cot \frac{89\pi}{6}$  bằng

- A.  $\sqrt{3}$ .                                      B.  $-\sqrt{3}$ .                                      C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .                                      D.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 127:** Đơn giản biểu thức  $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ , ta được:

- A.  $\cos\alpha$ .                                      B.  $\sin\alpha$ .                                      C.  $-\cos\alpha$ .                                      D.  $-\sin\alpha$ .

**Câu 128:** Nếu  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{3}$  thì  $1 + \tan^2 \alpha$  bằng

- A.  $\frac{9}{8}$ .                                      B. 4.                                      C.  $\frac{3}{2}$ .                                      D.  $\frac{8}{9}$ .

**Câu 129:** Tính  $P = \cot 1^\circ \cdot \cot 2^\circ \cdot \cot 3^\circ \dots \cot 89^\circ$ .

- A. 0.                                      B. 1.                                      C. 3.                                      D. 4.

**Câu 130:** Giá trị của biểu thức  $\tan 110^\circ \tan 340^\circ + \sin 160^\circ \cos 110^\circ + \sin 250^\circ \cos 340^\circ$  bằng

- A. 0.                                      B. 1.                                      C. -1.                                      D. 2.

**Câu 131:** Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sin(-234^\circ) - \cos 216^\circ}{\sin 144^\circ - \cos 126^\circ} \cdot \tan 36^\circ$ , ta được

- A.  $A = 2$ .                                      B.  $A = -2$ .                                      C.  $A = 1$ .                                      D.  $A = -1$ .

**Câu 132:** Giá trị của biểu thức  $A = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cdot \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$  bằng:

- A.** 1.                                      **B.** 2.                                      **C.** -1.                                      **D.** 0.

**Câu 133:** Với mọi  $\alpha$ , biểu thức:  $A = \cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) + \dots + \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right)$  nhận giá trị bằng:

- A.** -10.                                      **B.** 10.                                      **C.** 0.                                      **D.** 5.

**Câu 134:** Biểu thức  $A = \frac{\sin(-328^\circ) \cdot \sin 958^\circ}{\cot 572^\circ} - \frac{\cos(-508^\circ) \cdot \cos(-1022^\circ)}{\tan(-212^\circ)}$  rút gọn bằng:

- A.** -1.                                      **B.** 1.                                      **C.** 0.                                      **D.** 2.

**DẠNG 6: RÚT GỌN BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC. ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC**

**Câu 135:** Biểu thức  $D = \cos^2 x \cot^2 x + 3 \cos^2 x - \cot^2 x + 2 \sin^2 x$  không phụ thuộc  $x$  và bằng:

- A.** 2.                                      **B.** -2.                                      **C.** 3.                                      **D.** -3.

**Câu 136:** Đơn giản biểu thức  $D = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - a\right) + \cos(13\pi + a) - 3 \sin(a - 5\pi)$

- A.**  $2 \cos a + 3 \sin a$ .                      **B.**  $3 \sin a - 2 \cos a$ .                      **C.**  $-3 \sin a$ .                                      **D.**  $4 \cos a - \sin a$ .

**Câu 137:** Đơn giản biểu thức  $C = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) + \cos\left(a - \frac{7\pi}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{7\pi}{2}\right)$

- A.**  $2 \sin a$ .                                      **B.**  $-2 \sin a$ .                                      **C.**  $2 \cos a$ .                                      **D.**  $-2 \cos a$ .

**Câu 138:** Biểu thức  $B = \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \cot^2 x \cot^2 y$  không phụ thuộc vào  $x, y$  và bằng

- A.** 2.                                      **B.** -2.                                      **C.** 1.                                      **D.** -1.

**Câu 139:** Rút gọn biểu thức  $A = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$ , ta được kết quả

- A.**  $A = \sin x + \cos x$ .                      **B.**  $A = \cos x - \sin x$ .                      **C.**  $A = \cos 2x - \sin 2x$ .                      **D.**  $A = \cos 2x + \sin 2x$ .

**Câu 140:** Biểu thức rút gọn của  $A = \frac{\tan^2 a - \sin^2 a}{\cot^2 a - \cos^2 a}$  bằng:

- A.**  $\tan^6 a$ .                                      **B.**  $\cos^6 a$ .                                      **C.**  $\tan^4 a$ .                                      **D.**  $\sin^6 a$ .

**Câu 141:** Hệ thức nào **sai** trong bốn hệ thức sau:

- A.**  $\frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x \cdot \tan y$ .                      **B.**  $\left( \sqrt{\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}} - \sqrt{\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}} \right)^2 = 4 \tan^2 a$ .  
**C.**  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1 + \cot^2 \alpha}{1 - \cot^2 \alpha}$ .                      **D.**  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha + 1}$ .

**Câu 142:** Biết  $\tan x = 3$  và  $M = \frac{2\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x + 4\cos^2 x}{5\tan^2 x + 6\cot^2 x}$ . Giá trị của  $M$  bằng.

- A.**  $M = \frac{31}{47}$ .      **B.**  $M = \frac{93}{137}$ .      **C.**  $M = \frac{93}{1370}$ .      **D.**  $M = \frac{31}{51}$ .

**Câu 143:** Giả sử  $3\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$  thì  $\sin^4 x + 3\cos^4 x$  có giá trị bằng

- A.** 1.      **B.** 2.      **C.** 3.      **D.** 4

**Câu 144:** Rút gọn biểu thức  $A = \sin\left(x + \frac{85\pi}{2}\right) + \cos(2017\pi + x) + \sin^2(33\pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)$  ta được:

- A.**  $A = \sin x$ .      **B.**  $A = 1$ .      **C.**  $A = 2$ .      **D.**  $A = 0$ .

**Câu 145:** Có bao nhiêu đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau đây?

- i)  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}$ .      iii)  $\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \alpha + \sin \alpha$ .  
 ii)  $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$ .      iv)  $\cot 2\alpha = 2\cot^2 \alpha - 1$ .

- A.** 3.      **B.** 2.      **C.** 4.      **D.** 1.

**Câu 146:** Biểu thức  $A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4\tan^2 x} - \frac{1}{4\sin^2 x \cos^2 x}$  không phụ thuộc vào  $x$  và bằng

- A.** 1.      **B.** -1.      **C.**  $\frac{1}{4}$ .      **D.**  $-\frac{1}{4}$ .

**Câu 147:** Biểu thức  $A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4\tan^2 x} - \frac{1}{4\sin^2 x \cos^2 x}$  không phụ thuộc vào  $x$  và bằng

- A.** 1.      **B.** -1.      **C.**  $\frac{1}{4}$ .      **D.**  $-\frac{1}{4}$ .

**Câu 148:** Biểu thức  $A = \frac{\sin 515^\circ \cdot \cos(-475^\circ) + \cot 222^\circ \cdot \cot 408^\circ}{\cot 415^\circ \cdot \cot(-505^\circ) + \tan 197^\circ \cdot \tan 73^\circ}$  có kết quả rút gọn bằng

- A.**  $\frac{1}{2}\sin^2 25^\circ$ .      **B.**  $\frac{1}{2}\cos^2 55^\circ$ .      **C.**  $\frac{1}{2}\cos^2 25^\circ$ .      **D.**  $\frac{1}{2}\sin^2 65^\circ$ .

**Câu 149:** Biểu thức:

$$A = \cos(\alpha + 26\pi) - 2\sin(\alpha - 7\pi) - \cos 1,5\pi - \cos\left(\alpha + \frac{2003\pi}{2}\right) + \cos(\alpha - 1,5\pi) \cdot \cot(\alpha - 8\pi)$$

kết quả thu gọn bằng:

- A.**  $-\sin \alpha$ .      **B.**  $\sin \alpha$ .      **C.**  $-\cos \alpha$ .      **D.**  $\cos \alpha$ .

**Câu 150:** Biểu thức  $\left[ \tan(\pi - x) \cdot \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \frac{1}{\sin(\pi - x)} \right] \sin^2(2\pi - x)$  có

kết quả rút gọn bằng:

- A.  $\sin^2 x$ . B.  $\cos^2 x$ . C.  $\tan^2 x$ . D.  $\cot^2 x$ .

**Câu 151:** Cho  $B = \frac{\cos^2 696^\circ + \tan(-260^\circ) \cdot \tan 530^\circ - \cos^2 156^\circ}{\tan^2 252^\circ + \cot^2 342^\circ}$ . Biểu thức thu gọn nhất của  $B$  là:

- A.  $\frac{1}{2} \tan^2 24^\circ$ . B.  $\frac{1}{2} \cot^2 24^\circ$ . C.  $\frac{1}{2} \tan^2 18^\circ$ . D.  $\frac{1}{2} \cot^2 18^\circ$ .

**Câu 152:** Cho  $A = \frac{\sin 515^\circ \cdot \cos(-475^\circ) + \cot 222^\circ \cdot \cot 408^\circ}{\cot 415^\circ \cdot \cot(-505^\circ) + \tan 197^\circ \cdot \tan 73^\circ}$ . Biểu thức rút gọn của  $A$  bằng:

- A.  $\frac{1}{2} \cos^2 25^\circ$ . B.  $-\frac{1}{2} \cos^2 25^\circ$ . C.  $\frac{1}{2} \sin^2 25^\circ$ . D.  $-\frac{1}{2} \sin^2 25^\circ$ .

**Câu 153:** Cho biểu thức  $M = \frac{1 + \tan^3 x}{(1 + \tan x)^3}$ , ( $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ), mệnh đề nào trong các mệnh đề sau **đúng**?

- A.  $M < 1$ . B.  $M \leq 1$ . C.  $M \geq \frac{1}{4}$ . D.  $\frac{1}{4} \leq M \leq 1$ .

**Câu 154:** Hệ thức nào **sai** trong bốn hệ thức sau:

- A.  $\frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x + \tan y$ . B.  $\left( \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} \right)^2 = 4 \tan^2 \alpha$ .  
C.  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{2}{1 - \cot^2 \alpha}$ . D.  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha + 1}$ .

**Câu 155:** Tính  $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3\pi - 2\alpha) + \cot(\pi - \alpha)$ , biết  $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$  và  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ .

- A.  $\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$ . B.  $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$ . C.  $\frac{3\sqrt{3}+3}{2}$ . D.  $\frac{3\sqrt{3}+1}{2}$ .

### DẠNG 7: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

**Câu 156:** Giá trị nhỏ nhất của  $M = \sin^6 x + \cos^6 x$  là.

- A. 0. B.  $\frac{1}{4}$ . C.  $\frac{1}{2}$ . D. 1.

**Câu 157:** Giá trị nhỏ nhất của  $M = \sin^4 x + \cos^4 x$  là.

- A. 0.                      B.  $\frac{1}{4}$ .                      C.  $\frac{1}{2}$ .                      D. 1.

**Câu 158:** Giá trị lớn nhất của  $N = \sin^4 x - \cos^4 x$  bằng:

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

**Câu 159:** Giá trị lớn nhất của  $M = \sin^4 x + \cos^4 x$  bằng:

- A. 1.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 4.

**Câu 160:** Cho  $M = 6\cos^2 x + 5\sin^2 x$ . Khi đó giá trị lớn nhất của  $M$  là.

- A. 1.                      B. 5.                      C. 6.                      D. 11.

**Câu 161:** Giá trị lớn nhất của biểu thức  $M = 7\cos^2 x - 2\sin^2 x$  là.

- A. -2.                      B. 5.                      C. 7.                      D. 16.

**Câu 162:** Cho  $M = 5 - 2\sin^2 x$ . Khi đó giá trị lớn nhất của  $M$  là.

- A. 3.                      B. 5.                      C. 6.                      D. 7.

**Câu 163:** Tính giá trị nhỏ nhất của  $F = \cos^2 a + 2\sin a + 2$

- A. -1.                      B. 0.                      C. 1.                      D. 2.

**Câu 164:** Tính giá trị lớn nhất của  $E = 2\sin \alpha - \sin^2 \alpha + 3$

- A. 2.                      B. 3.                      C. 4.                      D. 1.

**Câu 165:** Giá trị lớn nhất của  $M = \sin^6 x - \cos^6 x$  bằng:

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 1. GÓC LƯỢNG GIÁC. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

### II HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

#### DẠNG 1: ĐỔI ĐƠN VỊ ĐO GÓC

**Câu 1:** Góc có số đo  $108^\circ$  đổi ra radian là:

**A.**  $\frac{3\pi}{5}$ .

**B.**  $\frac{\pi}{10}$ .

**C.**  $\frac{3\pi}{2}$ .

**D.**  $\frac{\pi}{4}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $108^\circ = \frac{108^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{5}$ .

**Câu 2:** Nếu một cung tròn có số đo là  $a^\circ$  thì số đo radian của nó là:

**A.**  $180\pi a$ .

**B.**  $\frac{180\pi}{a}$ .

**C.**  $\frac{a\pi}{180}$ .

**D.**  $\frac{\pi}{180a}$ .

**Lời giải**

Số đo radian của một cung tròn có số đo  $a^\circ$  là  $\frac{a\pi}{180}$ .

**Câu 3:** Cho góc có số đo  $405^\circ$ , khi đổi góc này sang đơn vị radian ta được

**A.**  $\frac{8\pi}{9}$ .

**B.**  $\frac{9\pi}{4}$ .

**C.**  $\frac{9}{4}$ .

**D.**  $\frac{9\pi}{8}$ .

**Lời giải**

Khi đổi góc  $405^\circ$  sang đơn vị radian ta được  $405 \times \frac{\pi}{180} = \frac{9\pi}{4}$ .

**Câu 4:** Đổi số đo của góc 10 rad sang đơn vị độ, phút, giây ta được

**A.**  $572^\circ 57' 28''$ .

**B.**  $1800^\circ$ .

**C.**  $\frac{\pi}{18}$ .

**D.**  $527^\circ 57' 28''$ .

**Lời giải**

Tính được:  $10 \text{ rad} = \frac{10}{\pi} \cdot 180^\circ \approx 572^\circ 57' 28''$ .

**Câu 5:** Góc có số đo  $\frac{-7\pi}{4}$  thì góc đó có số đo là

**A.**  $-315^\circ$ .

**B.**  $-630^\circ$ .

**C.**  $-1^\circ 45'$ .

**D.**  $-135^\circ$ .

**Lời giải**

Góc có số đo  $\frac{-7\pi}{4}$  thì góc đó có số đo là:

$$\frac{-7 \cdot 180^\circ}{4} = -315^\circ.$$

**Câu 6:** Số đo theo đơn vị radian của góc  $405^\circ$  là:

**A.**  $\frac{9\pi}{4}$ .

**B.**  $\frac{7\pi}{4}$ .

**C.**  $\frac{5\pi}{4}$ .

**D.**  $\frac{4\pi}{7}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{405^\circ}{108^\circ} = \frac{9}{4}$ . Vậy  $405^\circ$  tương ứng với  $\frac{9\pi}{4} (rad)$ .

**Câu 7:** Góc  $70^\circ$  có số đo bằng radian là:

**A.**  $\frac{18\pi}{7}$ .

**B.**  $\frac{7\pi}{18}$ .

**C.**  $\frac{9\pi}{7}$ .

**D.**  $\frac{7\pi}{9}$ .

**Lời giải**

Góc  $a^\circ$  có số đo bằng radian là  $\frac{\pi \cdot a}{180}$

Suy ra góc  $70^\circ$  có số đo bằng radian là  $\frac{\pi \cdot 70}{180} = \frac{7\pi}{18} (rad)$

**Câu 8:** Góc có số đo  $120^\circ$  đổi sang radian là

**A.**  $\frac{3\pi}{2}$ .

**B.**  $\frac{2\pi}{3}$ .

**C.**  $\frac{\pi}{4}$ .

**D.**  $\frac{\pi}{10}$ .

**Lời giải**

Ta có  $120^\circ$  đổi sang radian là:  $\frac{\pi}{180} \cdot 120 = \frac{2\pi}{3}$  rad **D.**

**Câu 9:** Góc lượng giác có số đo  $\alpha$  thì mọi góc lượng giác cùng tia đầu và tia cuối với nó có số đo dạng nào trong các dạng sau?

**A.**  $\alpha + k180^\circ$

**B.**  $\alpha + k360^\circ$ .

**C.**  $\alpha + k2\pi$ .

**D.**  $\alpha + k\pi$ .

**Lời giải**

**Câu 10:** Trên đường tròn lượng giác

Số đo của góc lượng giác  $(OA, OB')$  là

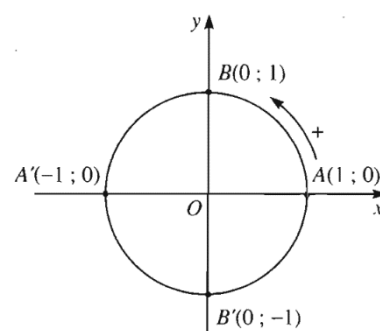
**A.**  $-\frac{\pi}{4}$ .

**B.**  $-\frac{\pi}{2}$ .

**C.**  $\frac{\pi}{4}$ .

**D.**  $\frac{\pi}{2}$ .

**Lời giải**



Từ hình vẽ ta có  $(OA, OB') = -\frac{\pi}{2}$ .

**Câu 11:** Trên đường tròn lượng giác, cho góc lượng giác có số đo  $\frac{\pi}{2}$  (rad) thì mọi góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối với góc lượng giác trên đều có số đo dạng:

- A.  $\frac{\pi}{2}$ .      B.  $\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ .      C.  $\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .      D.  $\frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải**

**Câu 12:** Kết quả nào sau đây là đúng?

- A.  $1(rad) = 1^\circ$ .      B.  $1(rad) = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ .      C.  $1(rad) = 180^\circ$ .      D.  $1(rad) = 100^\circ$ .

**Lời giải**

**Câu 13:** Kết quả nào sau đây là đúng?

- A.  $\pi(rad) = 360^\circ$ .      B.  $\pi(rad) = 180^\circ$ .      C.  $\pi(rad) = 1^\circ$ .      D.  $\pi(rad) = 360^\circ$ .

**Lời giải**

**Câu 14:** Góc lượng giác  $(Ox, Ot)$  có một số đo là  $\frac{\pi}{2} + 2017\pi$ , số đo tổng quát của góc lượng giác  $(Ox, Ot)$  là

- A.  $\frac{\pi}{2} + k2\pi$ .      B.  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ .      C.  $\frac{3\pi}{2} + k2\pi$ .      D.  $\frac{3\pi}{2} + k\pi$ .

**Lời giải**

$$\frac{\pi}{2} + 2017\pi = \frac{\pi}{2} + \pi + 2016\pi = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$$

**Câu 15:** Cho góc lượng giác  $\alpha = (OA; OB) = \frac{\pi}{5}$ . Trong các góc lượng giác sau, góc nào có tia đầu và tia cuối lần lượt trùng với  $OA, OB$ .

- A.  $\frac{6\pi}{5}$       B.  $-\frac{11\pi}{5}$ .      C.  $\frac{31\pi}{5}$ .      D.  $\frac{9\pi}{5}$ .

**Lời giải**

$$\frac{31\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = 6\pi = 3.2\pi$$

**Câu 16:** Cho  $(Ou, Ov) = 25^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$  với giá trị nào của  $k$  thì  $(Ou, Ov) = -1055^\circ$ ?

- A.  $k = -1$ .      B.  $k = 2$ .      C.  $k = -3$ .      D.  $k = 4$ .

**Lời giải**

$$(Ou, Ov) = 25^\circ + k360^\circ = -1055^\circ \Rightarrow k = -3$$

**Câu 17:** Cho  $(Ou, Ov) = 12^\circ + k360^\circ$  với giá trị nào của  $k$  thì số đo  $(Ou, Ov) = \frac{59\pi}{15}$ ?

- A.  $k = -1$ .      B.  $k = 2$ .      C.  $k = -3$ .      D.  $k = 4$ .

**Lời giải**

$$(Ou, Ov) = 12^\circ + k360^\circ = \frac{\pi}{15} + k2\pi = \frac{59\pi}{15} \Rightarrow k = 2$$

**Câu 18:** Nếu số đo góc lượng giác  $(Ou, Ov) = \frac{2006\pi}{5}$  thì số đo góc hình học  $\widehat{uOv}$  bằng

- A.  $\frac{\pi}{5}$ .      B.  $\frac{4\pi}{5}$ .      C.  $\frac{6\pi}{5}$ .      D.  $\frac{9\pi}{5}$ .

Lời giải

$$(Ou, Ov) = \frac{2006\pi}{5} = \frac{6\pi}{5} + 400\pi \Rightarrow \widehat{uOv} = \frac{6\pi}{5}$$

### DẠNG 2: XÁC ĐỊNH ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

Một cung tròn có số đo  $a^\circ$  có độ dài là  $l = \frac{a\pi R}{180}$

**Câu 19:** Trên đường tròn bán kính 7 cm, lấy cung có số đo  $54^\circ$ . Độ dài  $l$  của cung tròn bằng

- A.  $\frac{21}{10}\pi$  (cm).      B.  $\frac{11}{20}\pi$  (cm).      C.  $\frac{63}{20}\pi$  (cm).      D.  $\frac{20}{11}\pi$  (cm).

Lời giải

$$\text{Ta có } l = 7 \cdot \left( \frac{54^\circ}{180^\circ} \cdot \pi \right) = \frac{21}{10}\pi \text{ (cm)}.$$

**Câu 20:** Trên đường tròn đường kính 8cm, tính độ dài cung tròn có số đo bằng 1,5 rad.

- A. 12cm.      B. 4cm.      C. 6cm.      D. 15cm.

Lời giải

$$\text{Tính được: } l = \alpha \cdot R = 1,5 \cdot \frac{8}{2} = 6 \text{ (cm)}.$$

**Câu 21:** Một đường tròn có bán kính 15(cm). Tìm độ dài cung tròn có góc ở tâm bằng  $30^\circ$  là:

- A.  $\frac{5\pi}{2}$ .      B.  $\frac{5\pi}{3}$ .      C.  $\frac{2\pi}{5}$ .      D.  $\frac{\pi}{3}$ .

Lời giải

$$l = \frac{\pi a \cdot R}{180} = \frac{\pi \cdot 30 \cdot 15}{180} = \frac{5\pi}{2}$$

**Câu 22:** Một đường tròn có bán kính 10, độ dài cung tròn  $40^\circ$  trên đường tròn gần bằng

- A. 7.      B. 9.      C. 11.      D. 13.

Lời giải

$$l = \frac{\pi a \cdot R}{180} = \frac{\pi \cdot 40 \cdot 10}{180} = \frac{20\pi}{9} \approx 7$$

**Câu 23:** Một đường tròn có bán kính  $R = \frac{10}{\pi}$ , độ dài cung tròn  $\frac{\pi}{2}$  là

- A. 5.      B.  $5\pi$ .      C.  $\frac{5}{\pi}$ .      D.  $\frac{\pi}{5}$ .

Lời giải

$$l = \alpha.R = \frac{10}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 5$$

**Câu 24:** Chọn khẳng định sai

- A.** Cung tròn có bán kính  $R = 5cm$  và có số đo  $1,5(rad)$  thì có độ dài là  $7,5 cm$ .
- B.** Cung tròn có bán kính  $R = 8cm$  và có độ dài  $8cm$  thì có số đo độ là  $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ .
- C.** Độ dài cung tròn phụ thuộc vào bán kính của nó.
- D.** Góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  có số đo dương thì mọi góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  có số đo âm.

**Lời giải**

Câu góc lượng giác  $(Ou, Ov) = 330^\circ; (Ov, Ou) = 30^\circ$

**Câu 25:** Cho đường tròn có bán kính  $6 cm$ . Tìm số đo của cung có độ dài là  $3cm$ :

- A.**  $0,5$ . **B.**  $\frac{0,5}{\pi}$ . **C.**  $0,5\pi$ . **D.**  $1$ .

**Lời giải**

$$l = \alpha.R \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{3}{6} = 0,5$$

**Câu 26:** Cung tròn bán kính bằng  $8,43(cm)$  có số đo  $3,85(rad)$  có độ dài là

- A.**  $32,46cm$  **B.**  $32,45cm$  **C.**  $32,47cm$  **D.**  $32,5cm$ .

**Lời giải**

$$l = \alpha.R = 3,85.8,43 \approx 32,46$$

**Câu 27:** Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài  $10,57cm$ . Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài là

- A.**  $2,77cm$ . **B.**  $2,78cm$ . **C.**  $2,76cm$ . **D.**  $2,8cm$ .

**Lời giải**

Trong 30 phút mũi kim giờ quét được một góc là  $\frac{2\pi.0,5}{12} = \frac{\pi}{12}$

$$l = \alpha.R = \frac{\pi}{12}.10,57 \approx 2,77$$

**Câu 28:** Bánh xe đạp có bán kính  $50cm$ . Một người quay bánh xe 5 vòng quanh trục thì quãng đường đi được là

- A.**  $250\pi(cm)$ . **B.**  $1000\pi(cm)$ . **C.**  $500\pi(cm)$ . **D.**  $200\pi(cm)$ .

**Lời giải**

Ta có  $r = 50cm$  suy ra  $l = 50.2\pi.5 = 500\pi(cm)$ .

**Câu 29:** Một đu quay ở công viên có bán kính bằng  $10m$ . Tốc độ của đu quay là 3 vòng/phút. Hỏi mất bao lâu để đu quay quay được góc  $270^\circ$ ?

- A.**  $\frac{1}{3}$  phút. **B.**  $\frac{1}{6}$  phút. **C.**  $\frac{1}{4}$  phút. **D.**  $1,5$  phút.

**Lời giải**

Tính được:  $270^\circ = \frac{270}{180}\pi = \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4}.2\pi$

Vậy đu quay quay được góc  $270^\circ$  khi nó quay được  $\frac{3}{4}$  vòng

Ta có: Đu quay quay được 1 vòng trong  $\frac{1}{3}$  phút

Đu quay quay được  $\frac{3}{4}$  vòng trong  $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$  phút.

**Câu 30:** Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc A, cung lượng giác có số đo  $30^\circ$  có điểm đầu A, có bao nhiêu điểm cuối N?

**A.** Có duy nhất một điểm N.

**B.** Có hai điểm N.

**C.** Có 4 điểm N.

**D.** Có vô số điểm N.

**Lời giải**

**Câu 31:** Trên đường tròn lượng giác gốc A cho các cung có số đo:

I.  $\frac{\pi}{4}$  II.  $-\frac{7\pi}{4}$  III.  $\frac{13\pi}{4}$  IV.  $-\frac{71\pi}{4}$

Hỏi các cung nào có điểm cuối trùng nhau?

**A.** Chỉ I và II.

**B.** Chỉ I, II và III.

**C.** Chỉ II, III và IV.

**D.** Chỉ I, II và IV.

**Lời giải**

Ta có  $\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{7\pi}{4}\right) = 2\pi$  nên cung I và II trùng nhau.

$\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{71\pi}{4}\right) = 18\pi = 9.2\pi$  nên cung I và IV trùng nhau.

**Câu 32:** Lục giác ABCDEF nội tiếp trong đường tròn tâm O, điểm A cố định, điểm B, C có tung độ dương. Khi đó số đo lượng giác của cung  $(OA, OC)$  là

**A.**  $120^\circ$ .

**B.**  $-240^\circ$ .

**C.**  $120^\circ$  hoặc  $240^\circ$ .

**D.**  $120^\circ + k360^\circ$ .

**Lời giải**

ABCDEF là lục giác đều  $\widehat{AOC} = 120^\circ$ . Điểm B và C có tung độ dương nên lục giác ABCDEF có thứ tự đỉnh ngược chiều kim đồng hồ. Vậy số đo lượng giác cung  $(OA, OC)$  là  $120^\circ + k360^\circ$

**Câu 33:** Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là điểm A, điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo bằng  $45^\circ$ . Điểm N đối xứng với M qua trục Ox, số đo cung AN là?

**A.**  $45^\circ$ .

**B.**  $45^\circ$  hoặc  $315^\circ$ .

**C.**  $45^\circ + k360^\circ$ .

**D.**  $315^\circ + k360^\circ$ .

**Lời giải**

Điểm N đối xứng với M qua trục Ox  $\widehat{NOA} = 45^\circ$ , cung lượng giác  $(OA, ON)$  ngược chiều dương nên số đo lượng giác cung  $(OA, ON) = -45^\circ + k360^\circ = 315^\circ + k360^\circ$

**Câu 34:** Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là điểm A, điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo bằng  $60^\circ$ . Điểm N đối xứng với M qua trục Oy, số đo cung NA là?

**A.**  $120^\circ + k180^\circ$ .

**B.**  $120^\circ$  hoặc  $-240^\circ$ .

**C.**  $-240^\circ + k360^\circ$ .

**D.**  $120^\circ + k360^\circ$ .

**Lời giải**

Điểm N đối xứng với M qua trục Oy nên  $\widehat{AON} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ , cung lượng giác  $(OA, ON)$  cùng chiều dương nên số đo lượng giác cung  $(OA, ON) = 120^\circ + k360^\circ$

- Câu 35:** Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là điểm A, điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo bằng  $75^\circ$ . Điểm N đối xứng với M qua gốc tọa độ, số đo cung AN là?  
**A.**  $-105^\circ + k360^\circ$ . **B.**  $-105^\circ$  hoặc  $255^\circ$ . **C.**  $-255^\circ + k360^\circ$ . **D.**  $-105^\circ$ .

**Lời giải**

Điểm N đối xứng với M qua gốc tọa độ O nên  $\widehat{AON} = 180^\circ - 75^\circ = 115^\circ$ , cung lượng giác  $(OA, ON)$  ngược chiều dương nên số đo lượng giác cung  $(OA, ON) = -115^\circ + k360^\circ$

- Câu 36:** Cho hình vuông ABCD tâm O, đường thẳng a qua O và trung điểm AB. Xác định góc tạo bởi đường thẳng a và tia OA  
**A.**  $45^\circ + k300^\circ$ . **B.**  $15^\circ + k360^\circ$ . **C.**  $135^\circ$ . **D.**  $155^\circ$ .

**Lời giải**

Gọi I là trung điểm của AB, ta có  $\widehat{AOI} = 45^\circ$ , vậy góc tạo bởi tia OA và đường thẳng a bằng  $45^\circ$  hoặc  $135^\circ$

- Câu 37:** Một bánh xe có 72 răng, số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là  
**A.**  $50^\circ$ . **B.**  $60^\circ$ . **C.**  $120^\circ$ . **D.**  $70^\circ$ .

**Lời giải**

Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 12 răng là  $\frac{360}{72} \cdot 10 = 50^\circ$

- Câu 38:** Sau một quãng thời gian 3 giờ thì kim giây sẽ quay được một góc có số đo là:  
**A.**  $12960^\circ$ . **B.**  $32400^\circ$ . **C.**  $324000^\circ$ . **D.**  $64800^\circ$ .

**Lời giải**

Trong 1 phút kim giây quay được góc:  $360^\circ$

Trong 3 giờ kim giây quay được góc:  $360 \cdot 3 \cdot 60 = 64800^\circ$

- Câu 39:** Sau quãng thời gian 4 giờ kim giờ sẽ quay được một góc là  
**A.**  $\frac{\pi}{3}$ . **B.**  $\frac{2\pi}{3}$ . **C.**  $\frac{3\pi}{4}$ . **D.**  $\frac{\pi}{4}$ .

**Lời giải**

Sau 1 giờ kim giờ sẽ quay được một góc là  $\frac{\pi}{6}$

Sau 4 giờ kim giờ sẽ quay được một góc là  $\frac{\pi}{6} \cdot 4 = \frac{2\pi}{3}$

- Câu 40:** Trên đồng hồ tại thời điểm đang xét kim giờ OG chỉ số 3, kim phút OP chỉ số 12. Lúc đó số  $(OP; OG)$  là  
**A.**  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . **B.**  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ . **C.**  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ . **D.**  $\alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ .

**Lời giải**

Ta có  $\widehat{POG} = \frac{\pi}{2}$ ,  $(OP; OG)$  ngược chiều dương nên số đo lượng giác cung  $(OP; OG) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

**Câu 41:**

Trên đồng hồ tại thời điểm đang xét kim giây ON chỉ số 5, kim phút OP chỉ số 6. Lúc đó số  $(ON, OG)$  là

- A.**  $\alpha = \frac{\pi}{12}$ .      **B.**  $\alpha = -\frac{\pi}{12}$ .      **C.**  $\alpha = \frac{\pi}{12} + k2\pi$ .      **D.**  $\alpha = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$ .

**Lời giải**

Ta có  $\widehat{NOG} = \frac{\pi}{12}$ , cung  $(ON, OG)$  ngược chiều dương nên số đo lượng giác cung  $(ON, OG) = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$

**Câu 42:**

Trên đồng hồ tại thời điểm đang xét kim giờ OG chỉ số 3, kim phút OP chỉ số 12. Đến khi kim phút và kim giờ gặp nhau lần đầu tiên, tính số đo góc lượng giác mà kim giờ quét được

- A.**  $\alpha = \frac{\pi}{22} + k2\pi$ .      **B.**  $\alpha = -\frac{\pi}{22} + k\pi$ .      **C.**  $\alpha = \frac{\pi}{22} + k\pi$ .      **D.**  $\alpha = -\frac{\pi}{22} + k2\pi$ .

**Lời giải**

Khi kim phút chỉ số 12, kim giờ chỉ số 3 thì số  $(OG, OP)$  là  $\frac{\pi}{2} + k2\pi$

Trong 1 giờ, kim phút quét được một góc lượng giác  $-2\pi$ , kim giờ quét được góc  $-\frac{\pi}{6}$

Thời gian từ lúc 3h đến lúc hai kim trùng nhau lần đầu tiên là  $\frac{\pi}{2} : \left| -2\pi - \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right| = \frac{3}{11}$

Kim giờ đã quét được một góc có số đo là  $-\frac{\pi}{6} \cdot \frac{3}{11} = -\frac{\pi}{22}$

Vậy số đo góc lượng giác mà kim phút quét được là  $\frac{-\pi}{22} + k2\pi$

**Câu 43:**

Trên đường tròn định hướng cho ba điểm A, M, N sao cho số đo cung  $AM = \frac{\pi}{3}$ , số đo cung

$AN = \pi$ . Lấy điểm P trên đường tròn sao cho tam giác MNP cân tại P, tìm số đo cung  $AP$

- A.**  $\frac{2\pi}{3} + k\pi$ .      **B.**  $\frac{2\pi}{3} + k2\pi$ .      **C.**  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ .      **D.**  $\frac{\pi}{2} + k2\pi$ .

**Lời giải**

Xét trường hợp số  $\widehat{MN} = \frac{2\pi}{3}$

Tam giác MNP cân tại P  $\Leftrightarrow PM = PN \Leftrightarrow sđ\widehat{PN} = sđ\widehat{PM} = sđ\frac{\widehat{MN}}{2} = \frac{\pi}{3}$

Áp dụng hệ thức Sa – lo:

$$sđ(OA, OP) = sđ(OA, OM) + sđ(OM, OP) = sđ\widehat{AM} + sđ\widehat{MP} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Số đo lượng giác } (OA, OP) = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

Lập lượng tương tự với trường hợp xét số đo lượng giác  $\widehat{MN} = -\frac{4\pi}{3}$  ta được số đo lượng giác

$$(OA, OP) = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$\text{Vậy Số đo lượng giác } (OA, OP) = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

**Câu 44:** Trên đường tròn định hướng cho ba điểm A, M, N sao cho số đo cung  $AM = \frac{\pi}{3}$ , số đo cung

$AN = \frac{3\pi}{4}$ . Lấy điểm P trên đường tròn sao cho tam giác MNP cân tại N, tìm số đo cung AP

**A.**  $\frac{7\pi}{6} + k\pi$ .

**B.**  $\frac{7\pi}{6} + k2\pi$ .

**C.**  $\frac{\pi}{3} + k\pi$ .

**D.**  $\frac{\pi}{3} + k2\pi$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có số đo } \widehat{MN} = \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{Tam giác MNP cân tại N} \Leftrightarrow NM = NP \Leftrightarrow \widehat{NM} = \widehat{NP} = \frac{5\pi}{12}$$

Áp dụng hệ thức Sa –

$$\widehat{(OA, OP)} = \widehat{(OA, ON)} + \widehat{(ON, OP)} = \widehat{AN} + \widehat{NP} = \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{12} = \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{Số đo lượng giác } (OA, OP) = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$$

**Câu 45:** Trên đường tròn định hướng cho ba điểm A, M, N sao cho  $\widehat{sđ AM} = \frac{\pi}{5}$ , số đo cung  $\widehat{sđ AN} = \frac{k\pi}{80}$

, tìm k để M trùng với N

**A.**  $15(1+20m), m \in \mathbb{Z}$ . **B.**  $15(1+10m), m \in \mathbb{Z}$ . **C.**  $16(1+10m), m \in \mathbb{Z}$ . **D.**  $16(1+20m), m \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

$$\text{Để M trùng với N thì tồn tại một số nguyên } l \text{ sao cho } \widehat{sđ AN} - \widehat{sđ AM} = l2\pi$$

$$\frac{k\pi}{80} - \frac{\pi}{5} = l2\pi \Leftrightarrow k - 16 = 160l \Leftrightarrow k = 16(1+10m), m \in \mathbb{Z}$$

**Câu 46:** Trên đường tròn định hướng cho ba điểm A, M, N sao cho  $\widehat{sđ AM} = \frac{\pi}{6}$ ,  $\widehat{sđ AN} = \frac{k\pi}{798}$ , tìm k để

M đối xứng với N qua gốc tọa độ

**A.**  $133(7+12m), m \in \mathbb{Z}$ . **B.**  $133(5+12m), m \in \mathbb{Z}$ .

**C.**  $133(7+16m), m \in \mathbb{Z}$ . **D.**  $133(5+12m), m \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

$$\text{Để M đối xứng với N thì tồn tại một số nguyên } m \text{ sao cho } \widehat{sđ AN} - \widehat{sđ AM} = (2m+1)\pi$$

$$\frac{k\pi}{798} - \frac{\pi}{6} = (2m+1)\pi \Leftrightarrow k - 133 = 1596m + 798 \Leftrightarrow k = 133(7+12m), m \in \mathbb{Z}$$

**Câu 47:** Trên đường tròn định hướng, điểm gốc **A.** Có bao nhiêu điểm  $M$  thỏa mãn số đo cung

$$AM = \frac{k2\pi}{5}$$

**A. 5.**

**B. 4.**

**C. 6.**

**D. 3.**

**Lời giải**

Trên đường tròn định hướng ta có  $\widehat{AOM} = \frac{k2\pi}{5}$ , mà

$0 < \widehat{AOM} \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{k2\pi}{5} \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 < k \leq 5 \Rightarrow$  có 5 giá trị của  $k$ . Vậy có 5 vị trí của  $M$  trên đường tròn

**Câu 48:** Trên đường tròn định hướng, điểm gốc **A** Có bao nhiêu điểm  $M$  thỏa mãn số đo cung

$$AM = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

**A. 3.**

**B. 4.**

**C. 5.**

**D. 6.**

**Lời giải**

Trên đường tròn định hướng ta có  $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ , mà

$0 < \widehat{AOM} \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k \leq \frac{3}{2} \Rightarrow$  có 4 giá trị của  $k$ . Vậy có 4 vị trí của  $M$  trên đường tròn

**Câu 49:** Trên đường tròn định hướng góc  $A$  có bao nhiêu điểm  $M$  thỏa mãn số  $\widehat{AM} = 30^\circ + k45^\circ, k \in \mathbb{Z}$  ?

**A. 6.**

**B. 4.**

**C. 8.**

**D. 10.**

**Lời giải**

Trên đường tròn định hướng ta có  $\widehat{AOM} = 30^\circ + k45^\circ, k \in \mathbb{Z}$ , mà

$0 < \widehat{AOM} \leq 360^\circ \Leftrightarrow 0 < 30^\circ + k45^\circ \leq 360^\circ \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < k \leq \frac{22}{3} \Rightarrow$  có 8 giá trị của  $k$ . Vậy có 8 vị trí của  $M$  trên đường tròn

**Câu 50:** Cho hai góc lượng giác có số  $\text{sđ}(Ox, Ou) = 45^\circ + m360^\circ, m \in \mathbb{Z}$  và số  $\text{sđ}(Ox, Ov) = -135^\circ + n360^\circ, n \in \mathbb{Z}$ . Ta có hai tia  $Ou$  và  $Ov$

**A.** Tạo với nhau góc  $45^\circ$ .

**B.** Trùng nhau.

**C.** Đối nhau.

**D.** Vuông góc.

**Lời giải**

Ta có  $\text{sđ}(Ox, Ou) - \text{sđ}(Ox, Ov) = 45^\circ - (-135^\circ) = 180^\circ$

**Câu 51:** Cho hai góc lượng giác có số  $\text{sđ}(Ox, Ou) = \frac{\pi}{4} + m2\pi, m \in \mathbb{Z}$  và số  $\text{sđ}(Ox, Ov) = -\frac{\pi}{4} + n2\pi, n \in \mathbb{Z}$ . Ta có hai tia  $Ou$  và  $Ov$

**A.** Tạo với nhau góc  $45^\circ$ .

**B.** Trùng nhau.

**C.** Đối nhau.

**D.** Vuông góc.

**Lời giải**

Ta có  $\text{sđ}(Ox, Ou) - \text{sđ}(Ox, Ov) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

**Câu 52:** Cho hai góc lượng giác có số đo  $(Ox, Ou) = 45^\circ + m360^\circ, m \in \mathbb{Z}$  và số đo  $(Ox, Ov) = -315^\circ + n360^\circ, n \in \mathbb{Z}$ . Ta có hai tia  $Ou$  và  $Ov$

- A. Tạo với nhau góc  $45^\circ$ .  
 B. Trùng nhau.  
 C. Đối nhau.  
 D. Vuông góc.

**Lời giải**

Ta có  $(Ox, Ou) - (Ox, Ov) = 45^\circ - (-315^\circ) = 360^\circ$

**Câu 53:** Cho hai góc lượng giác có số đo  $(Ox, Ou) = -\frac{5\pi}{2} + m2\pi, m \in \mathbb{Z}$  và số đo  $(Ox, Ov) = -\frac{\pi}{2} + n2\pi, n \in \mathbb{Z}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $Ou$  và  $Ov$  trùng nhau.  
 B.  $Ou$  và  $Ov$  đối nhau.  
 C.  $Ou$  và  $Ov$  vuông góc.  
 D. Tạo với nhau một góc  $\frac{\pi}{4}$ .

**Lời giải**

Ta có  $(Ox, Ou) - (Ox, Ov) = -\frac{5\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi$

**Câu 54:** Biết góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  có số đo là  $-\frac{137}{5}\pi$  thì góc  $(Ou, Ov)$  có số đo dương nhỏ nhất là:

- A.  $0,6\pi$ .  
 B.  $27,4\pi$ .  
 C.  $1,4\pi$ .  
 D.  $0,4\pi$ .

**Lời giải**

Ta có  $(Ou, Ov) = -\frac{137\pi}{5} = -\frac{137\pi}{5} + 28\pi = 0,6\pi$

**Câu 55:** Có bao nhiêu điểm  $M$  trên đường tròn định hướng gốc  $A$  thỏa mãn số đo  $\widehat{AM} = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ?

- A. 6.  
 B. 4.  
 C. 3.  
 D. 12.

**Lời giải**

Trên đường tròn định hướng ta có  $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}$ , mà

$0 < \widehat{AOM} \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3} \leq 2\pi \Leftrightarrow -1 < k \leq 5 \Rightarrow$  có 6 giá trị của  $k$ . Vậy có 6 vị trí của  $M$  trên đường tròn

**Câu 56:** Hai góc lượng giác  $\frac{\pi}{3}$  và  $\frac{m\pi}{12}$  có cùng tia đầu và tia cuối khi  $m$  có giá trị là

- A.  $m = 4 + 24k$ .  
 B.  $m = 4 + 14k$ .  
 C.  $m = 4 + 20k$ .  
 D.  $m = 4 + 22k$ .

**Lời giải**

Để hai góc lượng giác trùng nhau thì tồn tại một số nguyên  $k$  sao cho  $\frac{m\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow m - 4 = 24 \Leftrightarrow k = 4 + 24k$

**Câu 57:** Cho lục giác đều  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ,  $A_1$  là điểm gốc, thứ tự các điểm sắp xếp ngược chiều kim đồng hồ. Số đo cung  $A_2A_4$  là

- A.  $240^\circ + k360^\circ$ .  
 B.  $-240^\circ + k360^\circ$ .  
 C.  $240^\circ + k180^\circ$ .  
 D.  $-240^\circ + k180^\circ$ .

**Lời giải**

Ta có  $\widehat{A_2OA_4} = 240^\circ$ ,  $(OA_2, OA_4)$  ngược chiều kim đồng hồ nên  $sđ \widehat{A_2A_4} = 240^\circ + k360^\circ$

**Câu 58:** Cho góc lượng giác  $(Ou, Ov) = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{12}$ , tìm  $k$  để  $Ou$  vuông góc với  $Ov$

**A.**  $k = 3 + 12l$ .

**B.**  $k = 4 + 12l$ .

**C.**  $k = 3 + 6l$ .

**D.**  $k = 4 + 6l$

**Lời giải**

Để  $Ou$  vuông góc với  $Ov$  thì tồn tại một số nguyên  $l$  sao cho  $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + l\pi \Leftrightarrow k = 3 + 12l$

**DẠNG 1: XÉT DẤU CỦA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC**

**Câu 59:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

**A.**  $\sin \alpha < 0$ .

**B.**  $\cos \alpha \geq 0$ .

**C.**  $\tan \alpha < 0$ .

**D.**  $\cot \alpha > 0$ .

**Lời giải**

Khẳng định đúng là  $\tan \alpha < 0$ .

**Câu 60:** Cho  $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$ . Chọn mệnh đề đúng.

**A.**  $\tan \alpha > 0$ .

**B.**  $\cot \alpha < 0$ .

**C.**  $\sin \alpha < 0$ .

**D.**  $\cos \alpha < 0$ .

**Lời giải**

Ta có  $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$  nên  $\tan \alpha > 0$ .

**Câu 61:** Cho  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , tìm phát biểu **đúng** trong các phát biểu sau:

**A.**  $\sin x > 0$ .

**B.**  $\cos x > 0$ .

**C.**  $\tan x > 0$ .

**D.**  $\cot x < 0$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có : } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \\ \tan x > 0 \\ \cot x > 0 \end{cases}$$

**Câu 62:** Cho góc  $\alpha$  thỏa  $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$ . Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

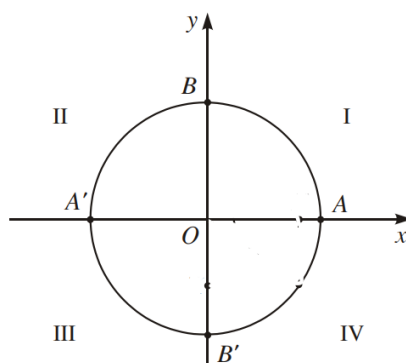
**A.**  $\cos \alpha > 0$ .

**B.**  $\cot \alpha > 0$ .

**C.**  $\sin \alpha > 0$ .

**D.**  $\tan \alpha > 0$ .

**Lời giải**



Do  $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$  nên điểm  $M$  biểu diễn cung  $AM$  có số  $\alpha$  thuộc góc phần tư số II. Do đó

$\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0, \tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$ .

**Câu 63:** Cho  $\frac{2021\pi}{4} < x < \frac{2023\pi}{4}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

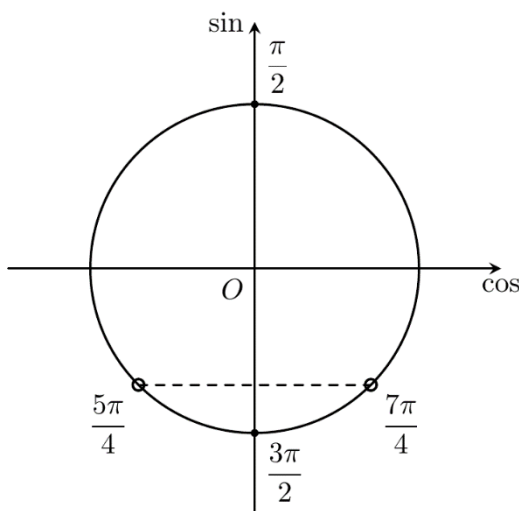
**A.**  $\sin x > 0, \cos 2x > 0$ . **B.**  $\sin x < 0, \cos 2x > 0$ . **C.**  $\sin x > 0, \cos 2x < 0$ . **D.**  $\sin x < 0, \cos 2x < 0$ .

**Lời giải**

Ta có  $\frac{2021\pi}{4} < x < \frac{2023\pi}{4} \Leftrightarrow 504\pi + \frac{5\pi}{4} < x < 504\pi + \frac{7\pi}{4}$  nên  $\sin x < 0$ .

Lại có  $\frac{2021\pi}{4} < x < \frac{2023\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{2021\pi}{2} < 2x < \frac{2023\pi}{2} \Leftrightarrow 1010\pi + \frac{\pi}{2} < 2x < 1010\pi + \frac{3\pi}{2}$

nên  $\cos 2x < 0$ .



**Câu 64:** Ở góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

**A.**  $\sin \alpha > 0$ .

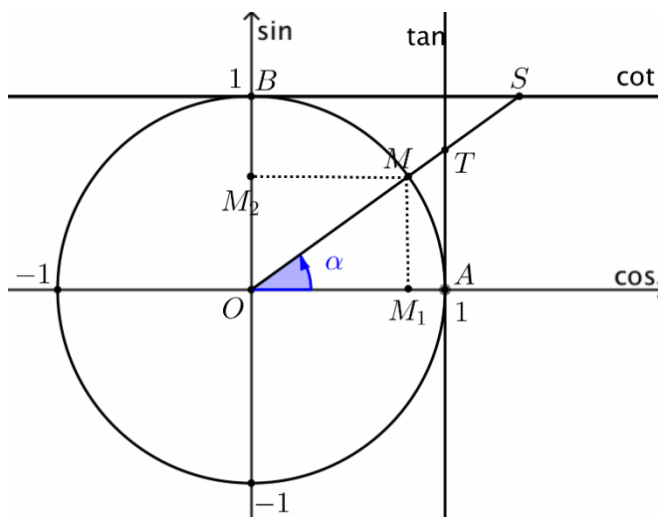
**B.**  $\cos \alpha < 0$ .

**C.**  $\tan \alpha < 0$ .

**D.**  $\cot \alpha < 0$ .

**Lời giải**

Nhìn vào đường tròn lượng giác:



-Ta thấy ở góc phần tư thứ nhất thì:  $\sin \alpha > 0; \cos \alpha > 0; \tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0$

$\Rightarrow$  chỉ có Câu A thỏa mãn.

**Câu 65:** Cho  $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$ . Kết quả đúng là:

- A.**  $\tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0$ . **B.**  $\tan \alpha < 0; \cot \alpha < 0$ . **C.**  $\tan \alpha > 0; \cot \alpha < 0$ . **D.**  $\tan \alpha < 0; \cot \alpha > 0$ .

**Lời giải**

Vì  $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$  nên  $\tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0$

**Câu 66:** Điểm cuối của góc lượng giác  $\alpha$  ở góc phần tư thứ mấy nếu  $\sin \alpha, \cos \alpha$  cùng dấu?

- A.** Thứ II. **B.** Thứ IV. **C.** Thứ II hoặc IV. **D.** Thứ I hoặc III.

**Lời giải**

**Câu 67:** Điểm cuối của góc lượng giác  $\alpha$  ở góc phần tư thứ mấy nếu  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ .

- A.** Thứ II. **B.** Thứ I hoặc II. **C.** Thứ II hoặc III. **D.** Thứ I hoặc IV.

**Lời giải**

Ta có  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \sqrt{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = |\cos \alpha| \Leftrightarrow \cos \alpha$ .

Đẳng thức  $|\cos \alpha| \Leftrightarrow \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha \geq 0 \rightarrow$  điểm cuối của góc lượng giác  $\alpha$  ở góc phần tư thứ I hoặc IV.

**Câu 68:** Cho  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Kết quả đúng là:

- A.**  $\sin \alpha > 0; \cos \alpha > 0$ . **B.**  $\sin \alpha < 0; \cos \alpha < 0$ .

- C.**  $\sin \alpha > 0; \cos \alpha < 0$ . **D.**  $\sin \alpha < 0; \cos \alpha > 0$ .

**Lời giải**

Vì  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  nên  $\tan \alpha < 0; \cot \alpha < 0$ .

**Câu 69:** Ở góc phần tư thứ tư của đường tròn lượng giác. hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A.**  $\tan \alpha > 0$ . **B.**  $\sin \alpha > 0$ . **C.**  $\cos \alpha > 0$ . **D.**  $\cot \alpha > 0$ .

**Lời giải**

- Ở góc phần tư thứ tư thì:  $\sin \alpha < 0; \cos \alpha > 0; \tan \alpha < 0; \cot \alpha < 0$ .

$\Rightarrow$  chỉ có C thỏa mãn.

**Câu 70:** Cho  $\alpha$  thuộc góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A.**  $\sin \alpha > 0$ . **B.**  $\cos \alpha < 0$ . **C.**  $\tan \alpha < 0$ . **D.**  $\cot \alpha < 0$ .

**Lời giải**

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ nhất} \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \\ \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases}$$

**Câu 71:** Điểm cuối của góc lượng giác  $\alpha$  ở góc phần tư thứ mấy nếu  $\sin \alpha, \tan \alpha$  trái dấu?

- A. Thứ I. B. Thứ II hoặc IV. C. Thứ II hoặc III. D. Thứ I hoặc IV.

Lời giải

**Câu 72:** Điểm cuối của góc lượng giác  $\alpha$  ở góc phần tư thứ mấy nếu  $\sqrt{\sin^2 \alpha} = \sin \alpha$ .

- A. Thứ III. B. Thứ I hoặc III. C. Thứ I hoặc II. D. Thứ III hoặc IV.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sqrt{\sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \sin \alpha \Leftrightarrow |\sin \alpha| = \sin \alpha.$$

Đẳng thức  $|\sin \alpha| = \sin \alpha \rightarrow \sin \alpha \geq 0 \rightarrow$  điểm cuối của góc lượng giác  $\alpha$  ở góc phần tư thứ I hoặc II.

**Câu 73:** Cho  $a = 1500^\circ$ . Xét câu nào sau đây đúng?

$$\text{I. } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ II. } \cos \alpha = \frac{1}{2}. \text{ III. } \tan \alpha = \sqrt{3}.$$

- A. Chỉ I và II. B. Chỉ II và III. C. Cả I, II và III. D. Chỉ I và III.

Lời giải

$$\text{Bấm máy ta được: } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos \alpha = \frac{1}{2}; \tan \alpha = \sqrt{3}.$$

$\Rightarrow$  Cả I, II, III đều đúng.

**Câu 74:** Cho  $3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3}$ . Xét câu nào sau đây đúng?

- A.  $\cos \alpha > 0$ . B.  $\sin \alpha < 0$ . C.  $\tan \alpha < 0$ . D.  $\cot \alpha < 0$ .

Lời giải

$3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3} \Leftrightarrow 2\pi + \pi < \alpha < 2\pi + \pi + \frac{\pi}{3}$  nên  $\alpha$  thuộc cung phần tư thứ III vì vậy đáp án đúng là B

**Câu 75:** Cho  $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\cos \alpha > 0$ . B.  $\sin \alpha > 0$ . C.  $\tan \alpha > 0$ . D.  $\cot \alpha > 0$ .

Lời giải

$$\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < \alpha < 2\pi \text{ nên } \alpha \text{ thuộc cung phần tư thứ IV vì vậy đáp án đúng là A}$$

**Câu 76:** Cho  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Xét các mệnh đề sau:

I.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > 0$ . II.  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > 0$ . III.  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > 0$ .

Mệnh đề nào **sai**?

**A.** Chỉ I.

**B.** Chỉ II.

**C.** Chỉ II và III.

**D.** Cả I, II và III.

**Lời giải**

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \text{ nên } \alpha \text{ thuộc cung phần tư thứ IV nên chỉ II, II sai.}$$

**Câu 77:** Cho  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Xét các mệnh đề sau đây:

I.  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0$ . II.  $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0$ . III.  $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0$ .

Mệnh đề nào **đúng**?

**A.** Chỉ I.

**B.** Chỉ I và II.

**C.** Chỉ II và III.

**D.** Cả I, II và III.

**Lời giải**

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < \frac{3\pi}{2} \text{ nên đáp án là D}$$

**Câu 78:** Bất đẳng thức nào dưới đây là **đúng**?

**A.**  $\sin 90^\circ < \sin 150^\circ$ .

**B.**  $\sin 90^\circ 15' < \sin 90^\circ 30'$ .

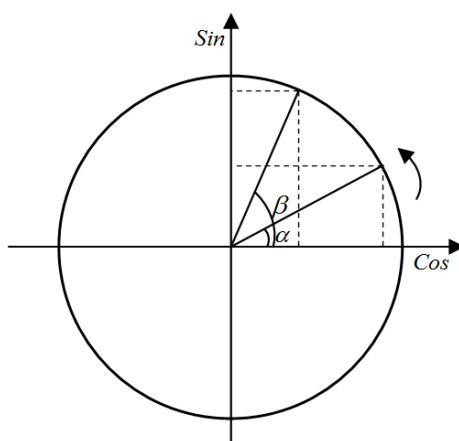
**C.**  $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$ .

**D.**  $\cos 150^\circ > \cos 120^\circ$ .

**Lời giải**

Các góc trong đề bài đều là góc tù, chú ý rằng các góc tù thì nghịch biến với cả hàm  $\sin$  và  $\cos$

Từ đó dễ nhận thấy phương án đúng là phương án C.



**Câu 79:** Cho hai góc nhọn  $\alpha$  và  $\beta$  phụ nhau. Hệ thức nào sau đây là **sai**?

**A.**  $\sin \alpha = -\cos \beta$ .

**B.**  $\cos \alpha = \sin \beta$ .

**C.**  $\cos \beta = \sin \alpha$ .

**D.**  $\cot \alpha = \tan \beta$ .

**Lời giải**

Thường nhớ: các góc phụ nhau có các giá trị lượng giác bằng chéo nhau

Nghĩa là  $\cos \alpha = \sin \beta$ ;  $\cot \alpha = \tan \beta$  và ngược lại.

**Câu 80:** Cho  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\sin(\alpha - \pi) \geq 0$ .      B.  $\sin(\alpha - \pi) \leq 0$ .      C.  $\sin(\alpha - \pi) > 0$ .      **D.  $\sin(\alpha - \pi) < 0$ .**

**Lời giải**

Ta có  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow -\pi < \alpha - \pi < -\frac{\pi}{2} \rightarrow$  điểm cuối cùng  $\alpha - \pi$  thuộc góc phần tư thứ III  $\rightarrow \sin(\alpha - \pi) < 0$ .

**Câu 81:** Cho  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0$ .      B.  $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \geq 0$ .      C.  $\tan(\alpha + \pi) < 0$ .      **D.  $\tan(\alpha + \pi) > 0$ .**

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{2} < \pi \rightarrow \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0 \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi < \alpha + \pi < \frac{3\pi}{2} \rightarrow \tan(\alpha + \pi) > 0 \end{cases}.$$

**Câu 82:** Cho  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Giá trị lượng giác nào sau đây luôn dương?

- A.  $\sin(\pi + \alpha)$ .      **B.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ .**      C.  $\cos(-\alpha)$ .      D.  $\tan(\pi + \alpha)$ .

**Lời giải**

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha; \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \\ \tan \alpha < 0 \end{cases}$$

**Câu 83:** Cho  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$ .      **B.  $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0$ .**      C.  $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \leq 0$ .      D.  $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \geq 0$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow 0 < \frac{3\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0 \end{cases} \rightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0.$$

**Câu 84:** Cho  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Xác định dấu của biểu thức  $M = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$ .

- A.  $M \geq 0$ .      **B.  $M > 0$ .**      C.  $M \leq 0$ .      D.  $M < 0$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow 0 < -\frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0 \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow 0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \tan(\pi - \alpha) > 0 \end{cases} \rightarrow M > 0.$$

**Câu 85:** Cho  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Xác định dấu của biểu thức  $M = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cot(\pi + \alpha)$ .

A.  $M \geq 0$ .

B.  $M > 0$ .

C.  $M \leq 0$ .

**D.  $M < 0$ .**

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow -\frac{3\pi}{2} < -\alpha < -\pi \rightarrow -\pi < \frac{\pi}{2} - \alpha < -\frac{\pi}{2} \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) < 0 \\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi < \pi + \alpha < \frac{5\pi}{2} \rightarrow \cot(\pi + \alpha) > 0 \end{cases} \rightarrow M < 0.$$

**DẠNG 2: TÍNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG**

**Câu 86:** Cho  $\cos \alpha = \frac{-1}{6}; \left(-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}\right)$ . Tính  $\sin \alpha$ .

**A.  $\sin \alpha = \frac{-\sqrt{35}}{6}$ .**

B.  $\sin \alpha = \frac{35}{36}$ .

C.  $\sin \alpha = \frac{5}{6}$ .

D.  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } -\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha < 0. \text{ Nên } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{-1}{6}\right)^2} = -\frac{\sqrt{35}}{6}.$$

**Câu 87:** Tính  $\sin \alpha$ , biết  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$  và  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ .

A.  $\frac{1}{3}$ .

B.  $-\frac{1}{3}$ .

C.  $\frac{2}{3}$ .

**D.  $-\frac{2}{3}$ .**

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{2}{3}.$$

$$\text{Do } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \text{ nên } \sin \alpha < 0. \text{ Vậy } \sin \alpha = -\frac{2}{3}.$$

**Câu 88:** Cho  $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(-\frac{\pi}{2} < x < 0\right)$  thì  $\sin x$  có giá trị bằng

A.  $\frac{3}{\sqrt{5}}$ .

B.  $-\frac{3}{\sqrt{5}}$ .

**C.  $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ .**

D.  $\frac{1}{\sqrt{5}}$

**Lời giải**

$$\text{Vì } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow \sin x < 0$$

$$\text{Ta có } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

$$\text{Vậy } \sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

**Câu 89:** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$  biết  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$ ;  $\tan \alpha$

**A.**  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ ;  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$ .

**B.**  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ ;  $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$ .

**C.**  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ;  $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$ .

**D.**  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ;  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{4} \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{15}{16} \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}; \text{ với } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \text{ nên } \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

$$\text{Và } \sin \alpha = \frac{1}{4} \text{ nên } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

**Câu 90:** Cho  $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$  ( $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ), khi đó  $\tan \alpha$  bằng:

**A.**  $\frac{\sqrt{21}}{5}$ .

**B.**  $-\frac{\sqrt{21}}{2}$ .

**C.**  $-\frac{\sqrt{21}}{5}$ .

**D.**  $\frac{\sqrt{21}}{3}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}.$$

$$\text{Vậy, } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{21}}{2}.$$

**Câu 91:** Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Giá trị của  $\cos \alpha$  là:

**A.**  $\frac{4}{5}$ .

**B.**  $-\frac{4}{5}$ .

**C.**  $\pm \frac{4}{5}$ .

**D.**  $\frac{16}{25}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}.$$

Vì  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$ .

**Câu 92:** Cho  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$  và  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Khi đó giá trị của  $\cos \alpha$  và  $\tan \alpha$  lần lượt là

**A.**  $-\frac{4}{5}; \frac{3}{4}$ .

**B.**  $-\frac{4}{5}; -\frac{3}{4}$ .

**C.**  $\frac{4}{5}; -\frac{3}{4}$ .

**D.**  $\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}$ .

**Lời giải**

Áp dụng hệ thức  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  ta có:  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$ .

Do  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}.$$

Vậy  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}; \tan \alpha = \frac{3}{4}$ .

**Câu 93:** Cho  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$  với  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Tính giá trị của biểu thức  $M = 10\sin \alpha + 5\cos \alpha$ .

**A.** -10.

**B.** 2.

**C.** 1.

**D.**  $\frac{1}{4}$ .

**Lời giải**

$$\cos \alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$$

Vì  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  nên  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ .

$$M = 10\sin \alpha + 5\cos \alpha = 10 \cdot \frac{3}{5} + 5 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = 2.$$

**Câu 94:** Cho  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$  và  $\frac{7\pi}{2} < \alpha < 4\pi$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.**  $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

**B.**  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

**C.**  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ .

**D.**  $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ .

**Lời giải**

$$\cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Vì  $\frac{7\pi}{2} < \alpha < 4\pi$  nên  $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

**Câu 95:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$  và  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ . Giá trị của biểu thức  $P = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}$  bằng

A.  $\frac{4+\sqrt{3}}{2}$ .

B.  $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$ .

C.  $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ .

D.  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ .

Lời giải

Cách 1: Ta có:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

Với  $\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vì  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$  nên  $\sin \alpha < 0 \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Vậy:  $P = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{4-\sqrt{3}}{2}$ .

Cách 2: Theo giả thiết:  $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{3}$ .

Vậy  $P = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{4-\sqrt{3}}{2}$ .

Câu 96: Nếu  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$  thì  $\sin^2 \alpha$  bằng

A.  $\frac{16}{25}$ .

B.  $\frac{9}{25}$ .

C.  $\frac{25}{16}$ .

D.  $\frac{25}{9}$ .

Lời giải

Ta có  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$ .

Câu 97: Cho  $\tan x = 3$ . Tính  $P = \frac{2 \sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ .

A.  $P = \frac{3}{2}$ .

B.  $P = \frac{5}{4}$ .

C.  $P = 3$ .

D.  $P = \frac{2}{5}$ .

Lời giải

Ta có  $\tan x = 3 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 3 \Rightarrow \sin x = 3 \cos x$ . Khi đó  $P = \frac{2 \cdot 3 \cos x - \cos x}{3 \cos x + \cos x} = \frac{5 \cos x}{4 \cos x} = \frac{5}{4}$ .

Câu 98: Cho  $\sin a = \frac{1}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{\cot a - \tan a}{\tan a + 2 \cot a}$  bằng

A.  $\frac{1}{9}$ .

B.  $\frac{7}{9}$ .

C.  $\frac{17}{81}$ .

D.  $\frac{7}{17}$ .

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{\cot a - \tan a}{\tan a + 2 \cot a} = \frac{\frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\sin a}{\cos a}}{\frac{\sin a}{\cos a} + 2 \frac{\cos a}{\sin a}} = \frac{\frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin a \cos a}}{\frac{\sin^2 a + 2 \cos^2 a}{\sin a \cos a}} \\ &= \frac{(1 - \sin^2 a) - \sin^2 a}{\sin^2 a + 2(1 - \sin^2 a)} = \frac{1 - 2 \sin^2 a}{2 - \sin^2 a} = \frac{7}{17} \end{aligned}$$

**Câu 99:** Cho  $\tan x = -4$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{2 \sin x - 5 \cos x}{3 \cos x + \sin x}$  là

- A.** 13.                      **B.** -13.                      **C.**  $\frac{13}{11}$ .                      **D.** 5.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } A = \frac{2 \sin x - 5 \cos x}{3 \cos x + \sin x} = \frac{2 \frac{\sin x}{\cos x} - 5 \frac{\cos x}{\cos x}}{3 \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{2 \tan x - 5}{3 + \tan x} = \frac{2 \cdot (-4) - 5}{3 + (-4)} = 13.$$

**Câu 100:** Cho  $\tan \alpha = 3$ , khi đó giá trị của biểu thức  $P = \frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$  là

- A.**  $P = -\frac{5}{2}$ .                      **B.**  $P = \frac{5}{4}$ .                      **C.**  $P = 1$ .                      **D.**  $P = -3$ .

**Lời giải**

$$\text{Chia cả tử và mẫu của } P \text{ cho } \cos \alpha \neq 0 \text{ ta được: } P = \frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 5 \cos \alpha} = \frac{2 \tan \alpha - 1}{3 \tan \alpha - 5} = \frac{5}{4}.$$

**Câu 101:** Cho  $\cot \alpha = -3$ . Giá trị của biểu thức  $P = \frac{3 \cos \alpha - 4 \sin \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha}$  bằng

- A.** -13.                      **B.** 13.                      **C.** -3.                      **D.** 3.

**Lời giải**

Chia cả tử và mẫu của biểu thức  $P$  cho  $\sin \alpha$ , ta có:

$$P = \frac{3 \cos \alpha - 4 \sin \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{3 \cot \alpha - 4}{2 + \cot \alpha} = \frac{3 \cdot (-3) - 4}{2 - 3} = 13.$$

**Câu 102:** Cho  $\cot \alpha = 4 \tan \alpha$  và  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ . Khi đó  $\sin \alpha$  bằng

- A.**  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ .                      **B.**  $\frac{1}{2}$ .                      **C.**  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .                      **D.**  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \cot \alpha = 4 \tan \alpha \Leftrightarrow \frac{\cot \alpha}{\tan \alpha} = 4 \Leftrightarrow \cot^2 \alpha = 4 \Leftrightarrow 1 + \cot^2 \alpha = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 5 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Vì  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$  nên  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**Câu 103:** Nếu  $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$  thì  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$  bằng bao nhiêu?

- A. 1.                      B. 4.                      **C. 2.**                      D. 3.

**Lời giải**

Ta có  $\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \Rightarrow (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 = 4 \Rightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 4$   
 $\Rightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 2$ .

**Câu 104:** Biết  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Trong các kết quả sau, kết quả nào sai?

- A.  $\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4}$ .      B.  $\sin \alpha - \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ .  
 C.  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{7}{8}$ .      **D.  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 12$ .**

**Lời giải**

•  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4}$  Suy ra, đáp án A đúng.

•  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1$ .

$\Leftrightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$ .

Suy ra,  $\sin \alpha - \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ . Suy ra, đáp án B đúng.

•  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8}$  Suy ra, C đúng.

•  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{\frac{7}{8}}{\left(-\frac{1}{4}\right)} = 14$ . Suy ra,  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 12$  sai.

**Câu 105:** Nếu  $\cot(x + \pi) - \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2(-1445^\circ) + \cos^2(1085^\circ)$  thì  $\sin x$  bằng.

- A.  $\pm \frac{1}{5}$ .                      B.  $\pm \frac{2}{5}$ .                      C.  $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ .                      **D.  $\pm \frac{2}{\sqrt{5}}$ .**

**Lời giải**

$\cot(x + \pi) - \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2(-1445^\circ) + \cos^2(1085^\circ)$ .

$$\Leftrightarrow -\cot x - \cot x = 1 \Leftrightarrow \cot x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \tan x = -2 \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 \alpha}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

**Câu 106:** Cho biết  $\sin a - \cos a = \frac{1}{2}$ . Kết quả nào sau đây **đúng**?

**A.**  $\sin a \cdot \cos a = \frac{3}{8}$ .

**B.**  $\sin a + \cos a = \frac{\sqrt{7}}{4}$ .

**C.**  $\sin^4 a + \cos^4 a = \frac{21}{32}$ .

**D.**  $\tan^2 a + \cot^2 a = \frac{14}{3}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{2} = \frac{3}{8}$ .

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{23}{32}.$$

**Câu 107:** Biết  $\tan x = \frac{1}{2}$ , giá trị của biểu thức  $M = \frac{2 \sin^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x - 4 \cos^2 x}{5 \cos^2 x - \sin^2 x}$  bằng:

**A.**  $-\frac{8}{13}$ .

**B.**  $\frac{2}{19}$ .

**C.**  $-\frac{2}{19}$ .

**D.**  $-\frac{8}{19}$ .

**Lời giải**

Cách 1:

Chia cả tử và mẫu của  $M$  cho  $\cos^2 x$  ta có:

$$M = \frac{2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3 \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} - 4}{5 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} - 4}{5 - \frac{1}{4}} = -\frac{8}{19}.$$

Cách 2: Ta có:  $\tan x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = 2 \sin x$ , thay  $\cos x = 2 \sin x$  vào  $M$ :

$$M = \frac{2 \sin^2 x + 3 \sin x \cdot 2 \sin x - 4 \cdot (2 \sin x)^2}{5 \cdot (2 \sin x)^2 - \sin^2 x} = \frac{-8 \sin^2 x}{19 \sin^2 x} = -\frac{8}{19}.$$

**Câu 108:** Nếu  $\cot 1,25 \cdot \tan(4\pi + 1,25) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(6\pi - x) = 0$  thì  $\tan x$  bằng

**A.** 1.

**B.** -1.

**C.** 0.

**D.** Giá trị khác.

**Lời giải**

$$\cot 1,25 \cdot \tan(4\pi + 1,25) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(6\pi - x) = 0.$$

$$\cot 1,25 \cdot \tan 1,25 - \cos x \cdot \cos x = 0.$$

$$1 - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0.$$

**Câu 109:** Biết  $\tan x = \frac{2b}{a-c}$ . Giá trị của biểu thức  $A = a \cos^2 x + 2b \sin x \cdot \cos x + c \sin^2 x$  bằng

A.  $a$ .

B.  $a$ .

C.  $b$ .

D.  $b$ .

**Lời giải**

$$A = a \cos^2 x + 2b \sin x \cdot \cos x + c \sin^2 x \Leftrightarrow \frac{A}{\cos^2 x} = a + 2b \tan x + c \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow A(1 + \tan^2 x) = a + 2b \tan x + c \tan^2 x \Leftrightarrow A \left( 1 + \left( \frac{2b}{a-c} \right)^2 \right) = a + 2b \frac{2b}{a-c} + c \left( \frac{2b}{a-c} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow A \frac{(a-c)^2 + (2b)^2}{(a-c)^2} = \frac{a(a-c)^2 + 4b^2(a-c) + c4b^2}{(a-c)^2}$$

**Câu 110:** Nếu biết  $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$  thì biểu thức  $\frac{\sin^3 x}{a^3} + \frac{\cos^3 x}{b^3}$  bằng:

A.  $\frac{1}{(a+b)^2}$ .

B.  $\frac{1}{a^2 + b^2}$ .

C.  $\frac{1}{(a+b)^3}$ .

D.  $\frac{1}{a^3 + b^3}$ .

**Lời giải**

Đặt

$$\sin^2 x = u, \quad (0 \leq u \leq 1) \Rightarrow \cos^2 x = 1 - u.$$

$$\text{Từ } \frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b} \text{ ta suy ra } \frac{u^2}{a} + \frac{(1-u)^2}{b} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{bu^2 + a(1-u)^2}{ab} = \frac{1}{a+b}.$$

$$\frac{(a+b)u^2 - 2au + a}{ab} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow (a+b)^2 u^2 - 2a(a+b)u + a(a+b) = ab.$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 u^2 - 2a(a+b)u + a^2 = 0 \Rightarrow [(a+b)u - a]^2 = 0 \Rightarrow u = \frac{a}{a+b}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} \sin^2 x = \frac{a}{a+b} \\ \cos^2 x = \frac{b}{a+b} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } A = \frac{\sin^3 x}{a^3} + \frac{\cos^3 x}{b^3} = \frac{\left( \frac{a}{a+b} \right)^4}{a^3} + \frac{\left( \frac{b}{a+b} \right)^4}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^2}$$

**Câu 111:** Nếu biết  $3 \sin^4 x + 2 \cos^4 x = \frac{98}{81}$  thì giá trị biểu thức  $A = 2 \sin^4 x + 3 \cos^4 x$  bằng

A.  $\frac{101}{81}$  hay  $\frac{601}{504}$ .

B.  $\frac{103}{81}$  hay  $\frac{603}{405}$ .

C.  $\frac{105}{81}$  hay  $\frac{605}{504}$ .

D.  $\frac{107}{81}$  hay  $\frac{607}{405}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{98}{81} - A \Leftrightarrow \cos 2x = A - \frac{98}{81}$$

$$5(\sin^4 x + \cos^4 x) = \frac{98}{81} + A \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{5} \left( \frac{98}{81} + A \right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x = \frac{1}{5} \left( \frac{98}{81} + A \right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left( A - \frac{98}{81} \right)^2 = \frac{2}{5} \left( A + \frac{98}{81} \right) = \frac{2}{5} \left( A - \frac{98}{81} \right) + \frac{392}{405}$$

$$\text{Đặt } A - \frac{98}{81} = t \Rightarrow t^2 - \frac{2}{5}t + \frac{13}{405} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{13}{45} \\ t = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$+) t = \frac{13}{45} \Rightarrow A = \frac{607}{405}$$

$$+) t = \frac{1}{9} \Rightarrow A = \frac{107}{81}.$$

**Câu 112:** Nếu  $\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$  thì biểu thức  $M = \frac{\sin^{10} \alpha}{a^4} + \frac{\cos^{10} \alpha}{b^4}$  bằng.

**A.**  $\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5}.$

**B.**  $\frac{1}{(a+b)^5}.$

**C.**  $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}.$

**D.**  $\frac{1}{(a+b)^4}.$

**Lời giải**

$$\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{\sin^2 \alpha}{a+b} + \frac{\cos^2 \alpha}{a+b}.$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha \left( \frac{\sin^2 \alpha}{a} - \frac{1}{a+b} \right) + \cos^2 \alpha \left( \frac{\cos^2 \alpha}{b} - \frac{1}{a+b} \right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha \frac{b \sin^2 \alpha - a \cos^2 \alpha}{a(a+b)} + \cos^2 \alpha \frac{a \cos^2 \alpha - b \sin^2 \alpha}{b(a+b)} = 0.$$

$$\Leftrightarrow b^2 \sin^4 \alpha - 2ab \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + a^2 \cos^4 \alpha = 0.$$

$$\Leftrightarrow (b \sin^2 \alpha - a \cos^2 \alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{a} = \frac{\cos^2 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}.$$

$$\text{Do đó } M = \frac{1}{(a+b)^4 \sin^2 \alpha} + \frac{1}{(a+b)^4} \cos^2 \alpha = \frac{1}{(a+b)^4}.$$

**Câu 113:** Nếu biết  $\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$  thì biểu thức  $A = \frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3}$  bằng:

**A.**  $\frac{1}{(a+b)^2}.$

**B.**  $\frac{1}{a^2 + b^2}.$

**C.**  $\frac{1}{(a+b)^3}.$

**D.**  $\frac{1}{a^3 + b^3}.$

**Lời giải**

Đặt  $\sin^2 \alpha = u$ ,  $(0 \leq u \leq 1) \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - u$ .

Từ  $\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$  ta suy ra  $\frac{u^2}{a} + \frac{(1-u)^2}{b} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{bu^2 + a(1-u)^2}{ab} = \frac{1}{a+b}$

$$\Rightarrow \frac{(a+b)u^2 - 2au + a}{ab} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow (a+b)^2 u^2 - 2a(a+b)u + a(a+b) = ab$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 u^2 - 2a(a+b)u + a^2 = 0 \Rightarrow [(a+b)u - a]^2 = 0 \Rightarrow u = \frac{a}{a+b}$$

Suy ra  $\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{a}{a+b} \\ \cos^2 \alpha = \frac{b}{a+b} \end{cases}$

Do đó  $A = \frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3} = \frac{\left(\frac{a}{a+b}\right)^4}{a^3} + \frac{\left(\frac{b}{a+b}\right)^4}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$

**Câu 114:** Nếu  $3 \cos x + 2 \sin x = 2$  và  $\sin x < 0$  thì giá trị đúng của  $\sin x$  là:

**A.**  $-\frac{5}{13}$ .

**B.**  $-\frac{7}{13}$ .

**C.**  $-\frac{9}{13}$ .

**D.**  $-\frac{12}{13}$ .

**Lời giải**

ta có:  $3 \cos x + 2 \sin x = 2 \Leftrightarrow (3 \cos x + 2 \sin x)^2 = 4$ .

$$\Leftrightarrow 9 \cos^2 x + 12 \cos x \sin x + 4 \sin^2 x = 4$$

$$\Leftrightarrow 5 \cos^2 x + 12 \cos x \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x (5 \cos x + 12 \sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 5 \cos x + 12 \sin x = 0 \end{cases}$$

Với  $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = 1$  loại vì  $\sin x < 0$ .

Với  $5 \cos x + 12 \sin x = 0$ , ta có hệ phương trình:  $\begin{cases} 5 \cos x + 12 \sin x = 0 \\ 3 \cos x + 2 \sin x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{5}{13} \\ \cos x = \frac{12}{13} \end{cases}$ .

**Câu 115:** Nếu  $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$  thì  $3 \sin x + 2 \cos x$  bằng:

**A.**  $\frac{5-\sqrt{7}}{4}$  hay  $\frac{5+\sqrt{7}}{4}$ .

**B.**  $\frac{5-\sqrt{5}}{7}$  hay  $\frac{5+\sqrt{5}}{4}$ .

**C.**  $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$  hay  $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$ .

**D.**  $\frac{3-\sqrt{2}}{5}$  hay  $\frac{3+\sqrt{2}}{5}$ .

**Lời giải**

Ta biến đổi:  $(3 \sin x + 2 \cos x) = 2(\sin x + \cos x) + \sin x = 1 + \sin x$ .

$$\text{Từ } \sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = -\frac{3}{8}$$

Khi đó  $\sin x, \cos x$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{3}{8} = 0$

$$X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{3}{8} = 0 \Leftrightarrow 8X^2 - 4X - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1+\sqrt{7}}{4} \\ X = \frac{1-\sqrt{7}}{4} \end{cases}$$

$$\text{Với } \sin x = \frac{1+\sqrt{7}}{4} \text{ suy ra } (3\sin x + 2\cos x) = 1 + \frac{1+\sqrt{7}}{4} = \frac{5+\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{Với } \sin x = \frac{1-\sqrt{7}}{4} \text{ suy ra } (3\sin x + 2\cos x) = 1 + \frac{1-\sqrt{7}}{4} = \frac{5-\sqrt{7}}{4}$$

**DẠNG 3: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT**

**Câu 116:** Tính  $L = \tan 20^\circ \tan 45^\circ \tan 70^\circ$

- A.** 0.                      **B.** 1.                      **C.** -1.                      **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\begin{aligned} L &= \tan 20^\circ \tan 45^\circ \tan 70^\circ = (\tan 20^\circ \tan 70^\circ) \tan 45^\circ \\ &= (\tan 20^\circ \cot 20^\circ) \tan 45^\circ = 1 \end{aligned}$$

**Câu 117:** Tính  $G = \cos^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{2\pi}{6} + \dots + \cos^2 \frac{5\pi}{6} + \cos^2 \pi$

- A.** 0.                      **B.** 1.                      **C.** 2.                      **D.** 3.

**Lời giải**

$$\begin{aligned} G &= \cos^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{2\pi}{6} + \dots + \cos^2 \frac{5\pi}{6} + \cos^2 \pi \\ G &= \cos^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{2\pi}{3} + \cos^2 \frac{5\pi}{6} + \cos^2 \pi \\ &= \cos^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{2\pi}{3} + \sin^2 \frac{2\pi}{3} + \cos^2 \pi \end{aligned}$$

**Câu 118:** Tính  $A = \sin 390^\circ - 2\sin 1140^\circ + 3\cos 1845^\circ$

- A.**  $\frac{1}{2}(1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ .    **B.**  $\frac{1}{2}(1-3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ .    **C.**  $\frac{1}{2}(1+2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$ .    **D.**  $\frac{1}{2}(1+2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} A &= \sin 390^\circ - 2\sin 1140^\circ + 3\cos 1845^\circ \\ &= \sin(2.180^\circ + 30^\circ) - 2\sin(6.180^\circ + 60^\circ) + 3\cos(10.180^\circ + 45^\circ) \end{aligned}$$

$$= \sin 30^\circ - 2 \sin 60^\circ + 3 \cos 45^\circ = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}).$$

**Câu 119:** Giá trị đúng của biểu thức  $\frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ}$  bằng:

- A.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .      B.  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ .      **C.  $\sqrt{3}$ .**      D.  $-\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ} &= \frac{\tan(180^\circ + 45^\circ) - \tan 9^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot(180^\circ + 81^\circ) + \tan(180^\circ + 21^\circ)} \\ &= \frac{1 - \tan 9^\circ \cdot \tan 21^\circ}{\tan 9^\circ + \tan 21^\circ} = \frac{1}{\tan(9^\circ + 21^\circ)} = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$= 1 + 0 + 1 + 1 = 3$$

**Câu 120:** Với mọi góc  $\alpha$ , biểu thức  $\cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) + \dots + \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right)$  nhận giá trị bằng

- A. 10.      **B. -10.**      C. 1.      D. 0.

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos \alpha &= -\cos\left(\alpha + \frac{5\pi}{5}\right); \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{6\pi}{5}\right); \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{7\pi}{5}\right); \\ \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{5}\right) &= -\cos\left(\alpha + \frac{8\pi}{5}\right); \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) + \dots + \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right) = 0.$$

**Câu 121:** Tính  $F = \sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{2\pi}{6} + \dots + \sin^2 \frac{5\pi}{6} + \sin^2 \pi$ .

- A. 3.**      B. 2.      C. 1.      D. 4.

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } F &= \sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{2\pi}{6} + \dots + \sin^2 \frac{5\pi}{6} + \sin^2 \pi \\ &= \sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{2\pi}{3} + \sin^2 \frac{5\pi}{6} + \sin^2 \pi \\ &= 2\left(\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3}\right) + 1 + 0 = 3. \end{aligned}$$

**Câu 122:** Đơn giản biểu thức  $D = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(13\pi + \alpha) - 3 \sin(\alpha - 5\pi)$ .

- A.  $3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha$ .      **B.  $3 \sin \alpha$ .**      C.  $-3 \sin \alpha$ .      D.  $2 \cos \alpha + 3 \sin \alpha$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } D &= \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(13\pi + \alpha) - 3\sin(\alpha - 5\pi) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi + \alpha) + 3\sin(\pi - \alpha) = \cos \alpha - \cos \alpha + 3\sin \alpha = 3\sin \alpha. \end{aligned}$$

**Câu 123:** Giả sử  $A = \tan x \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$  được rút gọn thành  $A = \tan nx$  khi đó  $n$  bằng

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \tan x \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \tan x \cdot \frac{\sqrt{3} - \tan x}{1 + \sqrt{3} \tan x} \cdot \frac{\sqrt{3} + \tan x}{1 - \sqrt{3} \tan x} = \tan x \cdot \frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3 \tan^2 x} \\ &= \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x} = \tan 3x. \end{aligned}$$

**Câu 124:** Nếu  $\sin x = 3 \cos x$  thì  $\sin x \cos x$  bằng

A.  $\frac{3}{10}$ .

B.  $\frac{2}{9}$ .

C.  $\frac{1}{4}$ .

D.  $\frac{1}{6}$ .

Lời giải

Ta có

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \sin x = 3 \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 \cos^2 x = 1 \\ \sin x = 3 \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \sin x = 3 \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \sin x = \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \sin x = \frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \sin x \cos x = \frac{3}{10}.$$

**Câu 125:** Với mọi  $\alpha$  thì  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$  bằng

A.  $-\sin \alpha$ .

B.  $-\cos \alpha$ .

C.  $\cos \alpha$ .

D.  $\sin \alpha$ .

Lời giải

$$\text{Cách 1: Ta có } \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(2\pi + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha.$$

$$\text{Cách 2: Ta có } \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \frac{3\pi}{2} \cos \alpha + \sin \alpha \cos \frac{3\pi}{2} = (-1) \cos \alpha + \sin \alpha \cdot (0) = -\cos \alpha.$$

**Câu 126:** Giá trị  $\cot \frac{89\pi}{6}$  bằng

A.  $\sqrt{3}$ .

B.  $-\sqrt{3}$ .

C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

D.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Lời giải

Ta có:  $\cot \frac{89\pi}{6} = \cot \left( 14\pi + \frac{5\pi}{6} \right) = \cot \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$ .

**Câu 127:** Đơn giản biểu thức  $A = \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right)$ , ta được:

A.  $\cos \alpha$ .

B.  $\sin \alpha$ .

C.  $-\cos \alpha$ .

D.  $-\sin \alpha$ .

Lời giải

Ta có:  $A = \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha$ .

**Câu 128:** Nếu  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{3}$  thì  $1 + \tan^2 \alpha$  bằng

A.  $\frac{9}{8}$ .

B. 4.

C.  $\frac{3}{2}$ .

D.  $\frac{8}{9}$ .

Lời giải

Ta có:  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{2}{3}$  mà  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{3}{2}$ .

**Câu 129:** Tính  $P = \cot 1^\circ \cdot \cot 2^\circ \cdot \cot 3^\circ \dots \cot 89^\circ$ .

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Ta có:

$$\cot 89^\circ = \tan 1^\circ \Rightarrow \cot 1^\circ \cot 89^\circ = \cot 1^\circ \tan 1^\circ = 1.$$

$$\cot 88^\circ = \tan 2^\circ \Rightarrow \cot 2^\circ \cot 82^\circ = \cot 2^\circ \tan 2^\circ = 1.$$

.....

$$\cot 46^\circ = \tan 44^\circ \Rightarrow \cot 44^\circ \cot 46^\circ = \cot 44^\circ \tan 44^\circ = 1.$$

Vậy  $P = \cot 1^\circ \cot 2^\circ \cot 3^\circ \dots \cot 89^\circ = \cot 45^\circ = 1$ .

**Câu 130:** Giá trị của biểu thức  $\tan 110^\circ \tan 340^\circ + \sin 160^\circ \cos 110^\circ + \sin 250^\circ \cos 340^\circ$  bằng

A. 0.

B. 1.

C. -1.

D. 2.

Lời giải

$$A = \tan 110^\circ \tan 340^\circ + \sin 160^\circ \cos 110^\circ + \sin 250^\circ \cos 340^\circ$$

$$A = \tan(90^\circ + 20^\circ) \tan(360^\circ - 20^\circ) + \sin(180^\circ - 20^\circ) \cos(90^\circ + 20^\circ) + \sin(360^\circ - 110^\circ) \cos(360^\circ - 20^\circ)$$

$$A = \cot 20^\circ \tan 20^\circ - \sin 20^\circ \sin 20^\circ - \sin 110^\circ \cos 20^\circ$$

$$A = 1 - \sin^2 20^\circ - \sin(90^\circ + 20^\circ) \cos 20^\circ$$

$$A = 1 - \sin^2 20^\circ - \cos^2 20^\circ$$

$$A = 1 - (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0.$$

**Câu 131:** Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sin(-234^\circ) - \cos 216^\circ}{\sin 144^\circ - \cos 126^\circ} \cdot \tan 36^\circ$ , ta được

**A.**  $A = 2.$

**B.**  $A = -2.$

**C.**  $A = 1.$

**D.**  $A = -1.$

**Lời giải**

**Cách 1:** Sử dụng mối quan hệ của các cung có liên quan đặc biệt

$$A = \frac{-\sin(180^\circ + 54^\circ) - \cos(180^\circ + 36^\circ) \tan 36^\circ}{\sin(180^\circ - 36^\circ) - \cos(90^\circ + 36^\circ)}$$

$$A = \frac{\sin 54^\circ + \cos 36^\circ}{\sin 36^\circ + \sin 36^\circ} \cdot \tan 36^\circ = 2 \cot 36^\circ \cdot \tan 36^\circ = 2.$$

**Cách 2:** Sử dụng máy tính cầm tay, nhập biểu thức đã cho vào máy và bấm =, được kết quả bằng 1.

**Câu 132:** Giá trị của biểu thức  $A = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cdot \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$  bằng:

**A.** 1.

**B.** 2.

**C.** -1.

**D.** 0.

**Lời giải**

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cdot \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ} \\ \Leftrightarrow A &= \frac{1}{\tan(8^\circ + 360^\circ)} + \frac{2 \sin(30^\circ + 7 \cdot 360^\circ) \cdot \cos(8^\circ + 180^\circ)}{2 \cos(-82^\circ + 2 \cdot 360^\circ) + \cos(90^\circ + 8^\circ)} \Leftrightarrow A = \frac{1}{\tan 8^\circ} + \frac{-2 \sin 30^\circ \cdot \cos 8^\circ}{2 \cos 82^\circ - \sin 8^\circ} \\ \Leftrightarrow A &= \frac{1}{\tan 8^\circ} - \frac{2 \sin 30^\circ \cdot \cos 8^\circ}{2 \cos(90^\circ - 8^\circ) - \sin 8^\circ} \Leftrightarrow A = \frac{1}{\tan 8^\circ} - \frac{2 \sin 30^\circ \cdot \cos 8^\circ}{2 \sin 8^\circ - \sin 8^\circ} \\ \Leftrightarrow A &= \cot 8^\circ - \frac{1 \cdot \cos 8^\circ}{\sin 8^\circ} = \cot 8^\circ - \cot 8^\circ = 0. \end{aligned}$$

**Câu 133:** Với mọi  $\alpha$ , biểu thức:  $A = \cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) + \dots + \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right)$  nhận giá trị bằng:

**A.** -10.

**B.** 10.

**C.** 0.

**D.** 5.

**Lời giải**

$$\begin{aligned} A &= \cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) + \dots + \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right) \\ A &= \left[ \cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right) \right] + \dots + \left[ \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{5\pi}{5}\right) \right] \\ A &= 2 \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{10}\right) \cos \frac{9\pi}{10} + 2 \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{10}\right) \cos \frac{7\pi}{10} + \dots + 2 \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{10}\right) \cos \frac{\pi}{10} \end{aligned}$$

$$A = 2 \cos \left( \alpha + \frac{9\pi}{10} \right) \left( \cos \frac{9\pi}{10} + \cos \frac{7\pi}{10} + \cos \frac{5\pi}{10} + \cos \frac{3\pi}{10} + \cos \frac{\pi}{10} \right)$$

$$A = 2 \cos \left( \alpha + \frac{9\pi}{10} \right) \left( 2 \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow A = 2 \cos \left( \alpha + \frac{9\pi}{10} \right) \cdot 0 = 0.$$

**Câu 134:** Biểu thức  $A = \frac{\sin(-328^\circ) \cdot \sin 958^\circ}{\cot 572^\circ} - \frac{\cos(-508^\circ) \cdot \cos(-1022^\circ)}{\tan(-212^\circ)}$  rút gọn bằng:

**A.** -1.

**B.** 1.

**C.** 0.

**D.** 2.

**Lời giải**

$$A = \frac{\sin(-328^\circ) \cdot \sin 958^\circ}{\cot 572^\circ} - \frac{\cos(-508^\circ) \cdot \cos(-1022^\circ)}{\tan(-212^\circ)} \Leftrightarrow A = -\frac{\sin 32^\circ \cdot \sin 58^\circ}{\cot 32^\circ} - \frac{\cos 32^\circ \cdot \cos 58^\circ}{\tan 32^\circ}$$

$$A = -\frac{\sin 32^\circ \cdot \cos 32^\circ}{\cot 32^\circ} - \frac{\cos 32^\circ \cdot \sin 32^\circ}{\tan 32^\circ} = -\sin^2 32^\circ - \cos^2 32^\circ = -1.$$

#### DẠNG 4: RÚT GỌN BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC. ĐĂNG THỨC LƯỢNG GIÁC

**Câu 135:** Biểu thức  $D = \cos^2 x \cot^2 x + 3 \cos^2 x - \cot^2 x + 2 \sin^2 x$  không phụ thuộc  $x$  và bằng:

**A.** 2.

**B.** -2.

**C.** 3.

**D.** -3.

**Lời giải**

$$\text{Ta biến đổi: } D = \cos^2 x \cot^2 x + 3 \cos^2 x - \cot^2 x + 2 \sin^2 x$$

$$= \cot^2 x (\cos^2 x - 1) + 2 (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = -\cos^2 x + 2 + \cos^2 x = 2.$$

**Câu 136:** Đơn giản biểu thức  $D = \sin \left( \frac{5\pi}{2} - a \right) + \cos(13\pi + a) - 3 \sin(a - 5\pi)$

**A.**  $2 \cos a + 3 \sin a$ .

**B.**  $3 \sin a - 2 \cos a$ .

**C.**  $-3 \sin a$ .

**D.**  $4 \cos a - \sin a$ .

**Lời giải**

$$D = \sin \left( 2\pi + \frac{\pi}{2} - a \right) + \cos(12\pi + \pi + a) - 3 \sin(a + \pi - 6\pi)$$

$$D = \sin \left( \frac{\pi}{2} - a \right) + \cos(\pi + a) - 3 \sin(a + \pi)$$

$$D = \cos a - \sin a + 3 \cos a$$

$$D = 4 \cos a - \sin a$$

**Câu 137:** Đơn giản biểu thức  $C = \cos \left( \frac{3\pi}{2} - a \right) - \sin \left( \frac{3\pi}{2} - a \right) + \cos \left( a - \frac{7\pi}{2} \right) - \sin \left( a - \frac{7\pi}{2} \right)$

**A.**  $2 \sin a$ .

**B.**  $-2 \sin a$ .

**C.**  $2 \cos a$ .

**D.**  $-2 \cos a$ .

**Lời giải**

$$C = \cos \left( 2\pi - \frac{\pi}{2} - a \right) - \sin \left( 2\pi - \frac{\pi}{2} - a \right) + \cos \left( a - 4\pi + \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left( a - 4\pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$C = \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2} - a\right) + \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C = -\sin a + \cos a - \sin a - \cos a$$

$$C = -2\sin a$$

**Câu 138:** Biểu thức  $B = \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \cot^2 x \cot^2 y$  không phụ thuộc vào  $x, y$  và bằng

A. 2.

B. -2.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

$$B = \frac{\cos^2 x - \sin^2 y - \cos^2 x \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} = \frac{\cos^2 x (1 - \cos^2 y) - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y}.$$

$$B = \frac{\cos^2 x \sin^2 y - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} = \frac{\sin^2 y (\cos^2 x - 1)}{\sin^2 x \sin^2 y} = \frac{-\sin^2 x \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} = -1.$$

**Câu 139:** Rút gọn biểu thức  $A = \frac{2\cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$ , ta được kết quả

A.  $A = \sin x + \cos x$ .

B.  $A = \cos x - \sin x$ .

C.  $A = \cos 2x - \sin 2x$ .

D.  $A = \cos 2x + \sin 2x$ .

Lời giải

$$A = \frac{2\cos^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x.$$

**Câu 140:** Biểu thức rút gọn của  $A = \frac{\tan^2 a - \sin^2 a}{\cot^2 a - \cos^2 a}$  bằng:

A.  $\tan^6 a$ .

B.  $\cos^6 a$ .

C.  $\tan^4 a$ .

D.  $\sin^6 a$ .

Lời giải

$$A = \frac{\tan^2 a - \sin^2 a}{\cot^2 a - \cos^2 a} \Leftrightarrow A = \frac{\sin^2 a \left( \frac{1}{\cos^2 a} - 1 \right)}{\cos^2 \left( \frac{1}{\sin^2 a} - 1 \right)} = \frac{\tan^2 a \cdot \tan^2 a}{\cot^2 a} = \tan^6 a.$$

**Câu 141:** Hệ thức nào sai trong bốn hệ thức sau:

A.  $\frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x \cdot \tan y$ .

B.  $\left( \sqrt{\frac{1+\sin a}{1-\sin a}} - \sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}} \right)^2 = 4 \tan^2 a$ .

C.  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1 + \cot^2 \alpha}{1 - \cot^2 \alpha}$ .

D.  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha + 1}$ .

Lời giải

A đúng vì  $VT = \frac{\tan x + \tan y}{\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y}} = \tan x \cdot \tan y = VP$

B đúng vì

$$VT = \frac{1 + \sin a}{1 - \sin a} + \frac{1 - \sin a}{1 + \sin a} - 2 = \frac{(1 + \sin a)^2 + (1 - \sin a)^2}{1 - \sin^2 a} - 2 = \frac{2 + 2\sin^2 a}{\cos^2 a} - 2 = 4 \tan^2 a = VP$$

C đúng vì  $VT = \frac{-\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{1 + \cot^2 \alpha}{1 - \cot^2 \alpha} = VP.$

**Câu 142:** Biết  $\tan x = 3$  và  $M = \frac{2 \sin^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x + 4 \cos^2 x}{5 \tan^2 x + 6 \cot^2 x}$ . Giá trị của  $M$  bằng.

A.  $M = \frac{31}{47}.$

B.  $M = \frac{93}{137}.$

C.  $M = \frac{93}{1370}.$

D.  $M = \frac{31}{51}.$

**Lời giải**

Ta có:  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \tan x \cdot \cos x$ ;  $\cos^2 x = \frac{1}{\tan^2 x + 1}$  và  $\cot x = \frac{1}{\tan x}.$

Suy ra:  $M = \frac{(2 \tan^2 x + 3 \tan x + 4) \cos^2 x}{5 \tan^2 x + \frac{6}{\tan^2 x}} = \frac{93}{1370}.$

**Câu 143:** Giả sử  $3 \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$  thì  $\sin^4 x + 3 \cos^4 x$  có giá trị bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4

**Lời giải**

Ta có  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Vậy  $3 \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 \sin^4 x - (1 - \sin^2 x)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy  $\sin^4 x + 3 \cos^4 x = \sin^4 x + 3(1 - \sin^2 x)^2 = \frac{1}{4} + 3\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$

**Câu 144:** Rút gọn biểu thức  $A = \sin\left(x + \frac{85\pi}{2}\right) + \cos(2017\pi + x) + \sin^2(33\pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)$  ta được:

A.  $A = \sin x.$

B.  $A = 1.$

C.  $A = 2.$

D.  $A = 0.$

**Lời giải**

$$A = \sin\left(x + \frac{85\pi}{2}\right) + \cos(2017\pi + x) + \sin^2(33\pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{5\pi}{2}\right).$$

$$= \sin\left(x + 42\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(2016\pi + \pi + x) + \sin^2(32\pi + \pi + x) + \sin^2\left(x - 2\pi - \frac{\pi}{2}\right).$$

$$= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi + x) + \sin^2(\pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

$$= \cos x - \cos x + (-\sin x)^2 + (-\cos x)^2 = 1.$$

**Câu 145:** Có bao nhiêu đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau đây?

i)  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}$ . iii)  $\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \alpha + \sin \alpha$ .

ii)  $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$ . iv)  $\cot 2\alpha = 2 \cot^2 \alpha - 1$ .

A. 3.

**B. 2.**

C. 4.

D. 1.

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$ . Vậy i) đúng.

Và:  $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$ . Vậy ii) đúng.

Và:  $\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4}\right) = \cos \alpha - \sin \alpha$ . Vậy iii) sai.

Với  $\cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow 2 \cot^2 \alpha - 1 = \frac{2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - 1 = -1$ .

Mà:  $\cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$  không xác định khi  $\cos \alpha = 0$ .

Suy ra iv) không đúng với mọi  $\alpha$ . Vậy iv) sai.

Vậy có 2 đẳng thức đúng.

**Câu 146:** Biểu thức  $A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x}$  không phụ thuộc vào  $x$  và bằng

A. 1.

**B. -1.**

C.  $\frac{1}{4}$ .

D.  $-\frac{1}{4}$ .

**Lời giải**

$$A = \frac{\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)^2}{4 \sin^2 x \cos^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x}$$

$$A = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x + 1)(\cos^2 x - \sin^2 x - 1)}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{2 \cos^2 x \cdot (-2 \sin^2 x)}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = -1.$$

**Câu 147:** Biểu thức  $A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x}$  không phụ thuộc vào  $x$  và bằng

A. 1.

**B. -1.**

C.  $\frac{1}{4}$ .

D.  $-\frac{1}{4}$ .

**Lời giải**

Ta có  $A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \tan^2 x} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2$

$$= \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{(1 + \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} = \frac{(1 - \tan^2 x)^2 - (1 + \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} = \frac{-4 \tan^2 x}{4 \tan^2 x} = -1.$$

**Câu 148:** Biểu thức  $A = \frac{\sin 515^\circ \cdot \cos(-475^\circ) + \cot 222^\circ \cdot \cot 408^\circ}{\cot 415^\circ \cdot \cot(-505^\circ) + \tan 197^\circ \cdot \tan 73^\circ}$  có kết quả rút gọn bằng

- A.  $\frac{1}{2} \sin^2 25^\circ$ .      B.  $\frac{1}{2} \cos^2 55^\circ$ .      C.  $\frac{1}{2} \cos^2 25^\circ$ .      D.  $\frac{1}{2} \sin^2 65^\circ$ .

**Lời giải**

$$A = \frac{\sin 155^\circ \cdot \cos 115^\circ + \cot 42^\circ \cdot \cot 48^\circ}{\cot 55^\circ \cdot \cot(-145^\circ) + \tan 17^\circ \cdot \cot 17^\circ} \Leftrightarrow A = \frac{\sin 25^\circ \cdot (-\sin 25^\circ) + \cot 42^\circ \cdot \tan 42^\circ}{\cot 55^\circ \cdot \tan 55^\circ + 1}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{-\sin^2 25^\circ + 1}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\cos^2 25^\circ}{2}.$$

**Câu 149:** Biểu thức:

$A = \cos(\alpha + 26\pi) - 2 \sin(\alpha - 7\pi) - \cos 1,5\pi - \cos\left(\alpha + \frac{2003\pi}{2}\right) + \cos(\alpha - 1,5\pi) \cdot \cot(\alpha - 8\pi)$  có kết quả thu gọn bằng:

- A.  $-\sin \alpha$ .      B.  $\sin \alpha$ .      C.  $-\cos \alpha$ .      D.  $\cos \alpha$ .

**Lời giải**

$$A = \cos(\alpha + 26\pi) - 2 \sin(\alpha - 7\pi) - \cos(1,5\pi) - \cos\left(\alpha + 2003\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha - 1,5\pi) \cdot \cot(\alpha - 8\pi)$$

$$A = \cos \alpha - 2 \sin(\alpha - \pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cot \alpha$$

$$A = \cos \alpha + 2 \sin \alpha - 0 - \sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cot \alpha = \cos \alpha + \sin \alpha - \cos \alpha = \sin \alpha.$$

**Câu 150:** Biểu thức  $\left[ \tan(\pi - x) \cdot \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \frac{1}{\sin(\pi - x)} \right] \sin^2(2\pi - x)$  có

kết quả rút gọn bằng:

- A.  $\sin^2 x$ .      B.  $\cos^2 x$ .      C.  $\tan^2 x$ .      D.  $\cot^2 x$ .

**Lời giải**

$$\left[ \tan(\pi - x) \cdot \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \frac{1}{\sin(\pi - x)} \right] \sin^2(2\pi - x).$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ -\tan x \cdot \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right)} - \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) \frac{1}{\sin x} \right] \sin^2 x \\
 &= \left[ -\tan x \cdot (-\cot x) \cdot \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin x}{\sin x} \right] \cdot \sin^2 x \\
 &= \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \cdot \sin^2 x = \cot^2 x \cdot \sin^2 x = \cos^2 x.
 \end{aligned}$$

**Câu 151:** Cho  $B = \frac{\cos^2 696^\circ + \tan(-260^\circ) \cdot \tan 530^\circ - \cos^2 156^\circ}{\tan^2 252^\circ + \cot^2 342^\circ}$ . Biểu thức thu gọn nhất của  $B$  là:

- A.  $\frac{1}{2} \tan^2 24^\circ$ .      B.  $\frac{1}{2} \cot^2 24^\circ$ .      **C.  $\frac{1}{2} \tan^2 18^\circ$ .**      D.  $\frac{1}{2} \cot^2 18^\circ$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } B &= \frac{\cos^2(720^\circ - 24^\circ) - \tan(360^\circ - 100^\circ) \cdot \tan(360^\circ + 170^\circ) - \cos^2(180^\circ - 24^\circ)}{\tan^2(360^\circ - 108^\circ) + \cot^2(360^\circ - 18^\circ)} \\
 &= \frac{\cos^2 24^\circ + \tan(90^\circ + 10^\circ) \cdot \tan(180^\circ - 10^\circ) - \cos^2 24^\circ}{\tan^2(90^\circ + 18^\circ) + \cot^2 18^\circ} \\
 &= \frac{-\cot 10^\circ \cdot (-\tan 10^\circ)}{\cot^2 18^\circ + \cot^2 18^\circ} = \frac{1}{2 \cot^2 18^\circ} = \frac{1}{2} \tan^2 18^\circ.
 \end{aligned}$$

**Câu 152:** Cho  $A = \frac{\sin 515^\circ \cdot \cos(-475^\circ) + \cot 222^\circ \cdot \cot 408^\circ}{\cot 415^\circ \cdot \cot(-505^\circ) + \tan 197^\circ \cdot \tan 73^\circ}$ . Biểu thức rút gọn của  $A$  bằng:

- A.  $\frac{1}{2} \cos^2 25^\circ$ .**      B.  $-\frac{1}{2} \cos^2 25^\circ$ .      C.  $\frac{1}{2} \sin^2 25^\circ$ .      D.  $-\frac{1}{2} \sin^2 25^\circ$ .

**Lời giải**

$$\sin 515^\circ = \sin 155^\circ = \sin(180^\circ - 25^\circ) = \sin 25^\circ$$

$$\cos(-475^\circ) = \cos(-115^\circ) = \cos(-90^\circ - 25^\circ) = -\sin 25^\circ.$$

$$\cot 222^\circ = \cot 42^\circ \cot 408^\circ = \cot 48^\circ; \cot 415^\circ = \cot 55^\circ \cot(-505^\circ) = \cot 35^\circ.$$

$$\tan 197^\circ = \tan 17^\circ.$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{-\sin 25^\circ \cdot \sin 25^\circ + \cot 42^\circ \cdot \cot 48^\circ}{\cot 55^\circ \cdot \cot 35^\circ + \tan 17^\circ \cdot \tan 73^\circ} = \frac{-\sin^2 25^\circ + \cot 42^\circ \cdot \tan 42^\circ}{\cot 55^\circ \cdot \tan 55^\circ + \tan 17^\circ \cdot \cot 17^\circ} \\
 &= \frac{1 - \sin^2 25^\circ}{2} = \frac{1}{2} \cos^2 25^\circ.
 \end{aligned}$$

**Câu 153:** Cho biểu thức  $M = \frac{1 + \tan^3 x}{(1 + \tan x)^3}$ , ( $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ), mệnh đề nào trong các mệnh đề sau **đúng**?

- A.  $M < 1$ .      B.  $M \leq 1$ .      **C.  $M \geq \frac{1}{4}$ .**      D.  $\frac{1}{4} \leq M \leq 1$ .

Hướng dẫn giải

Đặt  $t = \tan x, t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

$$\text{Ta có: } M = \frac{1+t^3}{(1+t)^3} = \frac{t^2-t+1}{t^2+2t+1} \Rightarrow (M-1)t^2 + (2M+1)t + M-1 = 0.$$

Với  $M=1$  thì có nghiệm  $t=0$ .

Với  $M \neq 1$  để có nghiệm khác  $-1$  thì.

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (2M-1)^2 - 4(M-1) \geq 0 \Leftrightarrow 12M-3 \geq 0 \Rightarrow M \geq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Và } (M-1)(-1)^2 + (2M+1)(-1) + (-1) - 1 \neq 0 \Leftrightarrow M \neq -4.$$

**Câu 154:** Hệ thức nào **sai** trong bốn hệ thức sau:

**A.**  $\frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x + \tan y.$

**B.**  $\left( \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}} \right)^2 = 4 \tan^2 \alpha.$

**C.**  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{2}{1 - \cot^2 \alpha}.$

**D.**  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha + 1}.$

Lời giải

$$+) \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y}} = \frac{\frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y}}{\frac{\sin y \cos x + \sin x \cos y}{\sin x \sin y}} = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \tan x \tan y.$$

$$+) \left( \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}} \right)^2 = \left( \sqrt{\frac{(1+\sin \alpha)(1+\sin \alpha)}{\cos^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{(1-\sin \alpha)(1-\sin \alpha)}{\cos^2 \alpha}} \right)^2$$

$$= \left( \sqrt{\frac{(1+\sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{(1-\sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}} \right)^2 = \left( \frac{1}{|\cos \alpha|} (|1+\sin \alpha| - |1-\sin \alpha|) \right)^2$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \alpha} (|1+\sin \alpha| - |1-\sin \alpha|)^2 = \frac{4 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 4 \tan^2 \alpha.$$

$$+) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2}{1 - \cot^2 \alpha}.$$

$$VT - VP = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha + 1}$$

$$= \frac{(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \cos \alpha + \sin \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha + 1)}$$

$$= \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + (\sin \alpha - \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha + 1)} = \frac{1}{1 - \cos \alpha} \neq 0.$$

**Câu 155:** Tính  $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3\pi - 2\alpha) + \cot(\pi - \alpha)$ , biết  $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$  và  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ .

- A.**  $\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$ .      **B.**  $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$ .      **C.**  $\frac{3\sqrt{3}+3}{2}$ .      **D.**  $\frac{3\sqrt{3}+1}{2}$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3\pi - 2\alpha) + \cot(\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) - \cos(-2\alpha) + \cot(-\alpha) \\ &= \cos \alpha - \cos 2\alpha - \cot \alpha = \cos \alpha - (2\cos^2 \alpha - 1) - \cot \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \text{ mà } -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \text{ nên } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\sqrt{3}.$$

$$\text{Do đó } P = \cos \alpha - (2\cos^2 \alpha - 1) - \cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(2 \cdot \frac{3}{4} - 1\right) + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \text{ nên A đúng.}$$

Cách khác:

$$\text{Vì } \sin \alpha = -\frac{1}{2} \text{ và } -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \text{ nên } \alpha = -\frac{\pi}{6}. \text{ Thế vào } P \text{ ta được:}$$

$$P = \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(3\pi + 2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + \cot\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} - \cot \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}-1}{2}.$$

**DẠNG 5: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC**

**Câu 156:** Giá trị nhỏ nhất của  $M = \sin^6 x + \cos^6 x$  là.

- A.** 0.      **B.**  $\frac{1}{4}$ .      **C.**  $\frac{1}{2}$ .      **D.** 1.

**Lời giải**

$$M = \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \geq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 157:** Giá trị nhỏ nhất của  $M = \sin^4 x + \cos^4 x$  là.

- A.** 0.      **B.**  $\frac{1}{4}$ .      **C.**  $\frac{1}{2}$ .      **D.** 1.

**Lời giải**

$$M = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 158:** Giá trị lớn nhất của  $N = \sin^4 x - \cos^4 x$  bằng:

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

Lời giải

Ta có  $N = \sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x.$

Vì  $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\cos 2x \leq 1.$

Nên giá trị lớn nhất là 1..

**Câu 159:** Giá trị lớn nhất của  $M = \sin^4 x + \cos^4 x$  bằng:

- A. 1.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 4.

Lời giải

Ta có  $M = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$

Vì  $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}\sin^2 2x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \leq 1.$

Nên giá trị lớn nhất là 1..

**Câu 160:** Cho  $M = 6\cos^2 x + 5\sin^2 x$ . Khi đó giá trị lớn nhất của  $M$  là.

- A. 1.                      B. 5.                      C. 6.                      D. 11.

Lời giải

$M = 6\cos^2 x + 5\sin^2 x = 6(1 - \sin^2 x) + 5\sin^2 x = 6 - \sin^2 x.$

Ta có:  $0 \leq \sin^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 0 \geq -\sin^2 x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 6 \geq 6 - \sin^2 x \geq 5, \forall x \in \mathbb{R}.$

Giá trị lớn nhất là 6.

**Câu 161:** Giá trị lớn nhất của biểu thức  $M = 7\cos^2 x - 2\sin^2 x$  là.

- A. -2.                      B. 5.                      C. 7.                      D. 16.

Lời giải

$M = 7(1 - \sin^2 x) - 2\sin^2 x = 7 - 9\sin^2 x.$

Ta có:  $0 \leq \sin^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 0 \geq -9\sin^2 x \geq -9, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 7 \geq 7 - 9\sin^2 x \geq -2, \forall x \in \mathbb{R}.$

Giá trị lớn nhất là 7.

**Câu 162:** Cho  $M = 5 - 2\sin^2 x$ . Khi đó giá trị lớn nhất của  $M$  là.

- A. 3.                      B. 5.                      C. 6.                      D. 7.

Lời giải

Ta có:  $0 \leq \sin^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 0 \geq -2\sin^2 x \geq -2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 5 \geq 5 - 2\sin^2 x \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}.$

Giá trị lớn nhất là 5.

**Câu 163:** Tính giá trị nhỏ nhất của  $F = \cos^2 a + 2\sin a + 2$

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

$$F = \cos^2 a + 2 \sin a + 2 = -\sin^2 a + 2 \sin a + 3 = -(\sin a - 1)^2 + 4$$

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \sin \alpha - 1 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq (\sin \alpha - 1)^2 \leq 4$$

$$-4 \leq -(\sin \alpha - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq F \leq 4$$

**Câu 164:** Tính giá trị lớn nhất của  $E = 2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha + 3$

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

$$E = 2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha + 3 = -(\sin \alpha - 1)^2 + 4$$

$$\text{Ta có } -1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \sin \alpha - 1 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq (\sin \alpha - 1)^2 \leq 4$$

$$-4 \leq -(\sin \alpha - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq E \leq 4$$

**Câu 165:** Giá trị lớn nhất của  $M = \sin^6 x - \cos^6 x$  bằng:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Ta có.

$$\begin{aligned} M &= \sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) \\ &= -\cos 2x(1 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x) = -\cos 2x\left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2x\right) \\ &= -\cos 2x \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos^2 2x\right) \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos^2 2x \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \text{ (do } -\cos 2x \leq 1) \end{aligned}$$

Nên giá trị lớn nhất là 1.

**BẢNG ĐÁP ÁN**

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1.A   | 2.C   | 3.B   | 4.A   | 5.A   | 6.A   | 7.B   | 8.B   | 9.B   | 10.B  |
| 11.C  | 12.B  | 13.B  | 14.C  | 15.C  | 16.C  | 17.B  | 18.C  | 19.A  | 20.C  |
| 21.A  | 22.A  | 23.A  | 24.D  | 25.A  | 26.A  | 27.A  | 28.C  | 29.C  | 30.A  |
| 31.D  | 32.D  | 33.D  | 34.D  | 35.A  | 36.D  | 37.A  | 38.D  | 39.B  | 40.D  |
| 41.D  | 42.D  | 43.A  | 44.B  | 45.C  | 46.A  | 47.A  | 48.B  | 49.B  | 50.C  |
| 51.D  | 52.B  | 53.A  | 54.A  | 55.A  | 56.A  | 57.A  | 58.A  | 59.C  | 60.A  |
| 61.C  | 62.C  | 63.D  | 64.A  | 65.A  | 66.D  | 67.D  | 68.C  | 69.C  | 70.A  |
| 71.C  | 72.C  | 73.C  | 74.B  | 75.A  | 76.C  | 77.D  | 78.C  | 79.A  | 80.D  |
| 81.D  | 82.B  | 83.B  | 84.B  | 85.D  | 86.A  | 87.D  | 88.C  | 89.D  | 90.B  |
| 91.B  | 92.A  | 93.B  | 94.A  | 95.B  | 96.B  | 97.B  | 98.D  | 99.A  | 100.B |
| 101.B | 102.D | 103.C | 104.D | 105.D | 106.A | 107.D | 108.C | 109.B | 110.C |
| 111.D | 112.D | 113.C | 114.A | 115.A | 116.B | 117.D | 118.A | 119.C | 120.B |
| 121.A | 122.B | 123.D | 124.A | 125.B | 126.B | 127.B | 128.C | 129.B | 130.A |
| 131.A | 132.D | 133.C | 134.A | 135.A | 136.D | 137.B | 138.D | 139.B | 140.A |
| 141.D | 142.C | 143.A | 144.B | 145.B | 146.B | 147.B | 148.C | 149.B | 150.B |
| 151.C | 152.A | 153.C | 154.D | 155.A | 156.B | 157.C | 158.B | 159.A | 160.C |
| 161.C | 162.B | 163.B | 164.C | 165.B |       |       |       |       |       |



# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 2. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC



### LÝ THUYẾT.

#### I. CÔNG THỨC CỘNG

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

#### II. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

##### 1. Công thức nhân đôi

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

##### 2. Công thức hạ bậc

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

### III. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)] = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$

### IV. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

## HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1:** Rút gọn các biểu thức sau:

**a.**  $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$

**b.**  $B = 2 \cos x - 3 \cos(\pi - x) + 5 \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$

**c.**  $C = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

**d.**  $D = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$

**Câu 2:** Rút gọn biểu thức sau:

**a.**  $G = \cos(15\pi - x) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cot\left(\frac{11\pi}{2} - x\right)$

**b.**  $H = \sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

**c.**  $I = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$

**Câu 3:** Rút gọn biểu thức sau:

a.  $N = \sin^6(\pi + x) + \cos^6(x - \pi) - 2\sin^4(x + 2\pi) - \sin^4\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b.  $O = \frac{\tan\left(\frac{19\pi}{2} - x\right)\cos(36\pi - x)\sin(x - 5\pi)}{\sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right)\cos(x - 99\pi)}$

c.  $P = \sin\left(x + \frac{85\pi}{2}\right) + \cos(207\pi + x) + \sin^2(33\pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

**Câu 4:** Rút gọn và tính giá trị biểu thức sau:

a.  $A = \cos(-315^\circ) \cdot \sin 765^\circ$

b.  $B = \sin 32^\circ \sin 148^\circ - \sin 302^\circ \sin 122^\circ$

c.  $C = \sin 810^\circ \cos 540^\circ + \tan 135^\circ \cot 585^\circ$

d.  $D = \sin 825^\circ \cot(-15^\circ) + \cos 75^\circ \sin(-555^\circ)$

**Câu 5:** Rút gọn và tính giá trị biểu thức sau:

a.  $E = 2 \tan 540^\circ + 2 \cos 1170^\circ + 4 \sin 990^\circ$

b.  $F = \frac{\sin(-234^\circ) - \cos 216^\circ}{\sin 144^\circ - \cos 126^\circ} \cdot \tan 36^\circ$

c.  $G = \frac{\cos(-234^\circ) - \cos 666^\circ}{\sin 1206^\circ + \cos 36^\circ} \cdot \cot 36^\circ$

d.  $H = \frac{\sin(-328^\circ) \cdot \sin 958^\circ}{\cot 572^\circ} - \frac{\cos(-508^\circ) \cdot \cos(-1022^\circ)}{\tan(-212^\circ)}$

**Câu 6:** Rút gọn và tính giá trị biểu thức sau:

a.  $I = \frac{\cos(-288^\circ) \cdot \cot 72^\circ}{\tan(-142^\circ) \cdot \sin 108^\circ} - \tan 18^\circ$

b.  $J = 2 \sin(790^\circ + x) + \cos(1260^\circ - x) + \tan(630^\circ + x) \cdot \tan(1260^\circ - x)$

c.  $K = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cdot \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$

**Câu 7:** Rút gọn và tính giá trị biểu thức sau:

a.  $L = \frac{(\cos 44^\circ + \tan 226^\circ) \cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \cos 72^\circ \cdot \cot 18^\circ$

b.  $M = \frac{\tan 46^\circ \cdot \sin 44^\circ + \cot(-136^\circ) \cdot \sin 404^\circ}{\cos 316^\circ} - \tan 36^\circ \cdot \tan 54^\circ$

c.  $N = \frac{\sin(-328^\circ) \cdot \sin 958^\circ}{\cos 572^\circ} - \frac{\cos(-508^\circ) \cdot \cos(-1022^\circ)}{\tan(-212^\circ)}$

**Câu 8:** Tính  $D = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$

**Câu 9:** Tính giá trị của biểu thức  $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$

**Câu 10:** Tính giá trị  $\cos 15^\circ \cos 45^\circ \cos 75^\circ$  bằng

**Câu 11:** Tính giá trị của biểu thức  $\cot 30^\circ + \cot 40^\circ + \cot 50^\circ + \cot 60^\circ$

**Câu 12:** Tính giá trị của  $A = \cos 75^\circ + \sin 105^\circ$ .

**Câu 13:** Tính giá trị của  $F = \frac{\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{5\pi}{9}}{\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9}}$ .

**Câu 14:** Cho  $\sin a = -\frac{12}{13}$ ;  $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$ . Tính  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - a\right)$ .

**Câu 15:** Biểu thức  $A = \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$  được rút gọn thành:

**Câu 16:** Tính  $B = \cos 68^\circ \cos 78^\circ + \cos 22^\circ \cos 12^\circ - \cos 10^\circ$ .



# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 2. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC



### LÝ THUYẾT.

#### I. CÔNG THỨC CỘNG

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

#### II. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

##### 1. Công thức nhân đôi

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

##### 2. Công thức hạ bậc

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

### III. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)] = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

### IV. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

## II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1:** Rút gọn các biểu thức sau:

a.  $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$

b.  $B = 2 \cos x - 3 \cos(\pi - x) + 5 \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

c.  $C = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

d.  $D = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$

**Lời giải**

a.  $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x) = -\sin x + \cos x - \cos x = -\sin x$

b.  $B = 2 \cos x - 3 \cos(\pi - x) + 5 \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$   
 $= 2 \cos x + 3 \cos x + 5 \sin\left(\frac{-\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{-\pi}{2} - x\right) = 5 \cos x - 5 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$   
 $= 5 \cos x - 5 \cos x - \sin x = -\sin x$

c.  $C = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$   
 $= 2 \cos x + \sin x + \sin\left(\frac{-\pi}{2} + x\right) - \sin x = 2 \cos x - \cos x = \cos x$

$$\begin{aligned} \text{d. } D &= \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x) \\ &= -\cos x - \sin\left(\frac{-\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{-\pi}{2} - x\right) - \cot x = -\cos x + \cos x + \cot x - \cot x = 0. \end{aligned}$$

**Câu 2:** Rút gọn biểu thức sau:

$$\text{a. } G = \cos(15\pi - x) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cot\left(\frac{11\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{b. } H = \sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{c. } I = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$$

**Lời giải**

$$\text{a. } G = \cos(15\pi - x) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cot\left(\frac{11\pi}{2} - x\right)$$

$$= -\cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cot x \cot\left(\frac{-\pi}{2} - x\right) = -\cos x + \cos x + \cot x \tan x = 1$$

$$\text{b. } H = \sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$= -\sin x - \sin x - \cot x + \tan\left(\frac{-\pi}{2} - x\right) = -2\sin x - \cot x + \cot x = -2\sin x$$

$$\text{c. } I = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$$

$$= \cos x - \sin\left(\frac{-\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{-\pi}{2} - x\right) - \cot x = \cos x + \cos x + \cot x - \cot x = 2\cos x$$

**Câu 3:** Rút gọn biểu thức sau:

$$\text{a. } N = \sin^6(\pi + x) + \cos^6(x - \pi) - 2\sin^4(x + 2\pi) - \sin^4\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{b. } O = \frac{\tan\left(\frac{19\pi}{2} - x\right) \cos(36\pi - x) \sin(x - 5\pi)}{\sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) \cos(x - 99\pi)}$$

$$\text{c. } P = \sin\left(x + \frac{85\pi}{2}\right) + \cos(207\pi + x) + \sin^2(33\pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

**Lời giải**

$$\text{a. } N = \sin^6(\pi + x) + \cos^6(x - \pi) - 2\sin^4(x + 2\pi) - \sin^4\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin^6 x + \cos^6 x - 2\sin^4 x - \cos^4 x + \sin^2 x$$

$$= -\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x = -\sin^4 x + \sin^2 x(1 - \cos^2 x) = 0$$

$$\text{b. } O = \frac{\tan\left(\frac{19\pi}{2} - x\right) \cos(36\pi - x) \sin(x - 5\pi)}{\sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) \cos(x - 99\pi)}$$

$$= \frac{\tan\left(\frac{-\pi}{2} - x\right) \cos x (-\sin x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(x + \pi)} = \frac{-\cot x \cos x \sin x}{-\cos x \cos x} = 1$$

$$\text{c. } P = \sin\left(x + \frac{85\pi}{2}\right) + \cos(207\pi + x) + \sin^2(33\pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + (-\cos x) + \sin^2 x + \cos^2 x = \cos x - \cos x + 1 = 1$$

**Câu 4:** Rút gọn và tính giá trị biểu thức sau:

$$\text{a. } A = \cos(-315^\circ) \cdot \sin 765^\circ$$

$$\text{b. } B = \sin 32^\circ \sin 148^\circ - \sin 302^\circ \sin 122^\circ$$

$$\text{c. } C = \sin 810^\circ \cos 540^\circ + \tan 135^\circ \cot 585^\circ$$

$$\text{d. } D = \sin 825^\circ \cot(-15^\circ) + \cos 75^\circ \sin(-555^\circ)$$

**Lời giải**

$$\text{a. } A = \cos(-315^\circ) \sin 765^\circ = \cos 315^\circ \sin(720^\circ + 45^\circ)$$

$$= \cos(360^\circ - 45^\circ) \sin(720^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{b. } B = \sin 32^\circ \sin 148^\circ - \sin 302^\circ \sin 122^\circ$$

$$= \sin 32^\circ \sin(180^\circ - 32^\circ) - \sin(360^\circ - 58^\circ) \sin(180^\circ - 58^\circ)$$

$$= \sin^2 32^\circ + \sin^2 58^\circ = \sin^2 32^\circ + \cos^2 32^\circ = 1$$

$$\text{c. } C = \sin 810^\circ \cos 540^\circ + \tan 135^\circ \cot 585^\circ$$

$$= \sin(720^\circ + 90^\circ) \cos(720^\circ - 180^\circ) + \tan(180^\circ - 45^\circ) \cot(720^\circ - 135^\circ)$$

$$= \sin 90^\circ \cos(-180^\circ) + \tan 45^\circ \cot 135^\circ = -1 + (-1) = -2$$

$$\text{d. } D = \sin 825^\circ \cos(-15^\circ) + \cos 75^\circ \sin(-555^\circ)$$

$$= \sin(720^\circ + 90^\circ + 15^\circ) \cos 15^\circ + \cos(90^\circ - 15^\circ) \sin(720^\circ - 180^\circ + 15^\circ)$$

$$= \sin(90^\circ + 15^\circ) \cos 15^\circ + \cos(90^\circ - 15^\circ) \sin(-180^\circ + 15^\circ)$$

$$= \cos 15^\circ \cos 15^\circ + \sin 15^\circ (-\sin 15^\circ) = \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Câu 5:** Rút gọn và tính giá trị biểu thức sau:

a.  $E = 2 \tan 540^\circ + 2 \cos 1170^\circ + 4 \sin 990^\circ$

b.  $F = \frac{\sin(-234^\circ) - \cos 216^\circ}{\sin 144^\circ - \cos 126^\circ} \cdot \tan 36^\circ$

c.  $G = \frac{\cos(-234^\circ) - \cos 666^\circ}{\sin 1206^\circ + \cos 36^\circ} \cdot \cot 36^\circ$

d.  $H = \frac{\sin(-328^\circ) \cdot \sin 958^\circ}{\cot 572^\circ} - \frac{\cos(-508^\circ) \cdot \cos(-1022^\circ)}{\tan(-212^\circ)}$

**Lời giải.**

a.

$$E = 2 \tan 540^\circ + 2 \cos 1170^\circ + 4 \sin 990^\circ$$

$$= 2 \tan(3 \cdot 180^\circ) + 2 \cos(90^\circ + 3 \cdot 360^\circ) + 4 \sin(-90^\circ + 3 \cdot 360^\circ) = 4$$

b.

$$\begin{aligned} F &= \frac{\sin(-234^\circ) - \cos 216^\circ}{\sin 144^\circ - \cos 126^\circ} \cdot \tan 36^\circ = \frac{\cos(90^\circ + 234^\circ) - \cos 216^\circ}{\cos(90^\circ - 144^\circ) - \cos 126^\circ} \cdot \tan 36^\circ \\ &= \frac{\cos 324^\circ - \cos 216^\circ}{\cos(-54^\circ) - \cos 126^\circ} \cdot \tan 36^\circ = \frac{-2 \sin 270^\circ \cdot \sin 54^\circ}{-2 \sin 90^\circ \cdot \sin(-36^\circ)} \cdot \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} \\ &= \frac{-2 \cdot (-1) \cdot \cos(90^\circ - 54^\circ)}{-2 \cdot 1 \cdot (-\sin 36^\circ)} \cdot \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} = 1 \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} G &= \frac{\cos(-234^\circ) - \cos 666^\circ}{\sin 1206^\circ + \cos 36^\circ} \cdot \cot 36^\circ = \frac{\cos(126^\circ - 360^\circ) - \cos(-54^\circ + 2 \cdot 360^\circ)}{\sin(126^\circ + 3 \cdot 360^\circ) + \cos 36^\circ} \cdot \cot 36^\circ \\ &= \frac{\cos 126^\circ - \cos(-54^\circ)}{\sin 126^\circ + \cos 36^\circ} \cdot \cot 36^\circ = \frac{\sin(90^\circ - 126^\circ) - \sin(90^\circ - 54^\circ)}{\cos(90^\circ - 126^\circ) + \cos 36^\circ} \cdot \frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} \\ &= \frac{\sin(-36^\circ) - \sin 36^\circ}{\cos(-36^\circ) + \cos 36^\circ} \cdot \frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} \\ &= \frac{-2 \sin 36^\circ}{2 \cos 36^\circ} \cdot \frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} = -1 \end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned} H &= \frac{\sin(-328^\circ) \cdot \sin 958^\circ}{\cot 572^\circ} - \frac{\cos(-508^\circ) \cdot \cos(-1022^\circ)}{\tan(-212^\circ)} \\ &= \frac{\sin(32^\circ - 360^\circ) \cdot \sin(238^\circ + 2 \cdot 360^\circ)}{\cot(32^\circ + 3 \cdot 180^\circ)} - \frac{\cos(-148^\circ - 360^\circ) \cdot \cos(58^\circ - 3 \cdot 360^\circ)}{\tan(-32^\circ - 180^\circ)} \\ &= \frac{\sin 32^\circ \cdot \sin 238^\circ}{\cot 32^\circ} - \frac{\cos 148^\circ \cdot \cos 58^\circ}{-\tan 32^\circ} \\ &= \sin 32^\circ \cdot \sin(180^\circ - 238^\circ) \cdot \tan 32^\circ + \sin(90^\circ - 148^\circ) \cdot \sin(90^\circ - 58^\circ) \cdot \cot 32^\circ \\ &= \sin 32^\circ \cdot \sin(-58^\circ) \cdot \frac{\sin 32^\circ}{\cos 32^\circ} + \sin(-58^\circ) \cdot \sin 32^\circ \cdot \frac{\cos 32^\circ}{\sin 32^\circ} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin^2 32^\circ \cdot (-\cos 32^\circ)}{\cos 32^\circ} - \frac{\cos(90^\circ - 58^\circ) \cdot \sin 32^\circ \cdot \cos 32^\circ}{\sin 32^\circ}$$

$$= -\sin^2 32^\circ - \cos^2 32^\circ = -1.$$

**Câu 6:** Rút gọn và tính giá trị biểu thức sau:

a.  $I = \frac{\cos(-288^\circ) \cdot \cot 72^\circ}{\tan(-142^\circ) \cdot \sin 108^\circ} - \tan 18^\circ.$

b.  $J = 2 \sin(790^\circ + x) + \cos(1260^\circ - x) + \tan(630^\circ + x) \cdot \tan(1260^\circ - x).$

c.  $K = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cdot \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}.$

**Lời giải.**

a.  $I = \frac{\cos(-288^\circ) \cdot \cot 72^\circ}{\tan(-162^\circ) \cdot \sin 108^\circ} - \tan 18^\circ.$

$$I = \frac{\cos(72^\circ - 360^\circ) \cdot \cot 72^\circ}{\tan(18^\circ - 180^\circ) \cdot \sin(90^\circ + 18^\circ)} - \tan 18^\circ = \frac{\cos 72^\circ \cdot \cot 72^\circ}{\tan 18^\circ \cdot \cos 18^\circ} - \tan 18^\circ$$

$$= \frac{\sin 18^\circ \cdot \tan 18^\circ}{\tan 18^\circ \cdot \cos 18^\circ} - \tan 18^\circ = \tan 18^\circ - \tan 18^\circ = 0.$$

b.  $J = 2 \sin(790^\circ + x) + \cos(1260^\circ - x) + \tan(630^\circ + x) \cdot \tan(1260^\circ - x)$

$$J = 2 \sin(360^\circ \cdot 2 + 70^\circ + x) + \cos(360^\circ \cdot 3 + 180^\circ - x) + \tan(360^\circ \cdot 2 - 90^\circ + x) \cdot \tan(360^\circ \cdot 3 + 180^\circ - x)$$

$$= 2 \sin(70^\circ + x) - \cos x - \cot x \cdot \tan x = 2 \sin(70^\circ + x) - \cos x - 1.$$

c.  $K = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cdot \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}.$

$$K = \frac{1}{\tan(360^\circ + 8^\circ)} + \frac{2 \sin(360^\circ \cdot 7 + 30^\circ) \cdot \cos(-180^\circ - 8^\circ)}{2 \cos(360^\circ \cdot 2 - 90^\circ + 8^\circ) + \cos(90^\circ + 8^\circ)}$$

$$= \frac{1}{\tan 8^\circ} + \frac{-2 \sin 30^\circ \cdot \cos 8^\circ}{2 \sin 8^\circ - \sin 8^\circ} = \cot 8^\circ - \frac{\cos 8^\circ}{\sin 8^\circ} = 0.$$

**Câu 7:** Rút gọn và tính giá trị biểu thức sau:

a.  $L = \frac{(\cos 44^\circ + \tan 226^\circ) \cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \cos 72^\circ \cdot \cot 18^\circ.$

b.  $M = \frac{\tan 46^\circ \cdot \sin 44^\circ + \cot(-136^\circ) \cdot \sin 404^\circ}{\cos 316^\circ} - \tan 36^\circ \cdot \tan 54^\circ.$

$$c. N = \frac{\sin(-328^\circ) \cdot \sin 958^\circ}{\cos 572^\circ} - \frac{\cos(-508^\circ) \cdot \cos(-1022^\circ)}{\tan(-212^\circ)}.$$

**Lời giải.**

$$a. L = \frac{(\cos 44^\circ + \tan 226^\circ) \cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \cos 72^\circ \cdot \cot 18^\circ.$$

$$L = \frac{(\cos 44^\circ + \tan(180^\circ + 90^\circ - 44^\circ)) \cos(360^\circ + 90^\circ - 44^\circ)}{\cos(360^\circ - 44^\circ)} - \cos(90^\circ - 18^\circ) \cdot \cot 18^\circ$$

$$= \frac{(\cos 44^\circ + \cot 44^\circ) \sin 44^\circ}{\cos 44^\circ} - \sin 18^\circ \cdot \cot 18^\circ = \sin 44^\circ + 1 - \cos 18^\circ.$$

$$b. M = \frac{\tan 46^\circ \cdot \sin 44^\circ + \cot(-136^\circ) \cdot \sin 404^\circ}{\cos 316^\circ} - \tan 36^\circ \cdot \tan 54^\circ.$$

$$M = \frac{\tan 46^\circ \cdot \sin(90^\circ - 46^\circ) + \cot(-90^\circ - 46^\circ) \cdot \sin(360^\circ + 90^\circ - 46^\circ)}{\cos(360^\circ + 90^\circ - 46^\circ)} - \tan(90^\circ - 54^\circ) \cdot \tan 54^\circ$$

$$= \frac{\tan 46^\circ \cdot \cos 46^\circ + \tan 46^\circ \cdot \cos 46^\circ}{\sin 46^\circ} - \cot 54^\circ \cdot \tan 54^\circ$$

$$= \frac{\sin 46^\circ + \sin 46^\circ}{\sin 46^\circ} - \cot 54^\circ \cdot \tan 54^\circ = 2 - 1 = 1.$$

$$c. N = \frac{\sin(-328^\circ) \cdot \sin 958^\circ}{\cos 572^\circ} - \frac{\cos(-508^\circ) \cdot \cos(-1022^\circ)}{\tan(-212^\circ)}.$$

$$N = \frac{\sin(32^\circ - 360^\circ) \cdot \sin(180^\circ \cdot 5 + 90^\circ - 32^\circ)}{\cos(180^\circ \cdot 3 + 32^\circ)} - \frac{\cos(32^\circ - 180^\circ \cdot 3) \cdot \cos(-32^\circ - 90^\circ - 180^\circ \cdot 5)}{\tan(-180^\circ - 32^\circ)}$$

$$= \frac{-\sin 32^\circ \cdot \cos 32^\circ}{-\cos 32^\circ} - \frac{\cos 32^\circ \cdot \sin 32^\circ}{\tan 32^\circ} = \sin 32^\circ - \cos^2 32^\circ.$$

**Câu 8:** Tính  $D = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$

**Lời giải**

Ta có:  $2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x) = \sin 2x - \sin 2x + \sin 4x - \sin 4x + \sin 6x = \sin 6x$

Do vậy, với  $\sin x \neq 0$ , ta được:  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = \frac{\sin 6x}{2 \sin x}$

Từ đó, với  $x = \frac{\pi}{7}$ , ta có:  $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{\sin \frac{6\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}.$

Mặt khác:  $\cos \frac{5\pi}{7} = -\cos \frac{2\pi}{7}$ . Vậy  $D = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$ .

**Câu 9:** Tính giá trị của biểu thức  $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ &= \tan 9^\circ + \cot 9^\circ - \tan 27^\circ - \cot 27^\circ \\ &= \tan 9^\circ - \tan 27^\circ + \cot 9^\circ - \cot 27^\circ = \frac{-\sin 18^\circ}{\cos 9^\circ \cos 27^\circ} + \frac{\sin 18^\circ}{\sin 9^\circ \sin 27^\circ} \\ &= \sin 18^\circ \left( \frac{\cos 36^\circ}{\sin 9^\circ \sin 27^\circ \cdot \cos 9^\circ \cos 27^\circ} \right) = \frac{\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ}{\frac{1}{4} \sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ} = 4. \end{aligned}$$

**Câu 10:** Tính giá trị  $\cos 15^\circ \cos 45^\circ \cos 75^\circ$  bằng

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \cos 15^\circ \cos 45^\circ \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} (\cos 90^\circ + \cos 60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

**Câu 11:** Tính giá trị của biểu thức  $\cot 30^\circ + \cot 40^\circ + \cot 50^\circ + \cot 60^\circ$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cot 30^\circ + \cot 40^\circ + \cot 50^\circ + \cot 60^\circ &= \frac{\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ} + \frac{\sin 90^\circ}{\sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ} = \frac{2}{\cos 30^\circ} + \frac{2}{\cos 10^\circ} \\ &= 2 \left( \frac{2 \cos 20^\circ \cdot \cos 10^\circ}{\cos 30^\circ \cdot \cos 10^\circ} \right) = \frac{8 \cos 20^\circ}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

**Câu 12:** Tính giá trị của  $A = \cos 75^\circ + \sin 105^\circ$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \cos 75^\circ + \sin 105^\circ = \cos 75^\circ + \sin 75^\circ = \cos 75^\circ + \cos 15^\circ = 2 \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

**Câu 13:** Tính giá trị của  $F = \frac{\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{5\pi}{9}}{\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9}}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } F = \frac{\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{5\pi}{9}}{\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{2\pi}{9}}{2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{2\pi}{9}} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

**Câu 14:** Cho  $\sin a = -\frac{12}{13}$ ;  $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$ . Tính  $\cos \left( \frac{\pi}{3} - a \right)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{25}{169} \text{ mà } \frac{3\pi}{2} < a < 2\pi \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{5}{13}.$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = -\frac{5 + 12\sqrt{3}}{26}.$$

**Câu 15:** Biểu thức  $A = \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$  được rút gọn thành:

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \frac{\sin x + \sin 5x + \sin 3x}{\cos x + \cos 5x + \cos 3x} = \frac{2 \sin 3x \cos 2x + \sin 3x}{2 \cos 3x \cdot \cos 2x + \cos 3x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \\ &= \tan 3x. \end{aligned}$$

**Câu 16:** Tính  $B = \cos 68^\circ \cos 78^\circ + \cos 22^\circ \cos 12^\circ - \cos 10^\circ$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } B &= \cos 68^\circ \cos 78^\circ + \cos 22^\circ \cos 12^\circ - \cos 10^\circ = \cos 68^\circ \cos 78^\circ + \sin 68^\circ \sin 78^\circ - \cos 10^\circ \\ &= \cos(-10^\circ) - \cos 10^\circ = \cos 10^\circ - \cos 10^\circ = 0. \end{aligned}$$

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 2. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC



### HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

#### DẠNG 1. ÁP DỤNG CÔNG THỨC CỘNG

**Câu 1:** Trong các công thức sau, công thức nào đúng?

**A.**  $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$

**B.**  $\cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

**C.**  $\sin(a + b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$

**D.**  $\cos(a + b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$

**Câu 2:** Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.**  $\tan(x - y) = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x \tan y}.$

**B.**  $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$

**C.**  $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$

**D.**  $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{\tan x \tan y}.$

**Câu 3:** Trong các công thức sau, công thức nào **đúng**?

**A.**  $\sin(a + b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$

**B.**  $\cos(a + b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$

**C.**  $\sin(a - b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$

**D.**  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$

**Câu 4:** Phát biểu nào sau đây **đúng**?

**A.**  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$

**B.**  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}.$

**C.**  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$

**D.**  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}.$

**Câu 5:** Biểu thức  $\sin x \cos y - \cos x \sin y$  bằng

**A.**  $\cos(x - y).$

**B.**  $\cos(x + y).$

**C.**  $\sin(x - y).$

**D.**  $\sin(y - x).$

**Câu 6:** Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

**A.**  $\cos(a + b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$

**B.**  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$

**C.**  $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$

**D.**  $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a.$

**Câu 7:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.**  $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$

**B.**  $\cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

**C.**  $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$

**D.**  $2 \cos a \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b).$

**Câu 8:** Biểu thức  $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$  bằng biểu thức nào sau đây?

**A.**  $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}$ .

**B.**  $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b}$ .

**C.**  $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}$ .

**D.**  $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\cot a + \cot b}{\cot a - \cot b}$ .

**Câu 9:** Cho  $\tan \alpha = 2$ . Tính  $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ .

**A.**  $-\frac{1}{3}$ .

**B.** 1.

**C.**  $\frac{2}{3}$ .

**D.**  $\frac{1}{3}$ .

**Câu 10:** Cho hai góc  $\alpha, \beta$  thỏa mãn  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$  và  $\cos \beta = \frac{3}{5}$ ,  $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ . Tính giá trị đúng của  $\cos(\alpha - \beta)$ .

**A.**  $\frac{16}{65}$ .

**B.**  $-\frac{18}{65}$ .

**C.**  $\frac{18}{65}$ .

**D.**  $-\frac{16}{65}$ .

**Câu 11:** Cho góc lượng giác  $\alpha$   $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$ . Xét dấu  $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$  và  $\tan(-\alpha)$ . Chọn kết quả đúng.

**A.**  $\begin{cases} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0 \\ \tan(-\alpha) < 0 \end{cases}$  **B.**  $\begin{cases} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0 \\ \tan(-\alpha) < 0 \end{cases}$  **C.**  $\begin{cases} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0 \\ \tan(-\alpha) > 0 \end{cases}$  **D.**  $\begin{cases} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0 \\ \tan(-\alpha) > 0 \end{cases}$

**Câu 12:** Rút gọn biểu thức:  $\sin(a - 17^\circ) \cdot \cos(a + 13^\circ) - \sin(a + 13^\circ) \cdot \cos(a - 17^\circ)$ , ta được:

**A.**  $\sin 2a$ .

**B.**  $\cos 2a$ .

**C.**  $-\frac{1}{2}$ .

**D.**  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 13:** Cho hai góc  $\alpha$  và  $\beta$  thỏa mãn  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$  và  $\cos \beta = \frac{12}{13}$ ,  $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ . Giá trị của  $\sin(\alpha - \beta)$  là

**A.**  $-\frac{56}{65}$ .

**B.**  $\frac{56}{65}$ .

**C.**  $\frac{16}{65}$ .

**D.**  $-\frac{16}{65}$ .

**Câu 14:** Tính giá trị  $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$  biết  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ .

**A.**  $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

**B.**  $-\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$ .

**C.**  $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$ .

**D.**  $\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$ .

**Câu 15:** Cho  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  với  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Biết giá trị của  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a\sqrt{5} - b\sqrt{15}}{10}$  với  $a, b \in \mathbb{N}$  và  $(a, b) = 1$ . Tính  $a + b$ .

**A.** 4.

**B.** 10.

**C.** 7.

**D.** 3.

**Câu 16:** Với  $\alpha$  là số thực bất kỳ, rút gọn biểu thức  $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)$ .

**A.**  $A = 2 \sin \alpha$ .

**B.**  $A = 2 \cos \alpha$ .

**C.**  $A = 1$ .

**D.**  $A = 0$ .

**Câu 17:** Cho  $x, y$  là các góc nhọn,  $\cot x = \frac{4}{3}$ ,  $\cot y = 7$ . Tổng  $x + y$  bằng

- A.  $\frac{\pi}{3}$ .                      B.  $\frac{\pi}{4}$ .                      C.  $\frac{\pi}{6}$ .                      D.  $\frac{2\pi}{3}$ .

**Câu 18:** Cho hai góc nhọn  $a$  và  $b$  với  $\sin a = \frac{1}{3}$ ,  $\sin b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Giá trị của  $\sin 2(a+b)$  là

- A.  $\frac{7\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{18}$ .                      B.  $\frac{7\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{18}$ .                      C.  $\frac{7\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{18}$ .                      D.  $\frac{7\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{18}$ .

**Câu 19:** Biết  $\sin a = \frac{5}{13}$ ,  $\cos b = \frac{3}{5}$ ,  $\left(\frac{\pi}{2} < a < \pi, 0 < b < \frac{\pi}{2}\right)$ . Hãy tính  $\sin(a+b)$ .

- A.  $-\frac{33}{65}$ .                      B.  $\frac{63}{65}$ .                      C.  $\frac{56}{65}$ .                      D. 0.

**Câu 20:** Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$ . Tính  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ .

- A.  $\frac{48+25\sqrt{3}}{11}$ .                      B.  $\frac{8-5\sqrt{3}}{11}$ .                      C.  $\frac{8-\sqrt{3}}{11}$ .                      D.  $\frac{48-25\sqrt{3}}{11}$ .

**Câu 21:** Rút gọn biểu thức:  $\sin(a-17^\circ) \cdot \cos(a+13^\circ) - \sin(a+13^\circ) \cdot \cos(a-17^\circ)$ , ta được:

- A.  $\sin 2a$ .                      B.  $\cos 2a$ .                      C.  $-\frac{1}{2}$ .                      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 22:** Giá trị của biểu thức  $\cos \frac{37\pi}{12}$  bằng

- A.  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ .                      C.  $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ .

**Câu 23:** Đẳng thức nào sau đây là đúng.

- A.  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \alpha + \frac{1}{2}$ .                      B.  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha$ .  
C.  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha$ .                      D.  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$ .

**Câu 24:** Cho  $\tan \alpha = 2$ . Tính  $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ .

- A.  $-\frac{1}{3}$ .                      B. 1.                      C.  $\frac{2}{3}$ .                      D.  $\frac{1}{3}$ .

**Câu 25:** Kết quả nào sau đây sai?

- A.  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .                      B.  $\sin x - \cos x = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .  
C.  $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ .                      D.  $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

**Câu 26:** Cho  $\sin x = \frac{3}{5}$  với  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  khi đó  $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  bằng.

- A.  $\frac{2}{7}$ .                      B.  $-\frac{1}{7}$ .                      C.  $-\frac{2}{7}$ .                      D.  $\frac{1}{7}$ .

**Câu 27:** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$  với  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Giá trị của  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$  bằng

- A.  $\frac{2-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}$ . B.  $\sqrt{6}-3$ . C.  $\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{2}$ . D.  $\sqrt{6}-\frac{1}{2}$ .

**Câu 28:** Cho hai góc  $\alpha, \beta$  thỏa mãn  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$  và  $\cos \beta = \frac{3}{5}$ ,  $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ . Tính giá trị đúng của  $\cos(\alpha - \beta)$ .

- A.  $\frac{16}{65}$ . B.  $-\frac{18}{65}$ . C.  $\frac{18}{65}$ . D.  $-\frac{16}{65}$ .

**Câu 29:** Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ . Tính giá trị  $\cos\left(\alpha - \frac{21\pi}{4}\right)$ ?

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{10}$ . B.  $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$ . C.  $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ . D.  $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ .

**Câu 30:** Biểu thức  $M = \cos(-53^\circ) \cdot \sin(-337^\circ) + \sin 307^\circ \cdot \sin 113^\circ$  có giá trị bằng:

- A.  $-\frac{1}{2}$ . B.  $\frac{1}{2}$ . C.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ . D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 31:** Rút gọn biểu thức:  $\cos 54^\circ \cdot \cos 4^\circ - \cos 36^\circ \cdot \cos 86^\circ$ , ta được:

- A.  $\cos 50^\circ$ . B.  $\cos 58^\circ$ . C.  $\sin 50^\circ$ . D.  $\sin 58^\circ$ .

**Câu 32:** Cho hai góc nhọn  $a$  và  $b$  với  $\tan a = \frac{1}{7}$  và  $\tan b = \frac{3}{4}$ . Tính  $a + b$ .

- A.  $\frac{\pi}{3}$ . B.  $\frac{\pi}{4}$ . C.  $\frac{\pi}{6}$ . D.  $\frac{2\pi}{3}$ .

**Câu 33:** Cho  $x, y$  là các góc nhọn,  $\cot x = \frac{3}{4}$ ,  $\cot y = \frac{1}{7}$ . Tổng  $x + y$  bằng:

- A.  $\frac{\pi}{4}$ . B.  $\frac{3\pi}{4}$ . C.  $\frac{\pi}{3}$ . D.  $\pi$ .

**Câu 34:** Biểu thức  $A = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$  không phụ thuộc  $x$  và bằng:

- A.  $\frac{3}{4}$ . B.  $\frac{4}{3}$ . C.  $\frac{3}{2}$ . D.  $\frac{2}{3}$ .

**Câu 35:** Biết  $\sin \beta = \frac{4}{5}$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  và  $\alpha \neq k\pi$ . Giá trị của biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{3} \sin(\alpha + \beta) - \frac{4 \cos(\alpha + \beta)}{\sqrt{3}}}{\sin \alpha}$  không phụ thuộc vào  $\alpha$  và bằng

- A.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ . B.  $\frac{5}{\sqrt{3}}$ . C.  $\frac{\sqrt{3}}{5}$ . D.  $\frac{3}{\sqrt{5}}$ .

**Câu 36:** Nếu  $\tan \frac{\beta}{2} = 4 \tan \frac{\alpha}{2}$  thì  $\tan \frac{\beta - \alpha}{2}$  bằng:

- A.  $\frac{3 \sin \alpha}{5 - 3 \cos \alpha}$ . B.  $\frac{3 \sin \alpha}{5 + 3 \cos \alpha}$ . C.  $\frac{3 \cos \alpha}{5 - 3 \cos \alpha}$ . D.  $\frac{3 \cos \alpha}{5 + 3 \cos \alpha}$ .

**Câu 37:** Cho  $\cos a = \frac{3}{4}$ ;  $\sin a > 0$ ;  $\sin b = \frac{3}{5}$ ;  $\cos b < 0$ . Giá trị của  $\cos(a+b)$ , bằng:

- A.  $\frac{3}{5}\left(1 + \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ .      B.  $-\frac{3}{5}\left(1 + \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ .      C.  $\frac{3}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ .      D.  $-\frac{3}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ .

**Câu 38:** Biết  $\cos\left(a - \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2}$  và  $\sin\left(a - \frac{b}{2}\right) > 0$ ;  $\sin\left(\frac{a}{2} - b\right) = \frac{3}{5}$  và  $\cos\left(\frac{a}{2} - b\right) > 0$ . Giá trị  $\cos(a+b)$  bằng:

- A.  $\frac{24\sqrt{3}-7}{50}$ .      B.  $\frac{7-24\sqrt{3}}{50}$ .      C.  $\frac{22\sqrt{3}-7}{50}$ .      D.  $\frac{7-22\sqrt{3}}{50}$ .

**Câu 39:** Rút gọn biểu thức:  $\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x$  ta được kết quả là

- A. 0.      B.  $-\cos x$ .      C.  $-2\cos x$ .      D.  $\sin x - \cos x$ .

**Câu 40:** Cho  $\sin a = \frac{3}{5}$ ;  $\cos a < 0$ ;  $\cos b = \frac{3}{4}$ ;  $\sin b > 0$ . Giá trị  $\sin(a-b)$  bằng:

- A.  $-\frac{1}{5}\left(\sqrt{7} + \frac{9}{4}\right)$ .      B.  $-\frac{1}{5}\left(\sqrt{7} - \frac{9}{4}\right)$ .      C.  $\frac{1}{5}\left(\sqrt{7} + \frac{9}{4}\right)$ .      D.  $\frac{1}{5}\left(\sqrt{7} - \frac{9}{4}\right)$ .

**DẠNG 2. ÁP DỤNG CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI – HẠ BẬC**

**Câu 41:** Biết  $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$  và  $\cot \alpha$ ,  $\cot \beta$ ,  $\cot \gamma$  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tích số  $\cot \alpha \cdot \cot \gamma$  bằng:

- A. 2.      B. -2.      C. 3.      D. -3.

**Câu 42:** Đẳng thức nào **không đúng** với mọi  $x$ ?

- A.  $\cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2}$ .      B.  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ .      C.  $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ .      D.  $\sin^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$ .

**Câu 43:** Trong các công thức sau, công thức nào **sai**?

- A.  $\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$ .      B.  $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$ .  
C.  $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ .      D.  $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

**Câu 44:** Trong các công thức sau, công thức nào **sai**?

- A.  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ .      B.  $\cos 2a = \cos^2 a + \sin^2 a$ .  
C.  $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ .      D.  $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ .

**Câu 45:** Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ .      B.  $\cos 2a = \cos^2 a + \sin^2 a$ .  
C.  $\cos 2a = 2\cos^2 a + 1$ .      D.  $\cos 2a = 2\sin^2 a - 1$ .

**Câu 46:** Cho góc lượng giác  $a$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định sai?

- A.  $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ .      B.  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ .  
C.  $\cos 2a = 1 - 2\cos^2 a$ .      D.  $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ .

**Câu 47:** Khẳng định nào dưới đây **SAI**?

- A.  $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$ .      B.  $\cos 2a = 2\cos a - 1$ .  
C.  $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ .      D.  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ .

**Câu 48:** Chọn đáp án đúng.

- A.**  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ . **B.**  $\sin 2x = \sin x \cos x$ . **C.**  $\sin 2x = 2 \cos x$ . **D.**  $\sin 2x = 2 \sin x$ .

**Câu 49:** Cho  $\cos x = \frac{4}{5}$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ . Giá trị của  $\sin 2x$  là

- A.**  $\frac{24}{25}$ . **B.**  $-\frac{24}{25}$ . **C.**  $-\frac{1}{5}$ . **D.**  $\frac{1}{5}$ .

**Câu 50:** Cho  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ ,  $\cos 2\alpha$  nhận giá trị nào trong các giá trị sau

- A.**  $-\frac{1}{9}$ . **B.**  $-\frac{4}{3}$ . **C.**  $\frac{4}{3}$ . **D.**  $-\frac{2}{3}$ .

**Câu 51:** Biết  $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$ . Với  $a = -b$  thì  $\cos 2a$  bằng

- A.**  $\cos^2 a + \sin^2 a$ . **B.**  $-\cos^2 a - \sin^2 a$ . **C.**  $\cos^2 a - \sin^2 a$ . **D.**  $\sin^2 a - \cos^2 a$ .

**Câu 52:** Với  $\alpha$  là số thực bất kỳ, trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A.**  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ . **B.**  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ .  
**C.**  $\cos 2\alpha = -2 \sin^2 \alpha + 1$ . **D.**  $\cos 2\alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ .

**Câu 53:** Biết rằng  $\sin 18^\circ = \frac{a+b\sqrt{5}}{c}$ , với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $c \neq 0$  và  $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$  là các phân số tối giản. Giá trị của biểu thức  $S = a + b + c$  là

- A.**  $S = 2$ . **B.**  $S = 4$ . **C.**  $S = 3$ . **D.**  $S = 1$ .

**Câu 54:** Cho  $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$  và  $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ . Giá trị của  $\sin \alpha$  là

- A.**  $\frac{2}{5}$ . **B.**  $\frac{1}{5}$ . **C.**  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ . **D.**  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**Câu 55:** Cho  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ;  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  thì  $\sin 2\alpha$  bằng

- A.**  $-\frac{24}{25}$ . **B.**  $\frac{24}{25}$ . **C.**  $\frac{4}{5}$ . **D.**  $-\frac{4}{5}$ .

**Câu 56:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.**  $\cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cdot \cos x$ . **B.**  $\cos 3x - \cos x = 2 \sin 2x \cdot \sin x$ .  
**C.**  $\sin 3x - \sin x = 2 \cos 2x \cdot \sin x$ . **D.**  $\sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x \cdot \cos x$ .

**Câu 57:** Với  $\alpha$  là số thực bất kỳ, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A.**  $\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 2 \cos 2\alpha \cdot \cos 6\alpha$ . **B.**  $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos 3\alpha$ .  
**C.**  $\cos 2\alpha - \cos 4\alpha = -2 \sin 3\alpha \cdot \sin \alpha$ . **D.**  $\sin 2\alpha - \sin 4\alpha = -2 \cos 3\alpha \cdot \sin \alpha$ .

**Câu 58:** Số khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

$$(I) \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \quad (II) \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$(III) \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad (VI) \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 59:** Nếu  $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$  thì  $\sin 2x$  bằng

- A.  $\frac{3}{4}$ .                      B.  $\frac{3}{8}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      D.  $-\frac{3}{4}$ .

**Câu 60:** Biết rằng  $\sin^6 x + \cos^6 x = a + b \sin^2 2x$ , với  $a, b$  là các số thực. Tính  $T = 3a + 4b$ .

- A.  $T = -7$ .                      B.  $T = 1$ .                      C.  $T = 0$ .                      D.  $T = 7$ .

**Câu 61:** Cho  $\sin 2\alpha = \frac{3}{4}$ . Tính giá trị biểu thức  $A = \tan \alpha + \cot \alpha$

- A.  $A = \frac{4}{3}$ .                      B.  $A = \frac{2}{3}$ .                      C.  $A = \frac{8}{3}$ .                      D.  $A = \frac{16}{3}$ .

**Câu 62:** Cho  $a, b$  là hai góc nhọn. Biết  $\cos a = \frac{1}{3}, \cos b = \frac{1}{4}$ . Giá trị của biểu thức  $\cos(a+b)\cos(a-b)$  bằng

- A.  $-\frac{119}{144}$ .                      B.  $-\frac{115}{144}$ .                      C.  $-\frac{113}{144}$ .                      D.  $-\frac{117}{144}$ .

**Câu 63:** Cho số thực  $\alpha$  thỏa mãn  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ . Tính  $(\sin 4\alpha + 2 \sin 2\alpha) \cos \alpha$

- A.  $\frac{25}{128}$ .                      B.  $\frac{1}{16}$ .                      C.  $\frac{255}{128}$ .                      D.  $\frac{225}{128}$ .

**Câu 64:** Cho  $\cot a = 15$ , giá trị  $\sin 2a$  có thể nhận giá trị nào dưới đây:

- A.  $\frac{11}{113}$ .                      B.  $\frac{13}{113}$ .                      C.  $\frac{15}{113}$ .                      D.  $\frac{17}{113}$ .

### DẠNG 3. ÁP DỤNG CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG, TỔNG THÀNH TÍCH

**Câu 65:** Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.  $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$ .                      B.  $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) - \cos(a+b)]$ .  
C.  $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ .                      D.  $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$ .

**Câu 66:** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

- A.  $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ .                      B.  $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ .  
C.  $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ .                      D.  $\cos a + \cos b = 2 \cos(a+b) \cos(a-b)$ .

**Câu 67:** Công thức nào sau đây là **sai**?

- A.  $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ .                      B.  $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$ .  
C.  $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ .                      D.  $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ .

**Câu 68:** Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sin 3x + \cos 2x - \sin x}{\cos x + \sin 2x - \cos 3x}$  ( $\sin 2x \neq 0; 2 \sin x + 1 \neq 0$ ) ta được:

- A.  $A = \cot 6x$ .                      B.  $A = \cot 3x$ .  
C.  $A = \cot 2x$ .                      D.  $A = \tan x + \tan 2x + \tan 3x$ .

**Câu 69:** Rút gọn biểu thức  $P = \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$ .

- A.  $-\frac{3}{2}\cos 2a$ .      B.  $\frac{1}{2}\cos 2a$ .      C.  $-\frac{2}{3}\cos 2a$ .      D.  $-\frac{1}{2}\cos 2a$ .

**Câu 70:** Biến đổi biểu thức  $\sin \alpha - 1$  thành tích.

- A.  $\sin \alpha - 1 = 2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ .      B.  $\sin \alpha - 1 = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ .  
C.  $\sin \alpha - 1 = 2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ .      D.  $\sin \alpha - 1 = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ .

**Câu 71:** Rút gọn biểu thức  $P = \frac{\cos a + 2 \cos 3a + \cos 5a}{\sin a + 2 \sin 3a + \sin 5a}$ .

- A.  $P = \tan a$ .      B.  $P = \cot a$ .      C.  $P = \cot 3a$ .      D.  $P = \tan 3a$ .

**Câu 72:** Tính giá trị biểu thức  $P = \sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$ .

- A.  $P = 1$ .      B.  $P = 0$ .      C.  $P = \sqrt{3}$ .      D.  $P = -\sqrt{3}$ .

**Câu 73:** Giá trị đúng của  $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$  bằng:

- A.  $\frac{1}{2}$ .      B.  $-\frac{1}{2}$ .      C.  $\frac{1}{4}$ .      D.  $-\frac{1}{4}$ .

**Câu 74:** Giá trị đúng của  $\tan \frac{\pi}{24} + \tan \frac{7\pi}{24}$  bằng:

- A.  $2(\sqrt{6} - \sqrt{3})$ .      B.  $2(\sqrt{6} + \sqrt{3})$ .      C.  $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ .      D.  $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ .

**Câu 75:** Biểu thức  $A = \frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$  có giá trị đúng bằng:

- A. 1.      B. -1.      C. 2.      D. -2.

**Câu 76:** Tích số  $\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$  bằng:

- A.  $\frac{1}{16}$ .      B.  $\frac{1}{8}$ .      C.  $\frac{3}{16}$ .      D.  $\frac{1}{4}$ .

**Câu 77:** Tích số  $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7}$  bằng:

- A.  $\frac{1}{8}$ .      B.  $-\frac{1}{8}$ .      C.  $\frac{1}{4}$ .      D.  $-\frac{1}{4}$ .

**Câu 78:** Giá trị đúng của biểu thức  $A = \frac{\tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ}{\cos 20^\circ}$  bằng:

- A.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .      B.  $\frac{4}{\sqrt{3}}$ .      C.  $\frac{6}{\sqrt{3}}$ .      D.  $\frac{8}{\sqrt{3}}$ .

**Câu 79:** Cho hai góc nhọn  $a$  và  $b$ . Biết  $\cos a = \frac{1}{3}$ ,  $\cos b = \frac{1}{4}$ . Giá trị  $\cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$  bằng:

- A.  $-\frac{113}{144}$ .      B.  $-\frac{115}{144}$ .      C.  $-\frac{117}{144}$ .      D.  $-\frac{119}{144}$ .

**Câu 80:** Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$

- A.  $A = \tan 6x$ .      B.  $A = \tan 3x$ .      C.  $A = \tan 2x$ .      D.  $A = \tan x + \tan 2x + \tan 3x$ .

**DẠNG 4. KẾT HỢP CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC**

**Câu 81:** Biến đổi biểu thức  $\sin a + 1$  thành tích.

**A.**  $\sin a + 1 = 2 \sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$

**B.**  $\sin a + 1 = 2 \cos\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$

**C.**  $\sin a + 1 = 2 \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right).$

**D.**  $\sin a + 1 = 2 \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right).$

**Câu 82:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  và  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \tan\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ .

**A.**  $A = \frac{1}{3}.$

**B.**  $A = -\frac{1}{3}.$

**C.**  $A = 3.$

**D.**  $A = -3.$

**Câu 83:** Cho  $\cos x = \frac{1}{3}$   $\left(-\frac{\pi}{2} < x < 0\right)$ . Giá trị của  $\tan 2x$  là

**A.**  $\frac{\sqrt{5}}{2}.$

**B.**  $\frac{4\sqrt{2}}{7}.$

**C.**  $-\frac{\sqrt{5}}{2}.$

**D.**  $-\frac{4\sqrt{2}}{7}.$

**Câu 84:** Cho  $\cos x = 0$ . Tính  $A = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

**A.**  $\frac{3}{2}.$

**B.** 2.

**C.** 1.

**D.**  $\frac{1}{4}.$

**Câu 85:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $P = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$  bằng bao nhiêu?

**A.**  $P = \frac{19}{13}.$

**B.**  $P = \frac{25}{13}.$

**C.**  $P = -\frac{25}{13}.$

**D.**  $P = -\frac{19}{13}.$

**Câu 86:** Cho  $\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta$  với  $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$ ,  $(k, l \in \mathbb{Z})$ . Ta có

**A.**  $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \alpha.$

**B.**  $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \beta.$

**C.**  $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \beta.$

**D.**  $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \alpha.$

**Câu 87:** Biết rằng  $\frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\cos(ax)}{b - \sin(ax)}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Tính giá trị của biểu thức

$P = a + b.$

**A.**  $P = 4.$

**B.**  $P = 1.$

**C.**  $P = 2.$

**D.**  $P = 3.$

**Câu 88:** Cho  $\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \cos \alpha \cdot \cos 3\alpha$ .

**A.**  $P = \frac{7}{18}.$

**B.**  $P = \frac{7}{9}.$

**C.**  $P = \frac{5}{9}.$

**D.**  $\frac{5}{18}.$

**Câu 89:** Cho  $\tan x = 2$   $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$ . Giá trị của  $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  là

**A.**  $\frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$

**B.**  $-\frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$

**C.**  $\frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$

**D.**  $\frac{-2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$

**Câu 90:** Tổng  $A = \tan 9^\circ + \cot 9^\circ + \tan 15^\circ + \cot 15^\circ + \tan 27^\circ + \cot 27^\circ$  bằng:

**A.** 4.

**B.** -4.

**C.** 8.

**D.** -8.

**Câu 91:** Cho hai góc nhọn  $a$  và  $b$  với  $\sin a = \frac{1}{3}$ ,  $\sin b = \frac{1}{2}$ . Giá trị của  $\sin 2(a+b)$  là:

- A.  $\frac{2\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{18}$ .      B.  $\frac{3\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{18}$ .      C.  $\frac{4\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{18}$ .      D.  $\frac{5\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{18}$ .

**Câu 92:** Biểu thức  $A = \frac{2\cos^2 2\alpha + \sqrt{3}\sin 4\alpha - 1}{2\sin^2 2\alpha + \sqrt{3}\sin 4\alpha - 1}$  có kết quả rút gọn là:

- A.  $\frac{\cos(4\alpha+30^\circ)}{\cos(4\alpha-30^\circ)}$ .      B.  $\frac{\cos(4\alpha-30^\circ)}{\cos(4\alpha+30^\circ)}$ .      C.  $\frac{\sin(4\alpha+30^\circ)}{\sin(4\alpha-30^\circ)}$ .      D.  $\frac{\sin(4\alpha-30^\circ)}{\sin(4\alpha+30^\circ)}$ .

**Câu 93:** Kết quả nào sau đây **SAI**?

- A.  $\sin 33^\circ + \cos 60^\circ = \cos 3^\circ$ .      B.  $\frac{\sin 9^\circ}{\sin 48^\circ} = \frac{\sin 12^\circ}{\sin 81^\circ}$ .  
C.  $\cos 20^\circ + 2\sin^2 55^\circ = 1 + \sqrt{2}\sin 65^\circ$ .      D.  $\frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3}\sin 250^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ .

**Câu 94:** Nếu  $5\sin \alpha = 3\sin(\alpha+2\beta)$  thì:

- A.  $\tan(\alpha+\beta) = 2\tan \beta$ .      B.  $\tan(\alpha+\beta) = 3\tan \beta$ .  
C.  $\tan(\alpha+\beta) = 4\tan \beta$ .      D.  $\tan(\alpha+\beta) = 5\tan \beta$ .

**Câu 95:** Cho biểu thức  $A = \sin^2(a+b) - \sin^2 a - \sin^2 b$ . Hãy chọn kết quả đúng:

- A.  $A = 2\cos a \cdot \sin b \cdot \sin(a+b)$ .      B.  $A = 2\sin a \cdot \cos b \cdot \cos(a+b)$ .  
C.  $A = 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos(a+b)$ .      D.  $A = 2\sin a \cdot \sin b \cdot \cos(a+b)$ .

**Câu 96:** Xác định hệ thức **SAI** trong các hệ thức sau ?

- A.  $\cos 40^\circ + \tan \alpha \cdot \sin 40^\circ = \frac{\cos(40^\circ - \alpha)}{\cos \alpha}$ .  
B.  $\sin 15^\circ + \tan 30^\circ \cdot \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .  
C.  $\cos^2 x - 2\cos a \cdot \cos x \cdot \cos(a+x) + \cos^2(a+x) = \sin^2 a$ .  
D.  $\sin^2 x + 2\sin(a-x) \cdot \sin x \cdot \cos a + \sin^2(a-x) = \cos^2 a$ .

**Câu 97:** Cho  $\alpha, \beta$  thỏa mãn  $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$  và  $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . Tính  $\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$ .

- A.  $\frac{12+\sqrt{3}}{6}$ .      B.  $\frac{4+3\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .      D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 98:** Cho tam giác  $ABC$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2\cos A \cos B \cos C$ .

- A. 1.      B. 3.      C. 2.      D. 0.

**Câu 99:** Cho  $\sin x + \cos x = \frac{7}{5}$ . Giá trị của biểu thức  $A = \cos 4x - \sin^2 x - \frac{2+\sin^2 x}{3\tan^2 x + 2}$  bằng.

- A.  $-\frac{1152}{625}$ .      B.  $-\frac{8}{25}$ .      C.  $\frac{98}{625}$ .      D.  $-\frac{98}{625}$ .

**Câu 100:** Biểu thức  $4\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = m + n\sin^2 \alpha$ , với  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Khi đó  $m^2 - n^2$  bằng

- A. 7.      B. 15.      C. -7.      D. -15.

DẠNG 5. MIN-MAX

**Câu 101:** Giá trị nhỏ nhất của  $\sin^6 x + \cos^6 x$  là

- A. 0.                      B.  $\frac{1}{2}$ .                      C.  $\frac{1}{4}$ .                      D.  $\frac{1}{8}$ .

**Câu 102:** Giá trị lớn nhất của  $M = \sin^4 x + \cos^4 x$  bằng:

- A. 4.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

**Câu 103:** Cho  $M = 3 \sin x + 4 \cos x$ . Chọn khẳng định đúng.

- A.  $-5 \leq M \leq 5$ .                      B.  $M > 5$ .                      C.  $M \geq 5$ .                      D.  $M \leq 5$ .

**Câu 104:** Giá trị lớn nhất của  $M = \sin^6 x - \cos^6 x$  bằng:

- A. 2.                      B. 3.                      C. 0.                      D. 1.

**Câu 105:** Cho biểu thức  $M = \frac{1 + \tan x^3}{(1 + \tan x)^3}$ ,  $\left( x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$ , mệnh đề nào trong các mệnh đề sau **đúng**?

- A.  $M \leq 1$ .                      B.  $M \geq \frac{1}{4}$ .                      C.  $\frac{1}{4} \leq M \leq 1$ .                      D.  $M < 1$ .

**Câu 106:** Cho  $M = 6 \cos^2 x + 5 \sin^2 x$ . Khi đó giá trị lớn nhất của  $M$  là

- A. 11.                      B. 1.                      C. 5.                      D. 6.

**Câu 107:** Giá trị lớn nhất của biểu thức  $M = 7 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$  là

- A. -2.                      B. 5.                      C. 7.                      D. 16.

DẠNG 5. NHẬN DẠNG TAM GIÁC

**Câu 108:** Cho  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  thì.

- A.  $\sin 2A + \sin 2B > 2 \sin C$ .                      B.  $\sin 2A + \sin 2B \leq 2 \sin C$ .  
C.  $\sin 2A + \sin 2B \geq 2 \sin C$ .                      D.  $\sin 2A + \sin 2B = 2 \sin C$ .

**Câu 109:** Một tam giác  $ABC$  có các góc  $A, B, C$  thỏa mãn  $\sin \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{A}{2} = 0$  thì tam giác đó có gì đặc biệt?

- A. Tam giác đó vuông.                      B. Tam giác đó đều.  
C. Tam giác đó cân.                      D. Không có gì đặc biệt.

**Câu 110:** Cho  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  thì  $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A$  bằng :

- A.  $(\cot A \cdot \cot B \cdot \cot C)^2$ .                      B. Một kết quả khác các kết quả đã nêu trên.  
C. 1.                      D. -1.

**Câu 111:** Cho  $A, B, C$  là ba góc nhọn và  $\tan A = \frac{1}{2}$ ;  $\tan B = \frac{1}{5}$ ,  $\tan C = \frac{1}{8}$ . Tổng  $A + B + C$  bằng

- A.  $\frac{\pi}{5}$ .                      B.  $\frac{\pi}{4}$ .                      C.  $\frac{\pi}{3}$ .                      D.  $\frac{\pi}{6}$ .

**Câu 112:** Biết  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$ , khi đó.

- A.  $\cot \left( \frac{A+B}{2} \right) = \cot \frac{C}{2}$ .                      B.  $\cos \left( \frac{A+B}{2} \right) = \cos \frac{C}{2}$ .  
C.  $\cos \left( \frac{A+B}{2} \right) = -\cos \frac{C}{2}$ .                      D.  $\tan \left( \frac{A+B}{2} \right) = \cot \frac{C}{2}$ .

**Câu 113:**  $A, B, C$ , là ba góc của một tam giác. Hãy tìm hệ thức **sai**:

- A.**  $\sin A = -\sin(2A + B + C)$ . **B.**  $\sin A = -\cos \frac{3A + B + C}{2}$ .  
**C.**  $\cos C = \sin \frac{A + B + 3C}{2}$ . **D.**  $\sin C = \sin(A + B + 2C)$ .

**Câu 114:** Cho  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  thì:

- A.**  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ . **B.**  $\tan A + \tan B + \tan C = -\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$ .  
**C.**  $\tan A + \tan B + \tan C = -\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ . **D.**  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$ .

**Câu 115:** Biết  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$ , khi đó.

- A.**  $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}$ . **B.**  $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = -\cos \frac{C}{2}$ .  
**C.**  $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin \frac{C}{2}$ . **D.**  $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = -\sin \frac{C}{2}$ .

**Câu 116:** Nếu  $a = 2b$  và  $a + b + c = \pi$ . Hãy chọn kết quả **đúng**.

- A.**  $\sin b(\sin b + \sin c) = \sin 2a$ . **B.**  $\sin b(\sin b + \sin c) = \sin^2 a$ .  
**C.**  $\sin b(\sin b + \sin c) = \cos^2 a$ . **D.**  $\sin b(\sin b + \sin c) = \cos 2a$ .

**Câu 117:** Cho  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  thì:

- A.**  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ .  
**B.**  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ .  
**C.**  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = -4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ .  
**D.**  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ .

**Câu 118:**  $A, B, C$ , là ba góc của một tam giác. Hãy chỉ hệ thức **sai**:

- A.**  $\cot\left(\frac{4A+B+C}{2}\right) = -\tan \frac{3A}{2}$ . **B.**  $\cos\left(\frac{A-2B+C}{2}\right) = -\sin B$ .  
**C.**  $\sin\left(\frac{A+B-3C}{2}\right) = \cos 2C$ . **D.**  $\tan\left(\frac{A+B+6C}{2}\right) = -\cot \frac{5C}{2}$ .

**Câu 119:** Biết  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  khi đó.

- A.**  $\cos C = \cos(A+B)$ . **B.**  $\tan C = \tan(A+B)$ .  
**C.**  $\cot C = -\cot(A+B)$ . **D.**  $\sin C = -\sin(A+B)$ .

**Câu 120:** Cho  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  thì  $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A$  bằng

- A.** Một kết quả khác các kết quả đã nêu trên. **B.** 1.  
**C.** -1. **D.**  $(\cot A \cdot \cot B \cdot \cot C)^2$ .

**Câu 121:** Cho  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  thì:

- A.  $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$ .  
 B.  $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = -\cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$ .  
 C.  $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot A \cdot \cot B \cdot \cot C$ .  
 D.  $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = -\cot A \cdot \cot B \cdot \cot C$ .

**Câu 122:** Cho  $A, B, C$  là ba góc của một tam giác. Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau.

- A.  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ .  
 B.  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ .  
 C.  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ .  
 D.  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ .

**Câu 123:** Hãy chỉ ra công thức sai, nếu  $A, B, C$  là ba góc của một tam giác.

- A.  $\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sin \frac{A}{2}$ .  
 B.  $\cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C + \cos A = 0$ .  
 C.  $\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2} = \cos \frac{A}{2}$ .  
 D.  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C = 1$ .

**Câu 124:** Cho tam giác  $ABC$  có  $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .  
 B. Tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ .  
 C. Tam giác  $ABC$  đều.  
 D. Tam giác  $ABC$  là tam giác tù.

**Câu 125:** Cho bất đẳng thức  $\cos 2A + \frac{1}{64 \cos^4 A} - (2 \cos 2B + 4 \sin B) + \frac{13}{4} \leq 0$  với  $A, B, C$  là ba góc của tam giác  $ABC$ . Khẳng định đúng là:

- A.  $B + C = 120^\circ$ .  
 B.  $B + C = 130^\circ$ .  
 C.  $A + B = 120^\circ$ .  
 D.  $A + C = 140^\circ$ .

**Câu 126:** Cho  $A, B, C$  là các góc nhọn và  $\tan A = \frac{1}{2}$ ,  $\tan B = \frac{1}{5}$ ,  $\tan C = \frac{1}{8}$ . Tổng  $A + B + C$  bằng:

- A.  $\frac{\pi}{6}$ .  
 B.  $\frac{\pi}{5}$ .  
 C.  $\frac{\pi}{4}$ .  
 D.  $\frac{\pi}{3}$ .

**Câu 127:** Cho  $A, B, C$  là ba góc của một tam giác. Hãy chỉ ra hệ thức SAI.

- A.  $\sin \frac{A+B+3C}{2} = \cos C$ .  
 B.  $\cos(A+B-C) = -\cos 2C$ .  
 C.  $\tan \frac{A+B-2C}{2} = \cot \frac{3C}{2}$ .  
 D.  $\cot \frac{A+B+2C}{2} = \tan \frac{C}{2}$ .

**Câu 128:** Cho  $A, B, C$  là ba góc của một tam giác. Hãy chỉ ra hệ thức SAI.

- A.  $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$ .  
 B.  $\cos(A+B+2C) = -\cos C$ .  
 C.  $\sin(A+C) = -\sin B$ .  
 D.  $\cos(A+B) = -\cos C$ .

**Câu 129:** Cho  $A, B, C$  là ba góc của một tam giác không vuông. Hệ thức nào sau đây **SAI**?

**A.**  $\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sin \frac{A}{2}.$

**B.**  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C.$

**C.**  $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cdot \cot B \cdot \cot C.$

**D.**  $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1.$

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 2. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC



### HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

#### DẠNG 1. ÁP DỤNG CÔNG THỨC CỘNG

**Câu 1:** Trong các công thức sau, công thức nào đúng?

**A.**  $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b.$

**B.**  $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b.$

**C.**  $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b.$

**D.**  $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b.$

**Lời giải**

Công thức cộng:  $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b.$

**Câu 2:** Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.**  $\tan(x-y) = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x \tan y}.$

**B.**  $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$

**C.**  $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$

**D.**  $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{\tan x \tan y}.$

**Lời giải**

Ta có  $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$

**Câu 3:** Trong các công thức sau, công thức nào **đúng**?

**A.**  $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b.$

**B.**  $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b.$

**C.**  $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b.$

**D.**  $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b.$

**Lời giải**

Theo công thức cộng ta có:

$\rightarrow \cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b.$

$\rightarrow \sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b.$

**Câu 4:** Phát biểu nào sau đây **đúng**?

**A.**  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}.$

**B.**  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}.$

**C.**  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}.$

**D.**  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}.$

**Lời giải**

Theo công thức cộng ta có:  $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$ .

**Câu 5:** Biểu thức  $\sin x \cos y - \cos x \sin y$  bằng

- A.**  $\cos(x - y)$ .      **B.**  $\cos(x + y)$ .      **C.**  $\sin(x - y)$ .      **D.**  $\sin(y - x)$ .

**Lời giải**

Áp dụng công thức cộng lượng giác ta có đáp án.

**C.**

**Câu 6:** Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

- A.**  $\cos(a + b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ .      **B.**  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ .  
**C.**  $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ .      **D.**  $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ .

**Lời giải**

Ta có công thức đúng là:  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ .

**Câu 7:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.**  $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$ .      **B.**  $\cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ .  
**C.**  $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ .      **D.**  $2 \cos a \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$ .

**Lời giải**

Câu A, D là công thức biến đổi đúng

Câu C là công thức cộng đúng

Câu B sai vì  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ .

**Câu 8:** Biểu thức  $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$  bằng biểu thức nào sau đây?

- A.**  $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}$ .      **B.**  $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b}$ .  
**C.**  $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}$ .      **D.**  $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\cot a + \cot b}{\cot a - \cot b}$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\sin a \cos b - \cos a \sin b}$

$$= \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}.$$

**Câu 9:** Cho  $\tan \alpha = 2$ . Tính  $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ .

- A.**  $-\frac{1}{3}$ .      **B.** 1.      **C.**  $\frac{2}{3}$ .      **D.**  $\frac{1}{3}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{2-1}{1+2} = \frac{1}{3}.$$

**Câu 10:** Cho hai góc  $\alpha, \beta$  thỏa mãn  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$  và  $\cos \beta = \frac{3}{5}$ ,  $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ . Tính giá trị đúng của  $\cos(\alpha - \beta)$ .

- A.**  $\frac{16}{65}$ .                      **B.**  $-\frac{18}{65}$ .                      **C.**  $\frac{18}{65}$ .                      **D.**  $-\frac{16}{65}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \sin \alpha = \frac{5}{13}, \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right) \text{ nên } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}.$$

$$\cos \beta = \frac{3}{5}, \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên } \sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{16}{65}.$$

**Câu 11:** Cho góc lượng giác  $\alpha$   $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$ . Xét dấu  $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$  và  $\tan(-\alpha)$ . Chọn kết quả đúng.

- A.**  $\begin{cases} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0 \\ \tan(-\alpha) < 0 \end{cases}$ .    **B.**  $\begin{cases} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0 \\ \tan(-\alpha) < 0 \end{cases}$ .    **C.**  $\begin{cases} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0 \\ \tan(-\alpha) > 0 \end{cases}$ .    **D.**  $\begin{cases} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0 \\ \tan(-\alpha) > 0 \end{cases}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \begin{cases} \pi < \alpha + \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} \\ -\pi < -\alpha < -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0 \\ \tan(-\alpha) > 0 \end{cases}.$$

**Câu 12:** Rút gọn biểu thức:  $\sin(a - 17^\circ) \cdot \cos(a + 13^\circ) - \sin(a + 13^\circ) \cdot \cos(a - 17^\circ)$ , ta được:

- A.**  $\sin 2a$ .                      **B.**  $\cos 2a$ .                      **C.**  $-\frac{1}{2}$ .                      **D.**  $\frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \sin(a - 17^\circ) \cdot \cos(a + 13^\circ) - \sin(a + 13^\circ) \cdot \cos(a - 17^\circ) = \sin[(a - 17^\circ) - (a + 13^\circ)] \\ & = \sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Câu 13:** Cho hai góc  $\alpha$  và  $\beta$  thỏa mãn  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$  và  $\cos \beta = \frac{12}{13}$ ,  $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ . Giá trị của  $\sin(\alpha - \beta)$  là

- A.**  $-\frac{56}{65}$ .                      **B.**  $\frac{56}{65}$ .                      **C.**  $\frac{16}{65}$ .                      **D.**  $-\frac{16}{65}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  nên  $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$ .

Lại có:  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  nên  $\sin \beta > 0 \Rightarrow \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{5}{13}$ .

Vậy  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} - \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{5}{13} = \frac{56}{65}$ .

**Câu 14:** Tính giá trị  $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$  biết  $\sin \alpha = \frac{1}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ .

- A.**  $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .      **B.**  $-\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$ .      **C.**  $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$ .      **D.**  $\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$ .

**Lời giải**

Vì  $\sin \alpha = \frac{1}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  nên  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

Do đó  $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1-2\sqrt{6}}{6}$ .

**Câu 15:** Cho  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  với  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Biết giá trị của  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a\sqrt{5} - b\sqrt{15}}{10}$  với  $a, b \in \mathbb{N}$  và  $(a, b) = 1$ . Tính  $a + b$ .

- A.** 4.      **B.** 10.      **C.** 7.      **D.** 3.

**Lời giải**

Ta có:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

Ta có:  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{10} - \frac{2\sqrt{15}}{10} = \frac{\sqrt{5} - 2\sqrt{15}}{10}$ .

Suy ra  $a = 1, b = 2 \Rightarrow a + b = 3$ .

**Câu 16:** Với  $\alpha$  là số thực bất kỳ, rút gọn biểu thức  $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)$ .

- A.**  $A = 2 \sin \alpha$ .      **B.**  $A = 2 \cos \alpha$ .      **C.**  $A = 1$ .      **D.**  $A = 0$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ ;  $\sin(\alpha - \pi) = -\sin \alpha$ .

Do đó  $A = 0$ .

**Câu 17:** Cho  $x, y$  là các góc nhọn,  $\cot x = \frac{4}{3}, \cot y = 7$ . Tổng  $x + y$  bằng

**A.**  $\frac{\pi}{3}$ .

**B.**  $\frac{\pi}{4}$ .

**C.**  $\frac{\pi}{6}$ .

**D.**  $\frac{2\pi}{3}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cot x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \tan x = \frac{3}{4}$  ;  $\cot y = 7 \Leftrightarrow \tan y = \frac{1}{7}$ .

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = 1$ , suy ra  $x+y = \frac{\pi}{4}$ .

**Câu 18:** Cho hai góc nhọn  $a$  và  $b$  với  $\sin a = \frac{1}{3}$ ,  $\sin b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Giá trị của  $\sin 2(a+b)$  là

**A.**  $\frac{7\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{18}$ .

**B.**  $\frac{7\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{18}$ .

**C.**  $\frac{7\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{18}$ .

**D.**  $\frac{7\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{18}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\begin{cases} 0 < a < \frac{\pi}{2} \\ \sin a = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \cos a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ;  $\begin{cases} 0 < b < \frac{\pi}{2} \\ \sin b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos b = \frac{1}{2}$ .

$\sin 2(a+b) = 2 \sin(a+b) \cdot \cos(a+b) = 2(\sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a)(\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b)$   
 $= \frac{7\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{18}$ .

**Câu 19:** Biết  $\sin a = \frac{5}{13}$ ,  $\cos b = \frac{3}{5}$ ,  $\left(\frac{\pi}{2} < a < \pi, 0 < b < \frac{\pi}{2}\right)$ . Hãy tính  $\sin(a+b)$ .

**A.**  $-\frac{33}{65}$ .

**B.**  $\frac{63}{65}$ .

**C.**  $\frac{56}{65}$ .

**D.** 0.

**Lời giải**

Ta có:  $\cos a = \pm\sqrt{1-\sin^2 a}$

Do  $\frac{\pi}{2} < a < \pi \Rightarrow \cos a < 0 \Rightarrow \cos a = -\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}$ .

Ta có:  $\sin b = \pm\sqrt{1-\cos^2 b}$

Do  $0 < b < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin b > 0 \Rightarrow \sin b = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$ .

Vậy  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b = \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{-12}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{33}{65}$ .

**Câu 20:** Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$ . Tính  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ .

**A.**  $\frac{48+25\sqrt{3}}{11}$ .

**B.**  $\frac{8-5\sqrt{3}}{11}$ .

**C.**  $\frac{8-\sqrt{3}}{11}$ .

**D.**  $\frac{48-25\sqrt{3}}{11}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\tan \alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \alpha}$$

$$\text{Mà } \sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}, \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan \alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \alpha} = \frac{-\frac{3}{4} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{4 + 3\sqrt{3}} = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}.$$

**Câu 21:** Rút gọn biểu thức:  $\sin(a - 17^\circ) \cdot \cos(a + 13^\circ) - \sin(a + 13^\circ) \cdot \cos(a - 17^\circ)$ , ta được:

- A.  $\sin 2a$ .                      B.  $\cos 2a$ .                      C.  $-\frac{1}{2}$ .                      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sin(a - 17^\circ) \cdot \cos(a + 13^\circ) - \sin(a + 13^\circ) \cdot \cos(a - 17^\circ) &= \sin[(a - 17^\circ) - (a + 13^\circ)] \\ &= \sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Câu 22:** Giá trị của biểu thức  $\cos \frac{37\pi}{12}$  bằng

- A.  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ .                      C.  $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \cos \frac{37\pi}{12} &= \cos\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\left(\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

**Câu 23:** Đẳng thức nào sau đây là đúng.

- A.  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \alpha + \frac{1}{2}$ .                      B.  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha$ .  
C.  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha$ .                      D.  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha.$$

**Câu 24:** Cho  $\tan \alpha = 2$ . Tính  $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ .

- A.  $-\frac{1}{3}$ .                      B. 1.                      C.  $\frac{2}{3}$ .                      D.  $\frac{1}{3}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{2-1}{1+2} = \frac{1}{3}$ .

**Câu 25:** Kết quả nào sau đây sai?

**A.**  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

**B.**  $\sin x - \cos x = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

**C.**  $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

**D.**  $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin 2x + \cos 2x &= \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x \right) \\ &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x + \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x \right) \\ &= \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \neq \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

**Câu 26:** Cho  $\sin x = \frac{3}{5}$  với  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  khi đó  $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  bằng.

**A.**  $\frac{2}{7}$ .

**B.**  $-\frac{1}{7}$ .

**C.**  $-\frac{2}{7}$ .

**D.**  $\frac{1}{7}$ .

**Lời giải**

Từ  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \frac{4}{5}$ .

Vì  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  nên  $\cos x = -\frac{4}{5}$  do đó  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{3}{4}$ .

Ta có:  $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{3}{4} + 1}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{7}$ .

**Câu 27:** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$  với  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Giá trị của  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$  bằng

**A.**  $\frac{2 - \sqrt{6}}{2\sqrt{6}}$ .

**B.**  $\sqrt{6} - 3$ .

**C.**  $\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2}$ .

**D.**  $\sqrt{6} - \frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

Ta có:  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2} = \frac{2 - \sqrt{6}}{2\sqrt{6}}$ .

**Câu 28:** Cho hai góc  $\alpha, \beta$  thỏa mãn  $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$  và  $\cos\beta = \frac{3}{5}$ ,  $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ . Tính giá trị đúng của  $\cos(\alpha - \beta)$ .

- A.  $\frac{16}{65}$ .      B.  $-\frac{18}{65}$ .      C.  $\frac{18}{65}$ .      D.  $-\frac{16}{65}$ .

**Lời giải**

$\sin\alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$  nên  $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}$ .

$\cos\beta = \frac{3}{5}$ ,  $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$  nên  $\sin\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$ .

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = -\frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{16}{65}$ .

**Câu 29:** Cho  $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ . Tính giá trị  $\cos\left(\alpha - \frac{21\pi}{4}\right)$ ?

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{10}$ .      B.  $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$ .      C.  $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ .      D.  $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$ . Do  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\alpha < 0$  nên  $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ .

Vậy:  $\cos\left(\alpha - \frac{21\pi}{4}\right) = \cos\alpha\cos\frac{21\pi}{4} + \sin\alpha\sin\frac{21\pi}{4} = \frac{-4}{5}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$ .

**Câu 30:** Biểu thức  $M = \cos(-53^\circ) \cdot \sin(-337^\circ) + \sin 307^\circ \cdot \sin 113^\circ$  có giá trị bằng:

- A.  $-\frac{1}{2}$ .      B.  $\frac{1}{2}$ .      C.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .      D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} M &= \cos(-53^\circ) \cdot \sin(-337^\circ) + \sin 307^\circ \cdot \sin 113^\circ \\ &= \cos(-53^\circ) \cdot \sin(23^\circ - 360^\circ) + \sin(-53^\circ + 360^\circ) \cdot \sin(90^\circ + 23^\circ) \\ &= \cos(-53^\circ) \cdot \sin 23^\circ + \sin(-53^\circ) \cdot \cos 23^\circ = \sin(23^\circ - 53^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Câu 31:** Rút gọn biểu thức:  $\cos 54^\circ \cdot \cos 4^\circ - \cos 36^\circ \cdot \cos 86^\circ$ , ta được:

- A.  $\cos 50^\circ$ .      B.  $\cos 58^\circ$ .      C.  $\sin 50^\circ$ .      D.  $\sin 58^\circ$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\cos 54^\circ \cdot \cos 4^\circ - \cos 36^\circ \cdot \cos 86^\circ = \cos 54^\circ \cdot \cos 4^\circ - \sin 54^\circ \cdot \sin 4^\circ = \cos 58^\circ$ .

**Câu 32:** Cho hai góc nhọn  $a$  và  $b$  với  $\tan a = \frac{1}{7}$  và  $\tan b = \frac{3}{4}$ . Tính  $a + b$ .

A.  $\frac{\pi}{3}$ .

B.  $\frac{\pi}{4}$ .

C.  $\frac{\pi}{6}$ .

D.  $\frac{2\pi}{3}$ .

Lời giải.

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} = 1, \text{ suy ra } a+b = \frac{\pi}{4}$$

**Câu 33:** Cho  $x, y$  là các góc nhọn,  $\cot x = \frac{3}{4}$ ,  $\cot y = \frac{1}{7}$ . Tổng  $x+y$  bằng:

A.  $\frac{\pi}{4}$ .

B.  $\frac{3\pi}{4}$ .

C.  $\frac{\pi}{3}$ .

D.  $\pi$ .

Lời giải.

Ta có :

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \frac{\frac{4}{3} + 7}{1 - \frac{4}{3} \cdot 7} = -1, \text{ suy ra } x+y = \frac{3\pi}{4}.$$

**Câu 34:** Biểu thức  $A = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$  không phụ thuộc  $x$  và bằng:

A.  $\frac{3}{4}$ .

B.  $\frac{4}{3}$ .

C.  $\frac{3}{2}$ .

D.  $\frac{2}{3}$ .

Lời giải.

Ta có :

$$A = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos^2 x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

**Câu 35:** Biết  $\sin \beta = \frac{4}{5}$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  và  $\alpha \neq k\pi$ . Giá trị của biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{3} \sin(\alpha + \beta) - \frac{4 \cos(\alpha + \beta)}{\sqrt{3}}}{\sin \alpha}$  không phụ thuộc vào  $\alpha$  và bằng

A.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ .

B.  $\frac{5}{\sqrt{3}}$ .

C.  $\frac{\sqrt{3}}{5}$ .

D.  $\frac{3}{\sqrt{5}}$ .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \\ \sin \beta = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \cos \beta = \frac{3}{5}, \text{ thay vào biểu thức } A = \frac{\sqrt{3} \sin(\alpha + \beta) - \frac{4 \cos(\alpha + \beta)}{\sqrt{3}}}{\sin \alpha} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

**Câu 36:** Nếu  $\tan \frac{\beta}{2} = 4 \tan \frac{\alpha}{2}$  thì  $\tan \frac{\beta - \alpha}{2}$  bằng:

**A.**  $\frac{3 \sin \alpha}{5 - 3 \cos \alpha}$ .

**B.**  $\frac{3 \sin \alpha}{5 + 3 \cos \alpha}$ .

**C.**  $\frac{3 \cos \alpha}{5 - 3 \cos \alpha}$ .

**D.**  $\frac{3 \cos \alpha}{5 + 3 \cos \alpha}$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$\tan \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\tan \frac{\beta}{2} - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{3 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + 4 \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{3 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{1 + 3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{3 \sin \alpha}{5 - 3 \cos \alpha}.$$

**Câu 37:** Cho  $\cos a = \frac{3}{4}$ ;  $\sin a > 0$ ;  $\sin b = \frac{3}{5}$ ;  $\cos b < 0$ . Giá trị của  $\cos(a+b)$ , bằng:

**A.**  $\frac{3}{5} \left( 1 + \frac{\sqrt{7}}{4} \right)$ .

**B.**  $-\frac{3}{5} \left( 1 + \frac{\sqrt{7}}{4} \right)$ .

**C.**  $\frac{3}{5} \left( 1 - \frac{\sqrt{7}}{4} \right)$ .

**D.**  $-\frac{3}{5} \left( 1 - \frac{\sqrt{7}}{4} \right)$ .

**Lời giải.**

Ta có :

$$\begin{cases} \cos a = \frac{3}{4} \\ \sin a > 0 \end{cases} \Rightarrow \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\begin{cases} \sin b = \frac{3}{5} \\ \cos b < 0 \end{cases} \Rightarrow \cos b = -\sqrt{1 - \sin^2 b} = -\frac{4}{5}.$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \frac{3}{4} \cdot \left( -\frac{4}{5} \right) - \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{3}{5} \left( 1 + \frac{\sqrt{7}}{4} \right).$$

**Câu 38:** Biết  $\cos\left(a - \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2}$  và  $\sin\left(a - \frac{b}{2}\right) > 0$ ;  $\sin\left(\frac{a}{2} - b\right) = \frac{3}{5}$  và  $\cos\left(\frac{a}{2} - b\right) > 0$ . Giá trị  $\cos(a+b)$  bằng:

**A.**  $\frac{24\sqrt{3} - 7}{50}$ .

**B.**  $\frac{7 - 24\sqrt{3}}{50}$ .

**C.**  $\frac{22\sqrt{3} - 7}{50}$ .

**D.**  $\frac{7 - 22\sqrt{3}}{50}$ .

**Lời giải.**

**Chọn A**

Ta có :

$$\begin{cases} \cos\left(a - \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ \sin\left(a - \frac{b}{2}\right) > 0 \end{cases} \Rightarrow \sin\left(a - \frac{b}{2}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(a - \frac{b}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{a}{2} - b\right) = \frac{3}{5} \\ \cos\left(\frac{a}{2} - b\right) > 0 \end{cases} \Rightarrow \cos\left(\frac{a}{2} - b\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{a}{2} - b\right)} = \frac{4}{5}.$$

$$\cos \frac{a+b}{2} = \cos \left( a - \frac{b}{2} \right) \cos \left( \frac{a}{2} - b \right) + \sin \left( a - \frac{b}{2} \right) \sin \left( \frac{a}{2} - b \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}.$$

$$\cos(a+b) = 2 \cos^2 \frac{a+b}{2} - 1 = \frac{24\sqrt{3} - 7}{50}.$$

**Câu 39:** Rút gọn biểu thức:  $\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x$  ta được kết quả là

- A. 0.                                      B.  $-\cos x$ .                                      C.  $-2 \cos x$ .                                      D.  $\sin x - \cos x$ .

**Lời giải.**

**Chọn C**

$$\begin{aligned} \cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x &= -\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \cos x \\ &= -2 \cos x \end{aligned}$$

**Câu 40:** Cho  $\sin a = \frac{3}{5}$ ;  $\cos a < 0$ ;  $\cos b = \frac{3}{4}$ ;  $\sin b > 0$ . Giá trị  $\sin(a-b)$  bằng:

- A.  $-\frac{1}{5} \left( \sqrt{7} + \frac{9}{4} \right)$ .                                      B.  $-\frac{1}{5} \left( \sqrt{7} - \frac{9}{4} \right)$ .                                      C.  $\frac{1}{5} \left( \sqrt{7} + \frac{9}{4} \right)$ .                                      D.  $\frac{1}{5} \left( \sqrt{7} - \frac{9}{4} \right)$ .

**Lời giải.**

**Chọn A**

Ta có :

$$\begin{cases} \sin a = \frac{3}{5} \\ \cos a < 0 \end{cases} \Rightarrow \cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\frac{4}{5}.$$

$$\begin{cases} \cos b = \frac{3}{4} \\ \sin b > 0 \end{cases} \Rightarrow \sin b = \sqrt{1 - \cos^2 b} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} - \left( -\frac{4}{5} \right) \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{5} \left( \sqrt{7} + \frac{9}{4} \right).$$

**Câu 41:** Biết  $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$  và  $\cot \alpha, \cot \beta, \cot \gamma$  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tích số  $\cot \alpha \cdot \cot \gamma$  bằng:

- A. 2.                                      B. -2.                                      C. 3.                                      D. -3.

**Lời giải.**

**Chọn C**

Ta có :

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}, \text{ suy ra } \cot \beta = \tan(\alpha + \gamma) = \frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \gamma} = \frac{\cot \alpha + \cot \gamma}{\cot \alpha \cot \gamma - 1} = \frac{2 \cot \beta}{\cot \alpha \cot \gamma - 1}$$

$$\Rightarrow \cot \alpha \cot \gamma = 3.$$

DẠNG 2. ỨNG DỤNG CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI – HẠ BẬC

**Câu 42:** Đẳng thức nào **không đúng** với mọi  $x$ ?

**A.**  $\cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2}$ . **B.**  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ .

**C.**  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ . **D.**  $\sin^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$ .

**Câu 43:** Trong các công thức sau, công thức nào **sai**?

**A.**  $\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$ . **B.**  $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$ .

**C.**  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ .

**D.**  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

**Lời giải.**

**Chọn B**

Công thức đúng là  $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ .

**Câu 44:** Trong các công thức sau, công thức nào **sai**?

**A.**  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ .

**B.**  $\cos 2a = \cos^2 a + \sin^2 a$ .

**C.**  $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ . **D.**  $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ .

**Lời giải.**

**Chọn B**

Ta có  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$ .

**Câu 45:** Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

**A.**  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ .

**B.**  $\cos 2a = \cos^2 a + \sin^2 a$ .

**C.**  $\cos 2a = 2 \cos^2 a + 1$ . **D.**  $\cos 2a = 2 \sin^2 a - 1$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 46:** Cho góc lượng giác  $a$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định sai?

**A.**  $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ . **B.**  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ .

**C.**  $\cos 2a = 1 - 2 \cos^2 a$ . **D.**  $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$ .

**Câu 47:** Khẳng định nào dưới đây **SAI**?

**A.**  $2 \sin^2 a = 1 - \cos 2a$ . **B.**  $\cos 2a = 2 \cos a - 1$ .

**C.**  $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ . **D.**  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Có  $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$  nên đáp án **B** sai.

**Câu 48:** Chọn đảo án đúng.

**A.**  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ . **B.**  $\sin 2x = \sin x \cos x$ . **C.**  $\sin 2x = 2 \cos x$ . **D.**  $\sin 2x = 2 \sin x$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 49:** Cho  $\cos x = \frac{4}{5}$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ . Giá trị của  $\sin 2x$  là

**A.**  $\frac{24}{25}$ . **B.**  $-\frac{24}{25}$ . **C.**  $-\frac{1}{5}$ . **D.**  $\frac{1}{5}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5}$  vì  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \Rightarrow \sin x < 0$ .

Vậy  $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$ .

**Câu 50:** Cho  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ ,  $\cos 2\alpha$  nhận giá trị nào trong các giá trị sau

**A.**  $-\frac{1}{9}$ . **B.**  $-\frac{4}{3}$ . **C.**  $\frac{4}{3}$ . **D.**  $-\frac{2}{3}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{-1}{9}$ .

**Câu 51:** Biết  $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$ . Với  $a = -b$  thì  $\cos 2a$  bằng

**A.**  $\cos^2 a + \sin^2 a$ . **B.**  $-\cos^2 a - \sin^2 a$ . **C.**  $\cos^2 a - \sin^2 a$ . **D.**  $\sin^2 a - \cos^2 a$ .

**Lời giải**

Khi  $a = -b \Rightarrow \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ .

**Câu 52:** Với  $\alpha$  là số thực bất kỳ, trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

**A.**  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ . **B.**  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ .  
**C.**  $\cos 2\alpha = -2 \sin^2 \alpha + 1$ . **D.**  $\cos 2\alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ ;  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ .

Do đó A, B, C đúng; D sai.

**Câu 53:** Biết rằng  $\sin 18^\circ = \frac{a+b\sqrt{5}}{c}$ , với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $c \neq 0$  và  $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$  là các phân số tối giản. Giá trị của biểu thức  $S = a + b + c$  là

**A.**  $S = 2$ .

**B.**  $S = 4$ .

**C.**  $S = 3$ .

**D.**  $S = 1$ .

**Lời giải**

Ta có  $\cos 36^\circ = \sin 54^\circ \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 18^\circ = 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ$ .

$\Leftrightarrow 4\sin^3 18^\circ - 2\sin^2 18^\circ - 3\sin 18^\circ + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sin 18^\circ - 1)(4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 18^\circ = 1 \\ \sin 18^\circ = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Vì  $0^\circ < 18^\circ < 90^\circ$  nên  $0 < \sin 18^\circ < 1$ , do đó  $\sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Suy ra  $a = -1, b = 1, c = 2$ . Vậy  $S = a + b + c = 2$ .

**Câu 54:** Cho  $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$  và  $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ . Giá trị của  $\sin \alpha$  là

**A.**  $\frac{2}{5}$ .

**B.**  $\frac{1}{5}$ .

**C.**  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

**D.**  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**Lời giải**

Ta có:

⊙  $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi \Rightarrow \sin \alpha > 0$ .

⊙  $\frac{3\pi}{2} < 2\alpha < 2\pi \Rightarrow \cos 2\alpha > 0$ .

⊙  $\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{3}{5}$ .

⊙  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{3}{5}}{2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**Câu 55:** Cho  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}; \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  thì  $\sin 2\alpha$  bằng

**A.**  $-\frac{24}{25}$ .

**B.**  $\frac{24}{25}$ .

**C.**  $\frac{4}{5}$ .

**D.**  $-\frac{4}{5}$ .

**Lời giải**

Vì  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  nên  $\sin \alpha > 0; \cos \alpha = -\frac{3}{5}$ .

Ta có  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$ .

$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$ .

**Câu 56:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

**A.**  $\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x \cdot \cos x$ .

**B.**  $\cos 3x - \cos x = 2\sin 2x \cdot \sin x$ .

**C.**  $\sin 3x - \sin x = 2\cos 2x \cdot \sin x$ .

**D.**  $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x \cdot \cos x$ .

**Lời giải**

$$\cos 3x - \cos x = -2 \sin 2x \cdot \sin x$$

**Câu 57:** Với  $\alpha$  là số thực bất kỳ, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

**A.**  $\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 2 \cos 2\alpha \cdot \cos 6\alpha$ .

**B.**  $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos 3\alpha$ .

**C.**  $\cos 2\alpha - \cos 4\alpha = -2 \sin 3\alpha \cdot \sin \alpha$ .

**D.**  $\sin 2\alpha - \sin 4\alpha = -2 \cos 3\alpha \cdot \sin \alpha$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 2 \cos \frac{2\alpha + 4\alpha}{2} \cos \frac{2\alpha - 4\alpha}{2} = 2 \cos 3\alpha \cos \alpha. \text{ Do đó A sai.}$$

$$\sin 2\alpha + \sin 4\alpha = 2 \sin \frac{2\alpha + 4\alpha}{2} \cdot \cos \frac{2\alpha - 4\alpha}{2} = 2 \sin 3\alpha \cdot \cos \alpha. \text{ Do đó B sai.}$$

$$\cos 2\alpha - \cos 4\alpha = -2 \sin \frac{2\alpha + 4\alpha}{2} \cdot \sin \frac{2\alpha - 4\alpha}{2} = 2 \sin 3\alpha \cdot \sin \alpha. \text{ Do đó C sai.}$$

$$\sin 2\alpha - \sin 4\alpha = 2 \cos \frac{2\alpha + 4\alpha}{2} \cdot \sin \frac{2\alpha - 4\alpha}{2} = -2 \cos 3\alpha \cdot \sin \alpha. \text{ Do đó D đúng.}$$

**Câu 58:** Số khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I)  $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$ .

(II)  $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ .

(III)  $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ .

(VI)  $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ .

**A.** 0.

**B.** 1.

**C.** 2.

**D.** 3.

**Lời giải**

Khẳng định (VI) sai nên có 3 khẳng định đúng.

**Câu 59:** Nếu  $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$  thì  $\sin 2x$  bằng

**A.**  $\frac{3}{4}$ .

**B.**  $\frac{3}{8}$ .

**C.**  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**D.**  $-\frac{3}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}$$

**Câu 60:** Biết rằng  $\sin^6 x + \cos^6 x = a + b \sin^2 2x$ , với  $a, b$  là các số thực. Tính  $T = 3a + 4b$ .

**A.**  $T = -7$ .

**B.**  $T = 1$ .

**C.**  $T = 0$ .

**D.**  $T = 7$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } a=1, b=-\frac{3}{4}. \text{ Do đó } T=3a+4b=0.$$

**Câu 61:** Cho  $\sin 2\alpha = \frac{3}{4}$ . Tính giá trị biểu thức  $A = \tan \alpha + \cot \alpha$

**A.**  $A = \frac{4}{3}$ .      **B.**  $A = \frac{2}{3}$ .      **C.**  $A = \frac{8}{3}$ .      **D.**  $A = \frac{16}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$A = \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{8}{3}.$$

**Câu 62:** Cho  $a, b$  là hai góc nhọn. Biết  $\cos a = \frac{1}{3}, \cos b = \frac{1}{4}$ . Giá trị của biểu thức  $\cos(a+b)\cos(a-b)$  bằng

**A.**  $-\frac{119}{144}$ .      **B.**  $-\frac{115}{144}$ .      **C.**  $-\frac{113}{144}$ .      **D.**  $-\frac{117}{144}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Từ } \cos a = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = -\frac{7}{9}$$

$$\cos b = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2b = 2\cos^2 b - 1 = -\frac{7}{8}$$

$$\text{Ta có } \cos(a+b)\cos(a-b) = \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b) = \frac{1}{2}\left(-\frac{7}{9} - \frac{7}{8}\right) = -\frac{119}{144}.$$

**Câu 63:** Cho số thực  $\alpha$  thỏa mãn  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ . Tính  $(\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha)\cos \alpha$

**A.**  $\frac{25}{128}$ .      **B.**  $\frac{1}{16}$ .      **C.**  $\frac{255}{128}$ .      **D.**  $\frac{225}{128}$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha)\cos \alpha &= 2\sin 2\alpha(\cos 2\alpha + 1)\cos \alpha = 4\sin \alpha \cos \alpha(1 - 2\sin^2 \alpha + 1)\cos \alpha \\ &= 4\sin \alpha(1 - \sin^2 \alpha)(2 - 2\sin^2 \alpha) = 8(1 - \sin^2 \alpha)^2 \sin \alpha = 8\left(1 - \frac{1}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{225}{128}. \end{aligned}$$

**Câu 64:** Cho  $\cot a = 15$ , giá trị  $\sin 2a$  có thể nhận giá trị nào dưới đây:

A.  $\frac{11}{113}$ .

B.  $\frac{13}{113}$ .

C.  $\frac{15}{113}$ .

D.  $\frac{17}{113}$ .

Lời giải.

**Chọn C**

$$\cot a = 15 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 a} = 226 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 a = \frac{1}{226} \\ \cos^2 a = \frac{225}{226} \end{cases} \Rightarrow \sin 2a = \pm \frac{15}{113}.$$

### DẠNG 3. ÁP DỤNG CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG, TỔNG THÀNH TÍCH

**Câu 65:** Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A.  $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$ .      B.  $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) - \cos(a+b)]$ .

C.  $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ .      D.  $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$ .

Lời giải

**Chọn B**

Ta có  $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$ .

**Câu 66:** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

A.  $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$ .      B.  $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ .

C.  $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$ .      D.  $\cos a + \cos b = 2 \cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$ .

Lời giải

**Chọn D**

Ta có:  $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ .

**Câu 67:** Công thức nào sau đây là **sai**?

A.  $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ .      B.  $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$ .

C.  $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ .      D.  $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ .

Lời giải

**Chọn D**

Ta có  $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$ .

**Câu 68:** Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sin 3x + \cos 2x - \sin x}{\cos x + \sin 2x - \cos 3x}$  ( $\sin 2x \neq 0; 2 \sin x + 1 \neq 0$ ) ta được:

A.  $A = \cot 6x$ .

B.  $A = \cot 3x$ .

**C.**  $A = \cot 2x$ .

**D.**  $A = \tan x + \tan 2x + \tan 3x$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$A = \frac{\sin 3x + \cos 2x - \sin x}{\cos x + \sin 2x - \cos 3x} = \frac{2 \cos 2x \sin x + \cos 2x}{2 \sin 2x \sin x + \sin 2x} = \frac{\cos 2x(1 + 2 \sin x)}{\sin 2x(1 + 2 \sin x)} = \cot 2x.$$

**Câu 69:** Rút gọn biểu thức  $P = \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$ .

**A.**  $-\frac{3}{2}\cos 2a$ .

**B.**  $\frac{1}{2}\cos 2a$ .

**C.**  $-\frac{2}{3}\cos 2a$ .

**D.**  $-\frac{1}{2}\cos 2a$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos 2a\right] = -\frac{1}{2}\cos 2a.$$

**Câu 70:** Biến đổi biểu thức  $\sin \alpha - 1$  thành tích.

**A.**  $\sin \alpha - 1 = 2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ .

**B.**  $\sin \alpha - 1 = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ .

**C.**  $\sin \alpha - 1 = 2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ .

**D.**  $\sin \alpha - 1 = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\sin \alpha - 1 = \sin \alpha - \sin \frac{\pi}{2} = 2 \cos \frac{\alpha + \frac{\pi}{2}}{2} \sin \frac{\alpha - \frac{\pi}{2}}{2} = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

**Câu 71:** Rút gọn biểu thức  $P = \frac{\cos a + 2 \cos 3a + \cos 5a}{\sin a + 2 \sin 3a + \sin 5a}$ .

**A.**  $P = \tan a$ .

**B.**  $P = \cot a$ .

**C.**  $P = \cot 3a$ .

**D.**  $P = \tan 3a$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$P = \frac{\cos a + 2 \cos 3a + \cos 5a}{\sin a + 2 \sin 3a + \sin 5a} = \frac{2 \cos 3a \cos a + 2 \cos 3a}{2 \sin 3a \cos a + 2 \sin 3a}$$

$$= \frac{2 \cos 3a (\cos a + 1)}{2 \sin 3a (\cos a + 1)} = \frac{\cos 3a}{\sin 3a} = \cot 3a.$$

**Câu 72:** Tính giá trị biểu thức  $P = \sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$ .

**A.**  $P = 1$ .

**B.**  $P = 0$ .

**C.**  $P = \sqrt{3}$ .

**D.**  $P = -\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có } P = \sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 90^\circ = 1.$$

**Câu 73:** Giá trị đúng của  $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$  bằng:

- A.  $\frac{1}{2}$ .                      B.  $-\frac{1}{2}$ .                      C.  $\frac{1}{4}$ .                      D.  $-\frac{1}{4}$ .

**Lời giải.**

**Chọn B**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} &= \frac{\sin \frac{\pi}{7} \left( \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right)}{\sin \frac{\pi}{7}} \\ &= \frac{\sin \frac{3\pi}{7} + \sin \left( -\frac{\pi}{7} \right) + \sin \frac{5\pi}{7} + \sin \left( -\frac{3\pi}{7} \right) + \sin \pi + \sin \left( -\frac{5\pi}{7} \right)}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \left( -\frac{\pi}{7} \right)}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Câu 74:** Giá trị đúng của  $\tan \frac{\pi}{24} + \tan \frac{7\pi}{24}$  bằng:

- A.  $2(\sqrt{6} - \sqrt{3})$ .                      B.  $2(\sqrt{6} + \sqrt{3})$ .                      C.  $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ .                      D.  $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ .

**Lời giải.**

**Chọn A**

$$\tan \frac{\pi}{24} + \tan \frac{7\pi}{24} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{7\pi}{24}} = \frac{\sqrt{3}}{\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{4}} = 2(\sqrt{6} - \sqrt{3}).$$

**Câu 75:** Biểu thức  $A = \frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ$  có giá trị đúng bằng:

- A. 1.                      B. -1.                      C. 2.                      D. -2.

**Lời giải.**

**Chọn A**

$$A = \frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ = \frac{1 - 4 \sin 10^\circ \cdot \sin 70^\circ}{2 \sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 80^\circ}{2 \sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ} = 1.$$

**Câu 76:** Tích số  $\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$  bằng:

- A.  $\frac{1}{16}$ .                      B.  $\frac{1}{8}$ .                      C.  $\frac{3}{16}$ .                      D.  $\frac{1}{4}$ .

**Lời giải.**

**Chọn C**

$$\begin{aligned} \cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ &= \cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \frac{1}{2} (\cos 120^\circ + \cos 20^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left( -\frac{\cos 10^\circ}{2} + \frac{\cos 30^\circ + \cos 10^\circ}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16}. \end{aligned}$$

**Câu 77:** Tích số  $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7}$  bằng:

- A.  $\frac{1}{8}$ .                      B.  $-\frac{1}{8}$ .                      C.  $\frac{1}{4}$ .                      D.  $-\frac{1}{4}$ .

**Lời giải.**

**Chọn A**

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7} &= \frac{\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{4 \sin \frac{\pi}{7}} \\ &= -\frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

**Câu 78:** Giá trị đúng của biểu thức  $A = \frac{\tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ}{\cos 20^\circ}$  bằng:

- A.**  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .      **B.**  $\frac{4}{\sqrt{3}}$ .      **C.**  $\frac{6}{\sqrt{3}}$ .      **D.**  $\frac{8}{\sqrt{3}}$ .

**Lời giải.**

**Chọn D**

$$\begin{aligned} A &= \frac{\tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\frac{\sin 70^\circ}{\cos 30^\circ \cdot \cos 40^\circ} + \frac{\sin 110^\circ}{\cos 50^\circ \cdot \cos 60^\circ}}{\cos 20^\circ} \\ &= \frac{1}{\cos 30^\circ \cdot \cos 40^\circ} + \frac{1}{\cos 50^\circ \cdot \cos 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3} \cos 40^\circ} + \frac{2}{\cos 50^\circ} = 2 \left( \frac{\cos 50^\circ + \sqrt{3} \cos 40^\circ}{\sqrt{3} \cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ} \right) \\ &= 2 \left( \frac{\sin 40^\circ + \sqrt{3} \cos 40^\circ}{\sqrt{3} \cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ} \right) = 4 \frac{\sin 100^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} (\cos 10^\circ + \cos 90^\circ)} = \frac{8 \cos 10^\circ}{\sqrt{3} \cos 10^\circ} = \frac{8}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

**Câu 79:** Cho hai góc nhọn  $a$  và  $b$ . Biết  $\cos a = \frac{1}{3}$ ,  $\cos b = \frac{1}{4}$ . Giá trị  $\cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$  bằng:

- A.**  $-\frac{113}{144}$ .      **B.**  $-\frac{115}{144}$ .      **C.**  $-\frac{117}{144}$ .      **D.**  $-\frac{119}{144}$ .

**Lời giải.**

**Chọn D**

Ta có :

$$\cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = \frac{1}{2} (\cos 2a + \cos 2b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{119}{144}.$$

**Câu 80:** Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$

- A.**  $A = \tan 6x$ .      **B.**  $A = \tan 3x$ .  
**C.**  $A = \tan 2x$ .      **D.**  $A = \tan x + \tan 2x + \tan 3x$ .

**Lời giải.**

**Chọn C**

Ta có :

$$A = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \frac{2 \sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x}{2 \cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x} = \frac{\sin 2x(2 \cos x + 1)}{\cos 2x(2 \cos x + 1)} = \tan 2x.$$

**Câu 81:** Biến đổi biểu thức  $\sin a + 1$  thành tích.

- A.  $\sin a + 1 = 2 \sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$       B.  $\sin a + 1 = 2 \cos\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$   
 C.  $\sin a + 1 = 2 \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right).$       D.  $\sin a + 1 = 2 \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right).$

**Lời giải.**

**Chọn D**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin a + 1 &= 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} = \left( \sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} \right)^2 = 2 \sin^2 \left( \frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2 \sin \left( \frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right) = 2 \sin \left( \frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( \frac{a}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

#### DẠNG 4. KẾT HỢP CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

**Câu 82:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  và  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \tan\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ .

- A.  $A = \frac{1}{3}.$       B.  $A = -\frac{1}{3}.$       C.  $A = 3.$       D.  $A = -3.$

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  nên  $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$  suy ra  $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$ .

$$\text{Do } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ nên } \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Biểu thức } A = \tan\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \frac{\alpha}{2} - 1}{\tan \frac{\alpha}{2} + 1}.$$

$$\text{Do đó } \tan \frac{\alpha}{2} = 2.$$

$$\text{Vậy biểu thức } A = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

**Câu 83:** Cho  $\cos x = \frac{1}{3}$  ( $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ ). Giá trị của  $\tan 2x$  là

- A.  $\frac{\sqrt{5}}{2}.$       B.  $\frac{4\sqrt{2}}{7}.$       C.  $-\frac{\sqrt{5}}{2}.$       D.  $-\frac{4\sqrt{2}}{7}.$

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\Rightarrow \tan x = -2\sqrt{2} \Rightarrow \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{-4\sqrt{2}}{-7} = \frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

**Câu 84:** Cho  $\cos x = 0$ . Tính  $A = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

**A.**  $\frac{3}{2}$ .

**B.** 2.

**C.** 1.

**D.**  $\frac{1}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = -1$ . Sử dụng công thức hạ bậc và công thức biến đổi tổng thành tích ta được:

$$A = \frac{1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{2} = 1 - \cos 2x \cos \frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

**Câu 85:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $P = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$  bằng bao nhiêu?

**A.**  $P = \frac{19}{13}$ .

**B.**  $P = \frac{25}{13}$ .

**C.**  $P = -\frac{25}{13}$ .

**D.**  $P = -\frac{19}{13}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có: } \cos \alpha = -\frac{2}{3} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} - 1 = \frac{5}{4}$$

$$P = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha} = \frac{\frac{1}{\tan \alpha} + 3 \tan \alpha}{\frac{2}{\tan \alpha} + \tan \alpha} = \frac{1 + 3 \tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 + 3 \cdot \frac{5}{4}}{2 + \frac{5}{4}} = \frac{19}{13}$$

**Câu 86:** Cho  $\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta$  với  $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$ , ( $k, l \in \mathbb{Z}$ ). Ta có

**A.**  $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \alpha$ . **B.**  $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \beta$ .

**C.**  $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \beta$ . **D.**  $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \alpha$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\sin(2\alpha + \beta) - \sin \beta] = \sin \beta$$

$$\Leftrightarrow \sin[(\alpha + \beta) + \alpha] = 3 \sin \beta \Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha + \sin \alpha \cos(\alpha + \beta) = 3 \sin \beta$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \cos \alpha + \sin \alpha = \frac{3 \sin \beta}{\cos(\alpha + \beta)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{3 \sin \beta}{\cos \alpha \cos(\alpha + \beta)} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (*)$$

Mà  $\frac{\sin \beta}{\cos(\alpha + \beta)} = \sin \alpha$ , suy ra  $(*) \Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) = \frac{3 \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \tan \alpha$

Vậy  $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \alpha$ .

**Câu 87:** Biết rằng  $\frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\cos(ax)}{b - \sin(ax)}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Tính giá trị của biểu thức

$$P = a + b.$$

**A.**  $P = 4$ .

**B.**  $P = 1$ .

**C.**  $P = 2$ .

**D.**  $P = 3$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: 
$$\frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{1}{\cos 2x} + \frac{\frac{2 \sin x}{\cos x}}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos 2x} + \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos 2x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{(1 + \sin 2x) \cos 2x}{\cos^2 2x} = \frac{(1 + \sin 2x) \cos 2x}{1 - \sin^2 2x}$$
$$= \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}. \text{ Vậy } a = 2, b = 1. \text{ Suy ra } P = a + b = 3.$$

**Câu 88:** Cho  $\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \cos \alpha \cdot \cos 3\alpha$ .

**A.**  $P = \frac{7}{18}$ .

**B.**  $P = \frac{7}{9}$ .

**C.**  $P = \frac{5}{9}$ .

**D.**  $\frac{5}{18}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có

$$P = \cos \alpha \cdot \cos 3\alpha = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha) = \frac{1}{2}(2 \cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha - 1) = \frac{1}{2} \left[ 2 \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} - 1 \right] = \frac{5}{18}.$$

**Câu 89:** Cho  $\tan x = 2$  ( $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ). Giá trị của  $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  là

**A.**  $\frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ .

**B.**  $-\frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ .

**C.**  $\frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ .

**D.**  $\frac{-2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\pi < x < \frac{3\pi}{2} \text{ suy ra } \sin x < 0, \cos x < 0.$$

$$\text{Ta có: } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Do } \cos x < 0 \text{ nên nhận } \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \tan x \cdot \cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$$

**Câu 90:** Tổng  $A = \tan 9^\circ + \cot 9^\circ + \tan 15^\circ + \cot 15^\circ + \tan 27^\circ + \cot 27^\circ$  bằng:

A. 4.

B. -4.

C. 8.

D. -8.

**Lời giải.**

**Chọn C**

$$\begin{aligned} A &= \tan 9^\circ + \cot 9^\circ + \tan 15^\circ + \cot 15^\circ + \tan 27^\circ + \cot 27^\circ \\ &= \tan 9^\circ + \cot 9^\circ - \tan 27^\circ - \cot 27^\circ + \tan 15^\circ + \cot 15^\circ \\ &= \tan 9^\circ + \tan 81^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 15^\circ + \cot 15^\circ. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \tan 9^\circ - \tan 27^\circ + \tan 81^\circ - \tan 63^\circ &= \frac{-\sin 18^\circ}{\cos 9^\circ \cdot \cos 27^\circ} + \frac{\sin 18^\circ}{\cos 81^\circ \cdot \cos 63^\circ} \\ &= \sin 18^\circ \left( \frac{\cos 9^\circ \cdot \cos 27^\circ - \cos 81^\circ \cdot \cos 63^\circ}{\cos 81^\circ \cdot \cos 63^\circ \cdot \cos 9^\circ \cdot \cos 27^\circ} \right) = \frac{\sin 18^\circ (\cos 9^\circ \cdot \cos 27^\circ - \sin 9^\circ \cdot \sin 27^\circ)}{\cos 81^\circ \cdot \cos 63^\circ \cdot \cos 9^\circ \cdot \cos 27^\circ} \\ &= \frac{4 \sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ}{(\cos 72^\circ + \cos 90^\circ)(\cos 36^\circ + \cos 90^\circ)} = \frac{4 \sin 18^\circ}{\cos 72^\circ} = 4. \end{aligned}$$

$$\tan 15^\circ + \cot 15^\circ = \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = 4.$$

Vậy  $A = 8$ .

**Câu 91:** Cho hai góc nhọn  $a$  và  $b$  với  $\sin a = \frac{1}{3}$ ,  $\sin b = \frac{1}{2}$ . Giá trị của  $\sin 2(a+b)$  là:

A.  $\frac{2\sqrt{2} + 7\sqrt{3}}{18}$ .

B.  $\frac{3\sqrt{2} + 7\sqrt{3}}{18}$ .

C.  $\frac{4\sqrt{2} + 7\sqrt{3}}{18}$ .

D.  $\frac{5\sqrt{2} + 7\sqrt{3}}{18}$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} 0 < a < \frac{\pi}{2} \\ \sin a = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \cos a = \frac{2\sqrt{2}}{3}; \begin{cases} 0 < b < \frac{\pi}{2} \\ \sin b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos b = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\begin{aligned}\sin 2(a+b) &= 2 \sin(a+b) \cdot \cos(a+b) = 2(\sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a)(\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b) \\ &= \frac{4\sqrt{2} + 7\sqrt{3}}{18}.\end{aligned}$$

**Câu 92:** Biểu thức  $A = \frac{2 \cos^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1}{2 \sin^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1}$  có kết quả rút gọn là:

**A.**  $\frac{\cos(4\alpha + 30^\circ)}{\cos(4\alpha - 30^\circ)}$ .      **B.**  $\frac{\cos(4\alpha - 30^\circ)}{\cos(4\alpha + 30^\circ)}$ .      **C.**  $\frac{\sin(4\alpha + 30^\circ)}{\sin(4\alpha - 30^\circ)}$ .      **D.**  $\frac{\sin(4\alpha - 30^\circ)}{\sin(4\alpha + 30^\circ)}$ .

**Lời giải.**

Ta có :

$$A = \frac{2 \cos^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1}{2 \sin^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1} = \frac{\cos 4\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha}{\sqrt{3} \sin 4\alpha - \cos 4\alpha} = \frac{\sin(4\alpha + 30^\circ)}{\sin(4\alpha - 30^\circ)}.$$

**Câu 93:** Kết quả nào sau đây **SAI**?

**A.**  $\sin 33^\circ + \cos 60^\circ = \cos 3^\circ$ .      **B.**  $\frac{\sin 9^\circ}{\sin 48^\circ} = \frac{\sin 12^\circ}{\sin 81^\circ}$ .  
**C.**  $\cos 20^\circ + 2 \sin^2 55^\circ = 1 + \sqrt{2} \sin 65^\circ$ .      **D.**  $\frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ .

**Lời giải.**

Ta có :  $\frac{\sin 9^\circ}{\sin 48^\circ} = \frac{\sin 12^\circ}{\sin 81^\circ} \Leftrightarrow \sin 9^\circ \cdot \sin 81^\circ - \sin 12^\circ \cdot \sin 48^\circ = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 72^\circ - \cos 90^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 36^\circ - \cos 60^\circ) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 72^\circ - 2 \cos 36^\circ + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^2 36^\circ - 2 \cos 36^\circ - 1 = 0. \text{ Suy ra B đúng.}$$

Tương tự, ta cũng chứng minh được các biểu thức ở C và D đúng.

Biểu thức ở đáp án A sai.

**Câu 94:** Nếu  $5 \sin \alpha = 3 \sin(\alpha + 2\beta)$  thì:

**A.**  $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \beta$ .      **B.**  $\tan(\alpha + \beta) = 3 \tan \beta$ .  
**C.**  $\tan(\alpha + \beta) = 4 \tan \beta$ .      **D.**  $\tan(\alpha + \beta) = 5 \tan \beta$ .

**Lời giải.**

Ta có :

$$5 \sin \alpha = 3 \sin(\alpha + 2\beta) \Leftrightarrow 5 \sin[(\alpha + \beta) - \beta] = 3 \sin[(\alpha + \beta) + \beta]$$

$$\Leftrightarrow 5 \sin(\alpha + \beta) \cos \beta - 5 \cos(\alpha + \beta) \sin \beta = 3 \sin(\alpha + \beta) \cos \beta + 3 \cos(\alpha + \beta) \sin \beta$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin(\alpha + \beta) \cos \beta = 8 \cos(\alpha + \beta) \sin \beta \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = 4 \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) = 4 \tan \beta.$$

**Câu 95:** Cho biểu thức  $A = \sin^2(a+b) - \sin^2 a - \sin^2 b$ . Hãy chọn kết quả đúng:

**A.**  $A = 2 \cos a \cdot \sin b \cdot \sin(a+b)$ .      **B.**  $A = 2 \sin a \cdot \cos b \cdot \cos(a+b)$ .  
**C.**  $A = 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos(a+b)$ .      **D.**  $A = 2 \sin a \cdot \sin b \cdot \cos(a+b)$ .

**Lời giải.**

Ta có :

$$\begin{aligned} A &= \sin^2(a+b) - \sin^2 a - \sin^2 b = \sin^2(a+b) - \frac{1-\cos 2a}{2} - \frac{1-\cos 2b}{2} \\ &= \sin^2(a+b) - 1 + \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b) = -\cos^2(a+b) + \cos(a+b)\cos(a-b) \\ &= \cos(a+b)[\cos(a-b) - \cos(a+b)] = 2\sin a \sin b \cos(a+b). \end{aligned}$$

**Câu 96:** Xác định hệ thức **SAI** trong các hệ thức sau ?

- A.**  $\cos 40^\circ + \tan \alpha \cdot \sin 40^\circ = \frac{\cos(40^\circ - \alpha)}{\cos \alpha}$ .
- B.**  $\sin 15^\circ + \tan 30^\circ \cdot \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .
- C.**  $\cos^2 x - 2\cos a \cdot \cos x \cdot \cos(a+x) + \cos^2(a+x) = \sin^2 a$ .
- D.**  $\sin^2 x + 2\sin(a-x) \cdot \sin x \cdot \cos a + \sin^2(a-x) = \cos^2 a$ .

**Lời giải.**

Ta có :

$$\cos 40^\circ + \tan \alpha \cdot \sin 40^\circ = \cos 40^\circ + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \sin 40^\circ = \frac{\cos 40^\circ \cos \alpha + \sin 40^\circ \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos(40^\circ - \alpha)}{\cos \alpha}.$$

A đúng.

$$\sin 15^\circ + \tan 30^\circ \cdot \cos 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 15^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \text{ B đúng.}$$

$$\begin{aligned} &\cos^2 x - 2\cos a \cdot \cos x \cdot \cos(a+x) + \cos^2(a+x) \\ &= \cos^2 x + \cos(a+x)[-2\cos a \cos x + \cos(a+x)] = \cos^2 x - \cos(a+x)\cos(a-x) \\ &= \cos^2 x - \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2x) = \cos^2 x - \cos^2 a - \cos^2 x + 1 = \sin^2 a. \text{ C đúng.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sin^2 x + 2\sin(a-x) \cdot \sin x \cdot \cos a + \sin^2(a-x) = \sin^2 x + \sin(a-x)(2\sin x \cos a + \sin(a-x)) \\ &= \sin^2 x + \sin(a-x)\sin(a+x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 2a) \\ &= \sin^2 x - \cos^2 a - \sin^2 x + 1 = \sin^2 a. \text{ D sai.} \end{aligned}$$

**Câu 97:** Cho  $\alpha, \beta$  thỏa mãn  $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$  và  $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . Tính  $\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$ .

- A.**  $\frac{12+\sqrt{3}}{6}$ .      **B.**  $\frac{4+3\sqrt{3}}{2}$ .      **C.**  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .      **D.**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta = \frac{3}{2} \quad (2)$$

Cộng vế theo vế (1) với (2) ta được

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta &= 2 \\ \Leftrightarrow 2 + 2(\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) &= 2 \Leftrightarrow 2 \cos(\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = 0. \end{aligned}$$

Từ giả thiết ta lại có:

$$(\sin \alpha + \sin \beta)(\cos \alpha + \cos \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Mặt khác } \sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 0.$$

$$\text{Suy ra } \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Câu 98:** Cho tam giác  $ABC$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C$ .

**A.** 1.

**B.** 3.

**C.** 2.

**D.** 0.

**Lời giải**

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C = 2 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} - \cos^2 C$$

$$= 2 - \cos(A + B) \cos(A - B) - \cos^2 C$$

$$= 2 - \cos(\pi - C) \cos(A - B) = 2 + \cos C \cos(A - B) - \cos^2 C$$

$$2 \cos A \cos B \cos C = (\cos(A + B) + \cos(A - B)) \cos C = (-\cos C + \cos(A - B)) \cos C$$

$$A = 2 + \cos C \cos(A - B) - \cos^2 C + \cos^2 C - \cos C \cos(A - B) = 2$$

**Câu 99:** Cho  $\sin x + \cos x = \frac{7}{5}$ . Giá trị của biểu thức  $A = \cos 4x - \sin^2 x - \frac{2 + \sin^2 x}{3 \tan^2 x + 2}$  bằng.

**A.**  $-\frac{1152}{625}$ .

**B.**  $-\frac{8}{25}$ .

**C.**  $\frac{98}{625}$ .

**D.**  $-\frac{98}{625}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \sin x + \cos x = \frac{7}{5} \Rightarrow \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{49}{25} \Rightarrow 1 + \sin 2x = \frac{49}{25} \Rightarrow \sin 2x = \frac{24}{25}.$$

$$\begin{aligned}
 A &= \cos 4x - \sin^2 x - \frac{2 + \sin^2 x}{3 \tan^2 x + 2} = \cos 4x - \sin^2 x - \frac{2 + 1 - \cos^2 x}{3 \tan^2 x + 3 - 1} \\
 &= \cos 4x - \sin^2 x - \frac{3 - \cos^2 x}{3(\tan^2 x + 1) - 1} = \cos 4x - \sin^2 x - \frac{3 - \cos^2 x}{\frac{3}{\cos^2 x} - 1} \\
 &= \cos 4x - \sin^2 x - \frac{(3 - \cos^2 x) \cos^2 x}{3 - \cos^2 x} = \cos 4x - \sin^2 x - \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 2x - 1 \\
 &= -2 \sin^2 2x = -2 \left( \frac{24}{25} \right)^2 = -\frac{1152}{625}.
 \end{aligned}$$

**Câu 100:** Biểu thức  $4\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = m + n \sin^2 \alpha$ , với  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Khi đó  $m^2 - n^2$  bằng

- A.** 7.                      **B.** 15.                      **C.** -7.                      **D.** -15.

**Lời giải**

Ta có  $\frac{\pi}{3} - \alpha$  và  $\frac{\pi}{6} + \alpha$  phụ nhau nên  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$ .

Suy ra  $4\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha + \frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \cos\left[\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\right] \right\}$$

$$= 2 \cdot \left[ \cos \frac{\pi}{3} + \cos(-2\alpha) \right] = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \cos 2\alpha$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (1 - 2 \sin^2 \alpha) = 1 + 2 - 4 \sin^2 \alpha = 3 - 4 \sin^2 \alpha.$$

#### DẠNG 5. MIN-MAX

**Câu 101:** Giá trị nhỏ nhất của  $\sin^6 x + \cos^6 x$  là

- A.** 0.                      **B.**  $\frac{1}{2}$ .                      **C.**  $\frac{1}{4}$ .                      **D.**  $\frac{1}{8}$ .

**Lời giải**

Ta có

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \geq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 102:** Giá trị lớn nhất của  $M = \sin^4 x + \cos^4 x$  bằng:

- A.** 4.                      **B.** 1.                      **C.** 2.                      **D.** 3.

**Lời giải**

Ta có  $M = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$

Vì  $0 \leq \sin^2 x \leq 1$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} \sin^2 2x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \leq 1.$$

Nên giá trị lớn nhất là 1.

**Câu 103:** Cho  $M = 3 \sin x + 4 \cos x$ . Chọn khẳng định đúng.

**A.**  $-5 \leq M \leq 5$ .

**B.**  $M > 5$ .

**C.**  $M \geq 5$ .

**D.**  $M \leq 5$ .

**Lời giải**

$$M = 5 \left( \frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x \right) = 5 \sin(x + a) \text{ với } \cos a = \frac{3}{5}; \sin a = \frac{4}{5}.$$

Ta có:  $-1 \leq \sin(x + a) \leq 1$

$$\Leftrightarrow -5 \leq 5 \sin(x + a) \leq 5.$$

**Câu 104:** Giá trị lớn nhất của  $M = \sin^6 x - \cos^6 x$  bằng:

**A.** 2.

**B.** 3

**C.** 0.

**D.** 1.

**Lời giải**

Ta có.

$$M = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$= -\cos 2x(1 - \sin^2 x \cos^2 x)$$

$$= -\cos 2x \left( 1 - \frac{1}{4} \sin^2 2x \right)$$

$$= -\cos 2x \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos^2 2x \right) \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos^2 2x \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \text{ (do } \cos 2x \leq 1).$$

Nên giá trị lớn nhất là 1.

**Câu 105:** Cho biểu thức  $M = \frac{1 + \tan x^3}{(1 + \tan x)^3}$ ,  $\left( x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$ , mệnh đề nào trong các mệnh

đề sau **đúng**?

**A.**  $M \leq 1$ .

**B.**  $M \geq \frac{1}{4}$ .

**C.**  $\frac{1}{4} \leq M \leq 1$ .

**D.**  $M < 1$ .

**Lời giải**

Đặt  $t = \tan x, t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Ta có:  $M = \frac{1+t^3}{(1+t)^3} = \frac{t^2-t+1}{t^2+2t+1} \Rightarrow (M-1)t^2 + (2M+1)t + M-1 = 0.$

Với  $M = 1$  thì có nghiệm  $t = 0.$

Với  $M \neq 1$  để có nghiệm khác  $-1$  thì.

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (2M+1)^2 - 4(M-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 12M-3 \geq 0 \Leftrightarrow M \geq \frac{1}{4}.$$

Và  $(M-1)(-1)^2 + (2M+1)(-1) + (-1) - 1 \neq 0 \Leftrightarrow M \neq 4.$

**Câu 106:** Cho  $M = 6\cos^2 x + 5\sin^2 x$ . Khi đó giá trị lớn nhất của  $M$  là

**A.** 11.

**B.** 1.

**C.** 5.

**D.** 6.

**Lời giải**

$$M = 6(1 - \sin^2 x) + 5\sin^2 x = 6 - \sin^2 x$$

Ta có:  $0 \leq \sin^2 x \leq 1, \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow 0 \geq -\sin^2 x \geq -1, \forall x \in R$$

$$\Leftrightarrow 6 \geq 6 - \sin^2 x \geq 5, \forall x \in R.$$

Gía trị lớn nhất là 6.

**Câu 107:** Giá trị lớn nhất của biểu thức  $M = 7\cos^2 x - 2\sin^2 x$  là

**A.** -2.

**B.** 5.

**C.** 7.

**D.** 16.

**Lời giải**

$$M = 7(1 - \sin^2 x) - 2\sin^2 x = 7 - 9\sin^2 x$$

Ta có:  $0 \leq \sin^2 x \leq 1$

$$\Leftrightarrow 0 \geq -9\sin^2 x \geq -9, \forall x \in R$$

$$\Leftrightarrow 7 \geq 7 - 2\sin^2 x \geq -2.$$

Gía trị lớn nhất là 7.

### **DẠNG 5. NHẬN DẠNG TAM GIÁC**

**Câu 108:** Cho  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  thì.

**A.**  $\sin 2A + \sin 2B > 2\sin C.$

**B.**  $\sin 2A + \sin 2B \leq 2\sin C.$

**C.**  $\sin 2A + \sin 2B \geq 2\sin C.$

**D.**  $\sin 2A + \sin 2B = 2\sin C.$

**Lời giải**

Ta có:  $\sin 2A + \sin 2B = 2\sin(A+B) \cdot \cos(A-B) = 2\sin(\pi-C) \cdot \cos(A-B)$

$$= 2\sin C \cdot \cos(A-B) \leq 2\sin C. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi } \cos(A-B) = 1 \Leftrightarrow A = B.$$

**Câu 109:** Một tam giác  $ABC$  có các góc  $A, B, C$  thỏa mãn  $\sin \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{A}{2} = 0$  thì tam giác đó có gì đặc biệt?

- A.** Tam giác đó vuông. **B.** Tam giác đó đều.  
**C.** Tam giác đó cân. **D.** Không có gì đặc biệt.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có } \sin \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{A}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos^2 \frac{B}{2}}.$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \left( 1 + \tan^2 \frac{A}{2} \right) = \tan \frac{B}{2} \left( 1 + \tan^2 \frac{B}{2} \right) \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} = \tan \frac{B}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{2} \Leftrightarrow A = B.$$

**Câu 110:** Cho  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  thì  $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A$  bằng :

- A.**  $(\cot A \cdot \cot B \cdot \cot C)^2$ . **B.** Một kết quả khác các kết quả đã nêu trên.  
**C.** 1. **D.** -1.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A \\ &= \frac{1}{\tan A \cdot \tan B} + \frac{1}{\tan B \cdot \tan C} + \frac{1}{\tan C \cdot \tan A} = \frac{\tan A + \tan B + \tan C}{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } & \tan A + \tan B + \tan C = \tan(A+B)(1 - \tan A \cdot \tan B) + \tan C \\ &= \tan(\pi - C)(1 - \tan A \cdot \tan B) + \tan C = -\tan(C)(1 - \tan A \cdot \tan B) + \tan C = \tan C \cdot \tan A \cdot \tan B. \end{aligned}$$

$$\text{Nên } \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1.$$

**Câu 111:** Cho  $A, B, C$  là ba là các góc nhọn và  $\tan A = \frac{1}{2}$ ;  $\tan B = \frac{1}{5}$ ,  $\tan C = \frac{1}{8}$ . Tổng  $A+B+C$  bằng

- A.**  $\frac{\pi}{5}$ . **B.**  $\frac{\pi}{4}$ . **C.**  $\frac{\pi}{3}$ . **D.**  $\frac{\pi}{6}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{7}{9}.$$

$$\text{Suy ra } \tan(A+B+C) = \tan\left[(A+B)+C\right] = \frac{\tan(A+B) + \tan C}{1 - \tan(A+B) \cdot \tan C} = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{8}} = 1$$

$$\text{Vậy } A+B+C = \frac{\pi}{4}.$$

**Câu 112:** Biết  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$ , khi đó.

**A.**  $\cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$ . **B.**  $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$ .

**C.**  $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = -\cos\frac{C}{2}$ . **D.**  $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$ .

**Lời giải**

Vì  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  nên  $A+B+C=180^\circ \Rightarrow C=180^\circ-(A+B)$ .

$\Rightarrow \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A+B}{2}$ . Do đó  $\frac{C}{2}$  và  $\frac{A+B}{2}$  là 2 góc phụ nhau.

$$\Rightarrow \sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A+B}{2}; \cos\frac{C}{2} = \sin\frac{A+B}{2}; \tan\frac{C}{2} = \cot\frac{A+B}{2}; \cot\frac{C}{2} = \tan\frac{A+B}{2}.$$

**Câu 113:**  $A, B, C$ , là ba góc của một tam giác. Hãy tìm hệ thức sai:

**A.**  $\sin A = -\sin(2A+B+C)$ . **B.**  $\sin A = -\cos\frac{3A+B+C}{2}$ .

**C.**  $\cos C = \sin\frac{A+B+3C}{2}$ . **D.**  $\sin C = \sin(A+B+2C)$ .

**Lời giải**

$$\sin(A+B+2C) = \sin(180^\circ - C + 2C) = \sin(180^\circ + C) = -\sin C.$$

**Câu 114:** Cho  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  thì:

**A.**  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ . **B.**  $\tan A + \tan B + \tan C = -\tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2}$ .

**C.**  $\tan A + \tan B + \tan C = -\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ . **D.**  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \tan A + \tan B + \tan C = (\tan A + \tan B) + \tan C = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cdot \cos B} + \frac{\sin C}{\cos C}.$$

$$= \sin C \cdot \left( \frac{-\cos(A+B) + \cos A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C} \right) = \frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C} = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C.$$

**Câu 115:** Biết  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$ , khi đó.

**A.**  $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$ . **B.**  $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = -\cos\frac{C}{2}$ .

**C.**  $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$ . **D.**  $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = -\sin\frac{C}{2}$ .

**Lời giải**

Vì  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  nên  $A+B+C=180^\circ \Rightarrow C=180^\circ-(A+B)$ .

$$\Rightarrow \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A+B}{2}. \text{ Do đó } \frac{C}{2} \text{ và } \frac{A+B}{2} \text{ là 2 góc phụ nhau.}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}; \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A+B}{2}; \tan \frac{C}{2} = \cot \frac{A+B}{2}; \cot \frac{C}{2} = \tan \frac{A+B}{2}.$$

**Câu 116:** Nếu  $a = 2b$  và  $a + b + c = \pi$ . Hãy chọn kết quả **đúng**.

**A.**  $\sin b(\sin b + \sin c) = \sin 2a$ .

**B.**  $\sin b(\sin b + \sin c) = \sin^2 a$ .

**C.**  $\sin b(\sin b + \sin c) = \cos^2 a$ .

**D.**  $\sin b(\sin b + \sin c) = \cos 2a$ .

**Lời giải**

$$a + b + c = \pi, a = 2b \Rightarrow b = \frac{a}{2}; c = \pi - \frac{3a}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin b(\sin b + \sin c) &= \sin^2 b + \sin b \cdot \sin c = \frac{1 - \cos 2b}{2} + \frac{\cos(b-c) - \cos(b+c)}{2} \\ &= \frac{1 - \cos a - \cos(\pi - a) + \cos(2a - \pi)}{2} = \frac{1 - \cos 2a}{2} = \sin^2 a. \end{aligned}$$

**Câu 117:** Cho  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  thì:

**A.**  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ .

**B.**  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ .

**C.**  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = -4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ .

**D.**  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = (\sin 2A + \sin 2B) + \sin 2C$$

$$\begin{aligned} &= 2 \sin(A+B) \cdot \cos(A-B) + 2 \sin C \cdot \cos C = 2 \sin C \cdot \cos(A-B) + 2 \sin C \cdot \cos C \\ &= 2 \sin C \cdot (\cos(A-B) + \cos C) = 4 \sin C \cdot \cos(A-B-C) \cdot \cos(A-B+C) \\ &= 4 \sin C \cdot \cos \frac{A-B-C}{2} \cdot \cos \frac{A-B+C}{2} = 4 \sin C \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = 4 \sin C \cdot \sin A \cdot \sin B. \end{aligned}$$

**Câu 118:**  $A, B, C$ , là ba góc của một tam giác. Hãy chỉ hệ thức **sai**:

**A.**  $\cot\left(\frac{4A+B+C}{2}\right) = -\tan \frac{3A}{2}$ .

**B.**  $\cos\left(\frac{A-2B+C}{2}\right) = -\sin B$ .

**C.**  $\sin\left(\frac{A+B-3C}{2}\right) = \cos 2C$ .

**D.**  $\tan\left(\frac{A+B+6C}{2}\right) = -\cot \frac{5C}{2}$ .

**Lời giải**

$$\cos \frac{A-2B+C}{2} = \cos \frac{180^\circ - B - 2B}{2} = \cos\left(90^\circ - \frac{3B}{2}\right) = \sin \frac{3B}{2}.$$

**Câu 119:** Biết  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  khi đó.

**A.**  $\cos C = \cos(A+B)$ . **B.**  $\tan C = \tan(A+B)$ .

**C.**  $\cot C = -\cot(A+B)$ . **D.**  $\sin C = -\sin(A+B)$ .

**Lời giải**

Vì  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  nên  $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - (A + B)$ .

Do đó  $(A + B)$  và  $C$  là 2 góc bù nhau.

$$\sin C = \sin(A + B); \cos C = -\cos(A + B).$$

$$\tan C = -\tan(A + B); \cot C = \cot(A + B)$$

**Câu 120:** Cho  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  thì  $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A$  bằng

**A.** Một kết quả khác các kết quả đã nêu trên. **B.** 1.

**C.** -1.

**D.**  $(\cot A \cdot \cot B \cdot \cot C)^2$ .

**Lời giải**

Ta có :  $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A$ .

$$= \frac{1}{\tan A \cdot \tan B} + \frac{1}{\tan B \cdot \tan C} + \frac{1}{\tan C \cdot \tan A} = \frac{\tan A + \tan B + \tan C}{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C}.$$

Mặt khác :  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan(A + B)(1 - \tan A \cdot \tan B) + \tan C$ .

$$= \tan(\pi - C)(1 - \tan A \cdot \tan B) + \tan C.$$

$$= -\tan C(1 - \tan A \cdot \tan B) + \tan C = \tan C \tan A \tan B.$$

Nên  $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$ .

**Câu 121:** Cho  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  thì:

**A.**  $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$ .

**B.**  $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = -\cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$ .

**C.**  $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot A \cdot \cot B \cdot \cot C$ .

**D.**  $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = -\cot A \cdot \cot B \cdot \cot C$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \left( \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right) + \cot \frac{C}{2} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}}.$$

$$\begin{aligned} &= \cos \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}} = \cos \frac{C}{2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) + \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}} = \frac{\cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}} \\ &= \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

**Câu 122:** Cho  $A, B, C$  là ba góc của một tam giác. Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau.

- A.**  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ .  
**B.**  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ .  
**C.**  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ .  
**D.**  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ .

**Lời giải**

Ta có :

$$\begin{aligned}\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C \\ &= 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2 C = 1 - \cos C \cos(A-B) - \cos C \cos(A+B) \\ &= 1 - \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] = 1 + 2 \cos A \cos B \cos C.\end{aligned}$$

**Câu 123:** Hãy chỉ ra công thức sai, nếu  $A, B, C$  là ba góc của một tam giác.

- A.**  $\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sin \frac{A}{2}$ .  
**B.**  $\cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C + \cos A = 0$ .  
**C.**  $\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2} = \cos \frac{A}{2}$ .  
**D.**  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C = 1$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned}\cos(A+B) &= -\cos C \Rightarrow \cos A \cdot \cos B + \cos C = \sin A \cdot \sin B \\ \Rightarrow \cos^2 A \cdot \cos^2 B + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C + \cos^2 C &= \sin^2 A \cdot \sin^2 B = (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B) \\ &= 1 - \cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 A \cdot \cos^2 B \\ \Rightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C &= 1\end{aligned}$$

**Câu 124:** Cho tam giác  $ABC$  có  $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .  
**B.** Tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ .  
**C.** Tam giác  $ABC$  đều.  
**D.** Tam giác  $ABC$  là tam giác tù.

**Lời giải**

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \sin A &= \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Leftrightarrow \sin A = \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} \Leftrightarrow \sin A = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} &= \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 \\ \Leftrightarrow \cos A &= 0 \Rightarrow A = 90^\circ \text{ suy ra tam giác } ABC \text{ vuông tại } A.\end{aligned}$$

**Câu 125:** Cho bất đẳng thức  $\cos 2A + \frac{1}{64 \cos^4 A} - (2 \cos 2B + 4 \sin B) + \frac{13}{4} \leq 0$  với  $A, B, C$  là ba góc của tam giác  $ABC$ . Khẳng định đúng là:

- A.**  $B + C = 120^\circ$ .  
**B.**  $B + C = 130^\circ$ .  
**C.**  $A + B = 120^\circ$ .  
**D.**  $A + C = 140^\circ$ .

**Lời giải**

Từ giả thiết suy ra:  $2\cos^2 A + \frac{1}{64\cos^4 A} - (2 - 4\sin^2 B + 4\sin B) + \frac{13}{4} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 A + \frac{1}{64\cos^4 A} + 4\sin^2 B - 4\sin B + 1 \leq \frac{3}{4} \quad (*)$$

AD BĐT Cauchy thì  $\cos^2 A + \cos^2 A + \frac{1}{64\cos^4 A} \geq \frac{3}{4} \quad (1)$

Mặt khác  $4\sin^2 B - 4\sin B + 1 = (2\sin B - 1)^2 \geq 0 \quad (2)$

Từ, và suy ra bất thỏa mãn khi và chỉ khi dấu bằng ở và xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 A = \frac{1}{64\cos^4 A} \\ \sin B = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \frac{1}{2} \\ \sin B = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = 60^\circ \\ \widehat{B} = 30^\circ \\ \widehat{C} = 90^\circ \end{cases}$$

Nên  $\widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ$  **Chọn A**

**Câu 126:** Cho  $A, B, C$  là các góc nhọn và  $\tan A = \frac{1}{2}$ ,  $\tan B = \frac{1}{5}$ ,  $\tan C = \frac{1}{8}$ . Tổng  $A + B + C$  bằng:

**A.**  $\frac{\pi}{6}$ .

**B.**  $\frac{\pi}{5}$ .

**C.**  $\frac{\pi}{4}$ .

**D.**  $\frac{\pi}{3}$ .

**Lời giải**

$$\tan(A + B + C) = \frac{\tan(A + B) + \tan C}{1 - \tan(A + B) \cdot \tan C} = \frac{\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} + \tan C}{1 - \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} \cdot \tan C} = 1 \text{ suy ra } A + B + C = \frac{\pi}{4}.$$

**Câu 127:** Cho  $A, B, C$  là ba góc của một tam giác. Hãy chỉ ra hệ thức **SAI**.

**A.**  $\sin \frac{A + B + 3C}{2} = \cos C$ .

**B.**  $\cos(A + B - C) = -\cos 2C$ .

**C.**  $\tan \frac{A + B - 2C}{2} = \cot \frac{3C}{2}$ .

**D.**  $\cot \frac{A + B + 2C}{2} = \tan \frac{C}{2}$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{A + B + 3C}{2} = \frac{\pi}{2} + C \Rightarrow \sin \frac{A + B + 3C}{2} = \sin \left( \frac{\pi}{2} + C \right) = \cos C. \text{ A đúng.}$$

$$A + B - C = \pi - 2C \Rightarrow \cos(A + B - C) = \cos(\pi - 2C) = -\cos 2C. \text{ B đúng.}$$

$$\frac{A + B - 2C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2} \Rightarrow \tan \frac{A + B - 2C}{2} = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2} \right) = \cot \frac{3C}{2}. \text{ C đúng.}$$

$$\frac{A+B+2C}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2} \Rightarrow \cot \frac{A+B+2C}{2} = \cot \left( \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2} \right) = -\tan \frac{C}{2}. \text{ D sai.}$$

**Câu 128:** Cho  $A, B, C$  là ba góc của một tam giác. Hãy chỉ ra hệ thức **SAI**.

**A.**  $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$ . **B.**  $\cos(A+B+2C) = -\cos C$ .

**C.**  $\sin(A+C) = -\sin B$ . **D.**  $\cos(A+B) = -\cos C$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \Rightarrow \cos \frac{A+B}{2} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) = \sin \frac{C}{2}. \text{ A đúng.}$$

$$A+B+2C = \pi + C \Rightarrow \cos(A+B+2C) = \cos(\pi + C) = -\cos C. \text{ B đúng.}$$

$$A+C = \pi - B \Rightarrow \sin(A+C) = \sin(\pi - B) = \sin B. \text{ C sai.}$$

$$A+B = \pi - C \Rightarrow \cos(A+B) = \cos(\pi - C) = -\cos C. \text{ D đúng.}$$

**Câu 129:** Cho  $A, B, C$  là ba góc của một tam giác không vuông. Hệ thức nào sau đây **SAI**?

**A.**  $\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sin \frac{A}{2}$ .

**B.**  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ .

**C.**  $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cdot \cot B \cdot \cot C$ .

**D.**  $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$ .

**Lời giải**

Ta có :

$$+ \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \left( \frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = \sin \frac{A}{2}. \text{ A đúng.}$$

$$+ \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \Leftrightarrow -\tan A(1 - \tan B \tan C) = \tan B + \tan C$$

$$\Leftrightarrow \tan A = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} \Leftrightarrow \tan A = -\tan(B+C). \text{ B đúng.}$$

$$+ \cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cdot \cot B \cdot \cot C \Leftrightarrow \cot A(\cot B \cot C - 1) = \cot B + \cot C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cot A} = \frac{\cot B \cot C - 1}{\cot B + \cot C} \Leftrightarrow \tan A = \cot(B+C). \text{ C sai.}$$

$$+ \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \cdot \left( \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) = 1 - \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan \frac{A}{2}} = \frac{\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}}{1 - \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}} \Leftrightarrow \cot \frac{A}{2} = \tan \left( \frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right). \text{ D đúng.}$$

**BẢNG ĐÁP ÁN**

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |      |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 1.A | 2.B | 3.D | 4.C | 5.C | 6.A | 7.B | 8.C | 9.D | 10.D |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 11.C  | 12.C  | 13.B  | 15.C  | 16.D  | 17.D  | 18.B  | 19.A  | 20.A  | 21.D  |
| 22.C  | 23.C  | 24.D  | 25.D  | 26.C  | 27.D  | 28.A  | 29.D  | 30.A  | 31.A  |
| 32.D  | 33.B  | 34.C  | 35.C  | 36.B  | 37.A  | 38.A  | 39.A  | 40.C  | 41.A  |
| 42.C  | 43.D  | 44.B  | 45.B  | 46.A  | 47.C  | 48.B  | 49.A  | 50.B  | 51.A  |
| 52.C  | 53.D  | 54.A  | 55.D  | 56.A  | 57.B  | 58.D  | 59.D  | 60.D  | 61.C  |
| 62.C  | 63.A  | 64.D  | 65.C  | 66.B  | 67.D  | 68.D  | 69.C  | 70.D  | 71.B  |
| 72.C  | 73.A  | 74.B  | 75.A  | 76.A  | 77.C  | 78.A  | 79.D  | 80.D  | 81.C  |
| 82.D  | 83.A  | 84.B  | 85.A  | 86.A  | 87.D  | 88.D  | 89.D  | 90.B  | 91.C  |
| 92.C  | 93.C  | 94.A  | 95.C  | 96.D  | 97.D  | 98.D  | 99.C  | 100.A | 101.C |
| 102.C | 103.B | 104.A | 105.D | 106.B | 107.D | 108.C | 109.B | 110.C | 111.C |
| 112.B | 113.D | 114.D | 115.A | 116.A | 117.B | 118.D | 119.B | 120.C | 121.B |
| 122.A | 123.C | 124.C | 125.A | 126.A | 127.C | 128.D | 129.C | 130.C |       |

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 3: HÀM SỐ SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ



### LÝ THUYẾT.

#### I. HÀM SỐ CHẴN, HÀM SỐ LẺ, HÀM SỐ TUẦN HOÀN

##### 1) Hàm số chẵn, hàm số lẻ



Cho hàm số  $y = f(x)$  với tập xác định  $D$ .

- Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là *hàm số chẵn* nếu  $\forall x \in D$  thì  $-x \in D$  và  $f(-x) = f(x)$ .
- Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là *hàm số lẻ* nếu  $\forall x \in D$  thì  $-x \in D$  và  $f(-x) = -f(x)$ .

#### Chú ý

- Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

##### b) Hàm số tuần hoàn



Cho hàm số  $y = f(x)$  với tập xác định  $D$ . Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là *tuần hoàn* nếu tồn tại một số  $T$  khác 0 sao cho với mọi  $x \in D$ , ta có:

- $x + T \in D$  và  $x - T \in D$ ;
- $f(x + T) = f(x)$ .

Số  $T$  dương nhỏ nhất thỏa mãn (nếu có) các tính chất trên được gọi là *chu kỳ* của hàm số tuần hoàn đó.

#### Nhận xét

Cho hàm số tuần hoàn chu kỳ  $T$ . Từ đồ thị hàm số đó trên đoạn  $[a; a + T]$ , ta dịch chuyển song song với trục hoành sang phải (hoặc sang trái) theo đoạn có độ dài  $T$  thì được đồ thị hàm số trên đoạn  $[a + T; a + 2T]$  (hoặc  $[a - T; a]$ ).

#### II. Hàm số $y = \sin x$

##### 1. Định nghĩa:



Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  $x$  với một số thực  $\sin x$  được gọi là hàm số  $y = \sin x$ .  
Tập xác định của hàm số  $y = \sin x$  là  $\mathbb{R}$ .

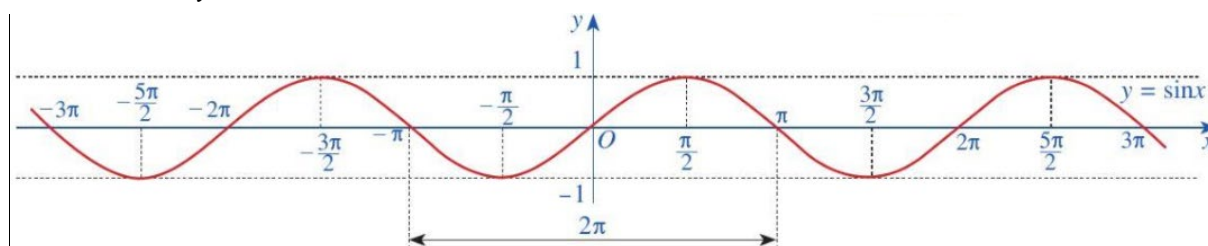
## 2. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \sin x$

- TXĐ:  $D = \mathbb{R}$
- Hàm số  $y = \sin x$  xác định trên  $\mathbb{R}$ , nhận giá trị trên đoạn  $[-1; 1]$  và
- Là hàm số lẻ vì:  $\sin(-x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ .
- Hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trên mỗi khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ , nghịch biến trên mỗi khoảng  $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

Hàm số  $y = \sin x$  nhận các giá trị đặc biệt:

- ☐  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- ☐  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- ☐  $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Đồ thị hàm số  $y = \sin x$ :



## III. Hàm số $y = \cos x$

### 1. Định nghĩa:



Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  $x$  với một số thực  $\cos x$  được gọi là hàm số  $y = \cos x$ .  
Tập xác định của hàm số  $y = \cos x$  là  $\mathbb{R}$ .

## 2. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \cos x$

- TXĐ:  $D = \mathbb{R}$
- Hàm số  $y = \cos x$  xác định trên  $\mathbb{R}$ , nhận giá trị trên đoạn  $[-1; 1]$  và
- Là hàm số chẵn vì:  $\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ .

- Hàm số  $y = \cos x$  đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ , nghịch biến trên mỗi khoảng  $(k2\pi; \pi + k2\pi)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

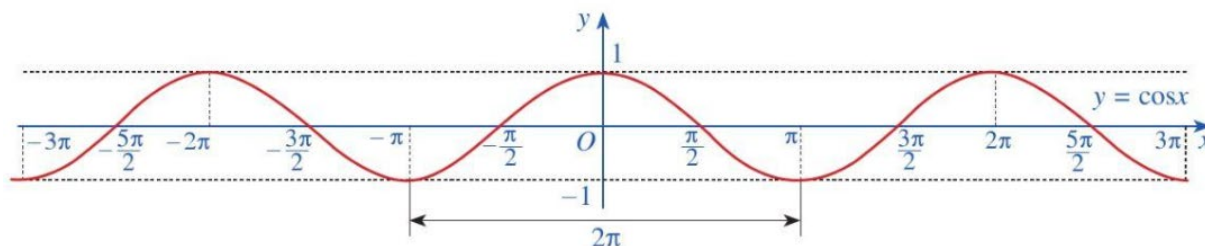
Hàm số  $y = \cos x$  nhận các giá trị đặc biệt:

$$\square \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\square \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\square \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Đồ thị hàm số  $y = \cos x$ :



### III. Hàm số $y = \tan x$

#### 1. Định nghĩa:

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  $x \in D$  với một số thực  $\tan x$  được gọi là hàm số  $y = \tan x$ . Tập xác định của hàm số  $y = \tan x$  là  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

#### 2. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \tan x$

- TXĐ:  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Hàm số  $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  nhận giá trị trên  $\mathbb{R}$
- Là hàm số chẵn vì:  $\tan(-x) = -\tan x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$ .

- Hàm số  $y = \tan x$  đồng biến trên mỗi khoảng  $\left( -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

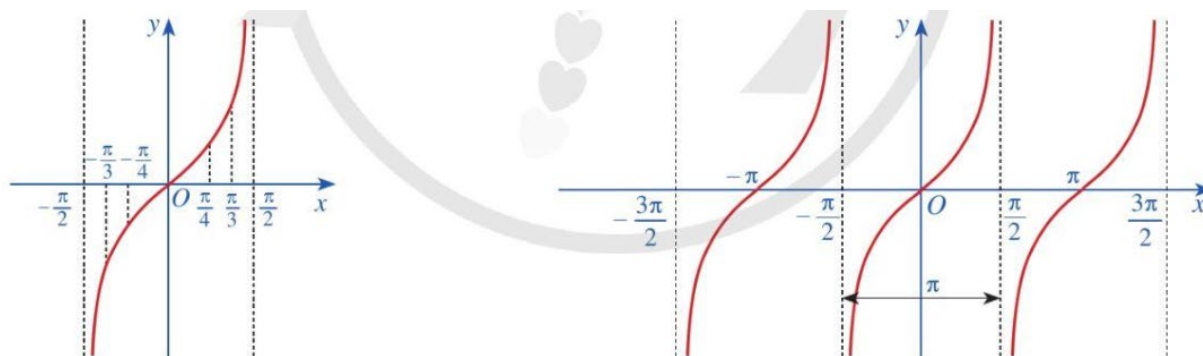
Hàm số  $y = \tan x$  nhận các giá trị đặc biệt:

$$\square \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\square \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\square \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Đồ thị hàm số  $y = \tan x$ :



### III. Hàm số $y = \cot x$

#### 1. Định nghĩa:

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  $x \in E$  với một số thực  $\cot x$  được gọi là hàm số  $y = \cot x$ . Tập xác định của hàm số  $y = \cot x$  là  $E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

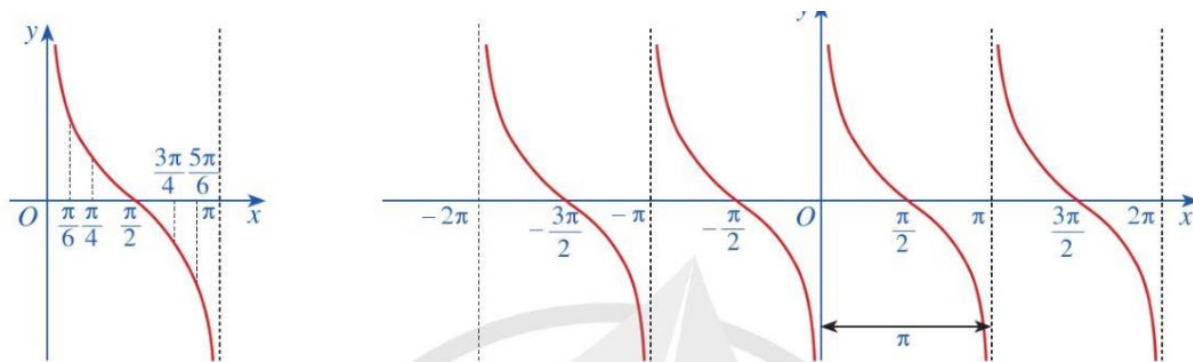
#### 2. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \cot x$

- TXĐ:  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .
- Hàm số  $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$  nhận giá trị trên  $\mathbb{R}$ .
- Là hàm số lẻ vì:  $\cot(-x) = -\cot x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ .
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$ .
- Hàm số  $y = \cot x$  nghịch biến trên mỗi khoảng  $(k\pi; \pi + k\pi)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

Hàm số  $y = \cot x$  nhận các giá trị đặc biệt:

- ☐  $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- ☐  $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- ☐  $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Đồ thị hàm số  $y = \cot x$ :



## II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

### DẠNG 1. TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

#### 1 KIẾN THỨC CẦN THIẾT.

##### TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN.

Hàm số  $y = \sin x$  ;  $y = \cos x$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$ .

Hàm số  $y = \tan x$  có tập xác định là  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Hàm số  $y = \cot x$  có tập xác định là  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

##### PHƯƠNG PHÁP

+ Tìm điều kiện để hàm số có nghĩa

+ Giải ra điều kiện

+ Suy ra tập xác định của hàm số

**Chú ý:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định bởi:

+  $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  lưu ý  $Q(x) \neq 0$ .

+  $y = f(x) = \sqrt[n]{Q(x)}$  thì  $y = f(x)$  có nghĩa khi  $Q(x) \geq 0$ .

+  $y = f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)}}$  lưu ý  $Q(x) > 0$ .

+  $y = \tan(u(x))$  xác định  $\Leftrightarrow u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ .

+  $y = \cot(u(x))$  xác định  $\Leftrightarrow u(x) \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$ .

#### 2 BÀI TẬP.

**Câu 1:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \tan(x - \frac{\pi}{6})$

**Câu 2:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \cot^2(\frac{2\pi}{3} - 3x)$

**Câu 3:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{\tan 2x}{\sin x + 1} + \cot(3x + \frac{\pi}{6})$

**Câu 4:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{\tan 5x}{\sin 4x - \cos 3x}$

**Câu 5:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{3 + 2 \cos x}$

**Câu 6:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \sin \frac{\pi^2}{2x-1}$

**Câu 7:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = 3 \cot(2x+3)$

**Câu 8:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$

**Câu 9:** Tìm tập xác định của các hàm số sau

- |                                                                              |                                                                                 |                                           |                                                 |
|------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| a) $y = \sin x + \cos x$                                                     | b). $y = \sin \sqrt{x+4}$                                                       | c) $y = \frac{1 + \tan x}{\sin x}$        | d). $y = \tan \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$ |
| e) $y = \cot \left( \frac{\pi}{2} + x \right)$                               | f). $y = \sqrt{3 - 2 \cos x}$                                                   | g) $y = \frac{1 + \sin x}{\sqrt{\cos x}}$ | h) $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$     |
| i) $y = \cot \left( 3x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\tan 2x}{\sin x + 1}$ | j) $y = \sqrt{5 + 2 \cot^2 x - \sin x} + \cot \left( \frac{\pi}{2} + x \right)$ |                                           |                                                 |

**Câu 10:** Tìm  $m$  để hàm số sau xác định trên  $\mathbb{R}$ .

a)  $y = \sqrt{2m - 3 \cos x}$     b)  $y = \frac{2}{\sqrt{\sin^2 x - 2 \sin x + m - 1}}$

**Câu 11:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \sqrt{5 - m \sin x - (m+1) \cos x}$  xác định trên  $\mathbb{R}$ .

## DẠNG 2. XÉT TÍNH CHẴN LẺ CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN



## KIẾN THỨC CẦN THIẾT.

**Định nghĩa:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $D$

- Hàm số  $f$  được gọi là hàm số chẵn nếu với mọi  $x$  thuộc  $D$ , ta có  $-x$  cũng thuộc  $D$  và  $f(-x) = f(x)$ .
- Hàm số  $f$  được gọi là hàm số lẻ nếu với mọi  $x$  thuộc  $D$ , ta có  $-x$  cũng thuộc  $D$  và  $f(-x) = -f(x)$ .

**Phương pháp giải**

Ta thực hiện theo các bước sau:

*Bước 1:* Tìm tập xác định  $D$  của hàm số, khi đó:

- ☐ Nếu  $D$  là tập đối xứng (tức là  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ ), ta thực hiện tiếp bước 2.
- ☐ Nếu  $D$  không phải là tập đối xứng (tức là  $\exists x \in D$  mà  $-x \notin D$ ), ta kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

*Bước 2:* Xác định  $f(-x)$ , khi đó:

- ☐ Nếu  $f(-x) = f(x)$  kết luận hàm số là hàm chẵn.
- ☐ Nếu  $f(-x) = -f(x)$  kết luận hàm số là hàm lẻ.
- ☐ Ngoài ra kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

**Chú ý:** Với các hàm số lượng giác cơ bản, ta có:

1. Hàm số  $y = \sin x$  là hàm số lẻ.
2. Hàm số  $y = \cos x$  là hàm số chẵn
3. Hàm số  $y = \tan x$  là hàm số lẻ.
4. Hàm số  $y = \cot x$  là hàm số lẻ.

**\* Lưu ý:** Một số công thức liên quan đến việc xử lý dấu “ – ”

1. Công thức hai cung đối nhau:

$$\sin(-x) = -\sin x; \cos(-x) = \cos x; \tan(-x) = -\tan x; \cot(-x) = -\cot x$$

$$2. |-x| = |x|$$

$$3. (-x)^n = x^n \text{ khi } n \text{ chẵn và } (-x)^n = -x^n \text{ khi } n \text{ lẻ.}$$



## BÀI TẬP.

**Câu 12:** Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a)  $y = 2x \sin x$      $y = 2x \sin x$ .                      b)  $y = \cos x + \sin 2x$ .

c)  $y = \frac{\cos 2x}{x}$ .                                              d)  $y = \tan^7 2x \cdot \sin 5x$ .

**Câu 13:** Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a)  $y = \tan x + \cot x$                       b)  $y = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right)$                       c)  $y = \frac{\sin^{2020n}(x) + 2020}{\cos(x)}, n \in \mathbb{Z}$

**Câu 14:** Xác định tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = 3m \sin 4x + \cos 2x$  là hàm chẵn.

### DẠNG 3: TÍNH TUẦN HOÀN CỦA HÀM SỐ



## KIẾN THỨC CẦN THIẾT.

**Định nghĩa:** Hàm số  $y = f(x)$  có tập xác định là  $D$  được gọi là hàm số tuần hoàn, nếu tồn tại một số  $T \neq 0$  sao cho với mọi  $x \in D$  ta có:

☐  $x - T \in D$  và  $x + T \in D$ .

☐  $f(x + T) = f(x)$ .

Số dương  $T$  nhỏ nhất thỏa mãn các tính chất trên được gọi là chu kỳ hàm số tuần hoàn đó.

Người ta chứng minh được rằng hàm số  $y = \sin x$  tuần hoàn với chu kỳ  $T = 2\pi$ ; hàm số  $y = \cos x$  tuần hoàn với chu kỳ  $T = 2\pi$ ; hàm số  $y = \tan x$  tuần hoàn với chu kỳ  $T = \pi$ ; Hàm số  $y = \cot x$  tuần hoàn với chu kỳ  $T = \pi$ .

**Chú ý:**

☐ Sử dụng định nghĩa hàm số tuần hoàn và tìm chu kỳ của nó.

☐ Sử dụng các kết quả sau:

- Hàm số  $y = A \cdot \sin(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{2\pi}{|a|}$

- Hàm số  $y = A \cdot \cos(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{2\pi}{|a|}$

- Hàm số  $y = A \cdot \tan(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{\pi}{|a|}$

- Hàm số  $y = A \cdot \cot(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{\pi}{|a|}$

- Nếu hàm số  $y = f(x)$  chỉ chứa các hàm số lượng giác có chu kỳ lần lượt là  $T_1, T_2, \dots, T_n$  thì hàm số  $f$  có chu kỳ  $T$  là bội chung nhỏ nhất của  $T_1, T_2, \dots, T_n$ .

- Nếu hàm số  $y = f(x)$  tuần hoàn với chu kì  $T$  thì hàm số  $y = f(x) + c$  ( $c$  là hằng số) cũng là hàm số tuần hoàn với chu kì  $T$ .

**Một số dấu hiệu nhận biết hàm số  $y = f(x)$  không phải là hàm tuần hoàn**

Hàm số  $y = f(x)$  không phải là hàm tuần hoàn khi một trong các điều kiện sau bị vi phạm:

- + Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn.
- + Tồn tại số  $a$  sao cho hàm số không xác định với  $x > a$  hoặc  $x < a$ .
- + Phương trình  $f(x) = k$  có nghiệm nhưng số nghiệm hữu hạn.
- + Phương trình  $f(x) = k$  có vô số nghiệm sắp thứ tự:

$$\dots < x_n < x_{n+1} < \dots$$

$$\text{mà } |x_n - x_{n+1}| \rightarrow 0 \text{ hay } \infty.$$



## **BÀI TẬP.**

**Câu 15:** Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau:  $y = \cos^2 x - 1$ .

**Câu 16:** Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau:  $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$ .

**Câu 17:** Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau:  $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$

**Câu 18:** Chứng minh rằng hàm số sau là hàm số tuần hoàn và tìm chu kì của nó:  $y = \frac{1}{\sin x}$ .

**Câu 19:** Cho  $a, b, c, d$  là các số thực khác 0. Chứng minh rằng hàm số  $f(x) = a \sin cx + b \cos dx$  là hàm số tuần hoàn khi và chỉ khi  $\frac{c}{d}$  là số hữu tỉ.

**Câu 20:** Cho hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  là hai hàm số tuần hoàn với chu kỳ lần lượt là  $T_1, T_2$ . Chứng minh rằng nếu  $\frac{T_1}{T_2}$  là số hữu tỉ thì các hàm số  $f(x) \pm g(x); f(x) \cdot g(x)$  là những hàm số tuần hoàn.

**Câu 21:** Tìm chu kì (nếu có) của các hàm số sau:

a)  $y = 1 - \sin 5x$ . b)  $y = \cos^2 x - 1$ .

b) c)  $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$ . d)  $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$

**Câu 22:** Tìm chu kỳ của hàm số:  $f(x) = \sin 3x + 3 \cos 2x$ .

**DẠNG 4: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC**



**KIẾN THỨC CẦN THIẾT.**

**PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**

$$1) \begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 0 \leq |\sin x| \leq 1 \\ 0 \leq |\cos x| \leq 1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 0 \leq \sqrt{\sin x} \leq 1 \\ 0 \leq \sqrt{\cos x} \leq 1 \end{cases}$$



**BÀI TẬP.**

**Câu 23:** Tìm GTLN - GTNN của các hàm số sau:

$$\begin{aligned} \text{a. } y &= 2 + 3 \cos x. & \text{b. } y &= 3 \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) - 2. \\ \text{c. } y &= \sqrt{4 \cos^2 2x + 1}. & \text{d. } y &= 3 - 2|\sin x|. \\ \text{e. } y &= 2(\sin^4 x + \cos^4 x) + 3. & \text{f. } y &= 3 \sin 2x - 12 \text{ với } x \in \left[ -\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8} \right]. \\ \text{g. } y &= 4 \cos^2 \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} \right) - 7 \text{ với } x \in [0; \pi]. \end{aligned}$$

**Câu 24:** Tìm GTLN – GTNN của các hàm số sau:

$$\begin{aligned} \text{a. } y &= -2 \sin^2 x + 3 \sin x - 1 \\ \text{b. } y &= \cos^2 x + 2 \sin x + 2 \\ \text{c. } y &= \cos x + 2 \cos 2x \\ \text{d. } y &= (1 - \cos^2 x)^2 - 2 \cos^2 x + 1 \\ \text{e. } y &= 2 \sin^2 x - \sin x + 2 \text{ trên đoạn } [0; \pi] \\ \text{f. } y &= 2 \cos x + \cos 2x - 8 \text{ trên đoạn } \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} \right]. \\ \text{g. } y &= \tan^2 x - \tan x + 1 \text{ trên đoạn } \left[ -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right]. \\ \text{h. } y &= \sin x + \cos x + 4 \sin x \cos x + 7. \\ \text{i. } & \text{Tìm min của hàm số: } y = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} - \sin x - \frac{1}{\sin x} \text{ với } 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 3: HÀM SỐ SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ



### LÝ THUYẾT.

#### I. HÀM SỐ CHẴN, HÀM SỐ LẺ, HÀM SỐ TUẦN HOÀN

##### 1) Hàm số chẵn, hàm số lẻ



Cho hàm số  $y = f(x)$  với tập xác định  $D$ .

- Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là *hàm số chẵn* nếu  $\forall x \in D$  thì  $-x \in D$  và  $f(-x) = f(x)$ .
- Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là *hàm số lẻ* nếu  $\forall x \in D$  thì  $-x \in D$  và  $f(-x) = -f(x)$ .

#### Chú ý

- Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

##### b) Hàm số tuần hoàn



Cho hàm số  $y = f(x)$  với tập xác định  $D$ . Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là *tuần hoàn* nếu tồn tại một số  $T$  khác 0 sao cho với mọi  $x \in D$ , ta có:

- $x + T \in D$  và  $x - T \in D$ ;
- $f(x + T) = f(x)$ .

Số  $T$  dương nhỏ nhất thỏa mãn (nếu có) các tính chất trên được gọi là *chu kỳ* của hàm số tuần hoàn đó.

#### Nhận xét

Cho hàm số tuần hoàn chu kỳ  $T$ . Từ đồ thị hàm số đó trên đoạn  $[a; a + T]$ , ta dịch chuyển song song với trục hoành sang phải (hoặc sang trái) theo đoạn có độ dài  $T$  thì được đồ thị hàm số trên đoạn  $[a + T; a + 2T]$  (hoặc  $[a - T; a]$ ).

#### II. Hàm số $y = \sin x$

##### 1. Định nghĩa:



Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  $x$  với một số thực  $\sin x$  được gọi là hàm số  $y = \sin x$ .  
Tập xác định của hàm số  $y = \sin x$  là  $\mathbb{R}$ .

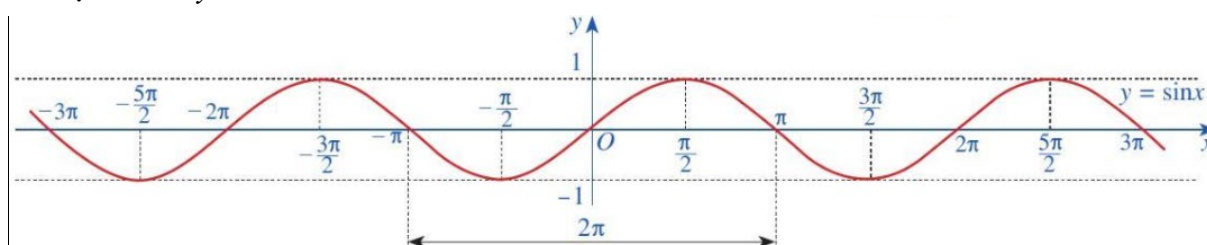
## 2. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \sin x$

- TXĐ:  $D = \mathbb{R}$
- Hàm số  $y = \sin x$  xác định trên  $\mathbb{R}$ , nhận giá trị trên đoạn  $[-1; 1]$  và
- Là hàm số lẻ vì:  $\sin(-x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ .
- Hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trên mỗi khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ , nghịch biến trên mỗi khoảng  $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

Hàm số  $y = \sin x$  nhận các giá trị đặc biệt:

- ☐  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- ☐  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- ☐  $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Đồ thị hàm số  $y = \sin x$ :



## III. Hàm số $y = \cos x$

### 1. Định nghĩa:



Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  $x$  với một số thực  $\cos x$  được gọi là hàm số  $y = \cos x$ .  
Tập xác định của hàm số  $y = \cos x$  là  $\mathbb{R}$ .

## 2. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \cos x$

- TXĐ:  $D = \mathbb{R}$
- Hàm số  $y = \cos x$  xác định trên  $\mathbb{R}$ , nhận giá trị trên đoạn  $[-1; 1]$  và
- Là hàm số chẵn vì:  $\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ .

- Hàm số  $y = \cos x$  đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ , nghịch biến trên mỗi khoảng  $(k2\pi; \pi + k2\pi)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

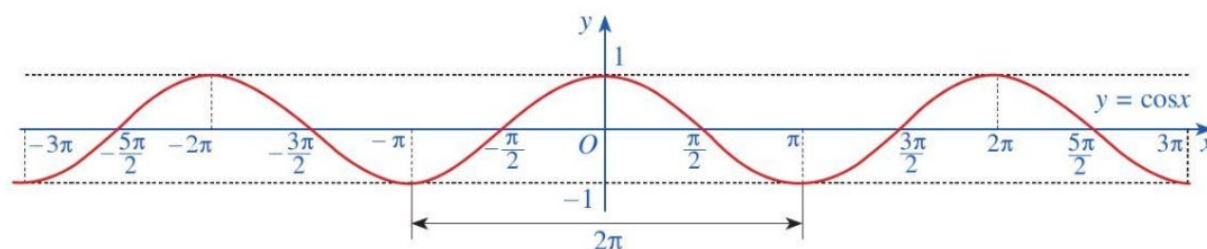
Hàm số  $y = \cos x$  nhận các giá trị đặc biệt:

$$\square \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\square \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\square \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Đồ thị hàm số  $y = \cos x$ :



### III. Hàm số $y = \tan x$

#### 1. Định nghĩa:

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  $x \in D$  với một số thực  $\tan x$  được gọi là hàm số  $y = \tan x$ . Tập xác định của hàm số  $y = \tan x$  là  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

#### 2. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \tan x$

- TXĐ:  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Hàm số  $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  nhận giá trị trên  $\mathbb{R}$
- Là hàm số chẵn vì:  $\tan(-x) = -\tan x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$ .

- Hàm số  $y = \tan x$  đồng biến trên mỗi khoảng  $\left( -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

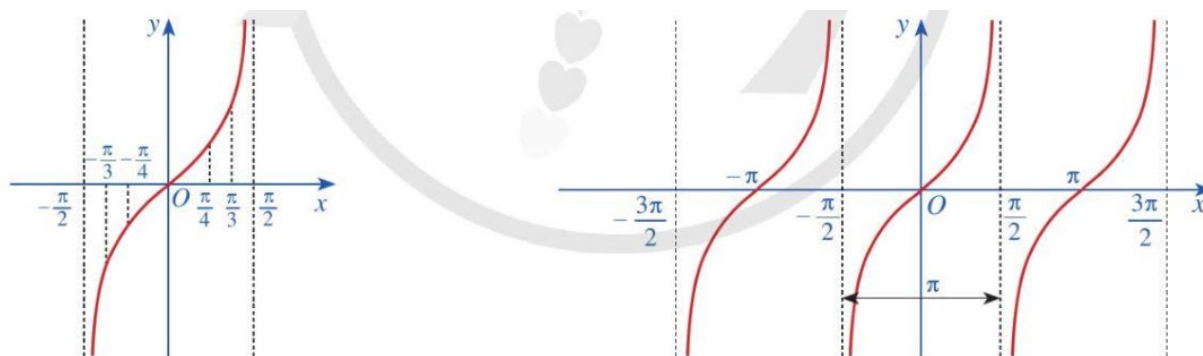
Hàm số  $y = \tan x$  nhận các giá trị đặc biệt:

$$\square \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\square \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\square \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Đồ thị hàm số  $y = \tan x$ :



### III. Hàm số $y = \cot x$

#### 1. Định nghĩa:

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  $x \in E$  với một số thực  $\cot x$  được gọi là hàm số  $y = \cot x$ . Tập xác định của hàm số  $y = \cot x$  là  $E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

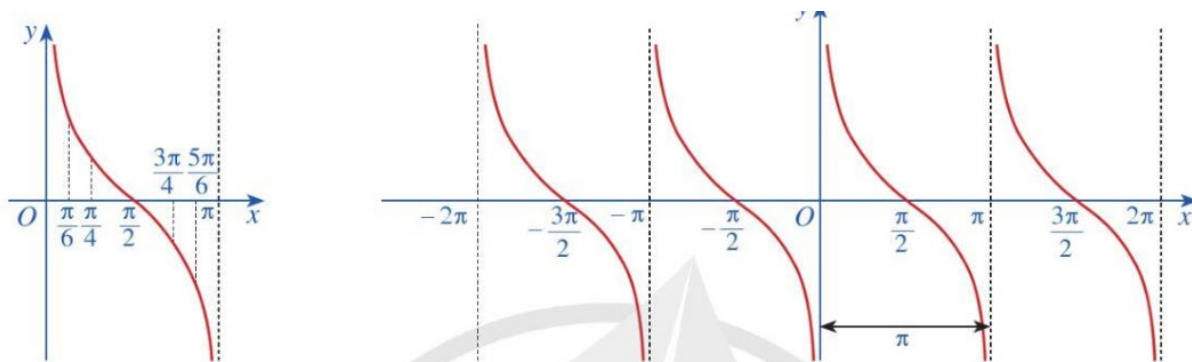
#### 2. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \cot x$

- TXĐ:  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .
- Hàm số  $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$  nhận giá trị trên  $\mathbb{R}$ .
- Là hàm số lẻ vì:  $\cot(-x) = -\cot x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ .
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$ .
- Hàm số  $y = \cot x$  nghịch biến trên mỗi khoảng  $(k\pi; \pi + k\pi)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

Hàm số  $y = \cot x$  nhận các giá trị đặc biệt:

- ☐  $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- ☐  $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- ☐  $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Đồ thị hàm số  $y = \cot x$ :



## II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

### DẠNG 1. TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

#### 1 KIẾN THỨC CẦN THIẾT.

##### TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN.

Hàm số  $y = \sin x$ ;  $y = \cos x$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$ .

Hàm số  $y = \tan x$  có tập xác định là  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Hàm số  $y = \cot x$  có tập xác định là  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

##### PHƯƠNG PHÁP

+ Tìm điều kiện để hàm số có nghĩa

+ Giải ra điều kiện

+ Suy ra tập xác định của hàm số

**Chú ý:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định bởi:

+  $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  lưu ý  $Q(x) \neq 0$ .

+  $y = f(x) = \sqrt[n]{Q(x)}$  thì  $y = f(x)$  có nghĩa khi  $Q(x) \geq 0$ .

+  $y = f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)}}$  lưu ý  $Q(x) > 0$ .

+  $y = \tan(u(x))$  xác định  $\Leftrightarrow u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ .

+  $y = \cot(u(x))$  xác định  $\Leftrightarrow u(x) \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$ .

#### 2 BÀI TẬP.

**Câu 1:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

**Lời giải**

$$\text{Điều kiện: } \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**Câu 2:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \cot^2\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right)$

**Lời giải**

$$\text{Điều kiện: } \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} - 3x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{9} - k\frac{\pi}{3}$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**Câu 3:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{\tan 2x}{\sin x + 1} + \cot\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin x \neq -1 \\ \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

**Câu 4:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{\tan 5x}{\sin 4x - \cos 3x}$

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } \sin 4x - \cos 3x = \sin 4x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos 5x \neq 0 \\ \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ \sin\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases}$$

$$\text{Vậy TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}; \frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \right\}.$$

**Câu 5:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{3 + 2 \cos x}$

**Lời giải**

hàm số xác định khi  $3 + 2 \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{3}{2}$  (đúng  $\forall x \in \mathbb{R}$ ), vì  $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Suy ra tập xác định là  $D = \mathbb{R}$ .

**Câu 6:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \sin \frac{\pi^2}{2x-1}$

**Lời giải**

hàm số xác định  $\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{2x-1}$  xác định  $\Leftrightarrow 2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$ . Tập xác định của hàm số

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

**Câu 7:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = 3 \cot(2x+3)$

**Lời giải**

$y = 3 \cot(2x+3) = \frac{3 \cos(2x+3)}{\sin(2x+3)}$  hàm số xác định  $\Leftrightarrow \sin(2x+3) \neq 0 \Leftrightarrow 2x+3 \neq k\pi$

$$\Leftrightarrow x \neq -\frac{3}{2} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Tập xác định của hàm số  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 8:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$

**Lời giải**

$y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\sin x}{-\cos 2x} = -\frac{\sin x}{\cos 2x}$  hàm số xác định  $\Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \text{ Tập xác định của hàm số } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**Câu 9:** Tìm tập xác định của các hàm số sau

a)  $y = \sin x + \cos x$

b)  $y = \sin \sqrt{x+4}$

c)  $y = \frac{1 + \tan x}{\sin x}$

d)  $y = \tan \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$

e)  $y = \cot \left( \frac{\pi}{2} + x \right)$

f)  $y = \sqrt{3-2\cos x}$

g)  $y = \frac{1 + \sin x}{\sqrt{\cos x}}$

h)  $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$

i)  $y = \cot \left( 3x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\tan 2x}{\sin x + 1}$

j)  $y = \sqrt{5 + 2 \cot^2 x - \sin x} + \cot \left( \frac{\pi}{2} + x \right)$

**Lời giải**

a) Ta có hàm số  $y = \sin x$ ;  $y = \cos x$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$  nên hàm số  $y = \sin x + \cos x$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$ .

b) Điều kiện xác định của hàm số là

$$x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4. \text{ Vậy } D = [-4; +\infty).$$

c) Điều kiện xác định của hàm số là

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

d) Điều kiện xác định của hàm số là

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

e) Điều kiện xác định của hàm số là

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{2} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

f) Điều kiện xác định của hàm số là

$$3 - 2\cos x \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos x \leq 3 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{3}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Vậy tập xác định của hàm số là } D = \mathbb{R}.$$

g) Điều kiện xác định của hàm số là

$$\cos x > 0 \Leftrightarrow x \in \left( \frac{-\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right); k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy } D = \left( \frac{-\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right); k \in \mathbb{Z}.$$

h) Điều kiện xác định của hàm số là

$$\sin^2 x - \cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow -\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

i) Điều kiện xác định của hàm số là

$$\begin{cases} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{6} \neq k\pi \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{-\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{-\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{-\pi}{2} + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}; \frac{-\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

j) Ta có điều kiện xác định của hàm số là

$$\begin{cases} 5 + 2 \cot^2 x - \sin x \geq 0(1) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \neq 0(2) \end{cases}$$

Ta có  $5 + 2 \cot^2 x - \sin x = (3 - \sin x) + 2(1 + \cot^2 x) = (3 - \sin x) + \frac{2}{\sin^2 x} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$(2) \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{2} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{-\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 10:** Tìm  $m$  để hàm số sau xác định trên  $\mathbb{R}$ .

a)  $y = \sqrt{2m - 3 \cos x}$  b)  $y = \frac{2}{\sqrt{\sin^2 x - 2 \sin x + m - 1}}$

**Lời giải**

a) Hàm số xác định trên  $\mathbb{R}$  khi chỉ khi:

$$2m - 3 \cos x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3 \cos x \leq 2m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{2m}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m}{3} \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}.$$

b) Hàm số xác định trên  $\mathbb{R}$  khi chỉ khi:

$$\sin^2 x - 2 \sin x + m - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > -\sin^2 x + 2 \sin x + 1 = 2 - (\sin x - 1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow m > \max_{(-\infty; +\infty)} (-\sin^2 x + 2 \sin x + 1) = 2 \Leftrightarrow m > 2.$$

**Câu 11:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \sqrt{5 - m \sin x - (m+1) \cos x}$  xác định trên  $\mathbb{R}$ .

**Lời giải**

Hàm số xác định trên  $\mathbb{R}$  khi chỉ khi:

$$5 - m \sin x - (m+1) \cos x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \sin x + (m+1) \cos x \leq 5, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{\sqrt{m^2 + (m+1)^2}} \sin x + \frac{m+1}{\sqrt{m^2 + (m+1)^2}} \cos x \leq \frac{5}{\sqrt{m^2 + (m+1)^2}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) \leq \frac{5}{\sqrt{m^2 + (m+1)^2}}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{m^2 + (m+1)^2}} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{2m^2 + 2m + 1} \leq 5.$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 24 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 3. \text{ Mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}.$$

DẠNG 2. XÉT TÍNH CHẴN LẺ CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN



**KIẾN THỨC CẦN THIẾT.**

**Định nghĩa:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $D$

- Hàm số  $f$  được gọi là hàm số chẵn nếu với mọi  $x$  thuộc  $D$ , ta có  $-x$  cũng thuộc  $D$  và  $f(-x) = f(x)$ .
- Hàm số  $f$  được gọi là hàm số lẻ nếu với mọi  $x$  thuộc  $D$ , ta có  $-x$  cũng thuộc  $D$  và  $f(-x) = -f(x)$ .

**Phương pháp giải**

Ta thực hiện theo các bước sau:

**Bước 1:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số, khi đó:

- ☐ Nếu  $D$  là tập đối xứng (tức là  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ ), ta thực hiện tiếp bước 2.
- ☐ Nếu  $D$  không phải là tập đối xứng (tức là  $\exists x \in D$  mà  $-x \notin D$ ), ta kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

**Bước 2:** Xác định  $f(-x)$ , khi đó:

- ☐ Nếu  $f(-x) = f(x)$  kết luận hàm số là hàm chẵn.
- ☐ Nếu  $f(-x) = -f(x)$  kết luận hàm số là hàm lẻ.
- ☐ Ngoài ra kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

**Chú ý:** Với các hàm số lượng giác cơ bản, ta có:

1. Hàm số  $y = \sin x$  là hàm số lẻ.
2. Hàm số  $y = \cos x$  là hàm số chẵn
3. Hàm số  $y = \tan x$  là hàm số lẻ.
4. Hàm số  $y = \cot x$  là hàm số lẻ.

**\* Lưu ý:** Một số công thức liên quan đến việc xử lý dấu “ – ”

1. Công thức hai cung đối nhau:

$$\sin(-x) = -\sin x; \cos(-x) = \cos x; \tan(-x) = -\tan x; \cot(-x) = -\cot x$$

$$2. |-x| = |x|$$

$$3. (-x)^n = x^n \text{ khi } n \text{ chẵn và } (-x)^n = -x^n \text{ khi } n \text{ lẻ.}$$



**BÀI TẬP.**

**Câu 12:** Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

- a)  $y = 2x \sin x$     $y = 2x \sin x$ .      b)  $y = \cos x + \sin 2x$ .
- c)  $y = \frac{\cos 2x}{x}$ .      d)  $y = \tan^7 2x \cdot \sin 5x$ .

**Lời giải**

a) Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$  là tập đối xứng do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$  (1).

Đặt  $y = f(x) = 2x \sin x$ .

NX:  $\forall x \in D, f(-x) = 2(-x) \sin(-x) = 2x \sin x = f(x)$  (2).

Từ (1) và (2) ta kết luận hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$  là tập đối xứng do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Đặt  $y = f(x) = \cos x + \sin 2x$ .

Xét  $x = \frac{\pi}{3} \in D \Rightarrow -x = -\frac{\pi}{3} \in D$ .

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ta thấy  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$  nên hàm số đã cho không là hàm số chẵn

Và  $-f\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$  nên hàm số đã cho không là hàm số lẻ.

c) Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  là tập đối xứng do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Đặt  $y = f(x) = \frac{\cos 2x}{x}$ .

Ta có  $\forall x \in D: f(-x) = \frac{\cos(-2x)}{-x} = -\frac{\cos(2x)}{x} = -f(x)$ .

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

d) Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  là tập đối xứng do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Đặt  $y = f(x) = \tan^7 2x \cdot \sin 5x$ .

Ta có  $\forall x \in D: f(-x) = \tan^7(-2x) \sin(-5x) = \tan^7(2x) \sin(5x) = f(x)$ .

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

**Chú ý:** Đôi khi người ta còn phát biểu bài toán dưới dạng:

Với câu a) Chứng minh đồ thị hàm số  $y = 2x \sin x$  nhận trục tung làm trục đối xứng.

Với câu c) Chứng minh đồ thị hàm số  $y = \frac{\cos 2x}{x}$  nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

**Câu 13:** Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a)  $y = \tan x + \cot x$       b)  $y = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right)$       c)  $y = \frac{\sin^{2020n}(x) + 2020}{\cos(x)}, n \in \mathbb{Z}$

**Lời giải**

a) Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$  là tập đối xứng do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Ta có  $\forall x \in D: f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -(\tan x + \cot x) = -f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$  là tập đối xứng do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

NX:  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2x)$ .

Ta có  $\forall x \in D: f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x) = f(x)$ .

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$  là tập đối xứng do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

+ NX:  $\sin^{2020n}(-x) = (-\sin x)^{2020n} = \sin^{2020n}(x), \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Do đó  $\forall x \in D: f(-x) = \frac{\sin^{2020n}(-x) + 2020}{\cos(-x)} = \frac{\sin^{2020n}(x) + 2020}{\cos(x)} = f(x)$ .

Suy ra hàm số là hàm số chẵn  $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

+ Với  $n = 0$  thì  $\sin^{2020n}(x) = 1$ . Do đó  $\forall x \in D: f(-x) = \frac{2021}{\cos(-x)} = \frac{2021}{\cos(x)} = f(x)$ .

Suy ra hàm số là hàm số chẵn với  $n = 0$ .

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 14:** Xác định tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = 3m \sin 4x + \cos 2x$  là hàm chẵn.

**Lời giải**

- Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$  là tập đối xứng do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

- Để hàm số đã cho là hàm số chẵn thì  $f(-x) = f(x), \forall x \in D$ .

$$\Leftrightarrow 3m \sin(-4x) + \cos(-2x) = 3m \sin 4x + \cos 2x, \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow -3m \sin(4x) + \cos(2x) = 3m \sin 4x + \cos 2x, \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow 6m \sin(4x) = 0, \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow m = 0.$$

**DẠNG 3: TÍNH TUẦN HOÀN CỦA HÀM SỐ**



**KIẾN THỨC CẦN THIẾT.**

**Định nghĩa:** Hàm số  $y = f(x)$  có tập xác định là  $D$  được gọi là hàm số tuần hoàn, nếu tồn tại một số  $T \neq 0$  sao cho với mọi  $x \in D$  ta có:

$$\square x - T \in D \text{ và } x + T \in D.$$

$$\square f(x + T) = f(x).$$

Số dương  $T$  nhỏ nhất thỏa mãn các tính chất trên được gọi là chu kỳ hàm số tuần hoàn đó.

Người ta chứng minh được rằng hàm số  $y = \sin x$  tuần hoàn với chu kỳ  $T = 2\pi$ ; hàm số  $y = \cos x$  tuần hoàn với chu kỳ  $T = 2\pi$ ; hàm số  $y = \tan x$  tuần hoàn với chu kỳ  $T = \pi$ ; Hàm số  $y = \cot x$  tuần hoàn với chu kỳ  $T = \pi$ .

### Chú ý:

$\square$  Sử dụng định nghĩa hàm số tuần hoàn và tìm chu kỳ của nó.

$\square$  Sử dụng các kết quả sau:

- Hàm số  $y = A \cdot \sin(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{2\pi}{|a|}$

- Hàm số  $y = A \cdot \cos(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{2\pi}{|a|}$

- Hàm số  $y = A \cdot \tan(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{\pi}{|a|}$

- Hàm số  $y = A \cdot \cot(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{\pi}{|a|}$

- Nếu hàm số  $y = f(x)$  chỉ chứa các hàm số lượng giác có chu kỳ lần lượt là  $T_1, T_2, \dots, T_n$  thì hàm số  $f$  có chu kỳ  $T$  là bội chung nhỏ nhất của  $T_1, T_2, \dots, T_n$ .

- Nếu hàm số  $y = f(x)$  tuần hoàn với chu kỳ  $T$  thì hàm số  $y = f(x) + c$  ( $c$  là hằng số) cũng là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T$ .

**Một số dấu hiệu nhận biết hàm số  $y = f(x)$  không phải là hàm tuần hoàn**

Hàm số  $y = f(x)$  không phải là hàm tuần hoàn khi một trong các điều kiện sau bị vi phạm:

+ Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn.

+ Tồn tại số  $a$  sao cho hàm số không xác định với  $x > a$  hoặc  $x < a$ .

+ Phương trình  $f(x) = k$  có nghiệm nhưng số nghiệm hữu hạn.

+ Phương trình  $f(x) = k$  có vô số nghiệm sắp thứ tự:

$$\dots < x_n < x_{n+1} < \dots$$

$$\text{mà } |x_n - x_{n+1}| \rightarrow 0 \text{ hay } \infty.$$



## BÀI TẬP.

**Câu 15:** Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ (nếu có) của hàm số sau:  $y = \cos^2 x - 1$ .

**Lời giải**

Ta biến đổi:  $y = \cos^2 x - 1 = \frac{1 + \cos 2x}{2} - 1 = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2}.$

Do đó  $f$  là hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$

**Câu 16:** Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau:  $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right).$

**Lời giải**

Ta biến đổi:  $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4}{5}x\right).$

Do đó  $f$  là hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{2\pi}{\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{5\pi}{2}.$

**Câu 17:** Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau:  $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$

**Lời giải**

Giả sử hàm số đã cho tuần hoàn  $\Rightarrow$  có số thực dương  $T$  thỏa :

$$f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow \cos(x+T) + \cos\sqrt{3}(x+T) = \cos x + \cos\sqrt{3}x$$

$$x=0 \Rightarrow \cos T + \cos\sqrt{3}T = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos T = 1 \\ \cos\sqrt{3}T = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 2n\pi \\ \sqrt{3}T = 2m\pi \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{m}{n} \text{ vô lí, do}$$

$m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{m}{n}$  là số hữu tỉ. Vậy hàm số đã cho không tuần hoàn.

**Câu 18:** Chứng minh rằng hàm số sau là hàm số tuần hoàn và tìm chu kì của nó:  $y = \frac{1}{\sin x}.$

**Lời giải**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

Ta xét đẳng thức  $f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\sin(x+T)} = \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \sin(x+T) = \sin x.$

Chọn  $x = \frac{\pi}{2}$  thì  $\sin x = 1$  và do đó  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + T = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Số dương nhỏ nhất trong các số  $T$  là  $2\pi.$

Rõ ràng  $\forall x \in D, x+k2\pi \in D, x+k2\pi \in D$  và  $f(x+k2\pi) = \frac{1}{\sin(x+k2\pi)} = \frac{1}{\sin x} = f(x)$

Vậy  $f$  là hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = 2\pi.$

**Câu 19:** Cho  $a, b, c, d$  là các số thực khác 0. Chứng minh rằng hàm số  $f(x) = a \sin cx + b \cos dx$  là hàm số tuần hoàn khi và chỉ khi  $\frac{c}{d}$  là số hữu tỉ.

**Lời giải**

\* Giả sử  $f(x)$  là hàm số tuần hoàn  $\Rightarrow \exists T > 0: f(x+T) = f(x) \quad \forall x$

$$\text{Cho } x = 0, x = -T \Rightarrow \begin{cases} a \sin cT + b \cos dT = b \\ -a \sin cT + b \cos dT = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos dT = 1 \\ \sin cT = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dT = 2n\pi \\ cT = m\pi \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{m}{2n} \in \mathbb{Q}.$$

\* Giả sử  $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z}: \frac{c}{d} = \frac{k}{l}$ . Đặt  $T = \frac{2\pi k}{c} = \frac{2l\pi}{d}$

Ta có:  $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$  là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{2\pi k}{c} = \frac{2l\pi}{d}$ .

**Câu 20:** Cho hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  là hai hàm số tuần hoàn với chu kỳ lần lượt là  $T_1, T_2$ . Chứng minh rằng nếu  $\frac{T_1}{T_2}$  là số hữu tỉ thì các hàm số  $f(x) \pm g(x); f(x).g(x)$  là những hàm số tuần hoàn.

**Lời giải**

Vì  $\frac{T_1}{T_2}$  là số hữu tỉ nên tồn tại hai số nguyên  $m, n; n \neq 0$  sao cho

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n} \Rightarrow nT_1 = mT_2 = T$$

Khi đó  $f(x+T) = f(x+nT_1) = f(x)$  và  $g(x+T) = g(x+mT_2) = g(x)$

Suy ra  $f(x+T) \pm g(x+T) = f(x) \pm g(x)$  và  $f(x+T).g(x+T) = f(x).g(x), \frac{f(x+T)}{g(x+T)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ .

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

**Câu 21:** Tìm chu kỳ (nếu có) của các hàm số sau:

a)  $y = 1 - \sin 5x$ . b)  $y = \cos^2 x - 1$ .

b) c)  $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$ . d)  $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$

**Lời giải**

Ta có hàm số  $y = k \sin(ax+b) + c; y = k \cos(ax+b) + c$  là hàm số tuần hoàn và có chu kỳ

$$T = \frac{2\pi}{|a|}$$

a. Hàm số  $y = 1 - \sin 5x$  tuần hoàn và có chu kỳ  $T_1 = \frac{2\pi}{5}$ .

b. Hàm số  $y = \cos^2 x - 1 = \frac{\cos 2x - 1}{2}$  tuần hoàn và có chu kỳ  $T_2 = \pi$ .

c. Hàm số  $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{4}{5}x\right)$  tuần hoàn và có chu kỳ  $T_2 = \frac{5\pi}{2}$ .

d. Hàm số  $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}.x)$  không tuần hoàn

Vì ta có hàm số  $y = \cos x$  có chu kỳ  $T_1 = 2\pi$  và hàm số  $y = \cos(\sqrt{3}.x)$  có chu kỳ  $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

nhưng không tồn tại bội số chung nhỏ nhất của  $T_1 = 2\pi$  và  $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

**Câu 22:** Tìm chu kỳ của hàm số:  $f(x) = \sin 3x + 3 \cos 2x$ .

## Lời giải

Ta có hàm số  $y = \sin 3x$  có chu kỳ  $T_1 = \frac{2\pi}{3}$  và hàm số  $y = \cos 2x$  có chu kỳ  $T_2 = \pi$

$\Rightarrow$  chu kỳ  $T$  của hàm số  $y = \sin 3x + 3 \cos 2x$  là bội chung nhỏ nhất của  $T_1 = \frac{2\pi}{3}$  và  $T_2 = \pi$

$$\Rightarrow T = 2\pi.$$

#### **DẠNG 4: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC**

## 1 KIẾN THỨC CẦN THIẾT.

## PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

$$1) \begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 0 \leq |\sin x| \leq 1 \\ 0 \leq |\cos x| \leq 1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 0 \leq \sqrt{\sin x} \leq 1 \\ 0 \leq \sqrt{\cos x} \leq 1 \end{cases}$$

## BÀI TẬP.

**Câu 23:** Tìm GTLN - GTNN của các hàm số sau:

**a.**  $y = 2 + 3 \cos x$  .                      **b.**  $y = 3 \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) - 2$  .

**c.**  $y = \sqrt{4\cos^2 2x + 1}$ .      **d.**  $y = 3 - 2|\sin x|$ .

**e.**  $y = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) + 3$  .      **f.**  $y = 3\sin 2x - 12$  với  $x \in \left[-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]$ .

$$\mathbf{g.} \ y = 4 \cos^2 \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} \right) - 7 \text{ v} \acute{o}i \ x \in [0; \pi].$$

Lời giải

a. Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3 \cos x \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq 2 + 3 \cos x \leq 5 \Rightarrow -1 \leq y \leq 5$ .

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là  $5 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là  $-1 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

b. Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 3 \Leftrightarrow -5 \leq 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2 \leq 1 \Rightarrow -5 \leq y \leq 1$ .

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là  $1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là  $-5 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

c. Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $0 \leq \cos^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 4 \cos^2 2x + 1 \leq 5 \Rightarrow 1 \leq y \leq \sqrt{5}$ .

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là  $\sqrt{5} \Leftrightarrow \cos^2 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là  $1 \Leftrightarrow \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

d. Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $0 \leq |\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -2|\sin x| \geq -2 \Leftrightarrow 3 \geq y \geq 1$ .

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là  $3 \Leftrightarrow |\sin x| = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là  $1 \Leftrightarrow |\sin x| = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

e. Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

$$y = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) + 3 = 2(1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x) + 3 = 5 - \sin^2 2x$$

Ta có:  $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq 5 - \sin^2 2x \leq 5 \Leftrightarrow 4 \leq y \leq 5$ .

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là  $5 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là  $4 \Leftrightarrow \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

f. Với  $x \in \left[-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right] \Rightarrow 2x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin 2x \leq 1$

$$\Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 12 \leq y \leq -9.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số với  $x \in \left[-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]$  là  $-9 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ .

Giá trị nhỏ nhất của hàm số với  $x \in \left[-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]$  là  $-\frac{3\sqrt{2}}{2} - 12 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8}$ .

g. Ta có  $y = 4 \cos^2 \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} \right) - 7 = 2 \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) - 5$

Với  $x \in [0; \pi] \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} \in \left[ -\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right] \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} - 5 \leq y \leq -3.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số với  $x \in [0; \pi]$  là  $-3 \Leftrightarrow \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ .

Giá trị nhỏ nhất của hàm số với  $x \in [0; \pi]$  là  $-\sqrt{3} - 5 \Leftrightarrow \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pi$ .

**Ví dụ: Tìm GTLN – GTNN của các hàm số sau:**

**a.**  $y = -2\sin^2 x + 3\sin x - 1$

**b.**  $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$

**c.**  $y = \cos x + 2\cos 2x$

**d.**  $y = (1 - \cos^2 x)^2 - 2\cos^2 x + 1$

**e.**  $y = 2\sin^2 x - \sin x + 2$  trên đoạn  $[0; \pi]$

**f.**  $y = 2\cos x + \cos 2x - 8$  trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$ .

**g.**  $y = \tan^2 x - \tan x + 1$  trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ .

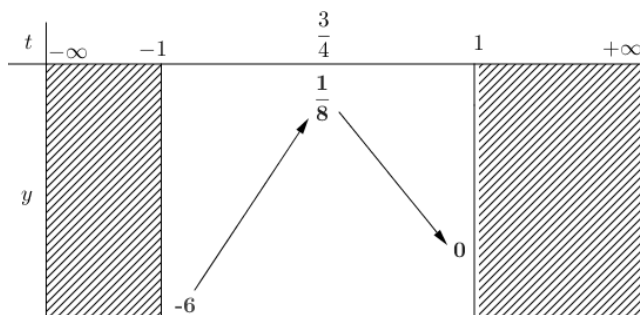
**h.**  $y = \sin x + \cos x + 4\sin x \cos x + 7$ .

**i.** Tìm min của hàm số:  $y = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} - \sin x - \frac{1}{\sin x}$  với  $0 < x < \pi$ .

**Lời giải**

**a.** Đặt  $\sin x = t$  ( $|t| \leq 1$ ), hàm số có dạng:  $y = -2t^2 + 3t - 1$ .

Xét hàm số  $y = -2t^2 + 3t - 1$  trên  $[-1; 1]$ , hàm số có BBT như sau:



Nhìn vào BBT ta thấy:

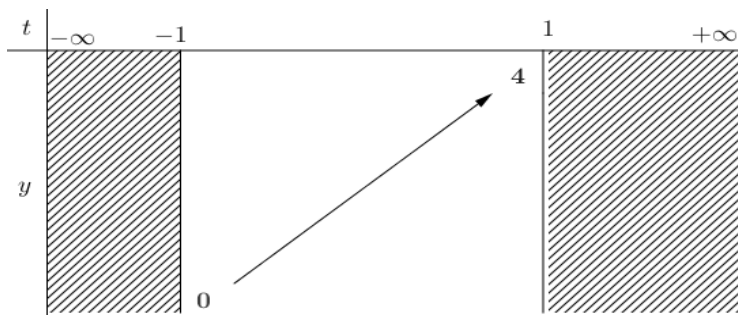
Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng  $-6$  khi và chỉ khi  $t = -1$  tức là  $\sin x = -1$   
 $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Giá trị lớn nhất của hàm số bằng  $\frac{1}{8}$  khi và chỉ khi  $t = \frac{3}{4}$  tức là  $\sin x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k2\pi$

hoặc  $x = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**b.** Hàm số được viết lại thành  $y = 1 - \sin^2 x + 2\sin x + 2 = -\sin^2 x + 2\sin x + 3$

Đặt  $t = \sin x$  ( $|t| \leq 1$ ), xét hàm số  $y = -t^2 + 2t + 3$  trên  $[-1; 1]$  có BBT như sau:



Nhìn vào BBT ta thấy:

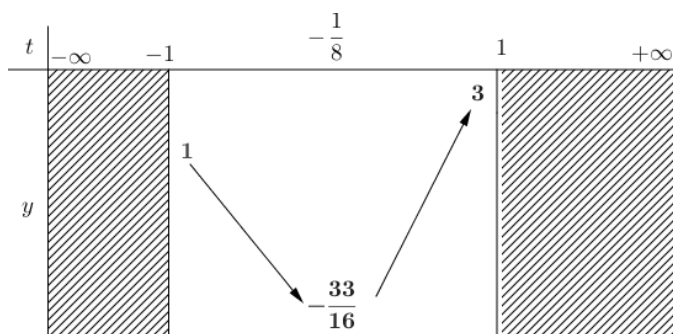
□ Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0 khi và chỉ khi  $t = -1$  tức  $\sin x = -1$   
 $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

□ Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4 khi và chỉ khi  $t = 1$  tức là  $\sin x = 1 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

c. Ta có  $y = \cos x + 2(2\cos^2 x - 1) = 4\cos^2 x + \cos x - 2$

Đặt  $\cos x = t$  ( $|t| \leq 1$ ), hàm số có dạng:  $y = 4t^2 + t - 2$ .

Xét hàm số  $y = 4t^2 + t - 2$  trên  $[-1; 1]$  có BBT như sau:



□ Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng  $-\frac{33}{16}$  khi và chỉ khi  $t = -\frac{1}{8}$  tức  $\cos x = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow$

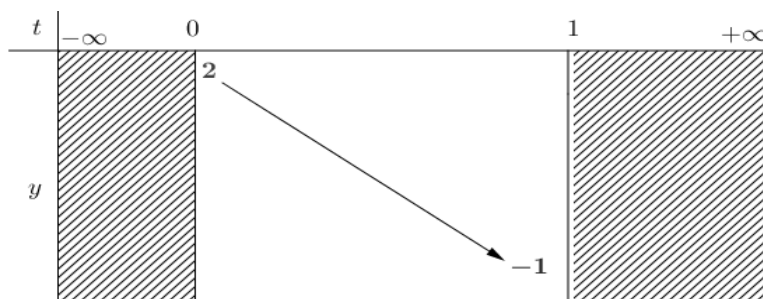
$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{8}\right) + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

□ Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3 khi và chỉ khi  $t = 1$  tức là  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

d. Hàm số được viết lại thành

$$y = (1 - \cos^2 x)^2 - 2\cos^2 x + 1 = (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) - 2\cos^2 x + 1 = \cos^4 x - 4\cos^2 x + 2$$

Đặt  $t = \cos^2 x$ ,  $t \in [0; 1]$ , xét hàm số  $y = t^2 - 4t + 2$  trên  $[0; 1]$  có BBT như sau:



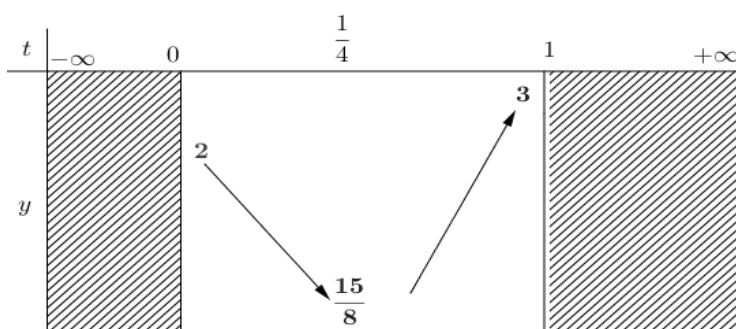
Nhìn vào BBT ta thấy:

□ Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng  $-1$  khi và chỉ khi  $t=1$  tức  $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

□ Giá trị lớn nhất của hàm số bằng  $2$  khi và chỉ khi  $t=0$  tức là  $\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

e. Đặt  $\sin x = t$  với  $x \in [0; \pi]$  thì  $t \in [0; 1]$ , hàm số có dạng:  $y = 2t^2 - t + 2$ .

Xét hàm số  $y = 2t^2 - t + 2$  trên  $[0; 1]$ , hàm số có BBT như sau:



Nhìn vào BBT ta thấy:

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng  $\frac{15}{8}$  khi và chỉ khi  $t = \frac{1}{4}$  tức là  $\sin x = \frac{1}{4}$

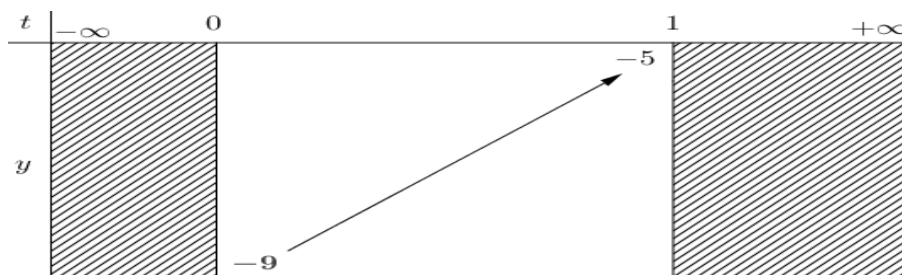
$\Leftrightarrow x = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + k2\pi$  hoặc  $x = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Giá trị lớn nhất của hàm số bằng  $3$  khi và chỉ khi  $t = 1$  tức là  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

f. Hàm số được viết lại thành  $y = 2\cos x + 2\cos^2 x - 1 - 8 = 2\cos^2 x + 2\cos x - 9$

Đặt  $\cos x = t$ , với  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$  thì  $t \in [0; 1]$ , hàm số có dạng:  $y = 2t^2 + 2t - 9$ .

Xét hàm số  $y = 2t^2 + 2t - 9$  trên  $[0; 1]$  có BBT như sau:

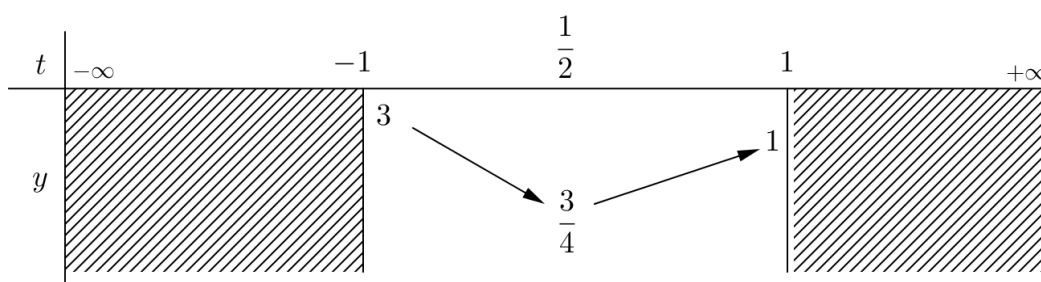


□ Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng  $-9$  khi và chỉ khi  $t = 0$  tức  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

□ Giá trị lớn nhất của hàm số bằng  $-5$  khi và chỉ khi  $t = 1$  tức là  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**g.** Đặt  $\tan x = t, t \in [-1; 1]$ , hàm số có dạng:  $y = t^2 - t + 1$ .

Xét hàm số  $y = t^2 - t + 1$  trên  $[-1; 1]$  có BBT như sau:



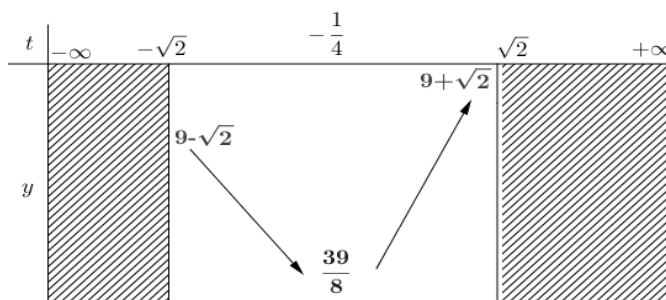
□ Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng  $\frac{3}{4}$  khi và chỉ khi  $t = \frac{1}{2}$  tức  $\tan x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

□ Giá trị lớn nhất của hàm số bằng  $3$  khi và chỉ khi  $t = -1$  tức là  $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**h.** Đặt  $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) (|t| \leq \sqrt{2}) \Rightarrow 2 \sin x \cos x = t^2 - 1$ , hàm số trở thành:

$$y = t + 2(t^2 - 1) + 7 = 2t^2 + t + 5.$$

Xét hàm số  $y = 2t^2 + t + 5$  trên  $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$  có BBT như sau:



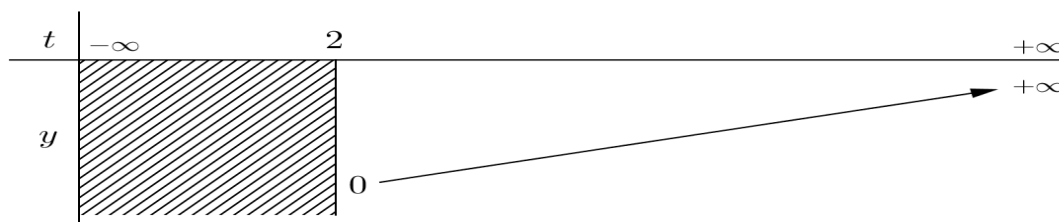
□ Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng  $\frac{39}{8}$ .

□ Giá trị lớn nhất của hàm số bằng  $9 + \sqrt{2}$ .

i. Đặt  $t = \sin x + \frac{1}{\sin x}$ , với  $0 < x < \pi$  thì  $t \geq 2 \Rightarrow \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = t^2 - 2$ , hàm số trở thành:

$$y = t^2 - t - 2.$$

Xét hàm số  $y = t^2 - t - 2$  trên  $[2; +\infty)$  có BBT như sau:



Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng  $0 \Leftrightarrow \sin x + \frac{1}{\sin x} = 2 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 3: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ



### HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### DẠNG 1. TẬP XÁC ĐỊNH

**Câu 1:** Tập xác định của hàm số  $y = \sin x$  là

- A.  $[-1; 1]$ .      B.  $(-1; 1)$ .      C.  $(0; +\infty)$ .      D.  $\mathbb{R}$ .

**Câu 2:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sin x}$  là

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .      B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .  
C.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .      D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{0; \pi\}$ .

**Câu 3:** Tập xác định của hàm số  $y = \tan 2x$  là

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 4:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$  là

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .      B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
C.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .      D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 5:** Điều kiện xác định của hàm số  $y = \frac{2021 - \cos x}{\sin x}$  là

- A.  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      B.  $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      C.  $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      D.  $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 6:** Tập xác định của hàm số  $y = \tan x$  là

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .      B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 7:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{x^2 + 1}{\cos x}$  là

**A.**  $D = \mathbb{R}$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 8:** Tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \frac{5 \sin x}{\cos x - 3}$  là

**A.**  $D = (3; +\infty)$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

**C.**  $D = (-\infty; 3)$ .

**D.**  $D = \mathbb{R}$ .

**Câu 9:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$  là

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{x \neq k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 10:** Tập xác định của hàm số  $y = \tan \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right)$  là

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \neq \frac{5\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 11:** Tập xác định của hàm số  $y = \cot x$  là

**A.**  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ .

**B.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**C.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**D.**  $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 12:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$  là

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ .

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 13:** Tập xác định của hàm số  $y = 2 + 3 \tan x$  là

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \right\}$ . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$ . **C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ . **D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$ .

**Câu 14:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{2 \sin x - 1}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 15:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}.$

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ -k\pi, k \in \mathbb{Z} \}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 16:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sin 2x + 1}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 17:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\sin x}{2 - 2\cos x}$  là

A.  $D = \mathbb{R}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pi + k\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k2\pi | k \in \mathbb{Z} \}.$

**Câu 18:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{2021}{1 - \cos x}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k2\pi, k \in \mathbb{Z} \}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}.$

**Câu 19:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{2\sin x + 1}{1 - \cos x}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ x \neq k2\pi; k \in \mathbb{Z} \}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ x \neq \pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 20:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z} \}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ x \neq k2\pi; k \in \mathbb{Z} \}$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 21:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{2020}{\tan(x + 2019\pi)}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k2\pi, k \in \mathbb{Z} \}.$

**Câu 22:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{\sin x}{1 - 2 \cos x}.$

A.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$

C.  $\mathbb{R}.$

D.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 23:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{3 + \sin x}{\cos x - 1}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k2\pi, k \in \mathbb{Z} \}.$

**Câu 24:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{2 \sin x - 1}{\cos x}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k2\pi, k \in \mathbb{Z} \}.$

**Câu 25:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\tan x}{\cos x + 1}$  là

A.  $\mathbb{R} \setminus \{ \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \}.$

B.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 26:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \tan \left( x - \frac{\pi}{4} \right).$

A.  $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B.  $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C.  $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 27:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = 2021 \cot 2x + 2022.$

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}.$  B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2} \right\}.$  C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right\}.$  D.  $D = \mathbb{R}.$

**Câu 28:** Tập xác định của hàm số  $y = \cot x$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $D = \mathbb{R}.$

**Câu 29:** Tập xác định của hàm số:  $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ?

A.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 30:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sin x}$  là:

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \{0; \pi\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

**Câu 31:** Điều kiện xác định của hàm số  $y = \tan 2x$  là

A.  $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi.$

B.  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$

C.  $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$

D.  $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

**Câu 32:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{2\cos x - 1}{\sin 2x}$  là:

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

**Câu 33:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \tan x$ .

A.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B.  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

C.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

**Câu 34:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos x}}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 35:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\tan x}{1 - \tan x}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi; -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 36:** Tập xác định của hàm số  $y = \tan x + \cot x$  là

A.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C.  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$

D.  $\mathbb{R}.$

**Câu 37:** Tập xác định của hàm số  $y = \cot \frac{x}{2}$  là

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 38:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \frac{2\cos x - 1}{\sin x} - 3\tan x$ .

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Câu 39:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\sqrt{2 - \sin x}}{\tan x}$ .

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 40:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ .

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Câu 41:** Hàm số  $y = \frac{1 - 3\sin x}{\cos 2x}$  xác định khi

**A.**  $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ . **B.**  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . **C.**  $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . **D.**  $x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 42:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sqrt{\sin 2x + 1}}$  là:

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**D.**  $D = \mathbb{R}$ .

**Câu 43:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\tan x + 2022}{\sin^2 x + 1}$

**A.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**B.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**C.**  $\mathbb{R}$ .

**D.**  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 44:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin x}}$ .

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **D.**  $D = \emptyset$ .

**Câu 45:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \sqrt{5 + 2 \cot^2 x - \sin x} + \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ .

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R}$ . **D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 46:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \tan\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)$ .

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R}$ . **D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 47:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\tan x}$  là

**A.**  $D = \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . **D.**  $D = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 48:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{3 \sin x}{2 \cos x + 1}$ .

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{4\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Câu 49:** Hàm số  $y = \frac{\sin x}{1 - 2 \sin^2 x}$  có tập xác định là

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Câu 50:** Hàm số  $y = \frac{1}{\sin 2x \cos 2x}$  có tập xác định là

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . **D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Câu 51:** Hàm số  $y = \frac{\sin 2x}{\cot x - \sqrt{3}}$  có tập xác định là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 52:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{2 \cot x + 5}{\cos x - 1}$  là

A.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}.$

B.  $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}.$

C.  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}.$

D.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}.$

**Câu 53:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sin 2x - 1}.$

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

**Câu 54:** Hàm số  $y = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$  không xác định tại các điểm

A. chỉ  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

B. chỉ  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

C. chỉ  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

D.  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$  và  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 55:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{2020}{\tan x - 1}$

A.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 56:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \cot 2x + \tan \left( \frac{\pi}{2} - x \right).$

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 57:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \frac{\tan x - 1}{\sin x} + \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right).$

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $D = \mathbb{R}.$

**Câu 58:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{3 \cot x}{2 \sin x - 4}$  là

- A.  $\mathbb{R} \setminus \{\arcsin 2 + k2\pi, \pi - \arcsin 2 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  B.  $\mathbb{R}$ .  
C.  $\mathbb{R} \setminus \{\pm \arcsin 2 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . D.  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 59:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{2020}{\tan x - 1}$  là

- A.  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$ . B.  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ .  
C.  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi\right\}$ . D.  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$ .

**Câu 60:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{1 - \cos x} + \cot x$ ?

- A.  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ . B.  $(-\infty; 1]$ . C.  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ . D.  $[-1; 1] \setminus \{0\}$ .

**Câu 61:** Tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \frac{2 \sin x + 3}{\tan x - 1}$ .

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .  
C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Câu 62:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x}}$ .

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .  
C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Câu 63:** Hàm số  $y = \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$  không xác định trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A.  $\left(k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ . B.  $\left(\pi + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .  
C.  $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi\right)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ . D.  $(\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 64:** Tập xác định của hàm số  $y = \tan 3x$  là.

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{R}\right\}$  B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}\right\}$   
C.  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{R}\}$  D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{R}\right\}$

**Câu 65:** Tìm  $m$  để hàm số  $y = \sqrt{5 \sin 4x - 6 \cos 4x + 2m - 1}$  xác định với mọi  $x$

A.  $m \geq \frac{\sqrt{61}+1}{2}$ .      B.  $m \geq 1$ .      C.  $m \geq \frac{\sqrt{61}-1}{2}$ .      D.  $m < \frac{\sqrt{61}+1}{2}$ .

**Câu 66:** Có bao nhiêu số nguyên  $m$  sao cho hàm số  $y = \sqrt{m \sin x + 3}$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$ ?

A. 7.      B. 6.      C. 3.      D. 4.

**Câu 67:** Hàm số  $y = \frac{3 + \sin 2x}{\sqrt{m \cos x + 1}}$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$  khi

A.  $m > 0$ .      B.  $0 \leq m < 1$ .      C.  $-1 < m < 1$ .      D.  $m \neq -1$ .

**Câu 68:** Cho hàm số  $y = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x - m \sin x \cdot \cos x}$ . Tìm  $m$  để hàm số xác định với mọi  $x$ .

A.  $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ .      B.  $m \in (-1; 1)$ .      C.  $m \in (-\infty; 1]$ .      D.  $m \in [-1; 1]$ .

## DẠNG 2. TÍNH CHẤM LẺ

**Câu 69:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A.  $y = \sin x$ .      B.  $y = \cos x$ .      C.  $y = \tan x$ .      D.  $y = \cot x$ .

**Câu 70:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A.  $y = -\sin x$ .      B.  $y = \cos x - \sin x$ .      C.  $y = \cos x + \sin^2 x$ .      D.  $y = \cos x \sin x$ .

**Câu 71:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A.  $y = \sin 2x$ .      B.  $y = x \cos x$ .      C.  $y = \cos x \cdot \cot x$ .      D.  $y = \frac{\tan x}{\sin x}$ .

**Câu 72:** Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

A.  $y = 2x + \cos x$ .      B.  $y = \cos 3x$ .      C.  $y = x^2 \sin(x+3)$ .      D.  $y = \frac{\cos x}{x^3}$ .

**Câu 73:** Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số  $y = \cot x$  là hàm số chẵn.      B. Hàm số  $y = \sin x$  là hàm số chẵn.  
C. Hàm số  $y = \tan x$  là hàm số chẵn.      D. Hàm số  $y = \cos x$  là hàm số chẵn.

**Câu 74:** Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số  $y = \sin x$  là hàm số chẵn.      B. Hàm số  $y = \cos x$  là hàm số lẻ.  
C. Hàm số  $y = \tan x$  là hàm số lẻ.      D. Hàm số  $y = \cot x$  là hàm số chẵn.

**Câu 75:** Chọn phát biểu đúng:

A. Các hàm số  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \cot x$  đều là hàm số chẵn.  
B. Các hàm số  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \cot x$  đều là hàm số lẻ.  
C. Các hàm số  $y = \sin x$ ,  $y = \cot x$ ,  $y = \tan x$  đều là hàm số chẵn.  
D. Các hàm số  $y = \sin x$ ,  $y = \cot x$ ,  $y = \tan x$  đều là hàm số lẻ.

**Câu 76:** Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A.  $f(x) = \sin x$ .      B.  $f(x) = \sin 2x$ .      C.  $f(x) = |\sin x|$ .      D.  $f(x) = x \sin x^2$ .

**Câu 77:** Hàm số nào dưới đây là hàm số lẻ?

A.  $y = \cos x$ .      B.  $y = \sin^2 x$ .      C.  $y = \cot^2 x$ .      D.  $y = \tan x$ .

**Câu 78:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A.  $y = \sin 3x$ .      B.  $y = \tan \frac{x}{2}$ .      C.  $y = \sin x \cdot \cos x$ .      D.  $y = \sin^2 x \cdot \cos x$ .

**Câu 79:** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số chẵn?

**A.**  $y = \tan 4x$ .                      **B.**  $y = \cos 3x$ .                      **C.**  $y = \cot 5x$ .                      **D.**  $y = \sin 2x$ .

**Câu 80:** Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn

**A.**  $y = 3 \sin^3 x + 4 \sin x$ .                      **B.**  $y = 3 \sin x + 4 \cos x$ .

**C.**  $y = 4 \cos^2 x - \sin x$ .                      **D.**  $y = 4 \sin^2 x - \cos x$ .

**Câu 81:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

**A.**  $y = \cos x \cdot \sin^3 x$ .                      **B.**  $y = \sin x \cdot \cos 2x$ .

**C.**  $y = 2019 \cos x + 2020$ .                      **D.**  $y = \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1}$ .

**Câu 82:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

**A.**  $y = |\sin x| + 3$ .                      **B.**  $y = \frac{2 \cos^2 x}{\sin x + 2}$ .                      **C.**  $y = x \sin x^2$ .                      **D.**  $y = 2 \cos x - \sin 2x$ .

**Câu 83:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn.

**A.**  $y = \sin |2021x| + \cos 2022x$ .                      **B.**  $y = \cot 2021x - 2022 \sin x$ .

**C.**  $y = \tan 2021x + \cot 2022x$ .                      **D.**  $y = 2021 \cos x + 2022 \sin x$ .

**Câu 84:** Có bao nhiêu hàm số chẵn trong các hàm số sau:  $y = \sin |x|$ ,  $y = \cos 3x$ ,  $y = \tan 2x$  và  $y = \cot x$ ?

**A.** 1.                      **B.** 2.                      **C.** 3.                      **D.** 4.

**Câu 85:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

**A.**  $y = |\sin x|$ .                      **B.**  $y = x^2 \sin x$ .                      **C.**  $y = \frac{x}{\cos x}$ .                      **D.**  $y = x + \sin x$ .

**Câu 86:** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

**A.**  $y = \sin x \cos 2x$ .                      **B.**  $y = \sin^3 x \cdot \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right)$ .

**C.**  $y = \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1}$ .                      **D.**  $y = \cos x \sin^3 x$ .

**Câu 87:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

**A.**  $y = \cos x + \sin^2 x$ .                      **B.**  $y = \sin x + \cos x$ .                      **C.**  $y = -\cos x$ .                      **D.**  $y = \sin x \cdot \cos 3x$ .

**Câu 88:** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

**A.**  $y = \cot 4x$ .                      **B.**  $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$ .                      **C.**  $y = \tan^2 x$ .                      **D.**  $y = |\cot x|$ .

**Câu 89:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

**A.**  $y = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$ .                      **B.**  $y = \sin^2 x$ .                      **C.**  $y = \frac{\cot x}{\cos x}$ .                      **D.**  $y = \frac{\tan x}{\sin x}$ .

**Câu 90:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

**A.**  $y = 1 - \sin^2 x$ .                      **B.**  $y = |\cot x| \cdot \sin^2 x$ .

**C.**  $y = x^2 \tan 2x - \cot x$ .                      **D.**  $y = 1 + |\cot x + \tan x|$ .

**Câu 91:** Cho hàm số  $f(x) = \sin 2x$  và  $g(x) = \tan^2 x$ . Chọn mệnh đề đúng

- A.  $f(x)$  là hàm số chẵn,  $g(x)$  là hàm số lẻ.    B.  $f(x)$  là hàm số lẻ,  $g(x)$  là hàm số chẵn.  
C.  $f(x)$  là hàm số chẵn,  $g(x)$  là hàm số chẵn.    D.  $f(x)$  và  $g(x)$  đều là hàm số lẻ.

**Câu 92:** Cho hai hàm số  $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$  và  $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.  $f(x)$  lẻ và  $g(x)$  chẵn.    B.  $f(x)$  và  $g(x)$  chẵn.  
C.  $f(x)$  chẵn,  $g(x)$  lẻ.    D.  $f(x)$  và  $g(x)$  lẻ.

**Câu 93:** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

- A.  $y = \frac{1}{\sin^3 x}$ .    B.  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .    C.  $y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ .    D.  $y = \sqrt{\sin 2x}$ .

**Câu 94:** Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Đồ thị hàm số  $y = |\sin x|$  đối xứng qua gốc tọa độ  $O$ .  
B. Đồ thị hàm số  $y = \cos x$  đối xứng qua trục  $Oy$ .  
C. Đồ thị hàm số  $y = |\tan x|$  đối xứng qua trục  $Oy$ .  
D. Đồ thị hàm số  $y = \tan x$  đối xứng qua gốc tọa độ  $O$ .

**Câu 95:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A.  $y = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi - 2x)$ .    B.  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .  
C.  $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x$ .    D.  $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ .

**Câu 96:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A.  $y = x^4 + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ .    B.  $y = x^{2017} + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ .  
C.  $y = 2015 + \cos x + \sin^{2018} x$ .    D.  $y = \tan^{2017} x + \sin^{2018} x$ .

**Câu 97:** Trong các hàm số sau. Hàm số nào có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng?

- A.  $y = \tan x$ .    B.  $y = \sin x$ .    C.  $y = \cot x$ .    D.  $y = \cos x$ .

**Câu 98:** Hàm số nào là hàm số chẵn trong các hàm số sau?

- A.  $y = \sin x \cdot \cos x$ .    B.  $y = \tan x$ .    C.  $y = \cot x$ .    D.  $y = \sin^2 x \cdot \cos x$ .

**Câu 99:** Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

- A.  $y = \sin 4x$ .    B.  $y = \cos 5x$ .    C.  $y = \tan 4x$ .    D.  $y = \cot 10x$ .

**Câu 100:** Trong các hàm số sau hàm số nào là hàm số chẵn?

- A.  $y = 2 \cos x$ .    B.  $y = 2 \tan x$ .    C.  $y = 2 \sin x$ .    D.  $y = 2 \cos(x - 1)$ .

**Câu 101:** Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn trên  $\mathbb{R}$ ?

- A.  $y = x \cdot \cos 2x$ .    B.  $y = (x^2 + 1) \cdot \sin x$ .    C.  $y = \frac{\cos x}{1 + x^2}$ .    D.  $y = \frac{\tan x}{1 + x^2}$ .

**Câu 102:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn trên  $\mathbb{R}$  ?

- A.  $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .      B.  $y = \tan x$ .      C.  $y = \sin x$ .      D.  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

**Câu 103:** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng?

- A.  $y = x \sin x$ .      B.  $y = \cos x$ .      C.  $y = 1 - \sin x$ .      D.  $y = \sin x \cos x$ .

**Câu 104:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A.  $y = \sin|2022x| + \cos 2021x$ .      B.  $y = 2021 \cos x + 2023 \sin x$ .  
C.  $y = \cot 2021x - 2022 \sin x$ .      D.  $y = \tan 2021x + \cot 2022x$ .

**Câu 105:** Hàm số nào sau đây có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng?

- A.  $y = |\sin x|$ .      B.  $y = \cot x$ .      C.  $y = \tan x$ .      D.  $y = -\sin x$ .

**Câu 106:** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A.  $y = \sin x$ .      B.  $y = x + \sin x$ .      C.  $y = x \cos x$ .      D.  $y = \frac{\sin x}{x}$ .

**Câu 107:** Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn

- A.  $y = \sin x$ .      B.  $y = \tan x$ .      C.  $y = \cot(2x)$ .      D.  $y = \sin|x|$ .

**Câu 108:** Trong các hàm số:  $y = 2 \sin x$ ;  $y = |\sin x + 3|$ ;  $y = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2019x\right)$ , có bao nhiêu hàm lẻ?

- A. 3.      B. 0.      C. 1.      D. 2.

**Câu 109:** Cho hai hàm số  $f(x) = \sin 2x$  và  $g(x) = \cos 3x$ . Chọn mệnh đề đúng

- A.  $f$  là hàm số chẵn và  $g$  là hàm số lẻ.      B.  $f$  và  $g$  là hai hàm số chẵn.  
C.  $f$  và  $g$  là hai hàm số lẻ.      D.  $f$  là hàm số lẻ và  $g$  là hàm số chẵn.

**Câu 110:** Trong các hàm số sau có bao nhiêu hàm số là hàm số chẵn trên tập xác định của nó?

$$y = \tan 2x, \quad y = \sin^{2018} x, \quad y = \cos(x + 3\pi), \quad y = |\cot x|.$$

- A. 2.      B. 4.      C. 3.      D. 1.

**Câu 111:** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

- A.  $y = \cot 4x$ .      B.  $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$ .      C.  $y = \tan^2 x$ .      D.  $y = |\cot x|$ .

**Câu 112:** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

- A.  $y = \sin x \cdot \cos 2x$ .      B.  $y = \sin^3 x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ .  
C.  $y = \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1}$ .      D.  $y = \cos x \cdot \sin^3 x$ .

**Câu 113:** Cho hàm số  $f(x) = \sin 2x$  và  $g(x) = \tan^2 x$ . Chọn mệnh đề đúng?

- A.  $f(x)$  là hàm số chẵn,  $g(x)$  là hàm số lẻ.  
B.  $f(x)$  là hàm số lẻ,  $g(x)$  là hàm số chẵn.

**C.**  $f(x)$  là hàm số chẵn,  $g(x)$  là hàm số chẵn.

**D.**  $f(x)$  và  $g(x)$  đều là hàm số lẻ.

**Câu 114:** Trong các hàm số:  $y = 2 \sin x$ ;  $y = |\sin x + 3|$ ;  $y = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2021x\right)$ , có bao nhiêu hàm lẻ?

**A.** 3.

**B.** 0.

**C.** 1.

**D.** 2.

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 3: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ



### HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### DẠNG 3. TẬP GIÁ TRỊ - GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

**Câu 115:** Tập giá trị của hàm số  $y = \sin 2x$  là:

- A.  $[-2; 2]$ .      B.  $[0; 2]$ .      C.  $[-1; 1]$ .      D.  $[0; 1]$ .

**Câu 116:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sin 2x$  bằng

- A. 2.      B. 0.      C. 1.      D. -1.

**Câu 117:** Tập giá trị của hàm số  $y = \sin x$  là

- A.  $T = [-1; 1]$ .      B.  $T = (-1; 1)$ .      C.  $T = [-1; 0]$ .      D.  $T = [0; 1]$ .

**Câu 118:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 3 \sin x$  trên tập xác định  $\mathbb{R}$  là?

- A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. -3.

**Câu 119:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \cos x$  là

- A. 1.      B. 0.      C. -1.      D. 2.

**Câu 120:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 2\sqrt{\sin x + 1} - 3$  là

- A.  $2\sqrt{3} + 2$ .      B.  $2\sqrt{3} - 2$ .      C.  $2\sqrt{3} - 3$ .      D.  $3\sqrt{2}$ .

**Câu 121:** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - 1$  lần lượt là:

- A. 4; -2.      B. 2; -4.      C. 1; -1.      D. 3; -3.

**Câu 122:** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \cos 6x + 5$  lần lượt là

- A. 4 và 6.      B. 0 và 4.      C. -1 và 11.      D. 6 và 4.

**Câu 123:** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 8 \sin 2x - 5$ .

- A.  $\max y = 11$ ;  $\min y = -21$ .      B.  $\max y = 8$ ;  $\min y = -8$ .  
C.  $\max y = -4$ ;  $\min y = -6$ .      D.  $\max y = 3$ ;  $\min y = -13$ .

**Câu 124:** Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất,  $m$  là giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 4 \sin x \cos x + 1$ . Tính  $M + m$

- A. 2.      B. 4.      C. 3.      D. -1.

**Câu 125:** Tập giá trị của hàm số  $y = 3 \sin 3x + 2$  là

- A.  $\mathbb{R}$ .      B.  $(0; +\infty)$ .      C.  $[-1; 5]$ .      D.  $[-7; 11]$ .

**Câu 126:** Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = 3 \sin 2x - 5$  lần lượt là:

- A. 8; 2.                      B. -2; -8.                      C. 2; -5.                      D. 3; -5.

**Câu 127:** Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số là  $y = 2 - \sin x$  là

- A. 1 và 3.                      B. 4 và -4.                      C. 2 và 4.                      D. 3 và 1.

**Câu 128:** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 6 \cos 2x - 7$  trên đoạn

$$\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]. \text{ Tính } M + m.$$

- A. -14.                      B. 3.                      C. -11.                      D. -10.

**Câu 129:** Tập giá trị của hàm số  $y = \sin 4x - 3$  là:

- A.  $[-4; -2]$ .                      B.  $[-3; 1]$ .                      C.  $[-2; 2]$ .                      D.  $[-4; 2]$ .

**Câu 130:** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2 \sin^2 x + 3 \sin 2x - 4 \cos^2 x$ .

- A.  $\min y = -3\sqrt{2} - 1$ ;  $\max y = 3\sqrt{2} + 1$ .                      B.  $\min y = -3\sqrt{2} - 2$ ;  $\max y = 3\sqrt{2} - 1$ .  
C.  $\min y = -3\sqrt{2}$ ;  $\max y = 3\sqrt{2} - 1$ .                      D.  $\min y = -3\sqrt{2} - 1$ ;  $\max y = 3\sqrt{2} - 1$ .

**Câu 131:** Tập giá trị của hàm số  $y = \sin 4x - 3$  là:

- A.  $[-4; -2]$ .                      B.  $[-3; 1]$ .                      C.  $[-2; 2]$ .                      D.  $[-4; 2]$ .

**Câu 132:** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3 \sin x + 4 \cos x - 1$ .

- A.  $\max y = 4$ ,  $\min y = -6$ .                      B.  $\max y = 8$ ,  $\min y = -6$ .  
C.  $\max y = 6$ ,  $\min y = -4$ .                      D.  $\max y = 6$ ,  $\min y = -8$ .

**Câu 133:** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x + 1$ .

- A.  $\min y = -1 + \sqrt{3}$ ;  $\max y = 3 + \sqrt{3}$ .                      B.  $\min y = 0$ ;  $\max y = 4$ .  
C.  $\min y = -4$ ;  $\max y = 0$ .                      D.  $\min y = 1 - \sqrt{3}$ ;  $\max y = 3 + \sqrt{3}$ .

**Câu 134:** Tập giá trị  $T$  của hàm số  $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x$  là

- A.  $T = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ .                      B.  $T = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ .                      C.  $T = [-1; 1]$ .                      D.  $T = [-2; 2]$ .

**Câu 135:** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2 \sin^2 x - 2 \sin^4 x - 2 \sin 2x + 1$  là

- A. 4.                      B.  $\frac{5}{2}$ .                      C.  $-\frac{3}{2}$ .                      D. 3.

**Câu 136:** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \cos 2x + 4 \cos x + 1$ . Khi đó  $M - m$  bằng

- A. 2.                      B. 8.                      C. 4.                      D. -8.

**Câu 137:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \cos^2 x + \sin x + 9$  trên đoạn  $[0; \pi]$  bằng

- A.  $\frac{41}{4}$ .                      B. 10.                      C.  $\frac{21}{2}$ .                      D.  $\frac{39}{4}$ .

**Câu 138:** Gọi  $m$  là giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 4 \cos 2x - 1$  trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$ . Tìm  $m$ .

- A. -5.                      B. 3.                      C. -1.                      D. -3.

**Câu 139:** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sin^2 x - \cos x + 2$

- A. 3.                      B.  $\frac{13}{4}$ .                      C.  $\frac{7}{4}$ .                      D. 1.

**Câu 140:** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2 \cos^2 x - \sin x + 3$ .

- A.  $\min_{[-1;1]} y = 4; \max_{[-1;1]} y = \frac{41}{8}$ .                      B.  $\min_{[-1;1]} y = 2; \max_{[-1;1]} y = 4$ .  
C.  $\min_{[-1;1]} y = -\frac{41}{8}; \max_{[-1;1]} y = 2$ .                      D.  $\min_{[-1;1]} y = 2; \max_{[-1;1]} y = \frac{41}{8}$ .

**Câu 141:** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin 2021x + \sqrt{3} \cos 2021x$ .  
Tích  $M.m$  bằng

- A. -4.                      B. -2.                      C. -9.                      D. -1.

**Câu 142:** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2 \cos^2 x + 5 \sin x + 1$  trên  $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ . Khi đó  $M - m$  bằng bao nhiêu?

- A.  $M - m = 1$ .                      B.  $M - m = 11$ .                      C.  $M - m = \frac{1}{2}$ .                      D.  $M - m = 6$ .

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 3: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ



### HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### DẠNG 1. TẬP XÁC ĐỊNH

**Câu 1:** Tập xác định của hàm số  $y = \sin x$  là

A.  $[-1; 1]$ .

B.  $(-1; 1)$ .

C.  $(0; +\infty)$ .

**D.  $\mathbb{R}$ .**

Lời giải

**Câu 2:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sin x}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**C.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .**

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{0; \pi\}$ .

Lời giải

Hàm số  $y = \frac{1}{\sin x}$  xác định khi và chỉ khi  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 3:** Tập xác định của hàm số  $y = \tan 2x$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .**

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số  $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

Vậy tập xác định của hàm số  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

**Câu 4:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .**

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Lời giải

Điều kiện xác định  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

**Câu 5:** Điều kiện xác định của hàm số  $y = \frac{2021 - \cos x}{\sin x}$  là

- A.  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .    **B.  $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .**    C.  $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .    D.  $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

Hàm số đã cho xác định khi:  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 6:** Tập xác định của hàm số  $y = \tan x$  là

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .    B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .  
**C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .**    D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Lời giải**

Hàm số  $y = \tan x$  xác định khi và chỉ khi  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Vậy TXĐ là:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Câu 7:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{x^2 + 1}{\cos x}$  là

- A.  $D = \mathbb{R}$ .    **B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .**  
**C.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .**    D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Lời giải**

Điều kiện:  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Vậy tập xác định của hàm số là  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Câu 8:** Tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \frac{5 \sin x}{\cos x - 3}$  là

- A.  $D = (3; +\infty)$ .    B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .    C.  $D = (-\infty; 3)$ .    **D.  $D = \mathbb{R}$ .**

**Lời giải**

Ta có  $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Do đó  $\cos x - 3 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Vậy tập xác định của hàm số là  $D = \mathbb{R}$ .

**Câu 9:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{x \neq k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Lời giải

Hàm số xác định khi  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 10:** Tập xác định của hàm số  $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{x \neq \frac{5\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Lời giải

Hàm số xác định khi  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 11:** Tập xác định của hàm số  $y = \cot x$  là

A.  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$

B.  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}.$

C.  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}.$

D.  $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$

Lời giải

Hàm số  $y = \cot x$  xác định khi và chỉ khi:  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$  với  $k \in \mathbb{Z}.$  Do đó tập xác định của hàm số  $y = \cot x$  là  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$

**Câu 12:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Lời giải

Điều kiện  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$

**Câu 13:** Tập xác định của hàm số  $y = 2 + 3 \tan x$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi\right\}.$

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi\right\}.$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}.$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}.$

Lời giải

**Chọn C**

ĐKXĐ  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ . Do đó tập xác định của hàm số là  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ .

**Câu 14:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{2\sin x - 1}$  là

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số xác định khi  $\sin x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ .

Vậy  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 15:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$ .

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{ -k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{ \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ .

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện xác định của hàm số:  $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi$ .

**Câu 16:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sin 2x + 1}$  là

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

ĐKXĐ của hàm số là  $\sin 2x \neq -1 \Leftrightarrow 2x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Vậy TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 17:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\sin x}{2 - 2\cos x}$  là

A.  $D = \mathbb{R}$ . B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pi + k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ . D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k 2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$ .

Lời giải

Hàm số xác định  $\Leftrightarrow 2 - 2 \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Vậy tập xác định của hàm số là  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k 2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$ .

**Câu 18:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{2021}{1 - \cos x}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k 2\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ .

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ .

Lời giải

Hàm số xác định khi  $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k 2\pi$

**Câu 19:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{2 \sin x + 1}{1 - \cos x}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ x \neq k 2\pi; k \in \mathbb{Z} \}$ .

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ x \neq \pi + k 2\pi; k \in \mathbb{Z} \}$ .

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \neq \frac{\pi}{2} + k 2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Lời giải

Hàm số xác định khi  $1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 20:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z} \}$ .

B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ x \neq k 2\pi; k \in \mathbb{Z} \}$

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Lời giải

Hàm số xác định khi  $\sin x - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 21:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{2020}{\tan(x + 2019\pi)}$  là

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ .

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k 2\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ .

Lời giải

**Chọn A**

Ta có  $\tan(x + 2019\pi) = \tan x$

Hàm số xác định khi và chỉ khi  $\tan x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 22:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{\sin x}{1 - 2\cos x}$ .

**A.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**B.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ .

**C.**  $\mathbb{R}$ .

**D.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có

$$1 - 2\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi.$$

**Câu 23:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{3 + \sin x}{\cos x - 1}$  là

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện  $\cos x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Vậy  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 24:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{2\sin x - 1}{\cos x}$  là

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . **D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số  $y = \frac{2\sin x - 1}{\cos x}$  xác định khi  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Tập xác định của hàm số là  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 25:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\tan x}{\cos x + 1}$  là

- A.**  $\mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . **B.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .  
**C.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **D.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \pi + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 26:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

- A.**  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **B.**  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .  
**C.**  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **D.**  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Hàm số } y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ xác định} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 27:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = 2021 \cot 2x + 2022$ .

- A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}\right\}$ . **C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right\}$ . **D.**  $D = \mathbb{R}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Điều kiện xác định } \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

**Câu 28:** Tập xác định của hàm số  $y = \cot x$  là

- A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .  
**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **D.**  $D = \mathbb{R}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ .

Điều kiện xác định của hàm số là:  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Vậy tập xác định của hàm số  $y = \cot x$  là:  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 29:** Tập xác định của hàm số:  $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ?

**A.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**B.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**C.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **D.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện:  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

Do đó tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Câu 30:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sin x}$  là:

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{0; \pi\}$ . **D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Vậy tập xác định của hàm số là:  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 31:** Điều kiện xác định của hàm số  $y = \tan 2x$  là

**A.**  $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$ .

**B.**  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

**C.**  $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ .

**D.**  $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện để hàm số  $y = \tan 2x$  xác định là  $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 32:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{2\cos x - 1}{\sin 2x}$  là:

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định  $\Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ . Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 33:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \tan x$ .

**A.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ . **B.**  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

**C.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**D.**  $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định khi và chỉ khi  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 34:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}$  là

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định  $\Leftrightarrow 1 - \cos x > 0 \Leftrightarrow \cos x < 1 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi$ . Tìm tập xác định của hàm số

$$y = \frac{\sin 2x}{2 \cos x + \sqrt{3}}$$

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \right\}$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi \right\}$ .

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\}$ .

Lời giải

Hàm số có nghĩa khi :  $2 \cos x + \sqrt{3} \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Vậy tập xác định của hàm số là :  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi \right\}$ .

**Câu 35:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\tan x}{1 - \tan x}$  là

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi; -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Lời giải

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1 - \tan x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**Câu 36:** Tập xác định của hàm số  $y = \tan x + \cot x$  là

**A.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ . **B.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$ . **C.**  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ . **D.**  $\mathbb{R}$ .

**Lời giải**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 37:** Tập xác định của hàm số  $y = \cot \frac{x}{2}$  là

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .  
**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . **D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Lời giải**

$$\text{Hàm số xác định khi: } \sin \frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 38:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \frac{2\cos x - 1}{\sin x} - 3\tan x$ .

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .  
**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . **D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**Câu 39:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\sqrt{2 - \sin x}}{\tan x}$ .

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .  
**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . **D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Lời giải**

$$\text{ĐK: } \begin{cases} 2 - \sin x \geq 0 \text{ (luôn đúng)} \\ \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Tập xác định của hàm số: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**Câu 40:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ .

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{4\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Lời giải**

$$\text{Điều kiện: } \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 3x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số trên là } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**Câu 41:** Hàm số  $y = \frac{1 - 3\sin x}{\cos 2x}$  xác định khi

**A.**  $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

**B.**  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**C.**  $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**D.**  $x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Lời giải**

$$\text{Hàm số xác định khi } \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 42:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sqrt{\sin 2x + 1}}$  là:

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**D.**  $D = \mathbb{R}.$

**Lời giải**

$$\text{Hàm số } y = \frac{1}{\sqrt{\sin 2x + 1}} \text{ xác định khi và chỉ khi } \sin 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow \sin 2x > -1 \Leftrightarrow \sin 2x \neq -1.$$

$$\text{Do đó } 2x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 43:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\tan x + 2022}{\sin^2 x + 1}$

A.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

B.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

C.  $\mathbb{R}$ .

D.  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

Lời giải

Hàm số xác định  $\Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**Câu 44:** Tìm tập xác định D của hàm số  $y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin x}}$ .

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

D.  $D = \emptyset$ .

Lời giải

**Chọn C**

Hàm số xác định khi và chỉ khi  $1 - \sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x < 1$ . (\*)

Mà  $-1 \leq \sin x \leq 1$  nên (\*)  $\Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Vậy tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 45:** Tìm tập xác định D của hàm số  $y = \sqrt{5 + 2 \cot^2 x - \sin x} + \cot \left( \frac{\pi}{2} + x \right)$ .

A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

C.  $D = \mathbb{R}$ .

D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

Lời giải

**Chọn A**

Hàm số xác định khi và chỉ khi các điều kiện sau thỏa mãn đồng thời

$5 + 2 \cot^2 x - \sin x \geq 0$ ,  $\cot \left( \frac{\pi}{2} + x \right)$  xác định và  $\cot x$  xác định.

● Ta có  $\begin{cases} 2 \cot^2 x \geq 0 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 5 - \sin x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 5 + 2 \cot^2 x - \sin x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

●  $\cot \left( \frac{\pi}{2} + x \right)$  xác định  $\Leftrightarrow \sin \left( \frac{\pi}{2} + x \right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

●  $\cot x$  xác định  $\Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Do đó hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**Câu 46:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \tan\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)$ .

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**C.**  $D = \mathbb{R}.$

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Hàm số xác định khi và chỉ khi } \frac{\pi}{2} \cdot \cos x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \cos x \neq 1 + 2k. (*)$$

$$\text{Do } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } (*) \Leftrightarrow \cos x \neq \pm 1 \Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Câu 47:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\tan x}$  là

**A.**  $D = \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$  **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$  **D.**  $D = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số đã cho là } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**Câu 48:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{3\sin x}{2\cos x + 1}$ .

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{4\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện:  $2 \cos x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ .

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 49:** Hàm số  $y = \frac{\sin x}{1 - 2 \sin^2 x}$  có tập xác định là

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện:  $1 - 2 \sin^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

Vậy tập xác định là  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 50:** Hàm số  $y = \frac{1}{\sin 2x \cos 2x}$  có tập xác định là

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . **D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện xác định của hàm số là:  $\sin 2x \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow 4x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

Vậy tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 51:** Hàm số  $y = \frac{\sin 2x}{\cot x - \sqrt{3}}$  có tập xác định là

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện xác định của hàm số là:  $\begin{cases} \cot x \neq \sqrt{3} \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 52:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{2 \cot x + 5}{\cos x - 1}$  là

- A.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ .      B.  $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$ .      C.  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ .      D.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số xác định  $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - 1 \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$ .

Vậy tập xác định là  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ .

**Câu 53:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sin 2x - 1}$ .

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
C.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .      D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $\sin 2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 1 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 54:** Hàm số  $y = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$  không xác định tại các điểm

- A. chỉ  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .      B. chỉ  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .  
C. chỉ  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .      D.  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$  và  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Hàm số không xác định khi  $\begin{cases} 1 + \tan x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 55:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{2020}{\tan x - 1}$

- A.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      B.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
C.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      D.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tập xác định của hàm số là:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 56:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \cot 2x + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$  . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$  . **D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện xác định

$$\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 57:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \frac{\tan x - 1}{\sin x} + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  . **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**D.**  $D = \mathbb{R}.$

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số  $y = \frac{\tan x - 1}{\sin x} + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  xác định khi:  $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$   
( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Câu 58:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{3 \cot x}{2 \sin x - 4}$  là

**A.**  $\mathbb{R} \setminus \{\arcsin 2 + k2\pi, \pi - \arcsin 2 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  **B.**  $\mathbb{R}.$

**C.**  $\mathbb{R} \setminus \{\pm \arcsin 2 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

**D.**  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

Lời giải.

**Chọn D**

Ta có  $2\sin x - 4 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ,

Nên hàm số xác định khi  $\cot x$  xác định  $\Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 59:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{2020}{\tan x - 1}$  là

- A.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$ .      **B.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ .  
**C.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi \right\}$ .      **D.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$ .

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \tan x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}.$$

**Câu 60:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{1 - \cos x} + \cot x$ ?

- A.**  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ .      **B.**  $(-\infty; 1]$ .      **C.**  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      **D.**  $[-1; 1] \setminus \{0\}$ .

Lời giải

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} 1 - \cos x \geq 0 (\forall x) \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Lời giải

$$\text{Hàm số xác định } \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \cos x \geq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \leq 1 \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Tập xác định của hàm số  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 61:** Tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \frac{2\sin x + 3}{\tan x - 1}$ .

- A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      **B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .  
**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      **D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Lời giải

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}). \text{ Vậy TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**Câu 62:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số  $y = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x}}$ .

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Lời giải**

Điều kiện xác định của hàm số là  $1 + \sin x > 0$

Mà  $1 + \sin x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Nên  $1 + \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 63:** Hàm số  $y = \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$  **không** xác định trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?

**A.**  $\left( k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right)$  với  $k \in \mathbb{Z}.$

**B.**  $\left( \pi + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi \right)$  với  $k \in \mathbb{Z}.$

**C.**  $\left( \frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi \right)$  với  $k \in \mathbb{Z}.$

**D.**  $\left( \pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi \right)$  với  $k \in \mathbb{Z}.$

**Lời giải**

Điều kiện xác định của hàm số là  $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Khi đó, hàm số không xác định tại  $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$  với  $k \in \mathbb{Z}.$

Suy ra, hàm số không xác định trên khoảng  $(\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi)$  với  $k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 64:** Tập xác định của hàm số  $y = \tan 3x$  là.

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{R} \right\}$

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R} \right\}$

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{R}\}$

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{R} \right\}$

**Lời giải**

Điều kiện  $\cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{R} \right\}$

**Câu 65:** Tìm  $m$  để hàm số  $y = \sqrt{5 \sin 4x - 6 \cos 4x + 2m - 1}$  xác định với mọi  $x$

- A.**  $m \geq \frac{\sqrt{61}+1}{2}$ .      **B.**  $m \geq 1$ .      **C.**  $m \geq \frac{\sqrt{61}-1}{2}$ .      **D.**  $m < \frac{\sqrt{61}+1}{2}$ .

**Lời giải**

Hàm số xác định với mọi  $x \Leftrightarrow 5 \sin 4x - 6 \cos 4x \geq 1 - 2m \quad \forall x$ .

Ta có  $|5 \sin 4x - 6 \cos 4x| \leq \sqrt{5^2 + (-6)^2} = \sqrt{61}$ , do đó  $\min(5 \sin 4x - 6 \cos 4x) = -\sqrt{61}$ .

$$\Rightarrow -\sqrt{61} \geq 1 - 2m \Leftrightarrow m \geq \frac{\sqrt{61}+1}{2}.$$

**Câu 66:** Có bao nhiêu số nguyên  $m$  sao cho hàm số  $y = \sqrt{m \sin x + 3}$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$ ?

- A.** 7.      **B.** 6.      **C.** 3.      **D.** 4.

**Lời giải**

Ta có  $|m \sin x| = |m| \cdot |\sin x| \leq |m|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  nên  $-|m| + 3 \leq m \sin x + 3 \leq |m| + 3$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Do đó, hàm số  $y = \sqrt{m \sin x + 3}$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -|m| + 3 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3.$$

Mà  $m \in \mathbb{Z}$  nên  $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ .

Vậy ta có 7 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn bài toán.

**Câu 67:** Hàm số  $y = \frac{3 + \sin 2x}{\sqrt{m \cos x + 1}}$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$  khi

- A.**  $m > 0$ .      **B.**  $0 \leq m < 1$ .      **C.**  $-1 < m < 1$ .      **D.**  $m \neq -1$ .

**Lời giải**

Hàm số  $y = \frac{3 + \sin 2x}{\sqrt{m \cos x + 1}}$  có tập xác định là  $\mathbb{R} \Leftrightarrow m \cos x + 1 > 0$

+  $m = 0 \Rightarrow 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 0$  thỏa ycbt.

+  $m > 0$

Ta có  $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -m \leq m \cos x \leq m \Rightarrow -m + 1 < m \cos x + 1 < m + 1$

$\Rightarrow$  GTNN của  $m \cos x + 1$  là  $-m + 1$

$\Rightarrow -m + 1 > 0 \Rightarrow 0 < m < 1$ .

+  $m < 0$

Ta có  $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -m \geq m \cos x \geq m \Rightarrow -m + 1 \geq m \cos x + 1 \geq m + 1$

$\Rightarrow$  GTNN của  $m \cos x + 1$  là  $m + 1$

$\Rightarrow m + 1 > 0 \Rightarrow -1 < m < 0$ .

Suy ra:  $-1 < m < 1$ .

**Câu 68:** Cho hàm số  $y = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x - m \sin x \cdot \cos x}$ . Tìm  $m$  để hàm số xác định với mọi  $x$ .

- A.**  $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ .      **B.**  $m \in (-1; 1)$ .      **C.**  $m \in (-\infty; 1]$ .      **D.**  $m \in [-1; 1]$ .

**Lời giải**

$$y = \sqrt{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x - m \sin x \cdot \cos x}$$

$$= \sqrt{-2\sin^2 x \cdot \cos^2 x - m \sin x \cdot \cos x + 1} = \sqrt{-\frac{1}{2}\sin^2 2x - \frac{1}{2}m \sin 2x + 1}$$

Đặt  $t = \sin 2x$ ,  $-1 \leq t \leq 1$  ta có hàm số  $y = \sqrt{-\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}mt + 1}$

Hàm số  $y = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x - m \sin x \cdot \cos x}$  xác định với mọi  $x$  khi và chỉ khi hàm số

$$y = \sqrt{-\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}mt + 1} \text{ xác định với mọi } -1 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}mt + 1 \geq 0 \forall t: -1 \leq t \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -t^2 - mt + 2 \geq 0 \forall t: -1 \leq t \leq 1$$

Ta có  $\Delta = m^2 + 8 > 0, \forall m$ . Bảng xét dấu  $f(t) = -t^2 - mt + 2$

|        |           |       |       |           |     |
|--------|-----------|-------|-------|-----------|-----|
| $t$    | $-\infty$ | $t_1$ | $t_2$ | $+\infty$ |     |
| $f(t)$ | $-$       | $0$   | $+$   | $0$       | $-$ |

Từ BXD, ta suy ra  $-t^2 - mt + 2 \geq 0 \forall t: -1 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow t_1 \leq -1 < 1 \leq t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-m - \sqrt{m^2 + 8}}{2} \leq -1 \\ \frac{-m + \sqrt{m^2 + 8}}{2} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m^2 + 8} \geq 2 - m \quad (1) \\ \sqrt{m^2 + 8} \geq m + 2 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m < 0 \\ 2 - m \geq 0 \\ m^2 + 8 \geq m^2 - 4m + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m \leq 2 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -1$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + m < 0 \\ 2 + m \geq 0 \\ m^2 + 8 \geq m^2 + 4m + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m \geq -2 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1$$

Vậy  $m \in [-1; 1]$ .

**DẠNG 2. TÍNH CHẴN LẺ**

**Câu 69:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

**A.**  $y = \sin x$ .

**B.**  $y = \cos x$ .

**C.**  $y = \tan x$ .

**D.**  $y = \cot x$ .

**Lời giải**

Nhắc lại kiến thức cơ bản:

- Hàm số  $y = \sin x$  là hàm số lẻ.
- Hàm số  $y = \cos x$  là hàm số chẵn.
- Hàm số  $y = \tan x$  là hàm số lẻ.

- Hàm số  $y = \cot x$  là hàm số lẻ.

Vậy B là đáp án đúng.

**Câu 70:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A.**  $y = -\sin x$ .      **B.**  $y = \cos x - \sin x$ .      **C.**  $y = \cos x + \sin^2 x$ .      **D.**  $y = \cos x \sin x$ .

**Lời giải**

Tất cả các hàm số đều có TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ . Do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Bây giờ ta kiểm tra  $f(-x) = f(x)$  hoặc  $f(-x) = -f(x)$ .

- Với  $y = f(x) = -\sin x$ . Ta có  $f(-x) = -\sin(-x) = \sin x = -(-\sin x)$

$\longrightarrow f(-x) = -f(x)$ . Suy ra hàm số  $y = -\sin x$  là hàm số lẻ.

- Với  $y = f(x) = \cos x - \sin x$ . Ta có  $f(-x) = \cos(-x) - \sin(-x) = \cos x + \sin x$

$\longrightarrow f(-x) \neq \{-f(x), f(x)\}$ . Suy ra hàm số  $y = \cos x - \sin x$  không chẵn không lẻ.

- Với  $y = f(x) = \cos x + \sin^2 x$ . Ta có  $f(-x) = \cos(-x) + \sin^2(-x)$

$$= \cos(-x) + [\sin(-x)]^2 = \cos x + [-\sin x]^2 = \cos x + \sin^2 x$$

$\longrightarrow f(-x) = f(x)$ . Suy ra hàm số  $y = \cos x + \sin^2 x$  là hàm số chẵn.

- Với  $y = f(x) = \cos x \sin x$ . Ta có  $f(-x) = \cos(-x) \cdot \sin(-x) = -\cos x \sin x$

$\longrightarrow f(-x) = -f(x)$ . Suy ra hàm số  $y = \cos x \sin x$  là hàm số lẻ.

**Câu 71:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A.**  $y = \sin 2x$ .      **B.**  $y = x \cos x$ .      **C.**  $y = \cos x \cdot \cot x$ .      **D.**  $y = \frac{\tan x}{\sin x}$ .

**Lời giải**

- Xét hàm số  $y = f(x) = \sin 2x$ .

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ . Do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Ta có  $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x) \longrightarrow f(x)$  là hàm số lẻ.

- Xét hàm số  $y = f(x) = x \cos x$ .

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ . Do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Ta có  $f(-x) = (-x) \cdot \cos(-x) = -x \cos x = -f(x) \longrightarrow f(x)$  là hàm số lẻ.

- Xét hàm số  $y = f(x) = \cos x \cot x$ .

TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Ta có  $f(-x) = \cos(-x) \cdot \cot(-x) = -\cos x \cot x = -f(x) \longrightarrow f(x)$  là hàm số lẻ.

● Xét hàm số  $y = f(x) = \frac{\tan x}{\sin x}$ .

TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ . Do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Ta có  $f(-x) = \frac{\tan(-x)}{\sin(-x)} = \frac{-\tan x}{-\sin x} = \frac{\tan x}{\sin x} = f(x) \longrightarrow f(x)$  là hàm số chẵn.

**Câu 72:** Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

- A.**  $y = 2x + \cos x$ .      **B.**  $y = \cos 3x$ .      **C.**  $y = x^2 \sin(x+3)$ .      **D.**  $y = \frac{\cos x}{x^3}$ .

**Lời giải**

Xét hàm số  $y = f(x) = \frac{\cos x}{x^3}$ . Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  là tập đối xứng.

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x^3} = -\frac{\cos(x)}{x^3} = -f(x).$$

Do đó hàm số  $y = \frac{\cos x}{x^3}$  là hàm số lẻ.

**Câu 73:** Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số  $y = \cot x$  là hàm số chẵn.      **B.** Hàm số  $y = \sin x$  là hàm số chẵn.  
**C.** Hàm số  $y = \tan x$  là hàm số chẵn.      **D.** Hàm số  $y = \cos x$  là hàm số chẵn.

**Lời giải**

Xét hàm số  $y = \cos x$  có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

Với mọi  $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$  và  $\cos x = \cos(-x)$ . Do đó hàm số  $y = \cos x$  là hàm số chẵn.

**Câu 74:** Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

- A.** Hàm số  $y = \sin x$  là hàm số chẵn.      **B.** Hàm số  $y = \cos x$  là hàm số lẻ.  
**C.** Hàm số  $y = \tan x$  là hàm số lẻ.      **D.** Hàm số  $y = \cot x$  là hàm số chẵn.

**Lời giải**

**Câu 75:** Chọn phát biểu **đúng**:

- A.** Các hàm số  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \cot x$  đều là hàm số chẵn.  
**B.** Các hàm số  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \cot x$  đều là hàm số lẻ.  
**C.** Các hàm số  $y = \sin x$ ,  $y = \cot x$ ,  $y = \tan x$  đều là hàm số chẵn.  
**D.** Các hàm số  $y = \sin x$ ,  $y = \cot x$ ,  $y = \tan x$  đều là hàm số lẻ.

**Lời giải**

Ta có, các hàm số  $y = \sin x$ ,  $y = \cot x$ ,  $y = \tan x$  là các hàm số lẻ, hàm số  $y = \cos x$  là hàm số chẵn.

**Câu 76:** Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn ?

- A.  $f(x) = \sin x$ .      B.  $f(x) = \sin 2x$ .      C.  $f(x) = |\sin x|$ .      D.  $f(x) = x \sin x^2$ .

**Lời giải**

⊗ Xét hàm số  $f(x) = \sin x$ . Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ . Với mọi  $x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x \neq f(x)$ . Hàm số đã cho không phải hàm chẵn.

⊗ Xét hàm số  $f(x) = \sin 2x$ . Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ . Với mọi  $x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

$f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x \neq f(x)$ . Hàm số đã cho không phải hàm chẵn.

⊗ Xét hàm số  $f(x) = |\sin x|$ . Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ . Với mọi  $x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

$f(-x) = |\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x), \forall x \in D$ . Hàm số đã cho là hàm chẵn.

⊗ Xét hàm số  $f(x) = x \sin x^2$ . Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ . Với mọi  $x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

$f(-x) = (-x) \sin(-x)^2 = -x \sin x^2 \neq f(x)$ . Hàm số đã cho không phải hàm chẵn.

**Câu 77:** Hàm số nào dưới đây là hàm số lẻ?

- A.  $y = \cos x$ .      B.  $y = \sin^2 x$ .      C.  $y = \cot^2 x$ .      D.  $y = \tan x$ .

**Lời giải**

Hàm số  $y = \tan x$  là hàm số lẻ.

**Câu 78:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A.  $y = \sin 3x$ .      B.  $y = \tan \frac{x}{2}$ .      C.  $y = \sin x \cdot \cos x$ .      D.  $y = \sin^2 x \cdot \cos x$ .

**Lời giải**

Hàm số  $y = f(x) = \sin^2 x \cdot \cos x$  có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ , thỏa mãn 2 điều kiện

$$\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = (\sin(-x))^2 \cdot \cos(-x) = \sin^2 x \cdot \cos x = f(x). \end{cases}$$

Nên là hàm số chẵn.

**Câu 79:** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A.  $y = \tan 4x$ .      B.  $y = \cos 3x$ .      C.  $y = \cot 5x$ .      D.  $y = \sin 2x$ .

**Lời giải**

Hàm số  $y = \cos 3x$  là hàm số chẵn do có tập xác định là  $D = \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in D, -x \in D$  ta có:

$$\cos 3(-x) = \cos(-3x) = \cos 3x.$$

**Câu 80:** Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn

- A.  $y = 3 \sin^3 x + 4 \sin x$ .      B.  $y = 3 \sin x + 4 \cos x$ .  
C.  $y = 4 \cos^2 x - \sin x$ .      D.  $y = 4 \sin^2 x - \cos x$ .

**Lời giải**

Hàm số  $y = 4\sin^2 x - \cos x$  có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

Suy ra  $\forall x \in D, -x \in D$ .

$$f(x) = 4\sin^2 x - \cos x.$$

$$f(-x) = 4\sin^2(-x) - \cos(-x) = 4\sin^2 x - \cos x = f(x).$$

Vậy suy ra hàm số  $y = 4\sin^2 x - \cos x$  là hàm số chẵn.

**Câu 81:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

**A.**  $y = \cos x \cdot \sin^3 x$ .      **B.**  $y = \sin x \cdot \cos 2x$ .

**C.**  $y = 2019 \cos x + 2020$ .

**D.**  $y = \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1}$ .

**Lời giải**

Xét hàm số  $y = f(x) = 2019 \cos x + 2020$

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}.$$

$$f(-x) = 2019 \cos(-x) + 2020 = 2019 \cos x + 2020 = f(x).$$

Kết luận: Hàm số  $y = 2019 \cos x + 2020$  là hàm số chẵn.

**Câu 82:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

**A.**  $y = |\sin x| + 3$ .      **B.**  $y = \frac{2 \cos^2 x}{\sin x + 2}$ .      **C.**  $y = x \sin x^2$ .      **D.**  $y = 2 \cos x - \sin 2x$ .

**Lời giải**

Xét các đáp án ta thấy ở phương án C hàm số  $y = f(x) = x \sin x^2$  có

Tập xác định  $D = \mathbb{R}$  thỏa mãn:

1)  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

2)  $f(-x) = -x \sin(-x)^2 = -x \sin x^2 = -f(x), \forall x \in D$ .

Do đó hàm số  $y = x \sin x^2$  là hàm số lẻ.

Các hàm số ở các đáp án còn lại không thỏa mãn định nghĩa hàm số lẻ.

**Câu 83:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn.

**A.**  $y = \sin|2021x| + \cos 2022x$ .

**B.**  $y = \cot 2021x - 2022 \sin x$ .

**C.**  $y = \tan 2021x + \cot 2022x$ .

**D.**  $y = 2021 \cos x + 2022 \sin x$ .

**Lời giải**

Xét hàm  $y = \sin|2021x| + \cos 2022x$  (1) ta có

TXĐ  $D = \mathbb{R}$ .  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Có  $y(-x) = \sin|(-2021x)| + \cos(-2022x) = \sin|2021x| + \cos 2022x = y(x)$  nên là hàm chẵn.

**Câu 84:** Có bao nhiêu hàm số chẵn trong các hàm số sau:  $y = \sin|x|$ ,  $y = \cos 3x$ ,  $y = \tan 2x$  và  $y = \cot x$ ?

- A. 1.                                      B. 2.                                      C. 3.                                      D. 4.

**Lời giải**

Vì hàm số  $y = \sin|x|$  có tập xác định  $D = \mathbb{R}$  và  $\sin|-x| = \sin|x|$  nên  $y = \sin|x|$  là hàm số chẵn.

Vì hàm số  $y = \cos 3x$  có tập xác định  $D = \mathbb{R}$  và  $\cos(3(-x)) = \cos(-3x) = \cos 3x$  nên  $y = \cos 3x$  là hàm số chẵn.

**Câu 85:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A.  $y = |\sin x|$ .                                      B.  $y = x^2 \sin x$ .                                      C.  $y = \frac{x}{\cos x}$ .                                      D.  $y = x + \sin x$ .

**Lời giải**

Ta kiểm tra được A là hàm số chẵn, các đáp án B, C, D là hàm số lẻ.

**Câu 86:** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

- A.  $y = \sin x \cos 2x$ .                                      B.  $y = \sin^3 x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ .

- C.  $y = \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1}$ .                                      D.  $y = \cos x \sin^3 x$ .

**Lời giải**

Ta dễ dàng kiểm tra được A, C, D là các hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ  $O$ .

Xét đáp án B, ta có  $y = f(x) = \sin^3 x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin^3 x \cdot \sin x = \sin^4 x$ . Kiểm tra được đây là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục tung.

**Câu 87:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A.  $y = \cos x + \sin^2 x$ .                                      B.  $y = \sin x + \cos x$ .                                      C.  $y = -\cos x$ .                                      D.  $y = \sin x \cdot \cos 3x$ .

**Lời giải**

Ta kiểm tra được đáp án A và C là các hàm số chẵn. Đáp án B là hàm số không chẵn, không lẻ. Đáp án D là hàm số lẻ.

**Câu 88:** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

- A.  $y = \cot 4x$ .                                      B.  $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$ .                                      C.  $y = \tan^2 x$ .                                      D.  $y = |\cot x|$ .

**Lời giải**

Ta kiểm tra được đáp án A là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Đáp án B là hàm số không chẵn, không lẻ. Đáp án C và D là các hàm số chẵn.

**Câu 89:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A.  $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .                                      B.  $y = \sin^2 x$ .                                      C.  $y = \frac{\cot x}{\cos x}$ .                                      D.  $y = \frac{\tan x}{\sin x}$ .

**Lời giải**

Viết lại đáp án A là  $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ .

Ta kiểm tra được đáp án A, B và D là các hàm số chẵn. Đáp án C là hàm số lẻ.

**Câu 90:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A.  $y = 1 - \sin^2 x$ .      B.  $y = |\cot x| \cdot \sin^2 x$ .  
 C.  $y = x^2 \tan 2x - \cot x$ .      D.  $y = 1 + |\cot x + \tan x|$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta kiểm tra được đáp án A, B và D là các hàm số chẵn. Đáp án C là hàm số lẻ.

**Câu 91:** Cho hàm số  $f(x) = \sin 2x$  và  $g(x) = \tan^2 x$ . Chọn mệnh đề đúng

- A.  $f(x)$  là hàm số chẵn,  $g(x)$  là hàm số lẻ.      B.  $f(x)$  là hàm số lẻ,  $g(x)$  là hàm số chẵn.  
 C.  $f(x)$  là hàm số chẵn,  $g(x)$  là hàm số chẵn.      D.  $f(x)$  và  $g(x)$  đều là hàm số lẻ.

**Lời giải**

**Chọn B**

- Xét hàm số  $f(x) = \sin 2x$ .

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ . Do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Ta có  $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x) \longrightarrow f(x)$  là hàm số lẻ.

- Xét hàm số  $g(x) = \tan^2 x$ .

TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$ . Do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Ta có  $g(-x) = [\tan(-x)]^2 = (-\tan x)^2 = \tan^2 x = g(x) \longrightarrow f(x)$  là hàm số chẵn.

**Câu 92:** Cho hai hàm số  $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$  và  $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.  $f(x)$  lẻ và  $g(x)$  chẵn.      B.  $f(x)$  và  $g(x)$  chẵn.  
 C.  $f(x)$  chẵn,  $g(x)$  lẻ.      D.  $f(x)$  và  $g(x)$  lẻ.

**Lời giải**

- Xét hàm số  $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$ .

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ . Do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Ta có  $f(-x) = \frac{\cos(-2x)}{1 + \sin^2(-3x)} = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x} = f(x) \longrightarrow f(x)$  là hàm số chẵn.

● Xét hàm số  $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$ .

TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$ . Do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Ta có  $g(-x) = \frac{|\sin(-2x)| - \cos(-3x)}{2 + \tan^2(-x)} = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x} = g(x) \longrightarrow g(x)$  là hàm số chẵn.

Vậy  $f(x)$  và  $g(x)$  chẵn.

**Câu 93:** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

**A.**  $y = \frac{1}{\sin^3 x}$ .      **B.**  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .      **C.**  $y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ . **D.**  $y = \sqrt{\sin 2x}$ .

**Lời giải**

Viết lại đáp án B là  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$ .

Viết lại đáp án C là  $y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$ .

Kiểm tra được đáp án A là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Ta kiểm tra được đáp án B và C là các hàm số không chẵn, không lẻ.

Xét đáp án **D**.

● Hàm số xác định  $\Leftrightarrow \sin 2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \in [k2\pi; \pi + k2\pi] \Leftrightarrow x \in \left[k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

$\longrightarrow D = \left[k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right] \ (k \in \mathbb{Z})$ .

● Chọn  $x = \frac{\pi}{4} \in D$  nhưng  $-x = -\frac{\pi}{4} \notin D$ . Vậy  $y = \sqrt{\sin 2x}$  không chẵn, không lẻ.

**Câu 94:** Mệnh đề nào sau đây là sai?

**A.** Đồ thị hàm số  $y = |\sin x|$  đối xứng qua gốc tọa độ  $O$ .

**B.** Đồ thị hàm số  $y = \cos x$  đối xứng qua trục  $Oy$ .

**C.** Đồ thị hàm số  $y = |\tan x|$  đối xứng qua trục  $Oy$ .

**D.** Đồ thị hàm số  $y = \tan x$  đối xứng qua gốc tọa độ  $O$ .

**Lời giải**

Ta kiểm tra được hàm số  $y = |\sin x|$  là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục  $Oy$ . Do đó đáp án A sai.

**Câu 95:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A.**  $y = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi - 2x)$ . **B.**  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .  
**C.**  $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x$ . **D.**  $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ .

**Lời giải**

Viết lại đáp án A là  $y = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi - 2x) = -2 \sin x + \sin 2x$ .

Viết lại đáp án B là  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \sin x$ .

Viết lại đáp án C là  $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x = \sin x + \cos x - \sin x = \cos x$ .

Ta kiểm tra được đáp án A và B là các hàm số lẻ. Đáp án C là hàm số chẵn.

Xét đáp án **D**.

- Hàm số xác định  $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \longrightarrow D = \left[ k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right] \quad (k \in \mathbb{Z})$ .
- Chọn  $x = \frac{\pi}{4} \in D$  nhưng  $-x = -\frac{\pi}{4} \notin D$ . Vậy  $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$  không chẵn, không lẻ.

**Câu 96:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A.**  $y = x^4 + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ . **B.**  $y = x^{2017} + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ .  
**C.**  $y = 2015 + \cos x + \sin^{2018} x$ . **D.**  $y = \tan^{2017} x + \sin^{2018} x$ .

**Lời giải**

Viết lại đáp án B là  $y = x^{2017} + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = y = x^{2017} + \sin x$ .

Ta kiểm tra được đáp án A và D không chẵn, không lẻ. Đáp án B là hàm số lẻ. Đáp án C là hàm số chẵn.

**Câu 97:** Trong các hàm số sau. Hàm số nào có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng?

- A.**  $y = \tan x$ . **B.**  $y = \sin x$ . **C.**  $y = \cot x$ . **D.**  $y = \cos x$ .

**Lời giải**

Xét hàm số  $y = \cos x$ .

Tập xác định  $D = \mathbb{R}$  là tập đối xứng và  $\cos(-x) = \cos x$  nên  $y = \cos x$  là hàm số chẵn.

**Câu 98:** Hàm số nào là hàm số chẵn trong các hàm số sau?

- A.  $y = \sin x \cdot \cos x$ .      B.  $y = \tan x$ .      C.  $y = \cot x$ .      D.  $y = \sin^2 x \cdot \cos x$ .

Lời giải

Hàm số  $y = \sin^2 x \cdot \cos x$  thỏa mãn tính chất của hàm số chẵn:

$$y(-x) = \sin^2(-x) \cdot \cos(-x) = \sin^2 x \cdot \cos x = y(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Câu 99:** Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

- A.  $y = \sin 4x$ .      B.  $y = \cos 5x$ .      C.  $y = \tan 4x$ .      D.  $y = \cot 10x$ .

Lời giải

Hàm số  $y = \cos 2x$  có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

Với mọi  $x \in D$  ta có  $-x \in D$  và  $\cos(-2x) = \cos(2x)$  nên hàm số  $y = \cos 2x$  là hàm số chẵn.

**Câu 100:** Trong các hàm số sau hàm số nào là hàm số chẵn?

- A.  $y = 2 \cos x$ .      B.  $y = 2 \tan x$ .      C.  $y = 2 \sin x$ .      D.  $y = 2 \cos(x-1)$ .

Lời giải

Hàm số  $y = 2 \tan x$  và  $y = 2 \sin x$  là hàm số lẻ.

Hàm số  $y = 2 \cos(x-1)$  không thỏa  $y(-x) = y(x)$  nên là hàm số không chẵn.

Hàm số  $y = 2 \cos x$  là hàm số chẵn vì TXĐ:  $D = \mathbb{R}$  và  $2 \cos x = 2 \cos(-x)$ .

**Câu 101:** Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn trên  $\mathbb{R}$ ?

- A.  $y = x \cdot \cos 2x$ .      B.  $y = (x^2 + 1) \cdot \sin x$ .      C.  $y = \frac{\cos x}{1 + x^2}$ .      D.  $y = \frac{\tan x}{1 + x^2}$ .

Lời giải

Xét hàm số  $y = f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}$  có tập xác định  $D = \mathbb{R}$

$$\bullet \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$\bullet \forall x \in D: f(-x) = \frac{\cos(-x)}{1 + (-x)^2} = \frac{\cos x}{1 + x^2} = f(x)$$

Vậy hàm số  $f$  là hàm chẵn.

**Câu 102:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn trên  $\mathbb{R}$ ?

- A.  $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .      B.  $y = \tan x$ .      C.  $y = \sin x$ .      D.  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

Lời giải

Ta có  $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$  là hàm số chẵn trên  $\mathbb{R}$ .

**Câu 103:** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng?

A.  $y = x \sin x$ .

B.  $y = \cos x$ .

C.  $y = 1 - \sin x$ .

D.  $y = \sin x \cos x$ .

**Lời giải**

Đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng là đồ thị của hàm số lẻ.

A.: Hàm số  $y = f(x) = x \sin x$ :

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $\forall x \in D: -x \in D$  và  $f(-x) = (-x) \sin(-x) = x \sin x = f(x)$ .

Do đó hàm số  $y = x \sin x$  là hàm số chẵn.

B.: Hàm số  $y = \cos x$  là hàm số chẵn trên  $\mathbb{R}$ .

C.: Hàm số  $y = f(x) = 1 - \sin x$ :

Ta có:  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$ .

Lúc đó:  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  và  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq -f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Do đó, hàm số  $y = 1 - \sin x$  không phải là hàm số chẵn và không phải hàm số lẻ.

D.: Hàm số  $y = f(x) = \cos x \sin x$ :

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $\forall x \in D: -x \in D$  và  $f(-x) = \cos(-x) \sin(-x) = -\cos x \sin x = -f(x)$ .

Do đó hàm số  $y = f(x) = \cos x \sin x$  là hàm số lẻ.

Vậy đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng là đồ thị của hàm số  $y = f(x) = \cos x \sin x$ .

**Câu 104:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A.  $y = \sin|2022x| + \cos 2021x$ .

B.  $y = 2021 \cos x + 2023 \sin x$ .

C.  $y = \cot 2021x - 2022 \sin x$ .

D.  $y = \tan 2021x + \cot 2022x$ .

**Lời giải**

Xét hàm số  $y = f(x) = \sin|2016x| + \cos 2017x$ . Tập xác định.  $D = \mathbb{R}$ .

Với mọi  $x \in D$ , ta có  $-x \in D$ .

Ta có  $f(-x) = \sin|-2016x| + \cos(-2017x) = \sin|2016x| + \cos 2017x = f(x)$ .

Vậy  $f(x)$  là hàm số chẵn.

**Câu 105:** Hàm số nào sau đây có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng?

A.  $y = |\sin x|$ .

B.  $y = \cot x$ .

C.  $y = \tan x$ .

D.  $y = -\sin x$ .

**Lời giải**

Vì  $|\sin(-x)| = |\sin x|$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  nên hàm số  $y = |\sin x|$  là hàm số chẵn, nên đồ thị sẽ đối xứng qua trục tung.

**Câu 106:** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số chẵn?

A.  $y = \sin x$ .

B.  $y = x + \sin x$ .

C.  $y = x \cos x$ .

D.  $y = \frac{\sin x}{x}$ .

**Lời giải**

Xét hàm số  $y = \sin x$  Tập xác định  $D = \mathbb{R}$  nên  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ .

$$y(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -y(x).$$

⇒ Hàm lẻ.

Xét hàm số  $y = x + \sin x$ , tập xác định  $D = \mathbb{R}$  nên:

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}. \quad y(-x) = (-x) + \sin(-x) = -[x + \sin(x)] = -y(x).$$

⇒ Hàm lẻ.

Xét hàm số  $y = x \cos x$  có tập xác định  $D = \mathbb{R}$  nên:

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}. \quad y(-x) = (-x) \cos(-x) = -[x \cos(x)] = -y(x).$$

⇒ Hàm lẻ.

Xét hàm số  $y = \frac{\sin x}{x}$  tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  nên:

$$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D. \quad y(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = y(x) \Rightarrow \text{Hàm chẵn.}$$

**Câu 107:** Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn

**A.**  $y = \sin x$ .

**B.**  $y = \tan x$ .

**C.**  $y = \cot(2x)$ .

**D.**  $y = \sin|x|$ .

**Lời giải**

Ta có hàm số  $y = \sin|x|$  có tập xác định  $D = \mathbb{R}$

$$\text{Và } y(-x) = \sin|-x| = \sin x = y(x)$$

Vậy hàm số  $y = \sin|x|$  là hàm số chẵn.

**Câu 108:** Trong các hàm số:  $y = 2 \sin x$ ;  $y = |\sin x + 3|$ ;  $y = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2019x\right)$ , có bao nhiêu hàm lẻ?

**A.** 3.

**B.** 0.

**C.** 1.

**D.** 2.

**Lời giải**

\* Xét  $y = 2 \sin x$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

Với  $\forall x \in D \Leftrightarrow -x \in D$  và  $y(-x) = 2 \sin(-x) = -2 \sin x = -y(x)$  nên  $y = 2 \sin x$  là hàm lẻ

\* Xét  $y = |\sin x + 3|$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

Với  $\forall x \in D \Leftrightarrow -x \in D$  và  $y(-x) = |\sin(-x) + 3| = |-\sin x + 3| \neq -y(x)$  nên  $y = |\sin x + 3|$  không là hàm lẻ

\* Xét  $y = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2019x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2019x\right) = \cos 2019x$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

Với  $\forall x \in D \Leftrightarrow -x \in D$  và  $y(-x) = \cos[2019(-x)] = \cos(-2019x) = \cos 2019x = y(x)$  nên

$y = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2019x\right)$  là hàm chẵn.

**Câu 109:** Cho hai hàm số  $f(x) = \sin 2x$  và  $g(x) = \cos 3x$ . Chọn mệnh đề đúng

**A.**  $f$  là hàm số chẵn và  $g$  là hàm số lẻ.

**B.**  $f$  và  $g$  là hai hàm số chẵn.

**C.**  $f$  và  $g$  là hai hàm số lẻ.

**D.**  $f$  là hàm số lẻ và  $g$  là hàm số chẵn.

**Lời giải**

Tập xác định của hai hàm số là:  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x) \Rightarrow f$  là hàm số lẻ.

$g(-x) = \cos(-3x) = \cos 3x = g(x) \Rightarrow g$  là hàm số chẵn.

**Câu 110:** Trong các hàm số sau có bao nhiêu hàm số là hàm số chẵn trên tập xác định của nó?

$y = \tan 2x$ ,  $y = \sin^{2018} x$ ,  $y = \cos(x + 3\pi)$ ,  $y = |\cot x|$ .

**A.** 2.

**B.** 4.

**C.** 3.

**D.** 1.

**Lời giải**

Hàm số  $y = \tan 2x$  có

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Ta có:  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$  và  $f(-x) = \tan(-2x) = -\tan 2x = -f(x)$ .

Vậy hàm số  $y = \tan 2x$  là hàm số lẻ.

Hàm số  $y = \cos(x + 3\pi) = -\cos x$  là hàm số chẵn.

Tương tự, kiểm tra được các hàm số  $y = \sin^{2018} x$ ;  $y = |\cot x|$  là các hàm số chẵn trên tập xác định của nó.

**Câu 111:** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

**A.**  $y = \cot 4x$ .

**B.**  $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$ .

**C.**  $y = \tan^2 x$ .

**D.**  $y = |\cot x|$ .

**Lời giải**

Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Trong các hàm số trên, chỉ có hàm số  $y = \cot 4x$  là hàm số lẻ.

Vậy, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ là  $y = \cot 4x$ .

**Câu 112:** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

A.  $y = \sin x \cdot \cos 2x$ .

B.  $y = \sin^3 x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ .

C.  $y = \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1}$ .

D.  $y = \cos x \cdot \sin^3 x$ .

**Lời giải**

Xét hàm số  $y = f(x) = \sin^3 x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin^4 x$  có tập xác định  $D = \mathbb{R}$

•  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

•  $\forall x \in D : f(-x) = (\sin(-x))^4 = \sin^4 x = f(x)$

Vậy hàm số  $f$  là hàm số chẵn  $\Rightarrow$  Đồ thị của hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.

**Câu 113:** Cho hàm số  $f(x) = \sin 2x$  và  $g(x) = \tan^2 x$ . Chọn mệnh đề đúng?

A.  $f(x)$  là hàm số chẵn,  $g(x)$  là hàm số lẻ.

B.  $f(x)$  là hàm số lẻ,  $g(x)$  là hàm số chẵn.

C.  $f(x)$  là hàm số chẵn,  $g(x)$  là hàm số chẵn.

D.  $f(x)$  và  $g(x)$  đều là hàm số lẻ.

**Lời giải**

Hàm số  $f(x)$  có TXĐ là  $D = \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in D$  thì  $-x \in D$ .

$\forall x \in D : f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x) \Rightarrow$  hàm số  $f(x)$  là hàm số lẻ.

Hàm số  $g(x)$  có TXĐ là  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow \forall x \in D$  thì  $-x \in D$ .

$\forall x \in D : g(-x) = \tan^2(-x) = \tan^2 x = g(x) \Rightarrow$  hàm số  $g(x)$  là hàm số chẵn.

**Câu 114:** Trong các hàm số:  $y = 2 \sin x$ ;  $y = |\sin x + 3|$ ;  $y = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2021x\right)$ , có bao nhiêu hàm lẻ?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

**Lời giải**

\* Xét  $y = 2 \sin x$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

Với  $\forall x \in D \Leftrightarrow -x \in D$  và  $y(-x) = 2 \sin(-x) = -2 \sin x = -y(x)$  nên  $y = 2 \sin x$  là hàm lẻ

\* Xét  $y = |\sin x + 3|$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

Với  $\forall x \in D \Leftrightarrow -x \in D$  và  $y(-x) = |\sin(-x) + 3| = |-\sin x + 3| \neq -y(x)$  nên  $y = |\sin x + 3|$  không là hàm lẻ

\* Xét  $y = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2019x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2019x\right) = \cos 2019x$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

Với  $\forall x \in D \Leftrightarrow -x \in D$  và  $y(-x) = \cos[2019(-x)] = \cos(-2019x) = \cos 2019x = y(x)$  nên

$y = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2019x\right)$  là hàm chẵn.

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 3: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ



### HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### DẠNG 3. TẬP GIÁ TRỊ - GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

**Câu 115:** Tập giá trị của hàm số  $y = \sin 2x$  là:

- A.  $[-2; 2]$ .      B.  $[0; 2]$ .      C.  $[-1; 1]$ .      D.  $[0; 1]$ .

Lời giải

Ta có  $-1 \leq \sin 2x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Vậy tập giá trị của hàm số đã cho là  $[-1; 1]$ .

**Câu 116:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sin 2x$  bằng

- A. 2.      B. 0.      C. 1.      D. -1.

Lời giải

Ta có  $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sin 2x$  bằng 1 khi  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 117:** Tập giá trị của hàm số  $y = \sin x$  là

- A.  $T = [-1; 1]$ .      B.  $T = (-1; 1)$ .      C.  $T = [-1; 0]$ .      D.  $T = [0; 1]$ .

Lời giải

Dựa vào tính chất hàm số  $y = \sin x$ .

**Câu 118:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 3 \sin x$  trên tập xác định  $\mathbb{R}$  là?

- A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. -3.

Lời giải

Hàm số  $y = \sin x$  có tập giá trị là  $[-1; 1]$ . Do đó  $-3 \leq 3 \sin x \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 3 \sin x$  trên tập xác định  $\mathbb{R}$  là 3, xảy ra khi

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

**Câu 119:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \cos x$  là

- A. 1.                                      B. 0.                                      C. -1.                                      D. 2.

**Lời giải**

Ta có:  $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$  nên giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \cos x$  là  $-1$  khi  $x = \pi + k2\pi$ .

**Câu 120:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 2\sqrt{\sin x + 1} - 3$  là

- A.  $2\sqrt{3} + 2$ .                                      B.  $2\sqrt{3} - 2$ .                                      C.  $2\sqrt{3} - 3$ .                                      D.  $3\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

Vì  $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sin x + 1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{\sin x + 1} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 \leq 2\sqrt{\sin x + 1} \leq 2\sqrt{2}$   
 $\Leftrightarrow -3 \leq y \leq 2\sqrt{2} - 3$ .

Vậy  $\max y = 2\sqrt{2} - 3$  khi  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 121:** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - 1$  lần lượt là:

- A. 4; -2.                                      B. 2; -4.                                      C. 1; -1.                                      D. 3; -3.

**Lời giải**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

+)  $\forall x \in \mathbb{R}$  ta có:  $-1 \leq \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \leq 3 \Leftrightarrow -4 \leq 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - 1 \leq 2$   
 $\Rightarrow -4 \leq y \leq 2$ .

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - 1$  là 2 khi  $x = -\frac{\pi}{4}$ .

Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - 1$  là -4 khi  $x = \frac{3\pi}{4}$ .

**Câu 122:** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \cos 6x + 5$  lần lượt là

- A. 4 và 6.                                      B. 0 và 4.                                      C. -1 và 11.                                      D. 6 và 4.

**Lời giải**

Ta có :  $-1 \leq \cos 6x \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq \cos 6x + 5 \leq 6 \Leftrightarrow 4 \leq y \leq 6$ .

**Câu 123:** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 8\sin 2x - 5$ .

- A.  $\max y = 11$ ;  $\min y = -21$ .                                      B.  $\max y = 8$ ;  $\min y = -8$ .  
 C.  $\max y = -4$ ;  $\min y = -6$ .                                      D.  $\max y = 3$ ;  $\min y = -13$ .

**Lời giải**

Ta có  $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Leftrightarrow -8 \leq 8\sin 2x \leq 8 \Leftrightarrow -13 \leq 8\sin 2x - 5 \leq 3$

Vậy  $\max y = 3$ ;  $\min y = -13$

**Câu 124:** Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất,  $m$  là giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 4\sin x \cos x + 1$ . Tính  $M + m$

- A. 2.                                      B. 4.                                      C. 3.                                      D. -1.

**Lời giải**

Ta có  $y = 2 \sin 2x + 1$ .

Do  $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \sin 2x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2 \sin 2x + 1 \leq 3$ .

$\Rightarrow -1 \leq y \leq 3$ .

$$* y = -1 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$* y = 3 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng  $M = 3$ , giá trị nhỏ nhất bằng  $m = -1$ .

Suy ra:  $M + m = 2$ .

**Câu 125:** Tập giá trị của hàm số  $y = 3 \sin 3x + 2$  là

- A.  $\mathbb{R}$ . B.  $(0; +\infty)$ . C.  $[-1; 5]$ . D.  $[-7; 11]$ .

**Lời giải**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ , ta có:  $-1 \leq \sin 3x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 3 \sin 3x + 2 \leq 5 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 5 \Leftrightarrow y \in [-1; 5]$

**Câu 126:** Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = 3 \sin 2x - 5$  lần lượt là:

- A. 8; 2. B. -2; -8. C. 2; -5. D. 3; -5.

**Lời giải**

Ta có:  $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3 \sin 2x \leq 3 \Leftrightarrow -8 \leq 3 \sin 2x - 5 \leq -2$

Vậy giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số lần lượt là -2 và -8.

**Câu 127:** Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số là  $y = 2 - \sin x$  là

- A. 1 và 3. B. 4 và -4. C. 2 và 4. D. 3 và 1.

**Lời giải**

Ta có  $-1 \leq -\sin x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 - \sin x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 3$ .

Suy ra,  $\max_{\mathbb{R}} y = 3$  khi  $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

$\min_{\mathbb{R}} y = 1$  khi  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 128:** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 6 \cos 2x - 7$  trên đoạn

$\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$ . Tính  $M + m$ .

- A. -14. B. 3. C. -11. D. -10.

**Lời giải**

Ta có:  $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow -10 \leq 6 \cos 2x - 7 \leq -1$ .

Suy ra  $M = -1, m = -10$ . Vậy  $M + m = -11$ .

**Câu 129:** Tập giá trị của hàm số  $y = \sin 4x - 3$  là:

- A.**  $[-4; -2]$ .      **B.**  $[-3; 1]$ .      **C.**  $[-2; 2]$ .      **D.**  $[-4; 2]$ .

**Lời giải**

Do  $-1 \leq \sin 4x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$  nên  $-4 \leq \sin 4x - 3 \leq -2, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Vậy tập giá trị của hàm số là  $[-4; -2]$ .

**Câu 130:** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2 \sin^2 x + 3 \sin 2x - 4 \cos^2 x$ .

- A.**  $\min y = -3\sqrt{2} - 1; \max y = 3\sqrt{2} + 1$ .      **B.**  $\min y = -3\sqrt{2} - 2; \max y = 3\sqrt{2} - 1$ .  
**C.**  $\min y = -3\sqrt{2}; \max y = 3\sqrt{2} - 1$ .      **D.**  $\min y = -3\sqrt{2} - 1; \max y = 3\sqrt{2} - 1$ .

**Lời giải**

Ta có:  $y = 1 - \cos 2x + 3 \sin 2x - 2(1 + \cos 2x) = 3 \sin 2x - 3 \cos 2x - 1 = 3\sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ .

$\Rightarrow -3\sqrt{2} - 1 \leq y \leq 3\sqrt{2} - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Vậy  $\min y = -3\sqrt{2} - 1; \max y = 3\sqrt{2} - 1$ .

**Câu 131:** Tập giá trị của hàm số  $y = \sin 4x - 3$  là:

- A.**  $[-4; -2]$ .      **B.**  $[-3; 1]$ .      **C.**  $[-2; 2]$ .      **D.**  $[-4; 2]$ .

**Lời giải**

Do  $-1 \leq \sin 4x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$  nên  $-4 \leq \sin 4x - 3 \leq -2, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Vậy tập giá trị của hàm số là  $[-4; -2]$ .

**Câu 132:** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3 \sin x + 4 \cos x - 1$ .

- A.**  $\max y = 4, \min y = -6$ .      **B.**  $\max y = 8, \min y = -6$ .  
**C.**  $\max y = 6, \min y = -4$ .      **D.**  $\max y = 6, \min y = -8$ .

**Lời giải**

Ta có:  $y = 5\left(\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x\right) - 1 = 5 \sin(x + \alpha) - 1$ .

Trong đó  $\alpha$  thỏa mãn  $\cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}$ .

Khi đó, do  $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$ , nên  $-6 \leq 5 \sin(x + \alpha) - 1 \leq 4 \Leftrightarrow -6 \leq y \leq 4$ .

Vậy  $\max y = 4, \min y = -6$ .

**Câu 133:** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x + 1$ .

- A.**  $\min y = -1 + \sqrt{3}; \max y = 3 + \sqrt{3}$ .      **B.**  $\min y = 0; \max y = 4$ .  
**C.**  $\min y = -4; \max y = 0$ .      **D.**  $\min y = 1 - \sqrt{3}; \max y = 3 + \sqrt{3}$ .

**Lời giải**

$$y = 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x + 1 = \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x + 2 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) + 2$$

Ta có:  $0 \leq 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) + 2 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4$

$\min y = 0$  khi  $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} - k\pi, k \in \mathbb{Z};$

$\max y = 4$  khi  $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} - k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy  $\min y = 0; \max y = 4.$

**Câu 134:** Tập giá trị  $T$  của hàm số  $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x$  là

**A.**  $T = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}].$       **B.**  $T = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$       **C.**  $T = [-1; 1].$       **D.**  $T = [-2; 2].$

**Lời giải**

Ta có  $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x = -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin \frac{\pi}{6} = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$  Do đó  $T = [-1; 1].$

**Câu 135:** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2 \sin^2 x - 2 \sin^4 x - 2 \sin 2x + 1$  là

**A.** 4.      **B.**  $\frac{5}{2}.$       **C.**  $-\frac{3}{2}.$       **D.** 3.

**Lời giải**

$$y = 2 \sin^2 x - 2 \sin^4 x - 2 \sin 2x + 1.$$

$$= 2 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) - 2 \sin 2x + 1$$

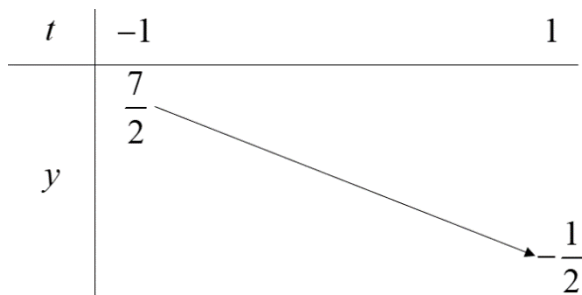
$$= 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x - 2 \sin 2x + 1$$

$$= \frac{\sin^2 2x}{2} - 2 \sin 2x + 1$$

Đặt  $t = \sin 2x, (-1 \leq t \leq 1) \Rightarrow y = \frac{t^2}{2} - 2t + 1.$

Xét hàm số:  $y = \frac{t^2}{2} - 2t + 1, (-1 \leq t \leq 1)$  có đồ thị là một phần của Parabol, đỉnh  $I(2; -1).$

Ta có bảng biến thiên sau:



Vậy  $\min y = -\frac{1}{2}$ ;  $\max y = \frac{7}{2} \Rightarrow \min y + \max y = 3$ .

**Câu 136:** Gọi  $M$ ,  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \cos 2x + 4 \cos x + 1$ . Khi đó  $M - m$  bằng

- A. 2.                      B. 8.                      C. 4.                      D. -8.

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y &= \cos 2x + 4 \cos x + 1 = 2 \cos^2 x - 1 + 4 \cos x + 1 = 2(\cos^2 x + 2 \cos x) \\ &= 2(\cos x + 1)^2 - 2 \end{aligned}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (\cos x + 1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq 2(\cos x + 1)^2 \leq 8$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2(\cos x + 1)^2 - 2 \leq 6$$

Suy ra:  $M = 6$ ;  $m = -2$  nên  $M - m = 8$

**Câu 137:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \cos^2 x + \sin x + 9$  trên đoạn  $[0; \pi]$  bằng

- A.  $\frac{41}{4}$ .                      B. 10.                      C.  $\frac{21}{2}$ .                      D.  $\frac{39}{4}$ .

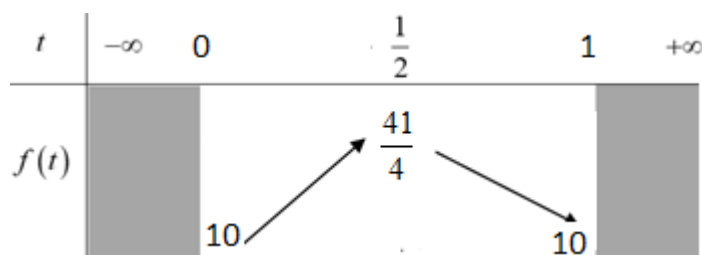
**Lời giải**

$$\text{Ta có } y = \cos^2 x + \sin x + 9 \Leftrightarrow y = 1 - \sin^2 x + \sin x + 9 \Leftrightarrow y = -\sin^2 x + \sin x + 10.$$

Đặt  $t = \sin x$ , khi đó với  $\forall x \in [0; \pi] \Rightarrow t \in [0; 1]$ .

Xét hàm số  $f(t) = -t^2 + t + 10$ ,  $t \in [0; 1]$ , đồ thị hàm số là Parabol có tọa độ đỉnh  $I\left(\frac{1}{2}; \frac{41}{4}\right)$ .

Ta có bảng biến thiên của hàm số trên  $[0; 1]$ .



$$\text{Vậy } \max_{[0; \pi]} y = \max_{[0; 1]} f(t) = \frac{41}{4}.$$

**Câu 138:** Gọi  $m$  là giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 4 \cos 2x - 1$  trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$ . Tìm  $m$ .

A. -5.

B. 3.

C. -1.

**D. -3.**

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 4 \cos 2x - 1 \leq 3.$$

Vậy  $m = -3$ .

**Câu 139:** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sin^2 x - \cos x + 2$

A. 3.

**B.  $\frac{13}{4}$ .**

C.  $\frac{7}{4}$ .

D. 1.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } y = \sin^2 x - \cos x + 2 = -\cos^2 x - \cos x + 3$$

$$\text{Đặt } t = \cos x, t \in [-1; 1]. \text{ Khi đó } y = f(t) = -t^2 - t + 3.$$

Bảng biến thiên hàm số  $f(t)$  trên  $[-1; 1]$ :

|        |    |                |   |
|--------|----|----------------|---|
| $t$    | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 1 |
| $f(t)$ | 3  | $\frac{13}{4}$ | 1 |

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là  $\frac{13}{4}$  khi  $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ .

**Câu 140:** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2 \cos^2 x - \sin x + 3$ .

A.  $\min y = 4; \max y = \frac{41}{8}$ .

B.  $\min y = 2; \max y = 4$ .

C.  $\min y = -\frac{41}{8}; \max y = 2$ .

**D.  $\min y = 2; \max y = \frac{41}{8}$ .**

**Lời giải**

$$\text{Ta có } y = 2 \cos^2 x - \sin x + 3 \Leftrightarrow y = 2 - 2 \sin^2 x - \sin x + 3 \Leftrightarrow y = -2 \sin^2 x - \sin x + 5$$

$$\text{Đặt } t = \sin x, \text{ ĐK: } t \in [-1; 1], \text{ khi đó hàm số có dạng } y = -2t^2 - t + 5, \text{ với } t \in [-1; 1]$$

$$\text{Ta có } -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot (-2)} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{bảng biến thiên sau}$$

|                     |    |                |   |
|---------------------|----|----------------|---|
| $t$                 | -1 | $-\frac{1}{4}$ | 1 |
| $y = -2t^2 - t + 5$ | 4  | $\frac{41}{8}$ | 2 |

Từ bảng biến thiên suy ra  $\min_{[-1;1]} y = 2 \Leftrightarrow \sin x = 1$  và  $\max_{[-1;1]} y = \frac{41}{8} \Leftrightarrow \sin x = \frac{-1}{4}$

**Câu 141:** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin 2021x + \sqrt{3}\cos 2021x$ .

Tích  $M.m$  bằng

**A.** -4.

**B.** -2.

**C.** -9.

**D.** -1.

**Lời giải**

Ta có

$$y^2 = (\sin 2021x + \sqrt{3}\cos 2021x)^2 \leq (1^2 + \sqrt{3}^2)(\sin^2 2021x + \cos^2 2021x)$$

$$\Rightarrow y^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 2$$

$$\Rightarrow \min y = -2 = m, \max y = 2 = M \Rightarrow M.m = -4$$

**Câu 142:** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2\cos^2 x + 5\sin x + 1$

trên  $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ . Khi đó  $M - m$  bằng bao nhiêu?

**A.**  $M - m = 1$ .

**B.**  $M - m = 11$ .

**C.**  $M - m = \frac{1}{2}$ .

**D.**  $M - m = 6$ .

**Lời giải**

Ta có  $y = 2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x + 1 = -2\sin^2 x + 5\sin x + 3$  Ta được  $y = -2\sin^2 x + 5\sin x + 3$ .

Đặt  $t = \sin x$ . Với  $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$  ta có  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ .

Khi đó ta có  $y = f(t) = -2t^2 + 5t + 3, \frac{1}{2} \leq t \leq 1$ .

Ta có bảng biến thiên:

|        |  |               |   |  |
|--------|--|---------------|---|--|
| $t$    |  | $\frac{1}{2}$ | 1 |  |
| $f(t)$ |  | 5             | 6 |  |

Từ bảng biến thiên ta có:

Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên  $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$  là  $M = 6$  khi  $t = 1$  hay  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên  $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$  là  $m = 5$  khi  $t = \frac{1}{2}$  hay  $x = \frac{5\pi}{6}$ .

Vậy  $M - m = 1$ .

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN



### LÝ THUYẾT.

#### I. KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG



Hai phương trình (cùng ẩn) được gọi là *tương đương* nếu chúng có cùng tập nghiệm.



Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương.

- Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hoặc cùng một biểu thức;
- Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

#### II. PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = m$ (1).

+ Trường hợp  $|m| > 1$ , phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp  $|m| \leq 1$ , tồn tại duy nhất một số  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  thỏa mãn  $\sin \alpha = m$ . Ta có

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu số thực  $\alpha$  thỏa mãn:  $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin \alpha = m \end{cases}$  thì ta viết  $\alpha = \arcsin m$ . Ta có

$$\sin x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

**Chú ý:**

+ Một số trường hợp đặc biệt

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$+ \text{ Phương trình } \sin x = \sin \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k.360^\circ \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Trong một công thức về nghiệm của phương trình lượng giác, không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.

### III. PHƯƠNG TRÌNH $\cos x = m$ (1).

+ Trường hợp  $|m| > 1$  phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp  $|m| \leq 1$ , khi đó: Tồn tại duy nhất một số thực  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  sao cho  $\cos \alpha = m$ .

Ta có

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

.Nếu số thực  $a$  thỏa mãn:  $\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq \pi \\ \cos \alpha = a \end{cases}$  thì ta viết  $\alpha = \arccos a$ . Ta có:

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

**Chú ý:**

+ Một số trường hợp đặc biệt

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi; (k \in \mathbb{Z})$$

$$+ \text{ Phương trình } \cos x = \cos \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k.360^\circ \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Trong một công thức nghiệm về nghiệm của phương trình lượng giác, không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.

IV. PHƯƠNG TRÌNH  $\tan x = m$  (1) VÀ  $\cot x = m$  (2).



LÝ THUYẾT.

|                       | $\tan x = m$ (1)                                                                                                                                                                                                      | $\cot x = m$ (2)                                                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Điều kiện             | $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$                                                                                                                                                                  | $x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$                                                                                                                                                                                                  |
| Tổng quát             | Tồn tại một số $\alpha$ sao cho $m = \tan \alpha$<br>(1) $\Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )                                                              | Tồn tại một số $\alpha$ sao cho $m = \cot \alpha$<br>(2) $\Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )                                                                              |
| Chú ý 1:<br>Đặc biệt: | $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi; (k \in \mathbb{Z})$<br>$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$<br>$\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$ | $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$<br>$\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$<br>$\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$ |
| Chú ý 2:              | Số thực $\alpha$ thỏa mãn: $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \tan \alpha = m \end{cases}$ ta viết<br>$\alpha = \arctan m$ .<br>(1) $\Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi, k \in \mathbb{Z}$   | Số thực $\alpha$ thỏa mãn: $\begin{cases} 0 < \alpha < \pi \\ \cot \alpha = m \end{cases}$ ta viết<br>$\alpha = \operatorname{arccot} m$ .<br>(2) $\Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi, k \in \mathbb{Z}$              |
| Chú ý 3:              | $\tan x = \tan \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )                                                                                                                      | $\cot x = \cot \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )                                                                                                                                      |

**Chú ý 4 :** Trong một công thức nghiệm về phương trình lượng giác, không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: PHƯƠNG TRÌNH  $\sin x = m$

**Câu 1:** Giải các phương trình sau

a.  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b.  $\sin x = \frac{1}{4}$ .

c.  $\sin(x - 60^\circ)$ .

d.  $\sin x = 1$ .

e.  $\sin 3x = -\frac{4}{3}$ .

f.  $\sin(2019x + 2020) = 2$ .

g.  $\sin 3x = \frac{1}{2}$ .

h.  $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

i.  $2 \sin(3x + 1) = 1$ .

j.  $\sin\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0$ .

k.  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ .

l.  $\sin^2 3x = \frac{3}{4}$ . m.  $\sin 2x - \cos x = 0$ .

n.  $\sin 3x + \sin x = 0$ . o.  $\sin x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

**Câu 2:** Tìm nghiệm của phương trình  $\sin x = -\frac{1}{2}$  trên khoảng  $(0; \pi)$ .

**Câu 3:** Tìm nghiệm của phương trình  $2\sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$  trên khoảng  $(-180^\circ; 180^\circ)$ .

**Câu 4:** Tìm nghiệm của phương trình  $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$  trên đoạn  $[2\pi; 4\pi]$ .

**DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH  $\cos x = m$  (1).**

**Câu 5:** Giải các phương trình sau

a.  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . b.  $\cos(x - 2) = \frac{2}{5}$ .

c.  $\cos(2x + 50^\circ) = \frac{1}{2}$ . d.  $(1 + 2\cos x)(3 - \cos x) = 0$ .

e.  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ . f.  $2\cos x = -1$ .

g.  $2019 \cdot \cos(x + 30^\circ) = 2020$ . h.  $\cos(3x + 10^\circ) = -1$ .

i.  $\sin 3x - \cos 2x = 0$ . j.  $\cos(\cos(x + 2)) = 1$ .

**Câu 6:** Phương trình  $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$  có bao nhiêu nghiệm thỏa mãn  $0 \leq x \leq 2\pi$ ?

**DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH  $\tan x = m$  (1) VÀ  $\cot x = m$  (2).**

**Câu 7:** Giải các phương trình sau

a.  $\tan 2x = \tan \frac{2\pi}{7}$ . b.  $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{3}$ .

c.  $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ . d.  $\tan^2 x = 1$ .

e.  $\tan 2x = 0$ . f.  $\cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ .

g.  $\left(\cot \frac{x}{2} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0$ . h.  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

i.  $\tan(x - 30^\circ) \cdot \cos(2x - 150^\circ) = 0$ . j.  $(3\tan x + \sqrt{3})(2\sin x - 1) = 0$ .

k.  $\tan x \cdot \tan 2x = -1$ . l.  $\tan 4x \cdot \cot 2x = 1$ .

m.  $\sin 2x \cdot \cot x = 0$ .

**Câu 8:** Tìm số nghiệm của phương trình  $\tan x = \tan \frac{3\pi}{11}$  trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$ .



### BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP.

**Câu 9:** Giải phương trình  $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

**Câu 10:** Giải phương trình  $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

**Câu 11:** Giải phương trình  $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$

**Câu 12:** Giải phương trình  $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0$

**Câu 13:** Giải phương trình  $3 - \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$  với  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$

**Câu 14:** Giải phương trình  $\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = 0$ .

**Câu 15:** Giải phương trình  $\left(\cot \frac{x}{3} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0$  (1)

**Câu 16:** Giải phương trình  $\tan(x - 30^\circ) \cos(2x - 150^\circ) = 0$  (1)

**Câu 17:** Giải phương trình  $(3 \tan x + \sqrt{3})(2 \sin x - 1) = 0$  (1).

**Câu 18:** Giải phương trình  $\cos 2x \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$  (1)

**Câu 19:**  $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  (\*) (CĐ CNTP khối A\_2007)

**Câu 20:**  $\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$  (ĐH D-2011)

**Câu 21:**  $\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$  (\*) (ĐH A-2009)

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN



### LÝ THUYẾT.

#### I. KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG



Hai phương trình (cùng ẩn) được gọi là *tương đương* nếu chúng có cùng tập nghiệm.



Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương.

- Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hoặc cùng một biểu thức;
- Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

#### II. PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = m$ (1).

+ Trường hợp  $|m| > 1$ , phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp  $|m| \leq 1$ , tồn tại duy nhất một số  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  thỏa mãn  $\sin \alpha = m$ . Ta có

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu số thực  $\alpha$  thỏa mãn:  $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin \alpha = m \end{cases}$  thì ta viết  $\alpha = \arcsin m$ . Ta có

$$\sin x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

**Chú ý:**

+ Một số trường hợp đặc biệt

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$+ \text{ Phương trình } \sin x = \sin \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k.360^\circ \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Trong một công thức về nghiệm của phương trình lượng giác, không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.

### III. PHƯƠNG TRÌNH $\cos x = m$ (1).

+ Trường hợp  $|m| > 1$  phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp  $|m| \leq 1$ , khi đó: Tồn tại duy nhất một số thực  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  sao cho  $\cos \alpha = m$ .

Ta có

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

.Nếu số thực  $a$  thỏa mãn:  $\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq \pi \\ \cos \alpha = a \end{cases}$  thì ta viết  $\alpha = \arccos a$ . Ta có:

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

#### **Chú ý:**

+ Một số trường hợp đặc biệt

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi; (k \in \mathbb{Z})$$

$$+ \text{ Phương trình } \cos x = \cos \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k.360^\circ \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Trong một công thức nghiệm về nghiệm của phương trình lượng giác, không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.

IV. PHƯƠNG TRÌNH  $\tan x = m$  (1) VÀ  $\cot x = m$  (2).



LÝ THUYẾT.

|                       | $\tan x = m$ (1)                                                                                                                                                                                                      | $\cot x = m$ (2)                                                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Điều kiện             | $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$                                                                                                                                                                  | $x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$                                                                                                                                                                                                  |
| Tổng quát             | Tồn tại một số $\alpha$ sao cho $m = \tan \alpha$<br>(1) $\Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )                                                              | Tồn tại một số $\alpha$ sao cho $m = \cot \alpha$<br>(2) $\Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )                                                                              |
| Chú ý 1:<br>Đặc biệt: | $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi; (k \in \mathbb{Z})$<br>$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$<br>$\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$ | $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$<br>$\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$<br>$\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$ |
| Chú ý 2:              | Số thực $\alpha$ thỏa mãn: $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \tan \alpha = m \end{cases}$ ta viết<br>$\alpha = \arctan m$ .<br>(1) $\Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi, k \in \mathbb{Z}$   | Số thực $\alpha$ thỏa mãn: $\begin{cases} 0 < \alpha < \pi \\ \cot \alpha = m \end{cases}$ ta viết<br>$\alpha = \operatorname{arccot} m$ .<br>(2) $\Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi, k \in \mathbb{Z}$              |
| Chú ý 3:              | $\tan x = \tan \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )                                                                                                                      | $\cot x = \cot \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )                                                                                                                                      |

**Chú ý 4 :** Trong một công thức nghiệm về phương trình lượng giác, không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: PHƯƠNG TRÌNH  $\sin x = m$

**Câu 1:** Giải các phương trình sau

a.  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b.  $\sin x = \frac{1}{4}$ .

c.  $\sin(x - 60^\circ)$ .

d.  $\sin x = 1$ .

e.  $\sin 3x = -\frac{4}{3}$ .

f.  $\sin(2019x + 2020) = 2$ .

g.  $\sin 3x = \frac{1}{2}$ .

h.  $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

i.  $2 \sin(3x + 1) = 1$ .

j.  $\sin\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0$ .

k.  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ .

l.  $\sin^2 3x = \frac{3}{4}$ .

m.  $\sin 2x - \cos x = 0$ .

n.  $\sin 3x + \sin x = 0$ .

o.  $\sin x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

**Lời giải**

a.  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

b.  $\sin x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

c.  $\sin(x - 60^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x - 60^\circ) = \sin 30^\circ$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 60^\circ = 30^\circ + k360^\circ \\ x - 60^\circ = 150^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + k360^\circ \\ x = 210^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

d.  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

e. Ta có  $\sin 3x \in [-1; 1] \Rightarrow \sin 3x = -\frac{4}{3}$  vô nghiệm.

f. Ta có:  $\sin(2019x + 2020) \in [-1; 1] \Rightarrow \sin(2019x + 2020) = 2$  vô nghiệm

g.  $\sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

h.  $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{x}{2} = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4\pi}{3} + k4\pi \\ x = 2\pi + k4\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

i.  $2\sin(3x + 1) = 1 \Leftrightarrow \sin(3x + 1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(3x + 1) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x + 1 = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} - 1 + k2\pi \\ 3x = \frac{5\pi}{6} - 1 + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} - \frac{1}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$j. \sin \left[ \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \right] = 0 \Leftrightarrow \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì  $\sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \in [-1; 1]$  và  $k \in \mathbb{Z}$  nên ta có  $k = 0$ .

$$\Rightarrow \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$k. \text{ Ta có } \sin \left( 2x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{2} = x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{2} = \pi - \left( x - \frac{\pi}{3} \right) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$l. \text{ Ta có } \sin^2 3x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$m. \text{ Ta có } \sin 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x = \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$n. \text{ Ta có } \sin 3x + \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = -\sin x \Leftrightarrow \sin 3x = \sin(-x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -x + k2\pi \\ 3x = \pi + x + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

o. Ta có  $\sin x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} - 2x + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 2:** Tìm nghiệm của phương trình  $\sin x = -\frac{1}{2}$  trên khoảng  $(0; \pi)$ .

**Lời giải**

Ta có  $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Theo đề bài:

$$0 < -\frac{\pi}{6} + k2\pi < \pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} < k < \frac{7}{12} \Rightarrow \text{không tồn tại } k.$$

$$0 < \frac{7\pi}{6} + k2\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{7}{12} < k < -\frac{1}{12} \Rightarrow \text{không tồn tại } k.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

**Câu 3:** Tìm nghiệm của phương trình  $2\sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$  trên khoảng  $(-180^\circ; 180^\circ)$ .

**Lời giải**

Ta có

$$2\sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(x + 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 40^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ x + 40^\circ = 120^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20^\circ + k360^\circ \\ x = 80^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Theo đề bài:

$$-180^\circ < 20^\circ + k360^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{5}{9} < k < \frac{4}{9} \Rightarrow k = 0.$$

$$-180^\circ < 80^\circ + k360^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{13}{18} < k < \frac{5}{18} \Rightarrow k = 0.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm  $x = 20^\circ$  và  $x = 80^\circ$ .

**Câu 4:** Tìm nghiệm của phương trình  $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$  trên đoạn  $[2\pi; 4\pi]$ .

**Lời giải**

Điều kiện:  $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + l2\pi (l \in \mathbb{Z})$

Khi đó

$$\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = k \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Kết hợp điều kiện ta được: } \begin{cases} x = m2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + m\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + m\pi \end{cases} (m \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vì } x \in [2\pi; 4\pi] \text{ nên } x \in \left\{ 2\pi; \frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3} \right\}.$$

**DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH  $\cos x = m$  (1).**

**Câu 5:** Giải các phương trình sau

a.  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . b.  $\cos(x - 2) = \frac{2}{5}$ .

c.  $\cos(2x + 50^\circ) = \frac{1}{2}$ . d.  $(1 + 2\cos x)(3 - \cos x) = 0$ .

e.  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ . f.  $2\cos x = -1$ .

g.  $2019 \cdot \cos(x + 30^\circ) = 2020$ . h.  $\cos(3x + 10^\circ) = -1$ .

i.  $\sin 3x - \cos 2x = 0$ . j.  $\cos(\cos(x + 2)) = 1$ .

**Lời giải**

a. Ta có  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{6} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{-7\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

b. Ta có  $\cos(x - 2) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x - 2 = \pm \arccos\left(\frac{2}{5}\right) + k2\pi$

$$\Leftrightarrow x = \pm \arccos\left(\frac{2}{5}\right) + 2 + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

c. Ta có  $\cos(2x + 50^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x + 50^\circ) = \cos 60^\circ$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 50^\circ = 60^\circ + k.360^\circ \\ 2x + 50^\circ = -60^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5^\circ + k.180^\circ \\ x = -55^\circ + k.180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

d. Ta có  $(1 + 2\cos x)(3 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\cos x = 0 \\ 3 - \cos x = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

e. Ta có  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{6} = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$

f. Ta có  $2\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

g. Ta có  $2019.\cos(x + 30^\circ) = 2020 \Leftrightarrow \cos(x + 30^\circ) = \frac{2020}{2019} > 1$  ( vô nghiệm).

h. Ta có  $\cos(3x + 10^\circ) = -1 \Leftrightarrow 3x + 10^\circ = 180^\circ + k.360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{170^\circ}{3} + k.120^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$

i. Ta có  $\sin 3x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 3x = \frac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

j. Ta có  $\cos[\cos(x + 2)] = 1 \Leftrightarrow \cos(x + 2) = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Vì:  $-1 \leq \cos(x + 2) \leq 1$  nên  $k = 0$ .

Khi đó:

$$\cos(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = \frac{\pi}{2} + m\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2 + m\pi, \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 6:** Phương trình  $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$  có bao nhiêu nghiệm thỏa mãn  $0 \leq x \leq 2\pi$ ?

**Lời giải**

Ta có  $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Với  $0 \leq x \leq 2\pi$  ta có

$$\begin{cases} 0 \leq -\frac{\pi}{12} + k2\pi \leq 2\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{24} \leq k \leq \frac{25}{24} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k = 1 \text{ nghiệm là } x = \frac{23\pi}{12}.$$

$$\begin{cases} 0 \leq -\frac{7\pi}{12} + k2\pi \leq 2\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{24} \leq k \leq \frac{31}{24} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow x = \frac{17\pi}{12}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

### DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH $\tan x = m$ (1) VÀ $\cot x = m$ (2).

**Câu 7:** Giải các phương trình sau

a.  $\tan 2x = \tan \frac{2\pi}{7}$ .

b.  $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{3}$ .

c.  $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

d.  $\tan^2 x = 1$ .

e.  $\tan 2x = 0$ .

f.  $\cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ .

g.  $\left(\cot \frac{x}{2} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0$ .

h.  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

i.  $\tan(x - 30^\circ) \cdot \cos(2x - 150^\circ) = 0$ . j.  $(3\tan x + \sqrt{3})(2\sin x - 1) = 0$ .

k.  $\tan x \cdot \tan 2x = -1$ .

l.  $\tan 4x \cdot \cot 2x = 1$ .

m.  $\sin 2x \cdot \cot x = 0$ .

#### Lời giải

a. Ta có  $\tan 2x = \tan \frac{2\pi}{7} \Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{7} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

b. Ta có  $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

c. Ta có  $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan(3x - 30^\circ) = \tan(-30^\circ)$

$$\Leftrightarrow 3x - 30^\circ = -30^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = k60^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

d. Ta có  $\tan^2 x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

e. Ta có  $\tan 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

f. Ta có  $\cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cot\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ .

g. Điều kiện:  $\sin\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq l\pi \Leftrightarrow x \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \left(\cot\frac{x}{2} - 1\right)\left(\cot\frac{x}{2} + 1\right) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cot\frac{x}{2} = 1 \\ \cot\frac{x}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} (TM). \end{aligned}$$

h. Ta có

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \cot x - 2\cot x = 1 \Leftrightarrow \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm  $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

i. Điều kiện  $\cos(x - 30^\circ) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 120^\circ + l180^\circ, l \in \mathbb{Z}$ .

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \tan(x - 30^\circ)\cos(2x - 150^\circ) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan(x - 30^\circ) = 0 \\ \cos(2x - 150^\circ) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 30^\circ = k180^\circ \\ 2x - 150^\circ = 90^\circ + k180^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + k180^\circ \\ x = 120^\circ + k90^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện, phương trình đã cho có tập nghiệm  $S = \{30^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ .

j. Điều kiện  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in \mathbb{Z}$ .

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3\tan x + \sqrt{3} = 0 \\ 2\sin x - 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện, phương trình đã cho có tập nghiệm  $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

k. Điều kiện  $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2} \end{cases}, l \in \mathbb{Z}.$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$\tan 2x = -\frac{1}{\tan x} \Leftrightarrow \tan 2x = -\cot x \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

So sánh với điều kiện, phương trình đã cho vô nghiệm.

l. Điều kiện  $\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq l\frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{8} + l\frac{\pi}{4} \end{cases}, l \in \mathbb{Z}.$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$\tan 4x = \frac{1}{\cot 2x} \Leftrightarrow 4x = 2x + k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

So sánh với điều kiện, phương trình đã cho vô nghiệm.

m. Điều kiện:  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq l\pi, l \in \mathbb{Z}.$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$2 \sin x \cos x \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

So sánh với điều kiện, phương trình đã cho có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 8:** Tìm số nghiệm của phương trình  $\tan x = \tan \frac{3\pi}{11}$  trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$ .

**Lời giải**

Ta có  $\tan x = \tan \frac{3\pi}{11} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{11} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Với  $x \in \left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$ , ta có  $\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{11} + k\pi < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{44} < k < \frac{19}{11}$  suy ra  $k \in \{0; 1\}.$

Vậy trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$ , phương trình đã cho có hai nghiệm.



## BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP.

**Câu 9:** Giải phương trình  $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

**Giải:**

$$\text{Ta có: } \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 10:** Giải phương trình  $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

**Giải:**

$$\text{Ta có } \tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan(3x - 30^\circ) = \tan(-30^\circ) \Leftrightarrow x = k60^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm  $x = k60^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 11:** Giải phương trình  $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$

**Giải:**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \\ \frac{\pi}{3} - x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{2} \\ x \neq -\frac{\pi}{6} - m\pi \end{cases}, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3} + x\right) \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp với điều kiện ta suy ra phương trình có một họ nghiệm  $x = \frac{-\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 12:** Giải phương trình  $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0$

**Giải:**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \\ \frac{\pi}{3} + x \neq m\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{2\pi}{3} + m\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{3} + m\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{3} + m\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 13:** Giải phương trình  $3 - \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$  với  $\frac{-\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$

**Giải:**

Phương trình tương đương với  $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Với } \frac{-\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{-\pi}{4} < \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{-7\pi}{12} < \frac{k\pi}{2} < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{-7}{6} < k < \frac{2}{3}$$

Do  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k \in \{-1; 0\}$ .

Với  $k = -1$  thì  $x = \frac{-\pi}{6}$ , với  $k = 0$  thì  $x = \frac{\pi}{3}$ .

Vậy  $x = \frac{-\pi}{6}$  và  $x = \frac{\pi}{3}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 14:** Giải phương trình  $\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = 0$ .

**Đáp số**  $x = \frac{-\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 15:** Giải phương trình  $\left(\cot \frac{x}{3} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0$  (1)

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin \frac{x}{3} \neq 0 \\ \sin \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} \neq k\pi \\ \frac{x}{2} \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k3\pi \\ x \neq k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cot \frac{x}{3} - 1 = 0 \\ \cot \frac{x}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot \frac{x}{3} = 1 \\ \cot \frac{x}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k3\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện các nghiệm này thỏa.

Vậy phương trình có nghiệm:  $x = \frac{3\pi}{4} + k3\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 16:** Giải phương trình  $\tan(x - 30^\circ)\cos(2x - 150^\circ) = 0$  (1)

Điều kiện:  $\cos(x - 30^\circ) \neq 0 \Leftrightarrow x - 30^\circ \neq 90^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x \neq 120^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$ .

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \tan(x - 30^\circ) = 0 \\ \cos(2x - 150^\circ) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 30^\circ = k180^\circ \\ 2x - 150^\circ = 90^\circ + k360^\circ \\ 2x - 150^\circ = -90^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + k180^\circ \\ x = 120^\circ + k180^\circ \\ x = 30^\circ + k180^\circ \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện nghiệm  $x = 120^\circ + k180^\circ$  loại.

Vậy phương trình có nghiệm:  $x = 30^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$

**Câu 17:** Giải phương trình  $(3 \tan x + \sqrt{3})(2 \sin x - 1) = 0$  (1).

Điều kiện  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \tan x + \sqrt{3} = 0 \\ 2 \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện các nghiệm này thỏa.

Vì tập các giá trị  $\left\{x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$  là tập con của tập các giá trị  $\left\{x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

Vậy phương trình có các nghiệm:  $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

**Câu 18:** Giải phương trình  $\cos 2x \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$  (1)

Điều kiện  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

**Câu 19:**  $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  (\*) (CĐ CNTP khối A\_2007)

Điều kiện:  $\cos x \neq 0, \sin x \neq 0$

Với điều kiện trên, (\*)  $\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x) = \sin 2x(\cos x + \sin x)$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

So với điều kiện, nghiệm của phương trình là:  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 20:**  $\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$  (ĐH D-2011)

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \tan x \neq -\sqrt{3} \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

Với điều kiện trên, phương trình  $\Leftrightarrow \sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + 2 \cos x - (\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

So với điều kiện, nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

**Câu 21:**  $\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3} \quad (*) \text{ (ĐH A-2009)}$

Điều kiện:  $\begin{cases} 1 + 2 \sin x \neq 0 \\ 1 - \sin x \neq 0 \end{cases} \quad (1)$

Với điều kiện trên,  $(*) \Leftrightarrow (1 - 2 \sin x) \cos x = \sqrt{3}(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3} \sin x = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x \Leftrightarrow \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -2x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp với điều kiện (1), nghiệm phương trình là  $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN



### HỆ THỐNG BÀI TRẮC NGHIỆM.

#### DẠNG 1. PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = m$

**Câu 1:** Phương trình  $2.\sin x - 1 = 0$  có tập nghiệm là

**A.**  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**B.**  $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**C.**  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**D.**  $S = \left\{ \frac{1}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 2:** Tất cả các nghiệm của phương trình  $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$  là

**A.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**B.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

**D.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 3:** Nghiệm của phương trình  $2 \sin x + 1 = 0$  là

**A.**  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi.$

**B.**  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi.$

**C.**  $x = \pi + k2\pi; x = \frac{\pi}{8} + k2\pi.$

**D.**  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$

**Câu 4:** Nghiệm của phương trình  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 1 = 0$  là

**A.**  $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**B.**  $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**C.**  $x = -\frac{7\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**D.**  $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 5:** Phương trình  $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$  có nghiệm là

**A.**  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

**B.**  $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k3\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$

**D.**  $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 6:** Nghiệm của phương trình  $\sin x = \sin(-2)$  là:

**A.**  $\begin{cases} x = -2 + k2\pi \\ x = 2 + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**B.**  $\begin{cases} x = -2 + k2\pi \\ x = \pi - 2 + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**C.**  $\begin{cases} x = -2 + k\pi \\ x = \pi - 2 + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**D.**  $\begin{cases} x = -2 + k2\pi \\ x = \pi + 2 + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 7:** Họ nghiệm của phương trình  $\sin x = \sin \frac{\pi}{5}$  là

**A.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = \frac{4\pi}{5} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$

**B.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{5} + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$

**C.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{5} + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$

**D.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{5} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$

**Câu 8:** Phương trình  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$  có nghiệm là

**A.**  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**B.**  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

**C.**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**D.**  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 9:** Tập nghiệm của phương trình  $\sin x = \sin \frac{5\pi}{3}$  là

**A.**  $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k2\pi; \frac{-2\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

**B.**  $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k2\pi; \frac{7\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**C.**  $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k2\pi; \frac{-5\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**D.**  $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k\pi; \frac{-2\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 10:** Phương trình  $\sin x = \sin 80^\circ$  có tập nghiệm là

**A.**  $S = \{80^\circ + k360^\circ, 100^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**B.**  $S = \{80^\circ + k360^\circ, -80^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**C.**  $S = \{40^\circ + k360^\circ, 140^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**D.**  $S = \{80^\circ + k180^\circ, 100^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**Câu 11:** Tập nghiệm của phương trình  $\sin 2x = -1$  là

**A.**  $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**B.**  $S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**C.**  $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**D.**  $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 12:** Họ nghiệm của phương trình  $\sin x = \frac{1}{2}$  là

**A.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**C.**  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**B.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**D.** 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{1}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 13:** Nghiệm của phương trình  $\sin \frac{x}{2} = 1$  là

**A.**  $x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}.$  **B.**  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$  **C.**  $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$  **D.**  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 14:** Phương trình  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$  có nghiệm là

**A.**  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi.$  **B.**  $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi.$  **C.**  $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$  **D.**  $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi.$

**Câu 15:** Tìm nghiệm của phương trình  $\sin 2x = 1.$

**A.**  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$  **B.**  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$  **C.**  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi.$  **D.**  $x = \frac{k\pi}{2}.$

**Câu 16:** Tìm nghiệm của phương trình  $2\sin x - 3 = 0.$

**A.**  $x \in \emptyset.$

**B.** 
$$\begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{3}{2}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{2}\right) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**C.** 
$$\begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{3}{2}\right) + k2\pi \\ x = -\arcsin\left(\frac{3}{2}\right) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**D.**  $x \in \mathbb{R}.$

**Câu 17:** Phương trình  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  có nghiệm là:

**A.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi.$

**B.**  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$

**C.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}.$$

**D.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}.$$

**Câu 18:** Tập nghiệm của phương trình  $\sin x = \sin 30^\circ$  là

**A.**  $S = \{30^\circ + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{150^\circ + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

**B.**  $S = \{\pm 30^\circ + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

**C.**  $S = \{\pm 30^\circ + k360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

**D.**  $S = \{30^\circ + 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{150^\circ + 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

**Câu 19:** Tìm tất cả các nghiệm của phương trình  $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1.$

**A.**  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$  **B.**  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

C.  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). D.  $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Câu 20:** Phương trình  $2\sin x - 1 = 0$  có tập nghiệm là:

A.  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . B.  $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

C.  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . D.  $S = \left\{ \frac{1}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 21:** Phương trình  $2\sin x + 1 = 0$  có nghiệm là:

A.  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$  B.  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$  C.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$  D.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{6} + k\pi \end{cases}$

**Câu 22:** Phương trình  $2\sin x - \sqrt{3} = 0$  có tập nghiệm là:

A.  $\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . B.  $\left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

C.  $\left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . D.  $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 23:** Tổng các nghiệm của phương trình  $2\sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$  trên khoảng  $(-180^\circ; 180^\circ)$  là

A.  $20^\circ$ . B.  $100^\circ$ . C.  $80^\circ$ . D.  $120^\circ$ .

**Câu 24:** Tìm tổng các nghiệm của phương trình  $\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  trên  $[0; \pi]$ .

A.  $\frac{47\pi}{18}$ . B.  $\frac{4\pi}{18}$ . C.  $\frac{45\pi}{18}$ . D.  $\frac{7\pi}{18}$ .

**Câu 25:** Số nghiệm phương trình  $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$  thuộc đoạn  $[2\pi; 4\pi]$  là

A. 7. B. 6. C. 4. D. 5.

**Câu 26:** Phương trình  $2\sin x + \sqrt{3} = 0$  có tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất bằng

A.  $\frac{4\pi}{3}$ . B.  $2\pi$ . C.  $\frac{\pi}{3}$ . D.  $\pi$ .

**Câu 27:** Với những giá trị nào của  $x$  thì giá trị của các hàm số  $y = \sin 3x$  và  $y = \sin x$  bằng nhau?

A.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). B.  $x = k\frac{\pi}{4}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

C.  $x = k\frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). D.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Câu 28:** Số nghiệm của phương trình  $\sin x = 0$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là

A. 1. B. 2. C. 0. D. Vô số.

**Câu 29:** Tập nghiệm của phương trình  $2\sin 2x + 1 = 0$  là

A.  $S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . B.  $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{7\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

C.  $S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + k2\pi, \frac{7\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 30:** Nghiệm của phương trình  $3 \sin\left(4x + \frac{1}{2}\right) - 1 = 0$  là:

A.  $\begin{cases} x = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \arcsin \frac{1}{3} + k \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \arcsin \frac{1}{3} + k \frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B.  $\begin{cases} x = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \arcsin \frac{1}{3} + k \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \arcsin \frac{1}{3} + k \frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C.  $\begin{cases} x = -\frac{1}{8} + k \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

D.  $\begin{cases} x = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \arcsin \frac{1}{3} + k \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \arcsin \frac{1}{3} + k \frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 31:** Tập nghiệm của phương trình  $\sin x = \sin(x - 60^\circ)$  là

B.  $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B.  $\left\{ \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C.  $\{120^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

D.  $\{60^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

**Câu 32:** Số nghiệm của phương trình  $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  trong khoảng  $(0; 3\pi)$  là

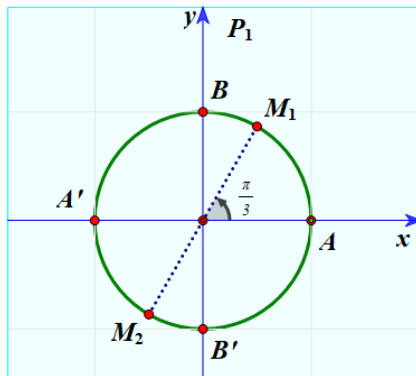
A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 6.

**Câu 33:** Cung lượng giác có điểm biểu diễn là  $M_1, M_2$  như hình vẽ là nghiệm của phương trình lượng giác nào sau đây?



A.  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$

B.  $\sin x = 0.$

C.  $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$

D.  $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0.$

**Câu 34:** Số nghiệm thuộc khoảng  $(0; 2\pi)$  của phương trình  $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin 2x = 0$  là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

**Câu 35:** Số nghiệm thực của phương trình  $2 \sin x - 1 = 0$  trên đoạn  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$  là:

A. 11.

B. 9.

C. 20.

D. 21.

**Câu 36:** Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$  trên đường tròn lượng giác là

A. 4.

B. 3.

C. 6.

D. 1.

**Câu 37:** Tập nghiệm của phương trình  $\sin(\pi x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi x\right)$  là:

- A.  $\left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . B.  $\left\{\frac{1}{12} + k, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . C.  $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . D.  $\left\{\frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Câu 38:** Phương trình  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

**Câu 39:** Số nghiệm của phương trình  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$  với  $\pi \leq x \leq 5\pi$  là

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

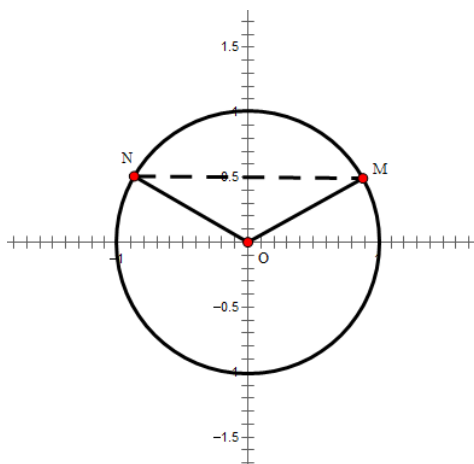
**Câu 40:** Có bao nhiêu nghiệm phương trình  $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  trong khoảng  $(0; \pi)$

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

**Câu 41:** Số nghiệm thuộc đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  của phương trình  $2\sin x = 1$  là

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

**Câu 42:** Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm biểu diễn trên đường tròn lượng giác là 2 điểm  $M, N$ ?



- A.  $2\sin 2x = 1$ . B.  $2\cos 2x = 1$ . C.  $2\sin x = 1$ . D.  $2\cos x = 1$ .

**Câu 43:** Cho phương trình  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ . Tính tổng các nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$  của phương trình trên.

- A.  $\frac{7\pi}{2}$ . B.  $\pi$ . C.  $\frac{3\pi}{2}$ . D.  $\frac{\pi}{4}$ .

**Câu 44:** Tìm số nghiệm của phương trình  $\sin(\cos 2x) = 0$  trên  $[0; 2\pi]$ .

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

**Câu 45:** Phương trình  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ?

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

**Câu 46:** Số nghiệm của phương trình  $2\sin x - \sqrt{3} = 0$  trên đoạn  $[0; 2\pi]$ .

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

**Câu 47:** Số nghiệm thực của phương trình  $2\sin x + 1 = 0$  trên đoạn  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$  là:

- A. 12.                      B. 11.                      C. 20.                      D. 21.

**Câu 48:** Phương trình  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$  có tổng các nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$  bằng

- A.  $\frac{7\pi}{2}$ .                      B.  $\pi$ .                      C.  $\frac{3\pi}{2}$ .                      D.  $\frac{\pi}{4}$ .

**Câu 49:** Tính tổng  $S$  của các nghiệm của phương trình  $\sin x = \frac{1}{2}$  trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

- A.  $S = \frac{5\pi}{6}$ .                      B.  $S = \frac{\pi}{3}$ .                      C.  $S = \frac{\pi}{2}$ .                      D.  $S = \frac{\pi}{6}$ .

**Câu 50:** Phương trình  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ?

- A. 3.                      B. 4.                      C. 1.                      D. 2.

**Câu 51:** Cho phương trình  $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ . Tổng các nghiệm thuộc  $[0; \pi]$  của phương trình là:

- A.  $\pi$ .                      B.  $\frac{\pi}{3}$ .                      C.  $\frac{2\pi}{3}$ .                      D.  $\frac{4\pi}{3}$ .

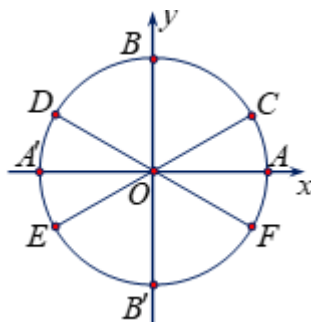
**Câu 52:** Phương trình  $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  có hai công thức nghiệm dạng  $\alpha + k\pi$ ,  $\beta + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) với  $\alpha$ ,  $\beta$  thuộc khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ . Khi đó,  $\alpha + \beta$  bằng

- A.  $\frac{\pi}{2}$ .                      B.  $-\frac{\pi}{2}$ .                      C.  $\pi$ .                      D.  $-\frac{\pi}{3}$ .

**Câu 53:** Tính tổng  $S$  của các nghiệm của phương trình  $\sin x = \frac{1}{2}$  trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

- A.  $S = \frac{5\pi}{6}$ .                      B.  $S = \frac{\pi}{3}$ .                      C.  $S = \frac{\pi}{2}$ .                      D.  $S = \frac{\pi}{6}$ .

**Câu 54:** Nghiệm của phương trình  $2\sin x + 1 = 0$  được biểu diễn trên đường tròn lượng giác ở hình bên là những điểm nào?



A. Điểm  $D$ , điểm  $C$ . B. Điểm  $E$ , điểm  $F$ . C. Điểm  $C$ , điểm  $F$ . D. Điểm  $E$ , điểm  $D$ .

**Câu 55:** Số nghiệm của phương trình  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$  thuộc đoạn  $[\pi; 2\pi]$  là:

A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

**Câu 56:** Phương trình  $2\sin x - 1 = 0$  có bao nhiêu nghiệm  $x \in (0; 2\pi)$ ?

A. 2 nghiệm. B. 1 nghiệm. C. 4 nghiệm. D. Vô số nghiệm.

**Câu 57:** Phương trình  $\sin 5x - \sin x = 0$  có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn  $[-2018\pi; 2018\pi]$ ?

A. 20179. B. 20181. C. 16144. D. 16145.

**Câu 58:** Số nghiệm thuộc đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  của phương trình  $2\sin x - 1 = 0$  là:

A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

**Câu 59:** Cho phương trình  $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ . Tổng các nghiệm thuộc  $[0; \pi]$  của phương trình là:

A.  $\frac{4\pi}{3}$ . B.  $\pi$ . C.  $\frac{\pi}{3}$ . D.  $\frac{2\pi}{3}$ .

**Câu 60:** Tính tổng  $S$  của các nghiệm của phương trình  $\sin x = \frac{1}{2}$  trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

A.  $S = \frac{\pi}{6}$ . B.  $S = \frac{\pi}{3}$ . C.  $S = \frac{\pi}{2}$ . D.  $S = \frac{5\pi}{6}$ .

**Câu 61:** Số nghiệm thực của phương trình  $2\sin x + 1 = 0$  trên đoạn  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$  là:

A. 12. B. 11. C. 20. D. 21.

**Câu 62:** Phương trình:  $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$  có mấy nghiệm thuộc khoảng  $(0; 3\pi)$ .

A. 8. B. 6. C. 2. D. 4.

**Câu 63:** Nghiệm của phương trình  $\sin 2x = \sin x$  là

A.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

C.  $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

D.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

## DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH $\cos x = m$

**Câu 64:** Nghiệm của phương trình  $\cos x = \frac{1}{2}$  là

A.  $x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi$ . B.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ . C.  $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$ . D.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$ .

**Câu 65:** Nghiệm của phương trình  $2\cos(x - 15^\circ) - 1 = 0$  là

A.  $\begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = 135^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B.  $\begin{cases} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = -60^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C.  $\begin{cases} x = 45^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

D.  $\begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 66:** Giải phương trình  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**A.**  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

**B.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

**D.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 67:** Nghiệm của phương trình  $\cos x = \cos \frac{\pi}{12}$  là

**A.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{11\pi}{12} + l2\pi \end{cases} \ (k, l \in \mathbb{Z}).$

**B.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + l2\pi \end{cases} \ (k, l \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

**D.**  $x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 68:** Nghiệm của phương trình  $\cos 2x = 0$  là

**A.**  $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$       **B.**  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$       **D.**  $x = k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 69:** Phương trình  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  có tập nghiệm là :

**A.**  $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**B.**  $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**C.**  $\left\{ x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**D.**  $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 70:** Phương trình  $\cos x = -\frac{1}{2}$  có các nghiệm là

**A.**  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$

**B.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$

**C.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$

**D.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 71:** Tập nghiệm của phương trình  $\cos 3x + \sin \frac{2\pi}{3} = 0$  là

**A.**  $\left\{ \pm \frac{5\pi}{16} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**B.**  $\left\{ \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**C.**  $\left\{ \pm \frac{5\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**D.**  $\left\{ \pm \frac{5\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 72:** Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm?

**A.**  $\cos x = 3.$       **B.**  $\sin 2x = -2.$

**C.**  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1.$       **D.**  $\cos(2x - 1) = \frac{\sqrt{7}}{2}.$

**Câu 73:** Phương trình nào sau đây có nghiệm?

**A.**  $\sin 2021x - 2 = 0.$       **B.**  $\cos(2x + 2021) = 3.$

C.  $\sin^2 x + 1 = 0$ . D.  $\cos(2x + 2021) = -1$ .

**Câu 74:** Nghiệm của phương trình  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  là:

A.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

B.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

C.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

D.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

**Câu 75:** Nghiệm của phương trình  $\cos x = -\frac{1}{2}$  là

A.  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

B.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$

C.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$

D.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$

**Câu 76:** Giải phương trình  $\cos x = 1$ .

A.  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ . B.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ . D.  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 77:** Phương trình  $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$  có tất cả các nghiệm là:

A.  $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$  B.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

C.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

D.  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

**Câu 78:** Phương trình  $\cos x = 0$  có nghiệm là:

A.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 79:** Nghiệm của phương trình  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  là

A.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 80:** Tìm tất cả các nghiệm của phương trình  $\cos \frac{x}{3} = 0$ .

A.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . B.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $x = \frac{3\pi}{2} + k6\pi, k \in \mathbb{Z}$ . D.  $x = \frac{3\pi}{2} + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 81:** Phương trình  $2 \cos x - 1 = 0$  có nghiệm là:

- A.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$  B.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$   
 C.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$  D.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 82:** Phương trình  $2 \cos x - \sqrt{2} = 0$  có tất cả các nghiệm là

- A.  $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$  B.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$   
 C.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$  D.  $\begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 83:** Giải phương trình  $2 \cos x - 1 = 0$

- A.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$  B.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$   
 C.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$  D.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 84:** Nghiệm của phương trình  $\cos x = -1$  là:

- A.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$  B.  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$   
 C.  $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$  D.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 85:** Phương trình  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  có tập nghiệm là

- A.  $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$  B.  $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$   
 C.  $\left\{ x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$  D.  $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Câu 86:** Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A.  $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi.$  B.  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$   
 C.  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi.$  D.  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

**Câu 87:** Phương trình lượng giác:  $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$  có nghiệm là

- A.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}.$  B.  $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}.$  C.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}.$  D.  $\begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{4} + k2\pi \end{cases}.$

**Câu 88:** Tìm công thức nghiệm của phương trình  $2\cos(x+\alpha)=1$ .

**A.** 
$$\begin{cases} x = -\alpha + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\alpha + \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**B.** 
$$\begin{cases} x = -\alpha + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**C.** 
$$\begin{cases} x = -\alpha + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \alpha - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**D.** 
$$\begin{cases} x = -\alpha + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\alpha - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 89:** Tìm tổng các nghiệm của phương trình  $\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  trên  $[0; \pi]$ .

**A.**  $\frac{47\pi}{18}$ .

**B.**  $\frac{4\pi}{18}$ .

**C.**  $\frac{45\pi}{18}$ .

**D.**  $\frac{7\pi}{18}$ .

**Câu 90:** Phương trình  $8\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$  tương đương với phương trình nào sau đây?

**A.**  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**B.**  $\cos 2x = 0$ .

**C.**  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**D.**  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 91:** Họ các nghiệm của phương trình  $\cos 3x = \frac{1}{2}$  là

**A.**  $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ . **B.**  $x = \pm \frac{\pi}{9} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**C.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ . **D.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 92:** Tổng các nghiệm của phương trình  $\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$  là

**A.**  $\frac{21\pi}{20}$ .

**B.**  $\frac{\pi}{2}$ .

**C.**  $\frac{8\pi}{5}$ .

**D.**  $\frac{13\pi}{20}$ .

**Câu 93:** Tập nghiệm của phương trình  $(1 - \sqrt{2}\cos x)(2022 + \sin^2 x) = 0$  là

**A.**  $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**B.**  $\left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi; -\frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**C.**  $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**D.**  $\left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Câu 94:** Phương trình lượng giác:  $2\cos x + \sqrt{2} = 0$  có nghiệm là:

**A.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

**B.** 
$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

**C.** 
$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-5\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

**D.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

**Câu 95:** Tất cả nghiệm của phương trình  $2\cos x = -1$  là

**A.**  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

**B.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 96:** Tổng các nghiệm thuộc khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  của phương trình  $4\sin^2 2x - 1 = 0$  bằng:

A.  $\pi$ .

B.  $\frac{\pi}{3}$ .

C. 0.

D.  $\frac{\pi}{6}$ .

**Câu 97:** Phương trình  $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$  có số nghiệm thuộc đoạn  $[0; 2\pi]$  là

A. 1

B. 2

C. 0

D. 3

**Câu 98:** Biết các nghiệm của phương trình  $\cos 2x = -\frac{1}{2}$  có dạng  $x = \frac{\pi}{m} + k\pi$  và  $x = -\frac{\pi}{n} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ; với  $m, n$  là các số nguyên dương. Khi đó  $m + n$  bằng

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

**Câu 99:** Phương trình  $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$  có số nghiệm thuộc đoạn  $[0; 2\pi]$  là

A. 1

B. 2

C. 0

D. 3

**Câu 100:** Nghiệm lớn nhất của phương trình  $2\cos 2x - 1 = 0$  trong đoạn  $[0; \pi]$  là:

A.  $x = \pi$ .

B.  $x = \frac{11\pi}{12}$ .

C.  $x = \frac{2\pi}{3}$ .

D.  $x = \frac{5\pi}{6}$ .

**Câu 101:** Cho hai phương trình  $\cos 3x - 1 = 0$ ;  $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ . Tập các nghiệm của phương trình đồng thời là nghiệm của phương trình là

A.  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

B.  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

D.  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 102:** Số nghiệm của phương trình  $2\cos x = \sqrt{3}$  trên đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  là

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

**Câu 103:** Số nghiệm của phương trình  $\cos x = \frac{1}{2}$  thuộc đoạn  $[-2\pi; 2\pi]$  là?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

**Câu 104:** Phương trình  $\cos 2x + \cos x = 0$  có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng  $(-\pi; \pi)$ ?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

**Câu 105:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình  $\cos 2x - \cos x = 0$  trên khoảng  $(0; 2\pi)$  bằng  $T$ . Khi đó  $T$  có giá trị là:

A.  $T = \frac{7\pi}{6}$ .

B.  $T = 2\pi$ .

C.  $T = \frac{4\pi}{3}$ .

D.  $T = \pi$ .

**Câu 106:** Số nghiệm của phương trình  $2\cos x = \sqrt{3}$  trên đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  là

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

**Câu 107:** Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\cos x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

A.  $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

B.  $S = \{k180^\circ; 75^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ .

C.  $S = \left\{ k\pi; \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D.  $S = \{100^\circ + k180^\circ; 30^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**Câu 108:** Giải phương trình  $3\cos^2 x = 5\cos x$

A.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

B.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

C.  $x = \pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

D.  $x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 109:** Giải phương trình  $5\sin x - \sin 2x = 0$

A.  $x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$  B.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

C.  $x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$  D. Phương trình vô nghiệm.

**Câu 110:** Giải phương trình  $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

A.  $S = \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$  B.  $S = \left\{ k2\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C.  $S = \left\{ k\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z} \right\}.$  D.  $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z} \right\}$

**Câu 111:** Nghiệm âm lớn nhất của phương trình  $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$

A.  $-\frac{35}{36}\pi.$

B.  $-\frac{11}{36}\pi.$

C.  $-\frac{11\pi}{12}.$

D.  $-\frac{\pi}{12}.$

**Câu 112:** Trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ , phương trình  $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \sin x$  có bao nhiêu nghiệm?

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

**Câu 113:** Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình  $\sin 4x(2\cos x - \sqrt{2}) = 0$  trên đường tròn lượng giác là

A. 4.

B. 6.

C. 8.

D. 10.

**Câu 114:** Các họ nghiệm của phương trình  $\sin 2x - \sqrt{3}\sin x = 0$  là:

A.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}.$

B.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi.$

C.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}.$

D.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}.$

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

### II HỆ THỐNG BÀI TRẮC NGHIỆM.

#### DẠNG 1. PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = m$

**Câu 1:** Phương trình  $2.\sin x - 1 = 0$  có tập nghiệm là

**A.**  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**B.**  $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**C.**  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**D.**  $S = \left\{ \frac{1}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Lời giải**

Ta có:  $2.\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

**Câu 2:** Tất cả các nghiệm của phương trình  $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$  là

**A.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**B.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$  **D.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**Lời giải**

Áp dụng công thức:  $\sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + k2\pi \\ x = \pi - a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 3:** Nghiệm của phương trình  $2 \sin x + 1 = 0$  là

**A.**  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi.$

**B.**  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi.$

C.  $x = \pi + k2\pi; x = \frac{\pi}{8} + k2\pi.$

D.  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$

Lời giải

Ta có:  $2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi.$

**Câu 4:** Nghiệm của phương trình  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 1 = 0$  là

A.  $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B.  $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C.  $x = -\frac{7\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D.  $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải

$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} - k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Với  $k \in \mathbb{Z}, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$  cũng là nghiệm của phương trình.

**Câu 5:** Phương trình  $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$  có nghiệm là

A.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$  B.  $x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

C.  $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k3\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

D.  $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải

Phương trình  $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow \frac{2x}{3} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 6:** Nghiệm của phương trình  $\sin x = \sin(-2)$  là:

A.  $\begin{cases} x = -2 + k2\pi \\ x = 2 + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B.  $\begin{cases} x = -2 + k2\pi \\ x = \pi - 2 + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C.  $\begin{cases} x = -2 + k\pi \\ x = \pi - 2 + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

D.  $\begin{cases} x = -2 + k2\pi \\ x = \pi + 2 + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải

$\sin x = \sin(-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + k2\pi \\ x = \pi + 2 + k2\pi \end{cases} \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 7:** Họ nghiệm của phương trình  $\sin x = \sin \frac{\pi}{5}$  là

- A.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = \frac{4\pi}{5} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$  **B.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{5} + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$
- C.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{5} + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$  **D.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{5} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$

**Lời giải**

Áp dụng công thức nghiệm của phương trình  $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$

Ta có  $\sin x = \sin \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{5} + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$

**Câu 8:** Phương trình  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$  có nghiệm là

- A.**  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$  **B.**  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$  **C.**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$  **D.**  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Lời giải**

Ta có  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 9:** Tập nghiệm của phương trình  $\sin x = \sin \frac{5\pi}{3}$  là

- A.**  $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k2\pi; \frac{-2\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$  **B.**  $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k2\pi; \frac{7\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- C.**  $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k2\pi; \frac{-5\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$  **D.**  $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k\pi; \frac{-2\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Lời giải**

Áp dụng công thức nghiệm, ta có

$\sin x = \sin \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{5\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{-2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 10:** Phương trình  $\sin x = \sin 80^\circ$  có tập nghiệm là

- A.**  $S = \{80^\circ + k360^\circ, 100^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ . **B.**  $S = \{80^\circ + k360^\circ, -80^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ .  
**C.**  $S = \{40^\circ + k360^\circ, 140^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ . **D.**  $S = \{80^\circ + k180^\circ, 100^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \sin x = \sin 80^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 80^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - 80^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 80^\circ + k360^\circ \\ x = 100^\circ + k360^\circ \end{cases} \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 11:** Tập nghiệm của phương trình  $\sin 2x = -1$  là

- A.**  $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **B.**  $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .  
**C.**  $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **D.**  $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 12:** Họ nghiệm của phương trình  $\sin x = \frac{1}{2}$  là

- A.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$  **B.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$   
**C.**  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$  **D.**  $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{1}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**Lời giải**

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

**Câu 13:** Nghiệm của phương trình  $\sin \frac{x}{2} = 1$  là

- A.**  $x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}.$  **B.**  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$  **C.**  $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$  **D.**  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Lời giải**

$$\text{Phương trình tương đương } \sin \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**Câu 14:** Phương trình  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$  có nghiệm là

- A.**  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi.$  **B.**  $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi.$  **C.**  $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$  **D.**  $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi.$

**Lời giải**

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 15:** Tìm nghiệm của phương trình  $\sin 2x = 1$ .

- A.**  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ .      **B.**  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .      **C.**  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ .      **D.**  $x = \frac{k\pi}{2}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

**Câu 16:** Tìm nghiệm của phương trình  $2\sin x - 3 = 0$ .

- A.**  $x \in \emptyset$ .      **B.**  $\begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{3}{2}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{2}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$
- C.**  $\begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{3}{2}\right) + k2\pi \\ x = -\arcsin\left(\frac{3}{2}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$       **D.**  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $2\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{3}{2} > 1$  nên phương trình vô nghiệm.

**Câu 17:** Phương trình  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  có nghiệm là:

- A.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ .      **B.**  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ .      **C.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}$ .      **D.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$ , với  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 18:** Tập nghiệm của phương trình  $\sin x = \sin 30^\circ$  là

- A.**  $S = \{30^\circ + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{150^\circ + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .  
**B.**  $S = \{\pm 30^\circ + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .  
**C.**  $S = \{\pm 30^\circ + k360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .  
**D.**  $S = \{30^\circ + 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{150^\circ + 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\sin x = \sin 30^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - 30^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + k360^\circ \\ x = 150^\circ + k360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 19:** Tìm tất cả các nghiệm của phương trình  $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ .

**A.**  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .

**B.**  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .

**C.**  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .

**D.**  $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải**

Ta có  $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 20:** Phương trình  $2\sin x - 1 = 0$  có tập nghiệm là:

**A.**  $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**B.**  $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**C.**  $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**D.**  $S = \left\{\frac{1}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 21:** Phương trình  $2\sin x + 1 = 0$  có nghiệm là:

**A.**  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$

**B.**  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$

**C.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$

**D.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{6} + k\pi \end{cases}$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

**Câu 22:** Phương trình  $2\sin x - \sqrt{3} = 0$  có tập nghiệm là:

**A.**  $\left\{\pm\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**B.**  $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**C.**  $\left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**D.**  $\left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Lời giải**

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là:  $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

- Câu 23:** Tổng các nghiệm của phương trình  $2\sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$  trên khoảng  $(-180^\circ; 180^\circ)$  là  
**A.**  $20^\circ$ . **B.**  $100^\circ$ . **C.**  $80^\circ$ . **D.**  $120^\circ$ .

**Lời giải**

Ta có:  $2\sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(x + 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 40^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ x + 40^\circ = 120^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20^\circ + k360^\circ \\ x = 80^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Theo đề bài:

$$-180^\circ < 20^\circ + k360^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{5}{9} < k < \frac{4}{9} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = 20^\circ.$$

$$-180^\circ < 80^\circ + k360^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{13}{18} < k < \frac{5}{18} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = 80^\circ.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là  $20^\circ + 80^\circ = 100^\circ$ .

- Câu 24:** Tìm tổng các nghiệm của phương trình  $\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  trên  $[0; \pi]$ .  
**A.**  $\frac{47\pi}{18}$ . **B.**  $\frac{4\pi}{18}$ . **C.**  $\frac{45\pi}{18}$ . **D.**  $\frac{7\pi}{18}$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - \frac{\pi}{6} = 2x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 5x - \frac{\pi}{6} = -2x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì  $x \in [0; \pi]$  nên ta có :

+) Với  $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \Rightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{19}{12}$ , do  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1$  nên  $x = \frac{11\pi}{18}$ .

+) Với  $x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{13}{4}$ , do  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\}$  nên

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}; \frac{9\pi}{14}; \frac{13\pi}{14} \right\}.$$

Tổng tất cả các nghiệm là:  $\frac{11\pi}{18} + \frac{\pi}{14} + \frac{5\pi}{14} + \frac{9\pi}{14} + \frac{13\pi}{14} = \frac{47\pi}{18}$ .

**Câu 25:** Số nghiệm phương trình  $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$  thuộc đoạn  $[2\pi; 4\pi]$  là

- A. 7.                      B. 6.                      C. 4.                      D. 5.

**Lời giải**

Điều kiện:  $\cos x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi$ .

Ta có  $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0 \Rightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ .

So với điều kiện nghiệm của phương trình là  $x = \frac{k\pi}{3}$  với  $k \in \mathbb{Z}, k \neq 3(2l+1)$

Vì  $2\pi \leq x \leq 4\pi \Leftrightarrow 2\pi \leq \frac{k\pi}{3} \leq 4\pi \Leftrightarrow 6 \leq k \leq 12$  nên ta chọn  $k \in \{6, 7, 8, 10, 11, 12\}$ .

**Câu 26:** Phương trình  $2\sin x + \sqrt{3} = 0$  có tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất bằng

- A.  $\frac{4\pi}{3}$ .                      B.  $2\pi$ .                      C.  $\frac{\pi}{3}$ .                      D.  $\pi$ .

**Lời giải**

$$* \text{ Ta có: } 2\sin x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

\* Xét  $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  ta được nghiệm dương nhỏ nhất là  $x_1 = \frac{5\pi}{3}$  và nghiệm âm lớn nhất là  $x_2 = -\frac{\pi}{3}$ .

\* Xét  $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  ta được nghiệm dương nhỏ nhất là  $x_3 = \frac{4\pi}{3}$  và nghiệm âm lớn nhất là  $x_4 = -\frac{2\pi}{3}$ .

\* So sánh  $x_1$  và  $x_3$  ta suy ra nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình đã cho là  $x_3 = \frac{4\pi}{3}$ .

So sánh  $x_2$  và  $x_4$  ta suy ra nghiệm âm lớn nhất của phương trình đã cho là  $x_2 = -\frac{\pi}{3}$ .

\* Ta có  $x_2 + x_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \pi$ .

**Câu 27:** Với những giá trị nào của  $x$  thì giá trị của các hàm số  $y = \sin 3x$  và  $y = \sin x$  bằng nhau?

- A.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .                      B.  $x = k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $x = k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm:  $\sin 3x = \sin x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + k2\pi \\ 3x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 28:** Số nghiệm của phương trình  $\sin x = 0$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. Vô số.

Lời giải

Ta có  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

$x \in [0; \pi] \Leftrightarrow 0 \leq k\pi \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 1$  mà  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k = 0; k = 1$ . Suy ra  $x = 0; x = \pi$ .

Vậy phương trình  $\sin x = 0$  có 2 nghiệm trên đoạn  $[0; \pi]$ .

**Câu 29:** Tập nghiệm của phương trình  $2\sin 2x + 1 = 0$  là

A.  $S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

B.  $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{7\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

C.  $S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + k2\pi, \frac{7\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

D.  $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Lời giải

Ta có:  $2\sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 30:** Nghiệm của phương trình  $3\sin\left(4x + \frac{1}{2}\right) - 1 = 0$  là:

A.  $\begin{cases} x = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{3} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{3} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B.  $\begin{cases} x = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{3} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{3} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C. 
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

D. 
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{3} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{3} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Lời giải

$$3\sin\left(4x + \frac{1}{2}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(4x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \frac{1}{2} = \arcsin\frac{1}{3} + 2k\pi \\ 4x + \frac{1}{2} = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{3} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{3} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 31: Tập nghiệm của phương trình  $\sin x = \sin(x - 60^\circ)$  là

B.  $\left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

B.  $\left\{\frac{2\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

C.  $\{120^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

D.  $\{60^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

Lời giải

$$\sin x = \sin(x - 60^\circ) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x - 60^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - (x - 60^\circ) + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow x = 120^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 32: Số nghiệm của phương trình  $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  trong khoảng  $(0; 3\pi)$  là

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Xét } x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}): 0 < x < 3\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + k\pi < 3\pi \Leftrightarrow \frac{-1}{6} < k < \frac{17}{6}.$$

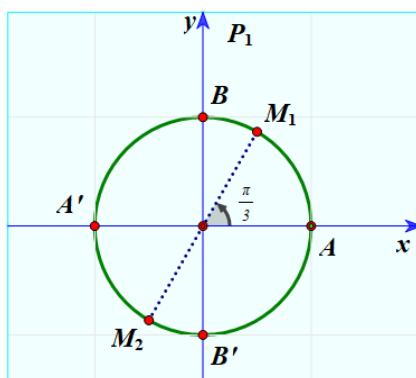
$$\text{Mà } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \\ k = 2 \Rightarrow x = \frac{13\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{Xét } x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}): 0 < x < 3\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{3} + k\pi < 3\pi \Leftrightarrow \frac{-1}{3} < k < \frac{8}{3}.$$

$$\text{Mà } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \\ k=2 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình  $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  có 6 nghiệm trong khoảng  $(0; 3\pi)$ .

**Câu 33:** Cung lượng giác có điểm biểu diễn là  $M_1, M_2$  như hình vẽ là nghiệm của phương trình lượng giác nào sau đây?



- A.**  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .      **B.**  $\sin x = 0$ .      **C.**  $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .      **D.**  $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

**Lời giải**

Cung lượng giác có điểm biểu diễn là  $M_1, M_2$  có số đo là:  $\frac{\pi}{3} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Và phương trình  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Câu 34:** Số nghiệm thuộc khoảng  $(0; 2\pi)$  của phương trình  $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin 2x = 0$  là

- A.** 1.      **B.** 2.      **C.** 3.      **D.** 4.

**Lời giải**

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin 2x \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(-2x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = -2x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{2\pi}{3} - k2\pi \end{cases}$$

Các nghiệm thuộc khoảng  $(0; 2\pi)$  của phương trình là:  $-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{9} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{9} + 2\pi;$   
 $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi$  hay  $\frac{5\pi}{9}; \frac{11\pi}{9}; \frac{17\pi}{9}; \frac{4\pi}{3}$ .

Vậy có 4 nghiệm thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 35:** Số nghiệm thực của phương trình  $2\sin x - 1 = 0$  trên đoạn  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$  là:

**A. 11.**

**B. 9.**

**C. 20.**

**D. 21.**

**Lời giải**

$$\text{Phương trình tương đương: } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases},$$

$$+ \text{ Với } x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ta có } -\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 10\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{59}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow 0 \leq k \leq 4, k \in \mathbb{Z}$ . Do đó phương trình có 5 nghiệm.

$$+ \text{ Với } x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ta có } -\frac{3\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \leq 10\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{7}{6} \leq k \leq \frac{55}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow -1 \leq k \leq 4, k \in \mathbb{Z}$ . Do đó, phương trình có 6 nghiệm.

+ Rõ ràng các nghiệm này khác nhau từng đôi một, vì nếu

$$\frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + k'2\pi \Leftrightarrow k - k' = \frac{1}{3}.$$

Vậy phương trình có 11 nghiệm trên đoạn  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$ .

**Câu 36:** Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$  trên đường tròn lượng giác là

**A. 4.**

**B. 3.**

**C. 6.**

**D. 1.**

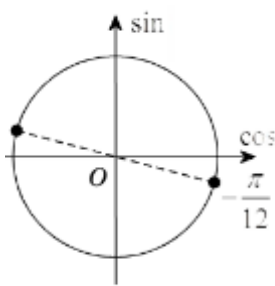
**Lời giải**

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

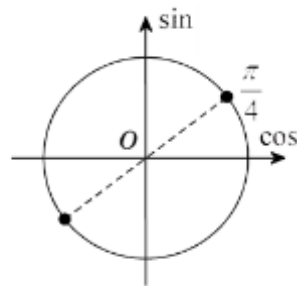
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Biểu diễn nghiệm  $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$  trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí.

Biểu diễn nghiệm  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí.



Hình 1



Hình 2

Vậy có tất cả 4 vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình.

**Câu 37:** Tập nghiệm của phương trình  $\sin(\pi x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi x\right)$  là:

- A.  $\left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . B.  $\left\{\frac{1}{12} + k, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . C.  $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . D.  $\left\{\frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\sin(\pi x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi x\right) \Leftrightarrow \sin(\pi x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \pi x\right) \Leftrightarrow \sin(\pi x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \pi x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi x = \frac{\pi}{6} - \pi x + k2\pi \\ \pi x = \pi - \frac{\pi}{6} + \pi x + k2\pi \quad (VL) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{12} + k, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 38:** Phương trình  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{TH1: } x = -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 < -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < k < \frac{13}{12}. \text{ Do } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1.$$

Suy ra trường hợp này có nghiệm  $x = \frac{4\pi}{9}$  thỏa mãn.

**TH2:**  $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{4}$ . Do  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0$ .

Suy ra trường hợp này có nghiệm  $x = \frac{\pi}{3}$  thỏa mãn.

Vậy phương trình chỉ có 2 nghiệm thuộc khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Câu 39:** Số nghiệm của phương trình  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$  với  $\pi \leq x \leq 5\pi$  là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

**D. 3.**

**Lời giải**

Ta có  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Nên  $\pi \leq x \leq 5\pi \Leftrightarrow \pi \leq \frac{\pi}{4} + k2\pi \leq 5\pi \Leftrightarrow \frac{3}{8} \leq k \leq \frac{19}{8}$

Vì  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k \in \{1; 2; 3\}$ .

**Câu 40:** Có bao nhiêu nghiệm phương trình  $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  trong khoảng  $(0; \pi)$

A. 4.

B. 3.

**C. 2.**

D. 1.

**Lời giải**

$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{8} + k\pi \end{cases}$$

Vì  $0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{-\pi}{8} + k\pi < \pi \Leftrightarrow \frac{1}{8} < k < \frac{9}{8} \rightarrow k = 1 \rightarrow x = \frac{7\pi}{8}$

Vì  $0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{5\pi}{8} + k\pi < \pi \Leftrightarrow \frac{-5}{8} < k < \frac{3}{8} \rightarrow k = 0 \rightarrow x = \frac{5\pi}{8}$

**Câu 41:** Số nghiệm thuộc đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  của phương trình  $2\sin x = 1$  là

A. 4.

B. 1.

C. 2.

**D. 3.**

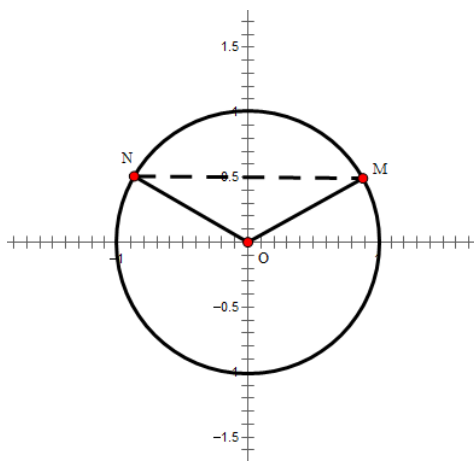
**Lời giải**

Phương trình  $2\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + l.2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z})$

Vì  $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  nên  $k = 0, k = 1$  và  $l = 0$ .

**Câu 42:** Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm biểu diễn trên đường tròn lượng giác là 2 điểm

$M, N$ ?



- A.  $2 \sin 2x = 1$ .      B.  $2 \cos 2x = 1$ .      C.  $2 \sin x = 1$ .      D.  $2 \cos x = 1$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta thấy 2 điểm M và N là các giao điểm của đường thẳng vuông góc với trục tung tại điểm  $\frac{1}{2}$  với đường tròn lượng giác  $\Rightarrow$  M và N là các điểm biểu diễn tập nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản:  $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow$  Đáp án. **C.**

**Câu 43:** Cho phương trình  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ . Tính tổng các nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$  của phương trình trên.

- A.  $\frac{7\pi}{2}$ .      B.  $\pi$ .      C.  $\frac{3\pi}{2}$ .      D.  $\frac{\pi}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - x - \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

+ Xét  $x = \pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

Do  $0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \pi + k2\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 0$ . Vì  $k \in \mathbb{Z}$  nên không có giá trị  $k$ .

+ Xét  $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

Do  $0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{5}{4}$ . Vì  $k \in \mathbb{Z}$  nên có hai giá trị  $k$  là:  $k = 0; k = 1$ .

• Với  $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ .

• Với  $k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$ .

Do đó trên khoảng  $(0; \pi)$  phương trình đã cho có hai nghiệm  $x = \frac{\pi}{6}$  và  $x = \frac{5\pi}{6}$ .

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho trong khoảng  $(0; \pi)$  là:  $\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$ .

**Câu 44:** Tìm số nghiệm của phương trình  $\sin(\cos 2x) = 0$  trên  $[0; 2\pi]$ .

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

**Lời giải**

Ta có  $\sin(\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Vì  $\cos 2x \in [-1; 1] \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k_1\frac{\pi}{2} \ (k_1 \in \mathbb{Z})$ .

$x \in [0; 2\pi] \Rightarrow k_1 \in \{0; 1; 2; 3\}$ .

Vậy phương trình có 4 nghiệm trên  $[0; 2\pi]$ .

**Câu 45:** Phương trình  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ?

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$+ \text{) TH1: } x = -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 < -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < k < \frac{13}{12}. \text{ Do } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1.$$

Suy ra trường hợp này có nghiệm  $x = \frac{4\pi}{9}$  thỏa mãn.

$$+ \text{) TH2: } x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{4}. \text{ Do } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0. \text{ Suy ra}$$

trường hợp này có nghiệm  $x = \frac{\pi}{3}$  thỏa mãn.

Vậy phương trình chỉ có 2 nghiệm thuộc khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Câu 46:** Số nghiệm của phương trình  $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$  trên đoạn  $[0; 2\pi]$ .

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Tự luận**

$$2 \sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

- Xét  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

$$0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{3} + k2\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq k2\pi \leq \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{5}{6} \Rightarrow k = 0$$

Chỉ có một nghiệm  $x = \frac{\pi}{3} \in [0; 2\pi]$

- Xét  $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

$$0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2\pi}{3} + k2\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} \leq k2\pi \leq \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{2}{3} \Rightarrow k = 0$$

Chỉ có một nghiệm  $x = \frac{2\pi}{3} \in [0; 2\pi]$

Vậy phương trình có 2 nghiệm thuộc đoạn  $[0; 2\pi]$ .

**Câu 47:** Số nghiệm thực của phương trình  $2 \sin x + 1 = 0$  trên đoạn  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$  là:

A. 12.

B. 11.

C. 20.

D. 21.

**Lời giải**

$$\text{Phương trình tương đương: } \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

+ Với  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ta có  $-\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 10\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{61}{12}$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 \leq k \leq 5$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Do đó phương trình có 6 nghiệm.

+ Với  $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ta có  $-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{6} + k2\pi \leq 10\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq k \leq \frac{53}{12}$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow -1 \leq k \leq 4$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Do đó, phương trình có 6 nghiệm.

+ Rõ ràng các nghiệm này khác nhau từng đôi một, vì nếu

$$-\frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{7\pi}{6} + k'2\pi \Leftrightarrow k - k' = \frac{2}{3}.$$

Vậy phương trình có 12 nghiệm trên đoạn  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$ .

**Câu 48:** Phương trình  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$  có tổng các nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$  bằng

**A.**  $\frac{7\pi}{2}$ .

**B.**  $\pi$ .

**C.**  $\frac{3\pi}{2}$ .

**D.**  $\frac{\pi}{4}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - x + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Họ nghiệm  $x = \pi + k2\pi$  không có nghiệm nào thuộc khoảng  $(0; \pi)$ .

$$x = \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} \in (0; \pi) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow l \in \{0; 1\}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$  là  $x = \frac{\pi}{6}$  và  $x = \frac{5\pi}{6}$ . Từ đó suy ra tổng các nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$  của phương trình này bằng  $\pi$ .

**Câu 49:** Tính tổng  $S$  của các nghiệm của phương trình  $\sin x = \frac{1}{2}$  trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**A.**  $S = \frac{5\pi}{6}$ .

**B.**  $S = \frac{\pi}{3}$ .

**C.**  $S = \frac{\pi}{2}$ .

**D.**  $S = \frac{\pi}{6}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vì } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ nên } x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow S = \frac{\pi}{6}.$$

**Câu 50:** Phương trình  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ?

**A.** 3.

**B.** 4.

**C.** 1.

**D.** 2.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  nên  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $x = \frac{4\pi}{9}$ .

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm thuộc khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Câu 51:** Cho phương trình  $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ . Tổng các nghiệm thuộc  $[0; \pi]$  của phương trình là:

- A.**  $\pi$ .                      **B.**  $\frac{\pi}{3}$ .                      **C.**  $\frac{2\pi}{3}$ .                      **D.**  $\frac{4\pi}{3}$ .

**Lời giải**

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}.$$

Các nghiệm của phương trình trong đoạn  $[0; \pi]$  là  $\frac{\pi}{3}$ ;  $\frac{2\pi}{3}$  nên có tổng là  $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$ .

**Câu 52:** Phương trình  $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  có hai công thức nghiệm dạng  $\alpha + k\pi$ ,  $\beta + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) với  $\alpha$ ,  $\beta$  thuộc khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ . Khi đó,  $\alpha + \beta$  bằng

- A.**  $\frac{\pi}{2}$ .                      **B.**  $-\frac{\pi}{2}$ .                      **C.**  $\pi$ .                      **D.**  $-\frac{\pi}{3}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}.$$

Vậy  $\alpha = -\frac{\pi}{6}$  và  $\beta = -\frac{\pi}{3}$ . Khi đó  $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{2}$ .

**Câu 53:** Tính tổng  $S$  của các nghiệm của phương trình  $\sin x = \frac{1}{2}$  trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

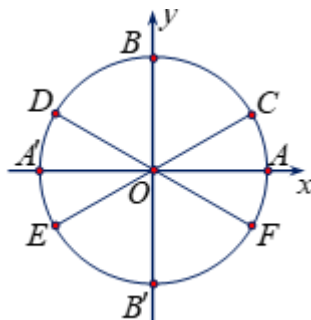
- A.**  $S = \frac{5\pi}{6}$ .                      **B.**  $S = \frac{\pi}{3}$ .                      **C.**  $S = \frac{\pi}{2}$ .                      **D.**  $S = \frac{\pi}{6}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  nên  $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow S = \frac{\pi}{6}$ .

**Câu 54:** Nghiệm của phương trình  $2 \sin x + 1 = 0$  được biểu diễn trên đường tròn lượng giác ở hình bên là những điểm nào?



**A.** Điểm  $D$ , điểm  $C$ . **B.** Điểm  $E$ , điểm  $F$ . **C.** Điểm  $C$ , điểm  $F$ . **D.** Điểm  $E$ , điểm  $D$ .

**Lời giải**

Ta có  $2 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Với  $k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$  hoặc  $x = \frac{7\pi}{6}$ .

Điểm biểu diễn của  $x = -\frac{\pi}{6}$  là  $F$ , điểm biểu diễn  $x = \frac{7\pi}{6}$  là  $E$ .

**Câu 55:** Số nghiệm của phương trình  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$  thuộc đoạn  $[\pi; 2\pi]$  là:

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

**Lời giải**

Ta có  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Suy ra số nghiệm thuộc  $[\pi; 2\pi]$  của phương trình là 1.

**Câu 56:** Phương trình  $2 \sin x - 1 = 0$  có bao nhiêu nghiệm  $x \in (0; 2\pi)$ ?

**A.** 2 nghiệm. **B.** 1 nghiệm. **C.** 4 nghiệm. **D.** Vô số nghiệm.

**Lời giải**

Ta có:  $2 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

Do  $x \in (0; 2\pi)$  nên ta có  $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{5\pi}{6}$ .

**Câu 57:** Phương trình  $\sin 5x - \sin x = 0$  có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn  $[-2018\pi; 2018\pi]$ ?

- A. 20179.                      B. 20181.                      C. 16144.                      D. 16145.

**Lời giải**

Ta có

$$\sin 5x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = x + k2\pi \\ 5x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{5\pi}{6} + m\pi & (m \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{\pi}{6} + n\pi & (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\text{Vì } x \in [-2018\pi; 2018\pi] \text{ nên } \begin{cases} -2018\pi \leq k\frac{\pi}{2} \leq 2018\pi \\ -2018\pi \leq \frac{5\pi}{6} + m\pi \leq 2018\pi \\ -2018\pi \leq \frac{\pi}{6} + n\pi \leq 2018\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4036 \leq k \leq 4036 \\ -\frac{12113}{6} \leq m \leq \frac{12103}{6} \\ -\frac{12109}{6} \leq n \leq \frac{12107}{6} \end{cases}.$$

Do đó có 8073 giá trị  $k$ , 4036 giá trị  $m$ , 4036 giá trị  $n$ , suy ra số nghiệm cần tìm là 16145.

**Câu 58:** Số nghiệm thuộc đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  của phương trình  $2\sin x - 1 = 0$  là:

- A. 3.                      B. 1.                      C. 4.                      D. 2.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$+ \text{Phương trình tương đương } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$+ \text{Với } x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vì } x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right] \text{ nên } 0 \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi \leq \frac{5\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{7}{6}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1\}.$$

$$\text{Suy ra: } x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}.$$

$$+ \text{Với } x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vì } x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right] \text{ nên } 0 \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \leq \frac{5\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{5}{6}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0.$$

Suy ra:  $x = \frac{5\pi}{6}$ .

Do đó  $x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6} \right\}$ .

Vậy số nghiệm của phương trình là 3.

**Câu 59:** Cho phương trình  $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$ . Tổng các nghiệm thuộc  $[0; \pi]$  của phương trình là:

A.  $\frac{4\pi}{3}$ .

B.  $\pi$ .

C.  $\frac{\pi}{3}$ .

D.  $\frac{2\pi}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$2 \sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}.$$

Các nghiệm của phương trình trong đoạn  $[0; \pi]$  là  $\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$  nên có tổng là  $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$ .

**Câu 60:** Tính tổng  $S$  của các nghiệm của phương trình  $\sin x = \frac{1}{2}$  trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

A.  $S = \frac{\pi}{6}$ .

B.  $S = \frac{\pi}{3}$ .

C.  $S = \frac{\pi}{2}$ .

D.  $S = \frac{5\pi}{6}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có: } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vì } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ nên } x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow S = \frac{\pi}{6}.$$

**Câu 61:** Số nghiệm thực của phương trình  $2 \sin x + 1 = 0$  trên đoạn  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$  là:

A. 12.

B. 11.

C. 20.

D. 21.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Phương trình tương đương: } \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$+ \text{ Với } x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ta có } -\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 10\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{-2}{3} \leq k \leq \frac{61}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow 0 \leq k \leq 5, k \in \mathbb{Z}$ . Do đó phương trình có 6 nghiệm.

+ Với  $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  ta có  $-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{6} + k2\pi \leq 10\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{-4}{3} \leq k \leq \frac{53}{12}, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow -1 \leq k \leq 4, k \in \mathbb{Z}$ . Do đó, phương trình có 6 nghiệm.

+ Rõ ràng các nghiệm này khác nhau từng đôi một, vì nếu

$$-\frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{7\pi}{6} + k'2\pi \Leftrightarrow k - k' = \frac{2}{3}.$$

Vậy phương trình có 12 nghiệm trên đoạn  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$ .

**Câu 62:** Phương trình:  $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$  có mấy nghiệm thuộc khoảng  $(0; 3\pi)$ .

A. 8.

B. 6.

C. 2.

D. 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \text{ Vì } x \in (0; 3\pi) \text{ nên } x \in \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right\}.$$

**Câu 63:** Nghiệm của phương trình  $\sin 2x = \sin x$  là

A.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

C.  $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$  D.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

**Lời giải**

Ta có  $\sin 2x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

## DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH $\cos x = m$

**Câu 64:** Nghiệm của phương trình  $\cos x = \frac{1}{2}$  là

A.  $x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

B.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi.$

C.  $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi.$

D.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi.$

**Lời giải**

Ta có  $\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 65:** Nghiệm của phương trình  $2 \cos(x - 15^\circ) - 1 = 0$  là

**A.**  $\begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = 135^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**B.**  $\begin{cases} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = -60^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**C.**  $\begin{cases} x = 45^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**D.**  $\begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**Lời giải**

$$2 \cos(x - 15^\circ) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x - 15^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x - 15^\circ) = \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 15^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ x - 15^\circ = -60^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 66:** Giải phương trình  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**A.**  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

**B.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

**D.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

**Lời giải**

Ta có:  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 67:** Nghiệm của phương trình  $\cos x = \cos \frac{\pi}{12}$  là

**A.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{11\pi}{12} + l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$

**B.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

**D.**  $x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

**Lời giải**

Ta có  $\cos x = \cos \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$

**Câu 68:** Nghiệm của phương trình  $\cos 2x = 0$  là

**A.**  $x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

**B.**  $x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ . **D.**  $x = k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 69:** Phương trình  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  có tập nghiệm là :

**A.**  $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**B.**  $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**C.**  $\left\{ x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**D.**  $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**Câu 70:** Phương trình  $\cos x = -\frac{1}{2}$  có các nghiệm là

**A.**  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**B.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**C.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**D.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 71:** Tập nghiệm của phương trình  $\cos 3x + \sin \frac{2\pi}{3} = 0$  là

**A.**  $\left\{ \pm \frac{5\pi}{16} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**B.**  $\left\{ \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**C.**  $\left\{ \pm \frac{5\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**D.**  $\left\{ \pm \frac{5\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

Phương trình  $\cos 3x + \sin \frac{2\pi}{3} = 0, (1)$  có tập xác định  $D = \mathbb{R}$

$$(1) \Leftrightarrow \cos 3x = -\sin \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \cos 3x = \cos \frac{5\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pm \frac{5\pi}{6} + k.2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 72:** Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm?

A.  $\cos x = 3$ .

B.  $\sin 2x = -2$ .

**C.  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$ .**

D.  $\cos(2x - 1) = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

**Lời giải**

Phương trình lượng giác cơ bản dạng  $\sin u = \alpha$ ,  $\cos u = a$  có nghiệm khi và chỉ khi  $|a| \leq 1$ . Nên ta chọn đáp án **C**.

**Câu 73:** Phương trình nào sau đây có nghiệm?

A.  $\sin 2021x - 2 = 0$ . B.  $\cos(2x + 2021) = 3$ .

C.  $\sin^2 x + 1 = 0$ .

**D.  $\cos(2x + 2021) = -1$ .**

**Lời giải**

Phương trình  $\sin x = a$  và  $\cos x = a$  có nghiệm khi và chỉ khi  $|a| \leq 1$ .

Đối chiếu các đáp án ta thấy chỉ có đáp án D là phương trình có nghiệm.

**Câu 74:** Nghiệm của phương trình  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  là:

A.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$  B.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

C.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

**D.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$**

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương trình  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 75:** Nghiệm của phương trình  $\cos x = -\frac{1}{2}$  là

**A.  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$**

B.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$

C.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$

D.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 76:** Giải phương trình  $\cos x = 1$ .

A.  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ . B.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ . **D.  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .**

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 77:** Phương trình  $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$  có tất cả các nghiệm là:

**A.**  $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$  **B.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

**C.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

**D.**  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình  $\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

**Câu 78:** Phương trình  $\cos x = 0$  có nghiệm là:

**A.**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$  **B.**  $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**C.**  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**D.**  $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Theo công thức nghiệm đặc biệt thì  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ . Do đó **Chọn A**

**Câu 79:** Nghiệm của phương trình  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  là

**A.**  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**B.**  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**C.**  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**D.**  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải**

Phương trình  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 80:** Tìm tất cả các nghiệm của phương trình  $\cos \frac{x}{3} = 0$ .

**A.**  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . **B.**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**C.**  $x = \frac{3\pi}{2} + k6\pi, k \in \mathbb{Z}$ . **D.**  $x = \frac{3\pi}{2} + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

$$\cos \frac{x}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 3k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 81:** Phương trình  $2 \cos x - 1 = 0$  có nghiệm là:

- A.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$  **B.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$   
**C.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$  **D.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

**Lời giải**

$$\text{Phương trình } 2 \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 82:** Phương trình  $2 \cos x - \sqrt{2} = 0$  có tất cả các nghiệm là

- A.**  $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$  **B.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$   
**C.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$  **D.**  $\begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**Lời giải**

$$2 \cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 83:** Giải phương trình  $2 \cos x - 1 = 0$

- A.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$  **B.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$   
**C.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$  **D.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**Lời giải**

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \text{ Ta có } 2 \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 84:** Nghiệm của phương trình  $\cos x = -1$  là:

- A.**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$  **B.**  $x = k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$   
**C.**  $x = \pi + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$  **D.**  $x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

**Lời giải**

Phương trình  $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 85:** Phương trình  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  có tập nghiệm là

- A.  $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
 B.  $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
 C.  $\left\{ x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
 D.  $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \left\{ x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 86:** Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A.  $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ .  
 B.  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .  
 C.  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$ .  
 D.  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 87:** Phương trình lượng giác:  $2\cos x + \sqrt{2} = 0$  có nghiệm là

- A.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$ .  
 B.  $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$ .  
 C.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$ .  
 D.  $\begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$ .

**Lời giải**

$$\text{Phương trình tương đương với } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi$$

**Câu 88:** Tìm công thức nghiệm của phương trình  $2\cos(x + \alpha) = 1$ .

- A.  $\begin{cases} x = -\alpha + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\alpha + \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .  
 B.  $\begin{cases} x = -\alpha + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .  
 C.  $\begin{cases} x = -\alpha + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \alpha - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .  
 D.  $\begin{cases} x = -\alpha + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\alpha - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải**

$$2\cos(x+\alpha)=1 \Leftrightarrow \cos(x+\alpha)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x+\alpha=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\alpha+\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=-\alpha-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 89:** Tìm tổng các nghiệm của phương trình  $\cos\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$  trên  $[0;\pi]$ .

**A.**  $\frac{47\pi}{18}$ .

**B.**  $\frac{4\pi}{18}$ .

**C.**  $\frac{45\pi}{18}$ .

**D.**  $\frac{7\pi}{18}$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\cos\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-\frac{\pi}{6}=2x-\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 5x-\frac{\pi}{6}=-2x+\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{14}+\frac{k2\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì  $x \in [0;\pi]$  nên ta có :

+) Với  $x=-\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3} \Rightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{19}{12}$ , do  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k=1$  nên  $x=\frac{11\pi}{18}$ .

+) Với  $x=\frac{\pi}{14}+\frac{k2\pi}{7} \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{14}+\frac{k2\pi}{7} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{13}{4}$ , do  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0;1;2;3\}$  nên

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}; \frac{9\pi}{14}; \frac{13\pi}{14} \right\}.$$

Tổng tất cả các nghiệm là:  $\frac{11\pi}{18} + \frac{\pi}{14} + \frac{5\pi}{14} + \frac{9\pi}{14} + \frac{13\pi}{14} = \frac{47\pi}{18}$ .

**Câu 90:** Phương trình  $8\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1=0$  tương đương với phương trình nào sau đây?

**A.**  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**B.**  $\cos 2x = 0$ .

**C.**  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**D.**  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 8\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1=0 \Leftrightarrow 2.\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2-1=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x-1=0$$

$$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x=0 \Leftrightarrow \cos 2x=0.$$

**Câu 91:** Họ các nghiệm của phương trình  $\cos 3x = \frac{1}{2}$  là

**A.**  $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

**B.**  $x = \pm\frac{\pi}{9} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**C.**  $x = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

**D.**  $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \cos 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

- Câu 92:** Tổng các nghiệm của phương trình  $\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$  là
- A.  $\frac{21\pi}{20}$ .      B.  $\frac{\pi}{2}$ .      **C.  $\frac{8\pi}{5}$ .**      D.  $\frac{13\pi}{20}$ .

**Lời giải**

Ta có phương trình

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{5} = \frac{-3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{20} + k2\pi \\ x = \frac{-19\pi}{20} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Với  $x = \frac{11\pi}{20} + k2\pi, x \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow -\frac{53}{120} < k < \frac{19}{40}; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{11\pi}{20}$ .

Với  $x = -\frac{19\pi}{20} + k2\pi, x \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{37}{120} < k < \frac{49}{40}; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{21\pi}{20}$ .

Vậy tổng các nghiệm là  $x_1 + x_2 = \frac{11\pi}{20} + \frac{21\pi}{20} = \frac{8\pi}{5}$ .

- Câu 93:** Tập nghiệm của phương trình  $(1 - \sqrt{2} \cos x)(2022 + \sin^2 x) = 0$  là

- A.  $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .      **B.  $\left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi; -\frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .**
- C.  $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .**      D.  $\left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Lời giải**

$$(1 - \sqrt{2} \cos x)(2022 + \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{2} \cos x = 0 \\ 2022 + \sin^2 x = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là  $\left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi; -\frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

- Câu 94:** Phương trình lượng giác:  $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$  có nghiệm là:

- A.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$ .      **B.  $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$ .**      C.  $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-5\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$ .      D.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$ .

**Lời giải**

Ta có  $2 \cos x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$ .

**Câu 95:** Tất cả nghiệm của phương trình  $2 \cos x = -1$  là

**A.**  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

**B.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

**D.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

**Lời giải**

$$2 \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 96:** Tổng các nghiệm thuộc khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  của phương trình  $4 \sin^2 2x - 1 = 0$  bằng:

**A.**  $\pi.$

**B.**  $\frac{\pi}{3}.$

**C.**  $0.$

**D.**  $\frac{\pi}{6}.$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 4 \sin^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \cos 4x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Do } x = \pm \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{12} \\ x_2 = -\frac{\pi}{12} \\ x_3 = -\frac{5\pi}{12} \\ x_4 = \frac{5\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

**Câu 97:** Phương trình  $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$  có số nghiệm thuộc đoạn  $[0; 2\pi]$  là

**A.** 1

**B.** 2

**C.** 0

**D.** 3

**Lời giải**

Phương trình:

$$\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Vì  $x \in [0; 2\pi]$  nên  $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$ . Vậy số nghiệm phương trình là 2

**Câu 98:** Biết các nghiệm của phương trình  $\cos 2x = -\frac{1}{2}$  có dạng  $x = \frac{\pi}{m} + k\pi$  và  $x = -\frac{\pi}{n} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ; với  $m, n$  là các số nguyên dương. Khi đó  $m + n$  bằng

**A.** 4.

**B.** 3.

**C.** 5.

**D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow m + n = 3 + 3 = 6.$$

**Câu 99:** Phương trình  $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$  có số nghiệm thuộc đoạn  $[0; 2\pi]$  là

A. 1

**B. 2**

C. 0

D. 3

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình:

$$\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vì  $x \in [0; 2\pi]$  nên  $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$ . Vậy số nghiệm phương trình là 2

**Câu 100:** Nghiệm lớn nhất của phương trình  $2\cos 2x - 1 = 0$  trong đoạn  $[0; \pi]$  là:

A.  $x = \pi$ .

B.  $x = \frac{11\pi}{12}$ .

C.  $x = \frac{2\pi}{3}$ .

**D.  $x = \frac{5\pi}{6}$ .**

**Lời giải**

$$\text{Phương trình } 2\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}.$$

$$\text{Xét } x \in [0; \pi] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi \\ 0 \leq -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{7}{6} \end{cases} \text{ mà } k \in \mathbb{Z} \text{ suy ra } \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}.$$

Vậy nghiệm lớn nhất của phương trình  $2\cos 2x - 1 = 0$  trong đoạn  $[0; \pi]$  là  $x = \frac{5\pi}{6}$ .

**Câu 101:** Cho hai phương trình  $\cos 3x - 1 = 0$ ;  $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ . Tập các nghiệm của phương trình đồng thời là nghiệm của phương trình là

**A.**  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ . **B.**  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**C.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  **D.**  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\cos 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = 1 \Leftrightarrow x = k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác ta có tập các nghiệm của phương trình đồng thời là nghiệm của phương trình là  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 102:** Số nghiệm của phương trình  $2 \cos x = \sqrt{3}$  trên đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  là

**A.** 2.

**B.** 1.

**C.** 4.

**D.** 3.

**Lời giải**

$2 \cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Mà  $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  và  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}$ .

**Câu 103:** Số nghiệm của phương trình  $\cos x = \frac{1}{2}$  thuộc đoạn  $[-2\pi; 2\pi]$  là?

**A.** 4.

**B.** 2.

**C.** 3.

**D.** 1.

**Lời giải**

Ta có  $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ .

Xét  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ , do  $x \in [-2\pi; 2\pi]$  và  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $-2\pi \leq \frac{\pi}{3} + k2\pi \leq 2\pi \Rightarrow k = -1; k = 0$ .

Xét  $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ , do  $x \in [-2\pi; 2\pi]$  và  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $-2\pi \leq -\frac{\pi}{3} + k2\pi \leq 2\pi \Rightarrow k = 1; k = 0$ .

Vậy phương trình có 4 nghiệm trên đoạn  $[-2\pi; 2\pi]$ .

**Câu 104:** Phương trình  $\cos 2x + \cos x = 0$  có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng  $(-\pi; \pi)$ ?

**A.** 2.

**B.** 3.

**C.** 1.

**D.** 4.

**Lời giải**

Ta có  $\cos 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos(\pi + x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

$$\text{Vì } -\pi < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} \end{cases}.$$

**Câu 105:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình  $\cos 2x - \cos x = 0$  trên khoảng  $(0; 2\pi)$  bằng  $T$ . Khi đó  $T$  có giá trị là:

- A.**  $T = \frac{7\pi}{6}$ .      **B.**  $T = 2\pi$ .      **C.**  $T = \frac{4\pi}{3}$ .      **D.**  $T = \pi$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cos 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = -x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{3}; (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì  $x \in (0; 2\pi)$  nên  $0 < \frac{k2\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow 0 < k < 3$ .

Do  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k \in \{1; 2\} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}; x = \frac{4\pi}{3}$ .

Vậy  $T = \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi$ .

**Câu 106:** Số nghiệm của phương trình  $2 \cos x = \sqrt{3}$  trên đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  là

- A.** 2.      **B.** 1.      **C.** 4.      **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$2 \cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Mà  $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  và  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}$ .

**Câu 107:** Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\cos x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

- A.**  $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .      **B.**  $S = \{k180^\circ; 75^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ .  
**C.**  $S = \left\{k\pi; \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .      **D.**  $S = \{100^\circ + k180^\circ; 30^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \cos x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là:  $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 108:** Giải phương trình  $3\cos^2 x = 5\cos x$

**A.**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

**B.**  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

**C.**  $x = \pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

**D.**  $x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải**

$$3\cos^2 x = 5\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

+)  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

+)  $\cos x = \frac{5}{3}$

**Câu 109:** Giải phương trình  $5\sin x - \sin 2x = 0$

**A.**  $x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ . **B.**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

**C.**  $x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

**D.** Phương trình vô nghiệm.

**Lời giải**

$$5\sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 5\sin x - 2\sin x \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x(5 - 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 5 - 2\cos x = 0 \end{cases}$$

+)  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

+)  $5 - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{5}{2}$

**Câu 110:** Giải phương trình  $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

**A.**  $S = \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ . **B.**  $S = \left\{ k2\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**C.**  $S = \left\{ k\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**D.**  $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z} \right\}$

**Lời giải**

$$\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = \pi - x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 111:** Nghiệm âm lớn nhất của phương trình  $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$

**A.**  $-\frac{35}{36}\pi$ .

**B.**  $-\frac{11}{36}\pi$ .

**C.**  $-\frac{11\pi}{12}$ .

**D.**  $-\frac{\pi}{12}$ .

**Lời giải**

$$\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = 2x + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có mỗi họ nghiệm lần lượt có các nghiệm âm lớn nhất là:

$$x_1 = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}; x_2 = \frac{\pi}{36} - \frac{\pi}{3} = -\frac{11\pi}{36}$$

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là  $x = -\frac{11}{36}\pi$ .

**Câu 112:** Trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ , phương trình  $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \sin x$  có bao nhiêu nghiệm?

**A.** 4.

**B.** 5.

**C.** 2.

**D.** 3.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \sin x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} - 2x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ \frac{\pi}{6} - 2x = -\frac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} - k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} - \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right) \Rightarrow x \in \left\{\frac{5\pi}{3}; \frac{8\pi}{9}; \frac{14\pi}{9}\right\}.$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ .

**Câu 113:** Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình  $\sin 4x(2 \cos x - \sqrt{2}) = 0$  trên đường tròn lượng giác là

A. 4.

B. 6.

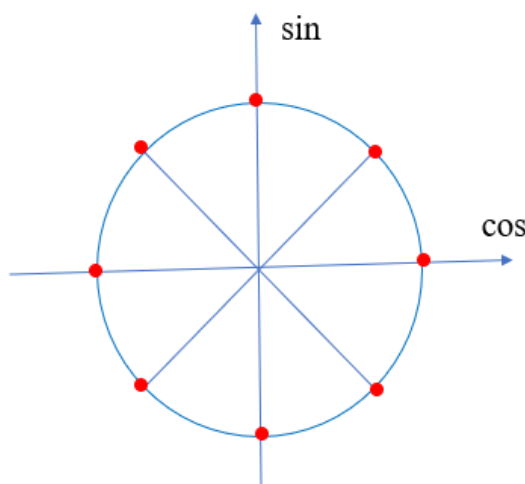
**C. 8.**

D. 10.

**Lời giải**

$$\sin 4x(2 \cos x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ 2 \cos x - \sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = k\pi \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



Vậy có 8 điểm biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác.

**Câu 114:** Các họ nghiệm của phương trình  $\sin 2x - \sqrt{3} \sin x = 0$  là:

A.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$

B.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$

**C.**  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$

D.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$

**Lời giải**

Ta có  $\sin 2x - \sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2 \cos x - \sqrt{3}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN



### HỆ THỐNG BÀI TRẮC NGHIỆM.

#### DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH $\tan x = m$

**Câu 115:** Tìm tất cả các nghiệm của phương trình  $\tan x = m$ , ( $m \in \mathbb{R}$ ).

- A.  $x = \arctan m + k\pi$  hoặc  $x = \pi - \arctan m + k\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ).  
 B.  $x = \pm \arctan m + k\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ).  
 C.  $x = \arctan m + k2\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ).  
 D.  $x = \arctan m + k\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Câu 116:** Phương trình  $\tan x = \sqrt{3}$  có tập nghiệm là

- A.  $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .    B.  $\emptyset$ .    C.  $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .    D.  $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 117:** Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình  $\tan 2x = 1$  trên đường tròn lượng giác là

- A. 6.    B. 2.    C. 8.    D. 4.

**Câu 118:** Nghiệm của phương trình  $\tan(x+1) = 1$  là

- A.  $x = 1 + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).    B.  $x = -1 + \frac{\pi}{4} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).  
 C.  $x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).    D.  $x = -1 + \frac{\pi}{4} + k.180^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Câu 119:** Nghiệm của phương trình  $\tan 3x = \tan x$  là

- A.  $x = \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .    B.  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .    C.  $x = k2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .    D.  $x = \frac{k\pi}{6}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 120:** Phương trình  $\tan(3x - 15^\circ) = \sqrt{3}$  có các nghiệm là:

- A.  $x = 60^\circ + k180^\circ$ .    B.  $x = 75^\circ + k180^\circ$ .    C.  $x = 75^\circ + k60^\circ$ .    D.  $x = 25^\circ + k60^\circ$ .

**Câu 121:** Phương trình lượng giác:  $\sqrt{3} \cdot \tan x + 3 = 0$  có nghiệm là:

- A.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ .    B.  $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ .    C.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ .    D.  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ .

**Câu 122:** Giải phương trình:  $\tan^2 x = 3$  có nghiệm là:

- A.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ .      B.  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ .      C.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ .      D. vô nghiệm.

**Câu 123:** Nghiệm của phương trình  $\sqrt{3} + 3 \tan x = 0$  là:

- A.  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ .      B.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .      C.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ .      D.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ .

**Câu 124:** Giải phương trình  $\sqrt{3} \tan 2x - 3 = 0$ .

- A.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).      B.  $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).  
C.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).      D.  $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Câu 125:** Họ nghiệm của phương trình:  $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$  là

- A.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      B.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
C.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      D.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 126:** Tổng các nghiệm phương trình  $\tan(2x - 15^\circ) = 1$  trên khoảng  $(-90^\circ; 90^\circ)$  bằng

- A.  $30^\circ$ .      B.  $-60^\circ$ .      C.  $0^\circ$ .      D.  $-30^\circ$ .

**Câu 127:** Số nghiệm của phương trình  $\tan 3x - \tan x = 0$  trên nửa khoảng  $[0; 2\pi)$  bằng:

- A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. 4.

**Câu 128:** Phương trình  $\tan x + 1 = 0$  có nghiệm là

- A.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).      B.  $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).  
C.  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).      D.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

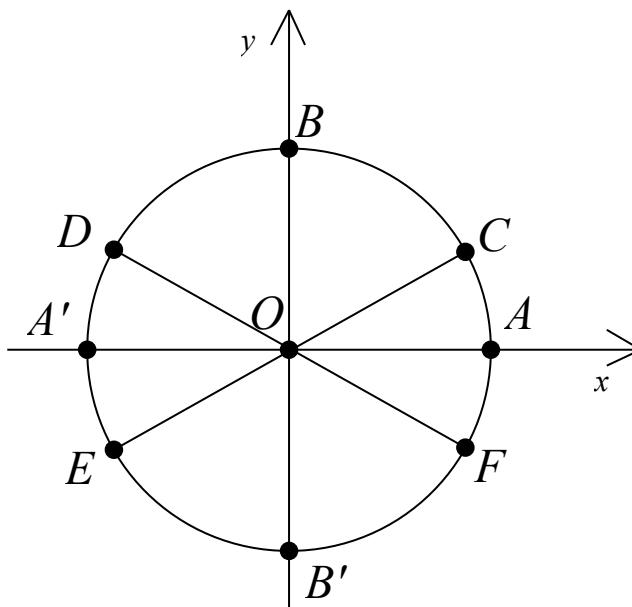
**Câu 129:** Tính tổng các nghiệm trong đoạn  $[0; 30]$  của phương trình:  $\tan x = \tan 3x$

- A.  $55\pi$ .      B.  $\frac{171\pi}{2}$ .      C.  $45\pi$ .      D.  $\frac{190\pi}{2}$ .

**Câu 130:** Trong các nghiệm dương bé nhất của các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm dương nhỏ nhất?

- A.  $\tan 2x = 1$ .      B.  $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ .      C.  $\cot x = 0$ .      D.  $\cot x = -\sqrt{3}$ .

**Câu 131:** Nghiệm của phương trình  $\tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$  được biểu diễn trên đường tròn lượng giác ở hình bên là những điểm nào?



- A. Điểm  $F$ , điểm  $D$ .                      B. Điểm  $C$ , điểm  $F$ .  
C. Điểm  $C$ , điểm  $D$ , điểm  $E$ , điểm  $F$ .                      D. Điểm  $E$ , điểm  $F$ .

**Câu 132:** Số nghiệm của phương trình  $\tan x = \tan \frac{3\pi}{11}$  trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$  là?

- A. 4.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

**Câu 133:** Tổng các nghiệm của phương trình  $\tan 5x - \tan x = 0$  trên nửa khoảng  $[0; \pi)$  bằng:

- A.  $\frac{5\pi}{2}$ .                      B.  $\pi$ .                      C.  $\frac{3\pi}{2}$ .                      D.  $2\pi$ .

**Câu 134:** Tính tổng các nghiệm của phương trình  $\tan(2x - 15^\circ) = 1$  trên khoảng  $(-90^\circ; 90^\circ)$  bằng.

- A.  $0^\circ$ .                      B.  $-30^\circ$ .                      C.  $30^\circ$ .                      D.  $-60^\circ$ .

#### DẠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH $\cot x = m$

**Câu 135:** Giải phương trình  $\cot x = 3$ .

- A.  $x \in \emptyset$ .                      B.  $x = 3 + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).  
C.  $x = \operatorname{arccot} 3 + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).                      D.  $x = \operatorname{arccot} 3 + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Câu 136:** Nghiệm của phương trình  $\cot(x + 2) = 1$  là:

- A.  $x = 2 + \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .                      B.  $x = -2 + \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  
C.  $x = -2 - \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .                      D.  $x = 2 + \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 137:** Tập nghiệm của phương trình  $\cot x = \sqrt{3}$

- A.  $\left\{\frac{-5\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ .                      B.  $\left\{\pm \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

C.  $\left\{\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ .      D.  $\left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Câu 138:** Giải phương trình  $\cot(3x-1) = -\sqrt{3}$

A.  $x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

B.  $x = \frac{5\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $x = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

D.  $x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 139:** Giải phương trình  $\cot \frac{2x}{3} = \sqrt{3}$ .

A.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $x = \frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 140:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình  $\cot x = \sqrt{3}$  trên đoạn  $[0; 2\pi]$  bằng.

A.  $\frac{\pi}{6}$ .

B.  $\frac{7\pi}{6}$ .

C.  $\frac{5\pi}{6}$ .

D.  $\frac{4\pi}{3}$ .

**Câu 141:** Phương trình lượng giác  $3 \cot x - \sqrt{3} = 0$  có nghiệm là:

A.  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ .

B. Vô nghiệm.

C.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ .

D.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ .

**Câu 142:** Phương trình  $2 \cot x - \sqrt{3} = 0$  có nghiệm là

A.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

C.  $x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 143:** Giải phương trình  $\cot(3x-1) = -\sqrt{3}$ .

A.  $x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $x = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 144:** Số nghiệm của phương trình  $3 \cot 3x - \sqrt{3} = 0$  trên khoảng  $\left(-\frac{2\pi}{9}; \frac{\pi}{9}\right)$  là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Câu 145:** Nghiệm của phương trình  $\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$  có dạng  $x = -\frac{\pi}{m} + \frac{k\pi}{n}$ , với  $k \in \mathbb{Z}$  và  $m, n \in \mathbb{N}^*$ .

Khi đó  $m - n$  bằng

A. -5.

B. 5.

C. 3.

D. -3.

**Câu 146:** Số nghiệm của phương trình  $\cot 20x = 1$  trên đoạn  $[-50\pi; 0]$  là

A. 980.

B. 1001.

C. 1000.

D. 981.

**Câu 147:** Hỏi trên đoạn  $[0; 2018\pi]$ , phương trình  $\sqrt{3} \cot x - 3 = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

A. 2018.

B. 6340.

C. 6339.

D. 2017.

**Câu 148:** Phương trình  $\cot 3x = \cot x$  có các nghiệm là:

A.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ . B.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . C.  $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ . D.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

## DẠNG 5. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP

**Câu 149:** Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm?

A.  $\tan x = 99$ . B.  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ . C.  $\cot 2018x = 2017$ . D.  $\sin 2x = -\frac{3}{4}$ .

**Câu 150:** Phương trình  $\sin x = \cos x$  có số nghiệm thuộc đoạn  $[-\pi; \pi]$  là:

A. 3

B. 5

C. 2

D. 4

**Câu 151:** Giải phương trình  $\left(2 \cos \frac{x}{2} - 1\right) \left(\sin \frac{x}{2} + 2\right) = 0$

A.  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

B.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

C.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$

D.  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$

**Câu 152:** Phương trình  $8 \cdot \cos 2x \cdot \sin 2x \cdot \cos 4x = -\sqrt{2}$  có nghiệm là

A.  $\begin{cases} x = \frac{-\pi}{32} + k \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{32} + k \frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{16} + k \frac{\pi}{8} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{8} + k \frac{\pi}{8} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{32} + k \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{32} + k \frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 153:** Tìm số nghiệm của phương trình  $\sin(\cos 2x) = 0$  trên  $[0; 2\pi]$ .

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

**Câu 154:** Trong khoảng  $(0; \pi)$ , phương trình  $\cos 4x + \sin x = 0$  có tập nghiệm là  $S$ . Hãy xác định  $S$ .

A.  $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{10}; \frac{7\pi}{10} \right\}$ .

B.  $S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{10} \right\}$ .

C.  $S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{10}; \frac{7\pi}{10} \right\}$ .

D.  $S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{10}; \frac{7\pi}{10} \right\}$ .

**Câu 155:** Phương trình  $\sin 2x = \cos x$  có nghiệm là

**A.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**B.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**C.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**D.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 156:** Phương trình  $\sin x = \cos x$  có bao nhiêu nghiệm  $x \in (0; 5\pi)$ ?

- A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

**Câu 157:** Nghiệm của phương trình  $\sin 3x = \cos x$  là

- A.**  $x = k\pi$ ;  $x = k\frac{\pi}{2}$ . **B.**  $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ ;  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .  
**C.**  $x = k2\pi$ ;  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ . **D.**  $x = k\pi$ ;  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

**Câu 158:** Phương trình  $\sin 2x + \cos x = 0$  có tổng các nghiệm trong khoảng  $(0; 2\pi)$  bằng

- A.**  $2\pi$ . **B.**  $3\pi$ . **C.**  $5\pi$ . **D.**  $6\pi$ .

**Câu 159:** Số nghiệm chung của hai phương trình  $4\cos^2 x - 3 = 0$  và  $2\sin x + 1 = 0$  trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$  bằng

- A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

**Câu 160:** Giải phương trình  $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$ .

- A.**  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . **B.**  $x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ . **C.**  $x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ . **D.**  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 161:** Tìm số nghiệm của phương trình  $\sin x = \cos 2x$  thuộc đoạn  $[0; 20\pi]$ .

- A.** 20. **B.** 40. **C.** 30. **D.** 60.

**Câu 162:** Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình  $\tan 3x + \cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$  trên đường tròn lượng giác là?

- A.** 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

**Câu 163:** Phương trình  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0$  có tập nghiệm được biểu diễn bởi bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

**Câu 164:** Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\cos x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

- A.**  $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **B.**  $S = \{k180^\circ; 75^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ .  
**C.**  $S = \left\{k\pi; \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **D.**  $S = \{100^\circ + k180^\circ; 30^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 165:** Giải phương trình  $5\sin x - \sin 2x = 0$

- A.  $x = k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).    B.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).  
 C.  $x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).    D. Phương trình vô nghiệm.

**Câu 166:** Giải phương trình  $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

- A.  $S = \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ .    B.  $S = \left\{k2\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}$ .  
 C.  $S = \left\{k\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}$ .    D.  $S = \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}$

**Câu 167:** Nghiệm âm lớn nhất của phương trình  $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$

- A.  $-\frac{35}{36}\pi$ .    B.  $-\frac{11}{36}\pi$ .    C.  $-\frac{11\pi}{12}$ .    D.  $-\frac{\pi}{12}$ .

**Câu 168:** Các họ nghiệm của phương trình  $\sin 2x - \sqrt{3} \sin x = 0$  là:

- A.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$ .    B.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ .    C.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$ .    D.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$ .

**Câu 169:** Giải phương trình  $\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2}\right) = 4$

**Câu 170:** Số điểm phân biệt biểu diễn các nghiệm phương trình  $\sin 2x - \sin x = 0$  trên đường tròn lượng giác là

- A. 4    B. 1.    C. 2.    D. 3.

**Câu 171:** Số nghiệm phương trình  $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$  thuộc đoạn  $[2\pi; 4\pi]$  là

- A. 7.    B. 6.    C. 4.    D. 5.

**Câu 172:** Giải phương trình sau:  $4\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} - \frac{2\sqrt{3}\sin 3x}{\sin 2x}$

**Câu 173:** Cho phương trình:  $\frac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$ . Phương trình có bao nhiêu nghiệm trên khoảng  $(-2021\pi; 2021\pi)$ ?

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN



### HỆ THỐNG BÀI TRẮC NGHIỆM.

#### DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH $\tan x = m$

**Câu 115:** Tìm tất cả các nghiệm của phương trình  $\tan x = m$ , ( $m \in \mathbb{R}$ ).

- A.  $x = \arctan m + k\pi$  hoặc  $x = \pi - \arctan m + k\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ).  
 B.  $x = \pm \arctan m + k\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ).  
 C.  $x = \arctan m + k2\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ).  
 D.  $x = \arctan m + k\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Lời giải**

Ta có:  $\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Câu 116:** Phương trình  $\tan x = \sqrt{3}$  có tập nghiệm là

- A.  $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . B.  $\emptyset$ . C.  $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . D.  $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

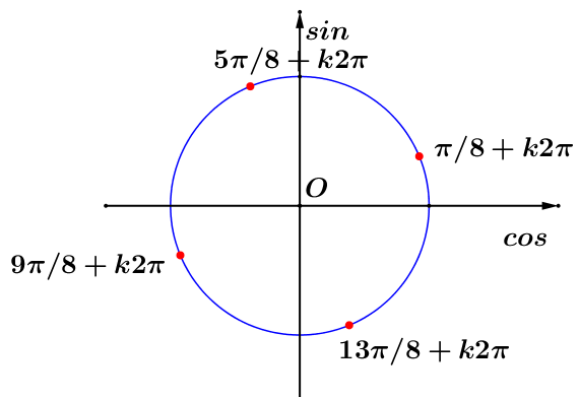
**Câu 117:** Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình  $\tan 2x = 1$  trên đường tròn lượng giác là

- A. 6. B. 2. C. 8. D. 4.

**Lời giải**

Ta có  $\tan 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Biểu diễn trên đường tròn lượng giác ta được



Vậy số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình  $\tan 2x = 1$  là 4.

**Cách khác**

Họ cung  $\alpha + \frac{k2\pi}{n} (k, n \in \mathbb{Z})$  có  $n$  điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác nên

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{k2\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$  có 4 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giá **C**.

**Câu 118:** Nghiệm của phương trình  $\tan(x+1) = 1$  là

**A.**  $x = 1 + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ . **B.**  $x = -1 + \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**C.**  $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ . **D.**  $x = -1 + \frac{\pi}{4} + k.180^\circ (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\tan(x+1) = 1 \Leftrightarrow x+1 = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -1 + \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 119:** Nghiệm của phương trình  $\tan 3x = \tan x$  là

**A.**  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ . **B.**  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . **C.**  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ . **D.**  $x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

Trình bày lại

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (*)$$

Ta có  $\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ . Kết hợp điều kiện (\*) suy ra  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**Câu 120:** Phương trình  $\tan(3x - 15^\circ) = \sqrt{3}$  có các nghiệm là:

**A.**  $x = 60^\circ + k180^\circ$ . **B.**  $x = 75^\circ + k180^\circ$ . **C.**  $x = 75^\circ + k60^\circ$ . **D.**  $x = 25^\circ + k60^\circ$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\tan(3x - 15^\circ) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan(3x - 15^\circ) = \tan 60^\circ \Leftrightarrow 3x - 15^\circ = 60^\circ + k180^\circ$

$$\Leftrightarrow x = 25^\circ + k60^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 121:** Phương trình lượng giác:  $\sqrt{3} \cdot \tan x + 3 = 0$  có nghiệm là:

- A.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ .      B.  $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ .      C.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ .      **D.  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ .**

**Lời giải**

$$\sqrt{3} \cdot \tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

**Câu 122:** Giải phương trình:  $\tan^2 x = 3$  có nghiệm là:

- A.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ .      B.  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ .      **C.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ .**      D. vô nghiệm.

**Lời giải**

$$\tan^2 x = 3 \Leftrightarrow \tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 123:** Nghiệm của phương trình  $\sqrt{3} + 3 \tan x = 0$  là:

- A.  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ .**      B.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .      C.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ .      D.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ .

**Lời giải**

$$\sqrt{3} + 3 \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 124:** Giải phương trình  $\sqrt{3} \tan 2x - 3 = 0$ .

- A.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .      B.  $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .  
C.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .      **D.  $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .**

**Lời giải**

$$\sqrt{3} \tan 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 125:** Họ nghiệm của phương trình:  $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$  là

- A.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .**      B.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
C.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      D.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 126:** Tổng các nghiệm phương trình  $\tan(2x - 15^\circ) = 1$  trên khoảng  $(-90^\circ; 90^\circ)$  bằng

A.  $30^\circ$ .

B.  $-60^\circ$ .

C.  $0^\circ$ .

D.  $-30^\circ$ .

**Lời giải**

Ta có phương trình  $\tan(2x - 15^\circ) = 1 \Leftrightarrow 2x - 15^\circ = 45^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ + k90^\circ$

với  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Xét: } -90^\circ < 30^\circ + k90^\circ < 90^\circ \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < k < \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -60^\circ \\ x_2 = 30^\circ \end{cases}.$$

Vậy  $x_1 + x_2 = -30^\circ$ .

**Câu 127:** Số nghiệm của phương trình  $\tan 3x - \tan x = 0$  trên nửa khoảng  $[0; 2\pi)$  bằng:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

**Lời giải**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) (*)$$

$$\text{Ta có: } \tan 3x - \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vì } 0 \leq x < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{k\pi}{2} < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq m < 4. \text{ Mà } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m = \{0; 1; 2; 3\}.$$

$$\text{Khi đó nghiệm } x \text{ nhận giá trị tương ứng trên nửa khoảng } [0; \pi) \text{ là: } x = \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

Vậy số nghiệm cần tìm là 4.

**Câu 128:** Phương trình  $\tan x + 1 = 0$  có nghiệm là

A.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ . B.  $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 129:** Tính tổng các nghiệm trong đoạn  $[0; 30]$  của phương trình:  $\tan x = \tan 3x$

A.  $55\pi$ .

B.  $\frac{171\pi}{2}$ .

C.  $45\pi$ .

D.  $\frac{190\pi}{2}$ .

**Lời giải**

Điều kiện để phương trình có nghĩa  $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases} (*)$

Khi đó, phương trình  $3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$  so sánh với đk

$$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, x \in [0; 30] \Rightarrow k = \{0; \dots; 4\} \Rightarrow x \in \{0; \pi; 2\pi; \dots; 9\pi\}$$

Vậy, tổng các nghiệm trong đoạn  $[0; 30]$  của phương trình là:  $45\pi$ .

**Câu 130:** Trong các nghiệm dương bé nhất của các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm dương nhỏ nhất?

**A.**  $\tan 2x = 1$ .      **B.**  $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ .      **C.**  $\cot x = 0$ .      **D.**  $\cot x = -\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

**A.**  $\tan 2x = 1 \Leftrightarrow \tan 2x = \tan \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

**B.**  $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

$\Rightarrow$  Nghiệm dương bé nhất là  $x = \frac{7\pi}{12}$ .

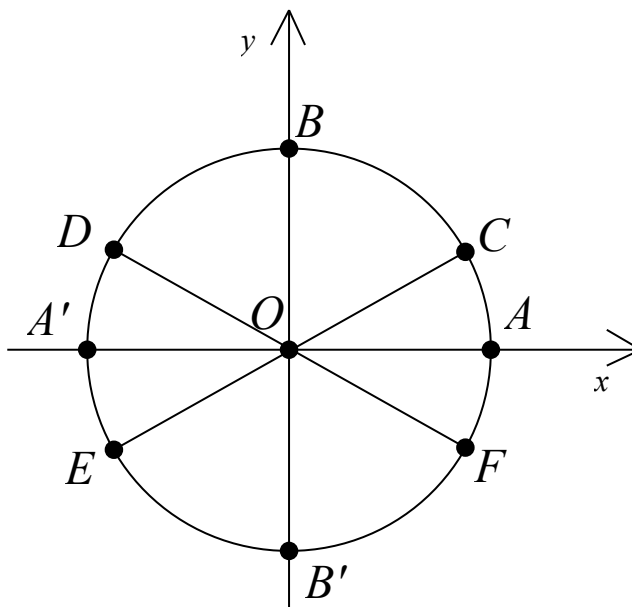
**C.**  $\cot x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow$  Nghiệm dương bé nhất là  $x = \frac{\pi}{2}$ .

**D.**  $\cot x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Chọn  $k = 1 \Rightarrow$  Nghiệm dương bé nhất là  $x = \frac{5\pi}{6}$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất là  $x = \frac{\pi}{8}$  nên ta chọn đáp án **A.**

**Câu 131:** Nghiệm của phương trình  $\tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$  được biểu diễn trên đường tròn lượng giác ở hình bên là những điểm nào?



**A.** Điểm  $F$ , điểm  $D$ .

**B.** Điểm  $C$ , điểm  $F$ .

**C.** Điểm  $C$ , điểm  $D$ , điểm  $E$ , điểm  $F$ .

**D.** Điểm  $E$ , điểm  $F$ .

**Lời giải**

$$\tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Với } 0 < x < 2\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} \text{ hoặc } x = \frac{2\pi}{3}.$$

**Câu 132:** Số nghiệm của phương trình  $\tan x = \tan \frac{3\pi}{11}$  trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$  là?

**A.** 4.

**B.** 1.

**C.** 2.

**D.** 3.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \tan x = \tan \frac{3\pi}{11} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{11} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Do } x \in \left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right) \rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{11} + k\pi < 2\pi \xrightarrow[\text{CASIO}]{\text{tính}} -0,027 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0; 1\}.$$

**Câu 133:** Tổng các nghiệm của phương trình  $\tan 5x - \tan x = 0$  trên nửa khoảng  $[0; \pi)$  bằng:

**A.**  $\frac{5\pi}{2}$ .

**B.**  $\pi$ .

**C.**  $\frac{3\pi}{2}$ .

**D.**  $2\pi$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } \tan 5x - \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan 5x = \tan x \Leftrightarrow 5x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vì } x \in [0; \pi), \text{ suy ra } 0 \leq \frac{k\pi}{4} < \pi \Leftrightarrow 0 \leq k < 4 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = \{0; 1; 2; 3\}$$

$$\text{Suy ra các nghiệm của phương trình trên } [0; \pi) \text{ là } \left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right\}$$

$$\text{Suy ra } 0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

**Câu 134:** Tính tổng các nghiệm của phương trình  $\tan(2x - 15^\circ) = 1$  trên khoảng  $(-90^\circ; 90^\circ)$  bằng.

A.  $0^\circ$ .

B.  $-30^\circ$ .

C.  $30^\circ$ .

D.  $-60^\circ$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\tan(2x - 15^\circ) = 1 \Leftrightarrow 2x - 15^\circ = 45^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ + k90^\circ (k \in \mathbb{Z})$ .

Do  $x \in (-90^\circ; 90^\circ) \rightarrow -90^\circ < 30^\circ + k90^\circ < 90^\circ \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < k < \frac{2}{3}$

$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k = -1 \rightarrow x = -60^\circ \\ k = 0 \rightarrow x = 30^\circ \end{cases} \rightarrow -60^\circ + 30^\circ = -30^\circ$ .

#### DẠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH $\cot x = m$

**Câu 135:** Giải phương trình  $\cot x = 3$ .

A.  $x \in \emptyset$ .

B.  $x = 3 + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $x = \operatorname{arccot} 3 + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $x = \operatorname{arccot} 3 + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cot x = 3 \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} 3 + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 136:** Nghiệm của phương trình  $\cot(x + 2) = 1$  là:

A.  $x = 2 + \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

B.  $x = -2 + \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $x = -2 - \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

D.  $x = 2 + \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

$\cot(x + 2) = 1 \Leftrightarrow \cot(x + 2) = \cot \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = -2 + \frac{\pi}{4} + k\pi$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 137:** Tập nghiệm của phương trình  $\cot x = \sqrt{3}$

A.  $\left\{ \frac{-5\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

B.  $\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

C.  $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

D.  $\left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{-5\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 138:** Giải phương trình  $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3}$

A.  $x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

B.  $x = \frac{5\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $x = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

D.  $x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\cot(3x-1) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 3x-1 = \frac{5\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 139:** Giải phương trình  $\cot \frac{2x}{3} = \sqrt{3}$ .

A.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k3\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $x = \frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cot \frac{2x}{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot \frac{2x}{3} = \cot \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{2x}{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k3\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 140:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình  $\cot x = \sqrt{3}$  trên đoạn  $[0; 2\pi]$  bằng.

A.  $\frac{\pi}{6}$ .

B.  $\frac{7\pi}{6}$ .

C.  $\frac{5\pi}{6}$ .

D.  $\frac{4\pi}{3}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$ .

Mà  $x \in [0; 2\pi]$  nên phương trình có các nghiệm thỏa mãn là  $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}$ .

Vậy tổng các nghiệm là  $\frac{4\pi}{3}$ .

**Câu 141:** Phương trình lượng giác  $3 \cot x - \sqrt{3} = 0$  có nghiệm là:

A.  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ .

B. Vô nghiệm.

C.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ .

D.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ .

**Lời giải**

Ta có  $3 \cot x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cot x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot \left( \frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 142:** Phương trình  $2 \cot x - \sqrt{3} = 0$  có nghiệm là

A.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

C.  $x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải**

Ta có  $2 \cot x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cot x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

**Câu 143:** Giải phương trình  $\cot(3x-1) = -\sqrt{3}$ .

**A.**  $x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$

**B.**  $x = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$

**D.**  $x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

**Lời giải.**

Ta có  $\cot(3x-1) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot(3x-1) = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right).$

$\Leftrightarrow 3x-1 = \frac{-\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \xrightarrow{k=1} x = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{18}.$

**Câu 144:** Số nghiệm của phương trình  $3 \cot 3x - \sqrt{3} = 0$  trên khoảng  $\left(-\frac{2\pi}{9}; \frac{\pi}{9}\right)$  là

**A.** 0.

**B.** 1.

**C.** 2.

**D.** 3.

**Lời giải**

+) Ta có  $\tan 3x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

+)  $x \in \left(-\frac{2\pi}{9}; \frac{\pi}{9}\right) \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{9} < \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} < \frac{\pi}{9} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < \frac{k\pi}{3} < 0 \Leftrightarrow -1 < k < 0.$

Vì  $k \in \mathbb{Z}$  nên không có giá trị nào của k thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nào trên khoảng  $\left(-\frac{2\pi}{9}; \frac{\pi}{9}\right).$

**Câu 145:** Nghiệm của phương trình  $\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$  có dạng  $x = -\frac{\pi}{m} + \frac{k\pi}{n}$ , với  $k \in \mathbb{Z}$  và  $m, n \in \mathbb{N}^*.$

Khi đó  $m-n$  bằng

**A.** -5.

**B.** 5.

**C.** 3.

**D.** -3.

**Lời giải**

Ta có  $\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy  $\begin{cases} m=6 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow m-n=5.$

**Câu 146:** Số nghiệm của phương trình  $\cot 20x = 1$  trên đoạn  $[-50\pi; 0]$  là

**A.** 980.

**B.** 1001.

**C.** 1000.

**D.** 981.

**Lời giải**

Ta có  $\cot 20x = 1 \Leftrightarrow 20x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{80} + k\frac{\pi}{20}, k \in \mathbb{Z}.$

Với  $x = \frac{\pi}{80} + k\frac{\pi}{20}, -50\pi \leq x \leq 0$  suy ra  $-50\pi \leq \frac{\pi}{80} + k\frac{\pi}{20} \leq 0 \Leftrightarrow -50\pi - \frac{\pi}{80} \leq k\frac{\pi}{20} \leq -\frac{\pi}{80}$

$\Leftrightarrow -1000 - \frac{1}{4} \leq k \leq -\frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}.$  Do đó  $k \in \{-1000, -999, \dots, -1\}.$

Vậy phương trình đã cho có 1000 nghiệm trên  $[-50\pi; 0]$ .

**Câu 147:** Hỏi trên đoạn  $[0; 2018\pi]$ , phương trình  $\sqrt{3} \cot x - 3 = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

**A.** 2018.

**B.** 6340.

**C.** 6339.

**D.** 2017.

**Lời giải**

Ta có:  $\sqrt{3} \cot x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .

Vì  $x \in [0; 2018\pi]$  nên ta có:  $0 \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \leq 2018\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k \leq -\frac{1}{6} + 2018$ .

Vì  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k \in \{0; 1; 2; \dots; 2017\}$ .

Vậy phương trình đã cho có 2018 nghiệm.

**Câu 148:** Phương trình  $\cot 3x = \cot x$  có các nghiệm là:

**A.**  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**B.**  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**C.**  $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

**D.**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} \sin 3x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\frac{\pi}{3} \\ x \neq k\pi \end{cases}$$

Phương trình tương đương:

$$\frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow \sin x \cos 3x - \cos x \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}$$

Kết hợp điều kiện ta được các nghiệm của phương trình:  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

## DẠNG 5. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP

**Câu 149:** Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm?

**A.**  $\tan x = 99$ .

**B.**  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ .

**C.**  $\cot 2018x = 2017$ .

**D.**  $\sin 2x = -\frac{3}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Vì  $\frac{2\pi}{3} > 1$  là nên phương trình  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$  vô nghiệm.

**Câu 150:** Phương trình  $\sin x = \cos x$  có số nghiệm thuộc đoạn  $[-\pi; \pi]$  là:

**A.** 3

**B.** 5

**C.** 2

**D.** 4

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Trong  $[-\pi; \pi]$  phương trình có hai nghiệm

**Câu 151:** Giải phương trình  $\left(2\cos\frac{x}{2} - 1\right)\left(\sin\frac{x}{2} + 2\right) = 0$

A.  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

B.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

C.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$

**D.  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$**

**Lời giải**

**Chọn D**

Vì  $-1 \leq \sin \frac{x}{2} \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin \frac{x}{2} + 2 > 0$

Vậy phương trình tương đương

$$2\cos\frac{x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

**Câu 152:** Phương trình  $8.\cos 2x.\sin 2x.\cos 4x = -\sqrt{2}$  có nghiệm là

**A.  $\begin{cases} x = \frac{-\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$**

B.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{8} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{8} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**Lời giải**

Ta có:

$$8.\cos 2x.\sin 2x.\cos 4x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow 4.\sin 4x.\cos 4x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow 2.\sin 8x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin 8x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 8x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = \frac{-\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 153:** Tìm số nghiệm của phương trình  $\sin(\cos 2x) = 0$  trên  $[0; 2\pi]$ .

A. 2.

B. 1.

**C. 4.**

D. 3.

**Lời giải**

Ta có  $\sin(\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Vì  $\cos 2x \in [-1; 1] \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k_1 \frac{\pi}{2} \ (k_1 \in \mathbb{Z})$ .

$x \in [0; 2\pi] \Rightarrow k_1 \in \{0; 1; 2; 3\}$ .

Vậy phương trình có 4 nghiệm trên  $[0; 2\pi]$ .

**Câu 154:** Trong khoảng  $(0; \pi)$ , phương trình  $\cos 4x + \sin x = 0$  có tập nghiệm là  $S$ . Hãy xác định  $S$ .

**A.**  $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{10}; \frac{7\pi}{10} \right\}$ .

**B.**  $S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{10} \right\}$ .

**C.**  $S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{10}; \frac{7\pi}{10} \right\}$ .

**D.**  $S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{10}; \frac{7\pi}{10} \right\}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\cos 4x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = -\sin x \Leftrightarrow \cos 4x = \sin(-x) \Leftrightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \\ 4x = -\frac{\pi}{2} - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì  $x \in (0; \pi)$  nên  $S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{10}; \frac{7\pi}{10} \right\}$ .

**Câu 155:** Phương trình  $\sin 2x = \cos x$  có nghiệm là

**A.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$ .

**B.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$ .

**C.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$ .

**D.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải**

$$\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 156:** Phương trình  $\sin x = \cos x$  có bao nhiêu nghiệm  $x \in (0; 5\pi)$ ?

**A.** 3.

**B.** 4.

**C.** 5.

**D.** 6.

**Lời giải**

Ta có  $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Vì  $x \in (0; 5\pi)$  nên ta có  $0 < \frac{\pi}{4} + k\pi < 5\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{19}{4}, k \in \mathbb{Z}$ .

Do đó,  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

Suy ra phương trình có 5 nghiệm thuộc  $(0; 5\pi)$  là  $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}$ .

**Câu 157:** Nghiệm của phương trình  $\sin 3x = \cos x$  là

**A.**  $x = k\pi; x = k\frac{\pi}{2}$ . **B.**  $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

**C.**  $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ .

**D.**  $x = k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

**Lời giải**

$$\sin 3x = \cos x \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

**Câu 158:** Phương trình  $\sin 2x + \cos x = 0$  có tổng các nghiệm trong khoảng  $(0; 2\pi)$  bằng

**A.**  $2\pi$ .

**B.**  $3\pi$ .

**C.**  $5\pi$ .

**D.**  $6\pi$ .

**Lời giải**

$$\sin 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cos x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\sin x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

$$x \in (0; 2\pi) \Rightarrow x = \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right\}$$

$$\Rightarrow S = 5\pi.$$

**Câu 159:** Số nghiệm chung của hai phương trình  $4\cos^2 x - 3 = 0$  và  $2\sin x + 1 = 0$  trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

bằng

**A.**  $2$ .

**B.**  $4$ .

**C.**  $3$ .

**D.**  $1$ .

**Lời giải**

□ Trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$  phương trình  $2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$  có hai nghiệm là  $-\frac{\pi}{6}$  và  $\frac{7\pi}{6}$ .

□ Cả hai nghiệm này đều thỏa phương trình  $4\cos^2 x - 3 = 0$ .

□ Vậy hai phương trình có 2 nghiệm chung.

**Câu 160:** Giải phương trình  $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$ .

- A.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      B.  $x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ .      C.  $x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ .      D.  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x \Leftrightarrow \cos 6x - \cos 8x = \cos 2x - \cos 8x$ .

$$\Leftrightarrow \cos 6x = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 2x + k2\pi \\ 6x = -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 161:** Tìm số nghiệm của phương trình  $\sin x = \cos 2x$  thuộc đoạn  $[0; 20\pi]$ .

- A. 20.      B. 40.      C. 30.      D. 60.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có } \sin x = \cos 2x \Leftrightarrow \sin x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -1 \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Xét  $x \in [0; 20\pi]$ :

$$\text{Với } x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \text{ ta có } 0 \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 20\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{119}{12}, \text{ do } k \in \mathbb{Z} \text{ nên.}$$

$$\text{Với } x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \text{ ta có } 0 \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \leq 20\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{115}{12}, \text{ do } k \in \mathbb{Z} \text{ nên.}$$

$$\text{Với } x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \text{ ta có } 0 \leq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq 20\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{41}{4}, \text{ do } k \in \mathbb{Z} \text{ nên.}$$

Vậy phương trình đã cho có 30 nghiệm thuộc đoạn  $[0; 20\pi]$ .

**Câu 162:** Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình  $\tan 3x + \cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$  trên đường tròn lượng

giác là?

- A. 4.      B. 2.      C. 0.      D. 1.

**Lời giải**

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (*)$$

Ta có  $\tan 3x = -\cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \tan 3x = -\tan(-x)$

$\Leftrightarrow \tan 3x = \tan x$

$\Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Kết hợp điều kiện (\*) suy ra  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  nghĩa là có 2 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giá **C**.

**Câu 163:** Phương trình  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0$  có tập nghiệm được biểu diễn bởi bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác?

**A.** 1.

**B.** 2.

**C.** 4.

**D.** 3.

**Lời giải**

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pi - x + \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{8} + k\pi.$$

Cung  $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$  biểu diễn được hai điểm trên đường tròn lượng giác.

**Câu 164:** Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\cos x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

**A.**  $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

**B.**  $S = \{k180^\circ; 75^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**C.**  $S = \left\{k\pi; \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

**D.**  $S = \{100^\circ + k180^\circ; 30^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \cos x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là:  $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

**Câu 165:** Giải phương trình  $5\sin x - \sin 2x = 0$

**A.**  $x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$  **B.**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

**D.** Phương trình vô nghiệm.

**Lời giải**

$$5 \sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 5 \sin x - 2 \sin x \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x (5 - 2 \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 5 - 2 \cos x = 0 \end{cases}$$

$$+) \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$+) 5 - 2 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{5}{2}$$

**Câu 166:** Giải phương trình  $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

**A.**  $S = \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . **B.**  $S = \left\{k2\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**C.**  $S = \left\{k\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ . **D.**  $S = \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) &= 0 \Leftrightarrow \sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} &(k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

**Câu 167:** Nghiệm âm lớn nhất của phương trình  $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$

**A.**  $-\frac{35}{36}\pi$ . **B.**  $-\frac{11}{36}\pi$ . **C.**  $-\frac{11\pi}{12}$ . **D.**  $-\frac{\pi}{12}$ .

**Lời giải**

$$\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = 2x + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có mỗi họ nghiệm lần lượt có các nghiệm âm lớn nhất là:

$$x_1 = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}; x_2 = \frac{\pi}{36} - \frac{\pi}{3} = -\frac{11\pi}{36}$$

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là  $x = -\frac{11}{36}\pi$ .

**Câu 168:** Các họ nghiệm của phương trình  $\sin 2x - \sqrt{3} \sin x = 0$  là:

**A.**  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$       **B.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$       **C.**  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$       **D.**  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$

**Lời giải**

Ta có  $\sin 2x - \sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

**Câu 169:** Giải phương trình  $\cot x + \sin x \left( 1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2} \right) = 4$

**Lời giải**

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos \frac{x}{2} \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot x + \sin x \left( 1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2} \right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \left( 1 + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right) = 4 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \left( \frac{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin x \cdot \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}} \right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \left( \frac{\cos \left( x - \frac{x}{2} \right)}{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}} \right) = 4 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \Leftrightarrow 4 \sin x \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}, \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ Thỏa mãn điều kiện}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ;  $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

**Câu 170:** Số điểm phân biệt biểu diễn các nghiệm phương trình  $\sin 2x - \sin x = 0$  trên đường tròn lượng giác là

**A. 4**

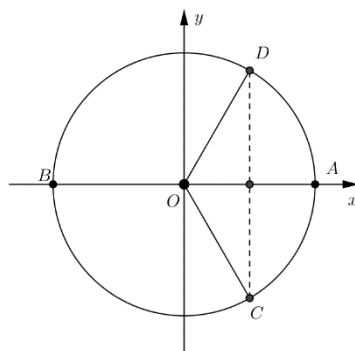
**B. 1.**

**C. 2.**

**D. 3.**

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \sin 2x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x (2 \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



Các điểm biểu diễn tập nghiệm trên đường tròn lượng giác như sau:

+ Các điểm  $A, B$  biểu diễn cho nghiệm của phương trình  $\sin x = 0$ .

+ Các điểm  $C, D$  biểu diễn cho nghiệm của phương trình  $\cos x = \frac{1}{2}$ .

Vậy có tất cả 4 điểm biểu diễn nghiệm của phương trình.

**Câu 171:** Số nghiệm phương trình  $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$  thuộc đoạn  $[2\pi; 4\pi]$  là

A. 7.

**B. 6.**

C. 4.

D. 5.

**Lời giải**

Điều kiện:  $\cos x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi$ .

$$\text{Ta có } \frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0 \Rightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

So với điều kiện nghiệm của phương trình là  $x = \frac{k\pi}{3}$  với  $k \in \mathbb{Z}, k \neq 3(2l+1)$

Vì  $2\pi \leq x \leq 4\pi \Leftrightarrow 2\pi \leq \frac{k\pi}{3} \leq 4\pi \Leftrightarrow 6 \leq k \leq 12$  nên ta chọn  $k \in \{6, 7, 8, 10, 11, 12\}$ .

**Câu 172:** Giải phương trình sau:  $4 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} - \frac{2\sqrt{3} \sin 3x}{\sin 2x}$

**Lời giải**

Điều kiện:  $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

$$\text{Ta có: } 4 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} - \frac{2\sqrt{3} \sin 3x}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^2 x \cos x = \sqrt{3} \sin x - \sqrt{3} \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \cos 2x) \cos x = \sqrt{3} \sin x - \sqrt{3} \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x - 2 \cos 2x \cos x = \sqrt{3} \sin x - \sqrt{3} \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x - (\cos 3x + \cos x) = \sqrt{3} \sin x - \sqrt{3} \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{3} \sin x - \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

So với điều kiện, suy ra phương trình có 1 họ nghiệm:  $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 173:** Cho phương trình:  $\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$ . Phương trình có bao nhiêu nghiệm trên khoảng  $(-2021\pi; 2021\pi)$ ?

**Lời giải**

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \sin x \neq 1 \\ \sin x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3} - \sqrt{3} \sin x + 2\sqrt{3} \sin x - 2\sqrt{3} \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3} \sin x + \sqrt{3} \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3} \sin x = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta có } x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}$$

$$x \in (-2021\pi; 2021\pi) \text{ nên } -2021\pi < -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} < 2021\pi \Leftrightarrow -2021 < -\frac{1}{18} + \frac{k2}{3} < 2021$$

$$\Rightarrow -3031,42 < k < 3031,58. \text{ Do } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{-3031; -3028; \dots; 3031\}$$

$$\Rightarrow k \in \{-3031; -3030; \dots; 3031\}$$

Vậy có  $3031 - (-3031) + 1 = 6063$  nghiệm thỏa mãn.

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

### II HỆ THỐNG BÀI TRẮC NGHIỆM.

- Câu 1:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình:  $\sin x = m + 1$  có nghiệm?  
**A.**  $1 \leq m$ . **B.**  $0 \leq m \leq 1$ . **C.**  $m \leq 0$ . **D.**  $-2 \leq m \leq 0$ .
- Câu 2:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\sin x = m$  có nghiệm thực.  
**A.**  $m \geq 0$ . **B.**  $m < 0$ . **C.**  $-1 < m < 1$ . **D.**  $-1 \leq m \leq 1$ .
- Câu 3:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $3\sin 2x - m^2 + 5 = 0$  có nghiệm?  
**A.** 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 7.
- Câu 4:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình:  $3\sin x + m - 1 = 0$  có nghiệm?  
**A.** 7 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 5
- Câu 5:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\cos x - m = 0$  vô nghiệm.  
**A.**  $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$  **B.**  $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$   
**C.**  $m \in (1; +\infty)$  **D.**  $m \in (-\infty; -1)$
- Câu 6:** Cho phương trình  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2$ . Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm?  
**A.** Không tồn tại  $m$ . **B.**  $m \in [-1; 3]$ . **C.**  $m \in [-3; -1]$ . **D.**  $m \in \mathbb{R}$ .
- Câu 7:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\cos x = m + 1$  có nghiệm?  
**A.** Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 8:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-2018; 2018]$  để phương trình  $m \cos x + 1 = 0$  có nghiệm?  
**A.** 4036. **B.** 4037. **C.** 2018. **D.** 2019.
- Câu 9:** Tìm  $m$  để phương trình  $\sin 3x - 6 - 5m = 0$  có nghiệm.  
**A.**  $-\frac{7}{5} \leq m \leq -1$ . **B.**  $-\frac{7}{5} < m < -1$ . **C.**  $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -\frac{7}{5} \end{cases}$ . **D.**  $\begin{cases} m > -1 \\ m < -\frac{7}{5} \end{cases}$ .
- Câu 10:** Tìm  $m$  để phương trình  $(m + 1)\sin 2x = 1 - 2m - \sin 2x$  có đúng 2 nghiệm thuộc  $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{2\pi}{3}\right)$ .

- Câu 11:** Cho phương trình  $\cos 5x = 3m - 5$ . Gọi đoạn  $[a; b]$  là tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình có nghiệm. Tính  $3a + b$ .
- A. 5.                                      B. -2.                                      C.  $\frac{19}{3}$ .                                      D. 6.
- Câu 12:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2$  có nghiệm. Tính tổng  $T$  của các phần tử trong  $S$ .
- A.  $T = 6$ .                                      B.  $T = 3$ .                                      C.  $T = -2$ .                                      D.  $T = -6$ .
- Câu 13:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\sqrt{3} \cos x + m - 1 = 0$  có nghiệm?
- A. 1.                                      B. 2.                                      C. 3.                                      D. Vô số.
- Câu 14:** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $(m - 2) \sin 2x = m + 1$  nhận  $x = \frac{\pi}{12}$  làm nghiệm.
- A.  $m \neq 2$ .                                      B.  $m = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} - 2}$ .                                      C.  $m = -4$ .                                      D.  $m = -1$ .
- Câu 15:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $(m + 1) \sin x + 2 - m = 0$  có nghiệm.
- A.  $m \leq -1$ .                                      B.  $m \geq \frac{1}{2}$ .                                      C.  $-1 < m \leq \frac{1}{2}$ .                                      D.  $m > -1$ .
- Câu 16:** Phương trình  $\sin 5x = m$  có nghiệm khi
- A.  $|m| \leq 5$ .                                      B.  $m \leq 5$ .                                      C.  $|m| \leq 1$ .                                      D.  $m \leq 1$ .
- Câu 17:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\cos^2 x = m - 1$  có nghiệm.
- A.  $m \leq 2$ .                                      B.  $1 < m < 2$ .                                      C.  $m \geq 1$ .                                      D.  $1 \leq m \leq 2$ .
- Câu 18:** Tìm  $m$  để phương trình  $\cos x - 2m + 1 = 0$  có nghiệm.
- A.  $m > -\frac{1}{2}$ .                                      B.  $0 < m < 1$ .                                      C.  $0 \leq m \leq 1$ .                                      D.  $m \geq -\frac{1}{2}$ .
- Câu 19:** Phương trình  $m \cdot \cos x - 1 = 0$  có nghiệm khi  $m$  thỏa mãn điều kiện
- A.  $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq 1 \end{cases}$ .                                      B.  $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{cases}$ .                                      C.  $m \geq -1$                                       D.  $m \geq 1$ .
- Câu 20:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $2 \sin 2x + 7 - m = 0$  có nghiệm?
- A. 4.                                      B. 5.                                      C. 6.                                      D. Vô số.
- Câu 21:** Tìm  $m$  để phương trình  $\cos 2x = m - 1$  có nghiệm.
- A.  $0 \leq m \leq 2$ .                                      B.  $-1 \leq m \leq 1$ .                                      C.  $-2 \leq m \leq 2$ .                                      D.  $0 \leq m \leq 1$ .
- Câu 22:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = m$  có nghiệm.
- A.  $-1 \leq m \leq 1$                                       B.  $m \leq 1$ .                                      C.  $m \geq 0$ .                                      D.  $0 \leq m \leq 1$ .
- Câu 23:** Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để phương trình  $3 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - m + 5 = 0$  có nghiệm?
- A. 5.                                      B. 7.                                      C. 6.                                      D. 9.

**Câu 24:** Tìm  $m$  để phương trình  $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = m$  có nghiệm  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**A.**  $\begin{cases} m > 1 \\ m \leq \sqrt{2} \end{cases}$ .

**B.**  $1 \leq m \leq \sqrt{2}$ .

**C.**  $1 \leq m < \sqrt{2}$ .

**D.**  $1 < m \leq \sqrt{2}$ .

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

### II HỆ THỐNG BÀI TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình:  $\sin x = m + 1$  có nghiệm?

- A.  $1 \leq m$ .      B.  $0 \leq m \leq 1$ .      C.  $m \leq 0$ .      **D.  $-2 \leq m \leq 0$ .**

**Lời giải**

Phương trình:  $\sin x = m + 1$  có nghiệm  $\Leftrightarrow -1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$ .

**Câu 2:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\sin x = m$  có nghiệm thực.

- A.  $m \geq 0$ .      B.  $m < 0$ .      C.  $-1 < m < 1$ .      **D.  $-1 \leq m \leq 1$ .**

**Lời giải**

Do  $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$  nên phương trình  $\sin x = m$  có nghiệm khi và chỉ khi  $-1 \leq m \leq 1$ .

**Câu 3:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $3 \sin 2x - m^2 + 5 = 0$  có nghiệm?

- A. 6.      **B. 2.**      C. 1.      D. 7.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình đã cho tương đương với phương trình  $\sin 2x = \frac{m^2 - 5}{3}$

$$\text{Vì } \sin 2x \in [-1; 1] \text{ nên } \frac{m^2 - 5}{3} \in [-1; 1] \Leftrightarrow m^2 \in [2; 8] \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} \leq m \leq -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị.

**Câu 4:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình:  $3 \sin x + m - 1 = 0$  có nghiệm?

- A. 7**      B. 6      C. 3      D. 5

**Lời giải**

$$3 \sin x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1 - m}{3}, \text{ để có nghiệm ta có } -1 \leq \frac{1 - m}{3} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 4$$

Nên có 7 giá trị nguyên từ  $-2$ ; đến  $4$ .

**Câu 5:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\cos x - m = 0$  vô nghiệm.

- A.  $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$**       B.  $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$   
C.  $m \in (1; +\infty)$       D.  $m \in (-\infty; -1)$

**Lời giải**

**Chọn A**

Do  $|\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$  nên phương trình:  $\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m$

có nghiệm khi  $|m| \leq 1$  và vô nghiệm khi  $|m| > 1$ .

**Câu 6:** Cho phương trình  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2$ . Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm?

- A.** Không tồn tại  $m$ .      **B.**  $m \in [-1; 3]$ .      **C.**  $m \in [-3; -1]$ .      **D.**  $m \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = m + 2$ .

$-1 \leq \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow$  phương trình có nghiệm khi  $-1 \leq m + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$ .

**Câu 7:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\cos x = m + 1$  có nghiệm?

- A.** Vô số.      **B.** 1.      **C.** 2.      **D.** 3.

**Lời giải**

Phương trình  $\cos x = m + 1$  có nghiệm  $\Leftrightarrow -1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$ .

Mà  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0\}$ .

**Câu 8:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-2018; 2018]$  để phương trình  $m \cos x + 1 = 0$  có nghiệm?

- A.** 4036.      **B.** 4037.      **C.** 2018.      **D.** 2019.

**Lời giải**

TH1: Nếu  $m = 0$  thì phương trình đã cho vô nghiệm.

TH2: Nếu  $m \neq 0$  thì phương trình  $m \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{m}$ .

Phương trình đã cho có nghiệm  $\Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{m} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện  $m$  nguyên và  $m$  thuộc đoạn  $[-2018; 2018]$  suy ra  $m \in \{1; 2; 3; \dots; 2018\}$  hoặc  $m \in \{-2018; \dots; -3; -2; -1\}$ .

Vậy có 4036 giá trị của tham số  $m$  thỏa mãn đề bài.

**Câu 9:** Tìm  $m$  để phương trình  $\sin 3x - 6 - 5m = 0$  có nghiệm.

- A.**  $-\frac{7}{5} \leq m \leq -1$ .      **B.**  $-\frac{7}{5} < m < -1$ .      **C.**  $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -\frac{7}{5} \end{cases}$ .      **D.**  $\begin{cases} m > -1 \\ m < -\frac{7}{5} \end{cases}$ .

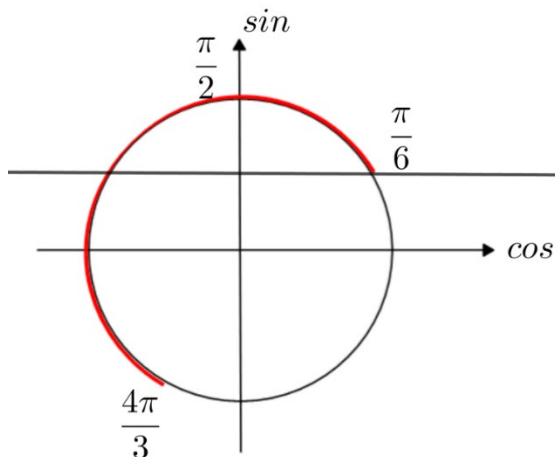
**Lời giải**

Ta có:  $\sin 3x - 6 - 5m = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 6 + 5m(1)$ .

Phương trình đã cho có nghiệm  $\Leftrightarrow (1)$  có nghiệm  $\Leftrightarrow -1 \leq 6 + 5m \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{7}{5} \leq m \leq -1$ .

**Câu 10:** Tìm  $m$  để phương trình  $(m+1)\sin 2x = 1 - 2m - \sin 2x$  có đúng 2 nghiệm thuộc  $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{2\pi}{3}\right)$ .

**Lời giải**



Dựa vào đường tròn lượng giác ta thấy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thuộc

$$\left[\frac{\pi}{12}; \frac{2\pi}{3}\right) \text{ khi } \frac{1}{2} \leq \frac{1-2m}{m+2} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-2m}{m+2} < 1 \\ \frac{1}{2} \leq \frac{1-2m}{m+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+3m}{m+2} > 0 \\ \frac{5m}{m+2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ m < -2 \\ -2 < m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m \leq 0.$$

Vậy  $m \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right]$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 11:** Cho phương trình  $\cos 5x = 3m - 5$ . Gọi đoạn  $[a; b]$  là tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình có nghiệm. Tính  $3a + b$ .

- A. 5.                      B. -2.                      C.  $\frac{19}{3}$ .                      D. 6.

**Lời giải**

Phương trình đã cho có nghiệm khi  $-1 \leq 3m - 5 \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq 3m \leq 6 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq m \leq 2$ .

Khi đó tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình có nghiệm là  $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$ .

Ta được  $a = \frac{4}{3}$ ;  $b = 2$ . Suy ra  $3a + b = 6$ .

**Câu 12:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2$

có nghiệm. Tính tổng  $T$  của các phần tử trong  $S$ .

- A.  $T = 6$ .                      B.  $T = 3$ .                      C.  $T = -2$ .                      D.  $T = -6$ .

**Lời giải**

$$\text{Phương trình } \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = m + 2.$$

$$\text{Phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow -1 \leq m + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} S = \{-3; -2; -1\} \longrightarrow T = (-3) + (-2) + (-1) = -6.$$

**Câu 13:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\sqrt{3} \cos x + m - 1 = 0$  có nghiệm?

- A. 1.                                      B. 2.                                      C. 3.                                      D. Vô số.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \sqrt{3} \cos x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1 - m}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1 - m}{\sqrt{3}} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} \leq m \leq 1 + \sqrt{3} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; 1; 2\}.$$

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên của tham số  $m$ .

**Câu 14:** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $(m - 2) \sin 2x = m + 1$  nhận  $x = \frac{\pi}{12}$  làm nghiệm.

- A.  $m \neq 2$ .                                      B.  $m = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} - 2}$ .                                      C.  $m = -4$ .                                      D.  $m = -1$ .

**Lời giải**

Vì  $x = \frac{\pi}{12}$  là một nghiệm của phương trình  $(m - 2) \sin 2x = m + 1$  nên ta có:

$$(m - 2) \cdot \sin \frac{2\pi}{12} = m + 1 \Leftrightarrow \frac{m - 2}{2} = m + 1 \Leftrightarrow m - 2 = 2m + 2 \Leftrightarrow m = -4.$$

Vậy  $m = -4$  là giá trị cần tìm.

**Câu 15:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $(m + 1) \sin x + 2 - m = 0$  có nghiệm.

- A.  $m \leq -1$ .                                      B.  $m \geq \frac{1}{2}$ .                                      C.  $-1 < m \leq \frac{1}{2}$ .                                      D.  $m > -1$ .

**Lời giải**

$$\text{Phương trình } (m + 1) \sin x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (m + 1) \sin x = m - 2 \Leftrightarrow \sin x = \frac{m - 2}{m + 1}.$$

$$\text{Để phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{m - 2}{m + 1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 1 + \frac{m - 2}{m + 1} \\ \frac{m - 2}{m + 1} - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m - 1}{m + 1} \geq 0 \\ -\frac{3}{m + 1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1}{2} \\ m < -1 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

**Câu 16:** Phương trình  $\sin 5x = m$  có nghiệm khi

- A.  $|m| \leq 5$ .                                      B.  $m \leq 5$ .                                      C.  $|m| \leq 1$ .                                      D.  $m \leq 1$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } -1 \leq \sin 5x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1 \Leftrightarrow |m| \leq 1.$$

**Câu 17:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\cos^2 x = m - 1$  có nghiệm.

A.  $m \leq 2$ .

B.  $1 < m < 2$ .

C.  $m \geq 1$ .

D.  $1 \leq m \leq 2$ .

Lời giải

Do  $0 \leq \cos^2 x \leq 1$  với  $\forall x \in \mathbb{R}$  nên phương trình có nghiệm khi  $0 \leq m-1 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$ .

**Câu 18:** Tìm  $m$  để phương trình  $\cos x - 2m + 1 = 0$  có nghiệm.

A.  $m > -\frac{1}{2}$ .

B.  $0 < m < 1$ .

C.  $0 \leq m \leq 1$ .

D.  $m \geq -\frac{1}{2}$ .

Lời giải

Ta có  $\cos x - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 2m - 1$  có nghiệm khi và chỉ khi

$$-1 \leq 2m - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2m \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1.$$

**Câu 19:** Phương trình  $m \cdot \cos x - 1 = 0$  có nghiệm khi  $m$  thỏa mãn điều kiện

A.  $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq 1 \end{cases}$ .

B.  $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{cases}$ .

C.  $m \geq -1$

D.  $m \geq 1$ .

Lời giải

Để thấy với  $m = 0$  thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Với  $m \neq 0$ , ta có:  $m \cdot \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{m}$  (1).

Phương trình đã cho có nghiệm  $\Leftrightarrow$  phương trình (1) có nghiệm  $\Leftrightarrow$

$$\left| \frac{1}{m} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|m|} \leq 1 \Leftrightarrow |m| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{cases}.$$

**Câu 20:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $2 \sin 2x + 7 - m = 0$  có nghiệm?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. Vô số.

Lời giải

$$2 \sin 2x + 7 - m = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{m-7}{2}$$

$$\text{Do đó phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{m-7}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 5 \leq m \leq 9 \Rightarrow m \in \{5, 6, 7, 8, 9\}.$$

**Câu 21:** Tìm  $m$  để phương trình  $\cos 2x = m - 1$  có nghiệm.

A.  $0 \leq m \leq 2$ .

B.  $-1 \leq m \leq 1$ .

C.  $-2 \leq m \leq 2$ .

D.  $0 \leq m \leq 1$ .

Lời giải

Phương trình  $\cos 2x = m - 1$  có nghiệm khi và chỉ khi  $-1 \leq m - 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$

**Câu 22:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = m$  có nghiệm.

A.  $-1 \leq m \leq 1$

B.  $m \leq 1$ .

C.  $m \geq 0$ .

D.  $0 \leq m \leq 1$ .

Lời giải

Ta có:  $0 \leq \cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \leq 1$ . Để phương trình có nghiệm thì  $0 \leq m \leq 1$ .

**Câu 23:** Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để phương trình  $3 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - m + 5 = 0$  có nghiệm?

A. 5.

**B. 7.**

C. 6.

D. 9.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - m + 5 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{m-5}{3}$$

$$\text{Điều kiện để phương trình có nghiệm: } -1 \leq \frac{m-5}{3} \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 8$$

Do  $m$  nguyên nên  $m = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ , Vậy có 7 số nguyên  $m$ .

**Câu 24:** Tìm  $m$  để phương trình  $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = m$  có nghiệm  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

A.  $\begin{cases} m > 1 \\ m \leq \sqrt{2} \end{cases}$ .

B.  $1 \leq m \leq \sqrt{2}$ .

C.  $1 \leq m < \sqrt{2}$ .

**D.  $1 < m \leq \sqrt{2}$ .**

**Lời giải**

$$\text{Vì } 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$\text{Phương trình đã cho có nghiệm } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ khi } \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{m}{\sqrt{2}} \leq 1 \Leftrightarrow 1 < m \leq \sqrt{2}.$$