SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN THAM DỰ
KỲ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM 2018

ĐỀ CHÍNH THỨC

Ngày thi: 27/10/2017
Môn thi: Toán
Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1. ***(7 điểm)***

Cho hàm số $f\colon \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa điều kiện

$$(x + f(y)) \mid (f(x) + xf(y)),\ \ \forall\, x, y \in \mathbb{Z}^+\ (*)\,.$$

a) Giả sử f không là hàm hằng, tìm $f(2)$.

b) Tìm tất cả hàm số f thỏa điều kiện (*).

Bài 2. ***(7 điểm)***

a) Cho $P(x)$ là một đa thức hệ số nguyên và năm số nguyên phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 thỏa điều kiện $P(x_i)=5$ với $i=1,2,3,4,5$. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên n nào để $-6 \le P(n) \le 4$ hoặc $6 \le P(n) \le 16$.

b) Cho $x_1, x_2, \ldots, x_k\,;\, y_1, y_2, \ldots, y_n$ là các số nguyên phân biệt (với $k, n \in \mathbb{Z}^+$) sao cho tồn tại đa thức hệ số nguyên $P(x)$ thỏa điều kiện

$$\begin{cases} P(x_1) = P(x_2) = \ldots = P(x_k) = 58 \\ P(\mathrm{y}_1) = P(\mathrm{y}_2) = \ldots = P(\mathrm{y}_n) = 2017 \end{cases}.$$

Xác định giá trị lớn nhất của kn.

Bài 3. ***(6 điểm)***

Trên một đường thẳng có 20 điểm $P_1, P_2, \ldots, P_{20}$ được sắp theo thứ tự đó, mỗi điểm sẽ được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu để cho nếu số các điểm liền kề được tô màu giống nhau thì luôn là một số lẻ ?

………………………………HẾT……………………………………...

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN THAM DỰ
KỲ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM 2018
Ngày thi: 27/10/2017
Môn: Toán
Thời gian làm bài: 180 phút

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Nội dung cần đạt	Điểm
	Bài 1. *(7 điểm)* Cho hàm số f: $\mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa điều kiện $(x + f(y)) \mid (f(x) + xf(y)),\ \forall\, x, y \in \mathbb{Z}^+$ *(*)* . *a)* Giả sử f không là hàm hằng, tìm $f(2)$. **b)** Tìm tất cả hàm số f thỏa điều kiện *(*)*.	
a.	Đặt $P(x,y)$ là $x + f(y) \mid f(x) + xf(y)$ - Với $P(1,1)$: $1+f(1) \mid 2f(1) \Longrightarrow 1+f(1) \mid 2$ hay $f(1)=1$ - Với $P(2,2)$: $2+f(2) \mid 3f(2) \Longrightarrow 2+f(2) \mid 6$ hay $f(2)=1$ hoặc $f(2)=4$	1 điểm
	Nếu $f(2)=1$ thì $P(2,n)$: $2+f(n) \mid f(2)+2f(n)=1+2f(n) \Longrightarrow 2+f(n) \mid 3$ với mọi n hay $f(n)=1$ với mọi n. Vậy $f(2)=4$.	1 điểm
b.	Với $P(n,m)$: $n+f(m) \mid f(n)+nf(m) \Longrightarrow n+f(m) \mid f(n)-n^2$ với mọi n,m.	1.5 điểm
	Giả sử tồn tại $n_0 > 1$ mà $f(n_0) \neq n_0^2$ khi đó $n_0 + f(m) \mid f(n_0) - n_0^2$ suy ra $f(m)$ bị chặn.	1 điểm
	Với $P(n,1)$: $n+1 \mid f(n)+n \Longrightarrow n+1 \mid f(n)-1$ và do $f(n)$ bị chặn nên tồn tại N để $f(n)=1$ với mọi $n>N$.	1 điểm
	Cho $n>N$ và $m \leq N$ với $P(n,m)$: $n+f(m) \mid 1+nf(m)$ *hay* $n+f(m) \mid f(m)^2-1$ với mọi $n>N$ suy ra $f(m)=1$ với mọi $m \leq N$. Hay $f(m)=1$ với mọi n. Vậy $f(n)=1$ hoặc $f(n)=n^2$ với mọi n.	1.5 điểm
	Bài 2. *(7 điểm)* a) Cho $P(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên và năm số nguyên phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 thỏa điều kiện $P(x_i)=5$ với $i=1,2,3,4,5$. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên n nào để $-6 \leq P(n) \leq 4$ hoặc $6 \leq P(n) \leq 16$. b) Cho $x_1, x_2, \ldots, x_k$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là các số nguyên phân biệt với $k, n \in \mathbb{Z}^+$	

	sao cho tồn tại đa thức hệ số nguyên $P(x)$ thỏa điều kiện $$\begin{cases} P(x_1)=P(x_2)=...=P(x_k)=58 \\ P(y_1)=P(y_2)=...=P(y_n)=2017 \end{cases}.$$ Xác định giá trị lớn nhất của kn.	
a.	Ta có $P(x)-5=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_5).Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Giả sử tồn tại số nguyên n để $-6\le P(n)\le 4$ hoặc $6\le P(n)\le 16$ suy ra $0<\|P(n)-5\|\le 11$	1 điểm
	Ta thấy ngay $P(n)-5$ được phân tích thành tích của 6 số nguyên, trong đó có 5 số phân biệt. Mà các số nguyên $-11,-10,\ldots,10,11$ không có số nào thỏa điều kiện đó.	1 điểm
b.	Ta có $Q(x)=P(x)-58=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k).S(x)$ trong đó $S(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Và $Q(y_1)=Q(y_2)=\ldots=Q(y_n)=1959$ *(có* $1959=3.653$*).*	1 điểm
	$Q(y_1)=1959$ được phân tích thành $k+1$ số nguyên trong đó có k số phân biệt nên suy ra $k\le 4$. Tương tự ta cũng có $n\le 4$.	1 điểm
	Nếu $n=4$ thì $Q(y_1)=(y_1-x_1)(y_1-x_2)\ldots(y_1-x_k).S(y_1)$ $Q(y_2)=(y_2-x_1)(y_2-x_2)\ldots(y_2-x_k).S(y_2)$ $Q(y_3)=(y_3-x_1)(y_3-x_2)\ldots(y_3-x_k).S(y_3)$ $Q(y_4)=(y_4-x_1)(y_4-x_2)\ldots(y_4-x_k).S(y_4)$ Ta thấy các số y_i-x_1 là phân biệt và một số là -1, một số là 1, một số có giá trị tuyệt đối 3, một số có giá trị tuyệt đối là 653. Giả sử $2x_1=y_1+y_2$ *và* $\|y_3-x_1\|=3$, $\|y_4-x_1\|=653$ *(*).*	0.5 điểm
	Nếu $k>1$ thì $x_1\neq x_2$, tương tự như thế trong các số y_i-x_2 cũng có các trường hợp sau $2x_2=y_1+y_3$ hoặc $2x_2=y_3+y_4$ *(những th khác tương ứng)* Nếu $2x_2=y_1+y_3$ thì $\|y_4-x_2\|\neq 653$ suy ra $\|y_2-x_2\|=653$ và $\|y_4-x_2\|=3$ Kết hợp với (*) thì trường hợp này không đúng. Nếu $2x_2=y_3+y_4$ thì ta kiểm tra như trên (loại).	1 điểm
	Vậy $n<4$ và $k>1$ mà đa thức $P(x)=653.x^2.(x^2-4)+2017$ thỏa yêu cầu bài nên giá trị lớn nhất của $k.n=6$	1.5 điểm
	Bài 3. ***(6 điểm)*** Trên một đường thẳng có 20 điểm $P_1, P_2, \ldots, P_{20}$ được sắp theo thứ tự đó, mỗi điểm sẽ được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu để cho số các điểm liền kề được tô màu giống nhau luôn là một số lẻ ?	

	Cho n là một số nguyên dương, gọi s_n là số cách tô màu thỏa điều kiện bài toán cho n điểm và a_n, b_n lần lượt là số cách tô màu thỏa điều kiện bài toán mà điểm P_n được tô bởi màu xanh, màu đỏ. Khi đó $s_n=a_n+b_n$ với $n\geq 1$	1 điểm
	Ta thấy ngay $a_n=b_n$ với mọi $n\geq 1$, ta xét cho trường hợp tô màu $n+1$ điểm Để tô điểm P_{n+1} bởi màu đỏ ta có hai cách sau: - Mỗi cách tô màu của của a_n ta sẽ tô màu đỏ cho điểm P_{n+1}. - Mỗi cách tô màu của b_{n-1} ta sẽ tô các điểm P_n, P_{n+1} cùng màu đỏ	1 điểm
	Khi đó $a_{n+1}=a_n+b_{n-1}=a_n+a_{n-1}$ với mọi $n>1$.	2 điểm
	Ta có $a_1=1$, $a_2=1$ do đó $a_{20}=6765$ và $b_{20}=6765$ nên $s_{20}=13530$.	2 điểm

Ghi chú: Học sinh có thể sử dụng tất cả các kiến thức đã học để tiếp cận bài toán.
Mọi cách giải đúng khác đều được chấm theo thang điểm tương tự.