

BÀI 3. LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Khái niệm lôgarit

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b , và ký hiệu là $\log_a b$.

Nhận xét: $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$ ($a, b > 0, a \neq 1$)

Bài tập: $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

Chú ý: Không có lôgarit của số âm và số 0.

2. Tính chất

Cho $a, b > 0, a \neq 1$. Ta có:

$$\begin{array}{ll} \log_a a = 0; & \log_a a = 1 \\ a^{\log_a b} = b; & \log_a (a^\alpha) = \alpha \end{array}$$

3. Quy tắc tính lôgarit

a. Lôgarit của một tích

Cho $a, b_1, b_2 > 0$ với $a \neq 1$, ta có:

$$\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

Chú ý: Định lý trên có thể mở rộng cho tích của n số dương:

$$\log_a (b_1 \dots b_n) = \log_a b_1 + \dots + \log_a b_n$$

trong đó $a, b_1, b_2, \dots, b_n > 0, a \neq 1$.

b. Lôgarit của một thương

Cho $a, b_1, b_2 > 0$ với $a \neq 1$, ta có:

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

Đặc biệt: $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$ ($a > 0, b > 0$).

c. Lôgarit của một lũy thừa

Bài tập:

$$\bullet \log_\pi \frac{1}{2} + \log_\pi 2 = \log_\pi \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \right) = \log_\pi 1 = 0;$$

$$\begin{aligned} \bullet \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \frac{3}{4} + \dots + \log_3 \frac{7}{8} + \log_3 \frac{8}{9} \\ = \log_3 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} \right) \end{aligned}$$

$$= \log_3 \frac{1}{9} = -2.$$

Bài tập:

$$\bullet \log_5 \frac{125}{25} = \log_5 125 - \log_5 25 = 3 - 2 = 1;$$

$$\bullet \log_7 \frac{1}{49} = -\log_7 49 = -2.$$

Bài tập:

Cho hai số dương a, b , $a \neq 1$. Với mọi α , ta có:

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$$

Đặc biệt:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

4. Đổi cơ số

Cho $a, b, c > 0; a \neq 1; c \neq 1$, ta có:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Đặc biệt:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (b \neq 1);$$

$$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b \quad (\alpha \neq 0).$$

$$\bullet \log_2 8^3 = 3 \log_2 8 = 3.3 = 9;$$

$$\bullet \log_2 \sqrt[4]{8} = \frac{1}{4} \log_2 8 = \frac{1}{4}.3 = \frac{3}{4}.$$

Bài tập:

$$\bullet \log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{4}{3};$$

$$\bullet \log_3 27 = \frac{1}{\log_{27} 3} = 3;$$

$$\bullet \log_{128} 2 = \log_{2^7} 2 = \frac{1}{7} \log_2 2 = \frac{1}{7}.$$

5. Lôgarit thập phân – lôgarit tự nhiên

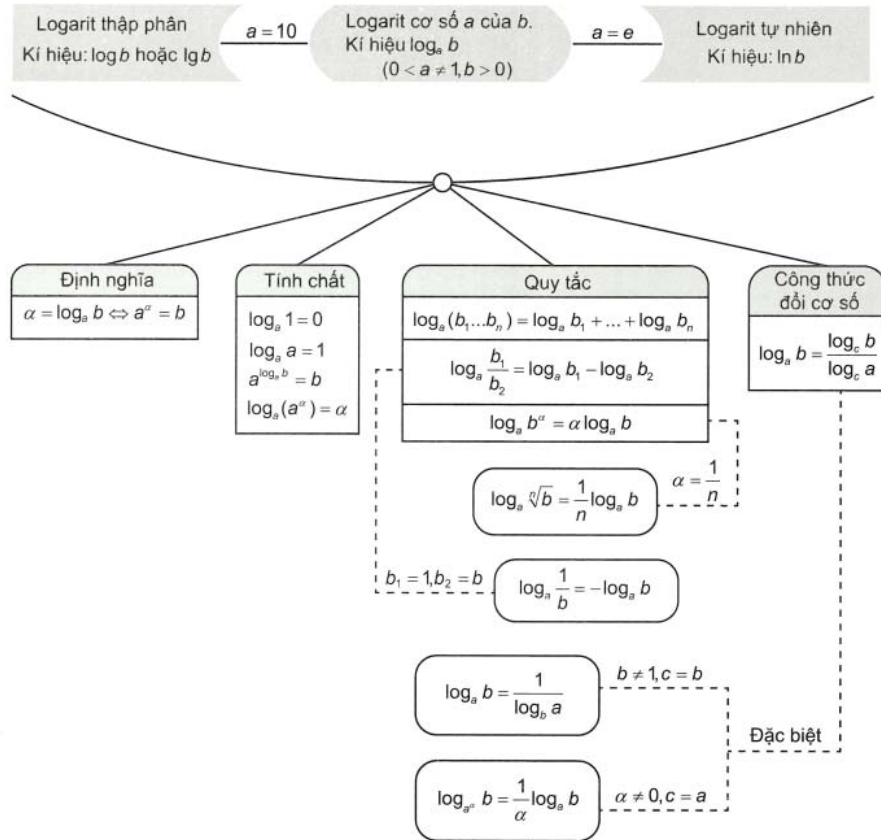
a. Lôgarit thập phân

Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10. Với $b > 0$, $\log_{10} b$ thường được viết là $\log b$ hoặc $\lg b$.

b. Lôgarit tự nhiên

Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e . Với $b > 0$, $\log_e b$ được viết là $\ln b$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tính giá trị của biểu thức không có điều kiện. Rút gọn biểu thức.

1. Phương pháp giải

Để tính $\log_a b$ ta có thể biến đổi theo một trong các cách **Bài tập:**

sau:

- $b = a^\alpha$, từ đó suy ra $\log_a b = \log_a a^\alpha = \alpha$;

- $a = b^\alpha$, từ đó suy ra $\log_a b = \log_{b^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}$;

- $a = c^\alpha$, $b = c^\beta$, từ đó ta suy ra

$$\log_a b = \log_{c^\alpha} c^\beta = \frac{\beta}{\alpha}.$$

- Để tính $b^{\log_a c}$, ta biến đổi $b = a^\alpha$, từ đó suy ra

$$b^{\log_a c} = a^{\alpha \log_a c} = c^\alpha$$

- $\log_{32} 128 = \log_{2^5} 2^7 = \frac{7}{5}$;

- $32^{\log_2 9} = 2^{5 \log_2 9} = 9^5$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho $a, b, c, d > 0$. Rút gọn biểu thức $S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a}$ ta được

A. $S = 1$.

B. $S = 0$.

C. $S = \ln \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \right)$.

D. $S = \ln(abcd)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a} = \ln \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a} \right) = \ln 1 = 0$.

Bài tập 2: Cho $a, b > 0$ và $a, b \neq 1$, biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$ bằng

A. 6

B. 24

C. 12.

D. 18.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4 = \log_{\frac{1}{a^2}} b^3 \cdot \log_b a^4 = \frac{3}{\frac{1}{2}} \cdot 4 \cdot \log_a b \cdot \frac{1}{\log_a b} = 24$.

Bài tập 3: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a \neq 1$, $a \neq \sqrt{b}$ và $\log_a b = \sqrt{3}$. Biến đổi biểu

thức $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}}$ ta được

A. $P = -5 + 3\sqrt{3}$.

B. $P = -1 + \sqrt{3}$.

C. $P = -1 - \sqrt{3}$.

D. $P = -5 - 3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có:

$$P = \frac{\log_a \sqrt{\frac{b}{a}}}{\log_a \frac{\sqrt{b}}{a}} = \frac{\frac{1}{2}(\log_a b - 1)}{\log_a \sqrt{b} - 1} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)}{\frac{1}{2}\log_a b - 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 2} = -1 - \sqrt{3}.$$

Bài tập 4 : Biến đổi biểu thức $P = \log_{a^2} (a^{10} b^2) + \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right) + \log_{\sqrt[3]{b}} b^{-2}$ (với $0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1$)

ta được

- A. $P = 2$. B. $P = 1$. C. $P = \sqrt{3}$. D. $P = \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Sử dụng các quy tắc biến đổi lôgarit ta có:

$$\begin{aligned} P &= \log_{a^2} (a^{10} b^2) + \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right) + \log_{\sqrt[3]{b}} b^{-2} \\ &= \frac{1}{2} [\log_a a^{10} + \log_a b^2] + 2 [\log_a a - \log_a \sqrt{b}] + 3 \cdot (-2) \log_b b \\ &= \frac{1}{2} [10 + 2 \log_a b] + 2 \left[1 - \frac{1}{2} \log_a b \right] - 6 = 1. \end{aligned}$$

Bài tập 5. Rút gọn biểu thức $P = (\log_b^3 a + 2 \log_b^2 a + \log_b a)(\log_a b - \log_{ab} b) - \log_b a$ với $0 < a, b \neq 1$.

- A. $P = 1$. B. $P = 2$. C. $P = 0$. D. $P = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= (\log_b^3 a + 2 \log_b^2 a + \log_b a)(\log_a b - \log_{ab} b) - \log_b a \\ &= \log_b a (\log_b^2 a + 2 \log_b a + 1) \left(\log_a b - \frac{1}{\log_b ab} \right) - \log_b a \\ &= \log_b a (\log_b a + 1)^2 \left(\log_a b - \frac{1}{\log_b a + 1} \right) - \log_b a \\ &= \log_b a (\log_b a + 1)^2 \left(\frac{\log_a b (\log_b a + 1) - 1}{\log_b a + 1} \right) - \log_b a \\ &= \log_b a (\log_b a + 1) (\log_a b \log_b a + \log_a b - 1) - \log_b a \\ &= \log_b a (\log_b a + 1) \log_a b - \log_b a \\ &= \log_b a + 1 - \log_b a = 1. \end{aligned}$$

Bài tập 6. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{2a+2b+1} (4a^2 + b^2 + 1) + \log_{4ab+1} (2a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng:

A. $\frac{15}{4}$.

B. 5.

C. 4.

D. $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

Ta có $4a^2 + b^2 \geq 4ab$, với mọi $a, b > 0$. Dấu '=' xảy ra khi $b = 2a$ (1).

Khi đó

$$2 = \log_{2a+2b+1} (4a^2 + b^2 + 1) + \log_{4ab+1} (2a + 2b + 1)$$

$$\geq \log_{2a+2b+1} (4ab + 1) + \log_{4ab+1} (2a + 2b + 1).$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\log_{2a+2b+1} (4ab + 1) + \log_{4ab+1} (2a + 2b + 1) \geq 2$.

Dấu '=' xảy ra khi $\log_{2a+2b+1} (4ab + 1) = 1 \Leftrightarrow 4ab + 1 = 2a + 2b + 1$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $8a^2 - 6a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$. Suy ra $b = \frac{3}{2}$. Vậy $a + 2b = \frac{15}{4}$.

Bài tập 7. Cho $a^{\log_3 7} = 27$, $b^{\log_7 11} = 49$, $c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. Tính

$$S = a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}.$$

A. $S = 33$.

B. $S = 469$.

C. $S = 489$.

D. $S = 3141$.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

Ta có:

$$a^{\log_3 7} = 27 \Leftrightarrow \log_3 7 = \log_a 27 \Leftrightarrow \log_3 7 \cdot \log_3 7 = \log_a 27 \cdot \log_3 7$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 7)^2 = 3 \log_a 3 \cdot \log_3 7 \Leftrightarrow (\log_3 7)^2 = \log_a 7^3 \Rightarrow a^{(\log_3 7)^2} = a^{\log_a 7^3} = 7^3.$$

$$\text{Tương tự ta có } b^{\log_7 11} = 49 \Rightarrow b^{(\log_7 11)^2} = 11^2; b^{\log_{11} 25} = \sqrt{11} \Rightarrow c^{(\log_{11} 25)^2} = 5.$$

$$\text{Vậy } S = a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2} = 7^3 + 11^2 + 5 = 469.$$

Bài tập 8. Đặt $\log_7 2 = a$, $\log_7 3 = b$, $Q = \log_7 \frac{1}{2} + \log_7 \frac{2}{3} + \dots + \log_7 \frac{2014}{2015} + \log_7 \frac{2015}{2016}$. Tính Q

theo a, b .

A. $5a + 2b - 1$.

B. $5a - 2b - 1$.

C. $5a + 2b + 1$.

D. $-5a - 2b - 1$.

Hướng dẫn giải**Chọn D**

$$\text{Ta có } Q = \log_7 \frac{1}{2} + \log_7 \frac{2}{3} + \dots + \log_7 \frac{2014}{2015} + \log_7 \frac{2015}{2016}$$

$$= (\log_7 1 - \log_7 2) + (\log_7 2 - \log_7 3) + \dots + (\log_7 2014 - \log_7 2015) + (\log_7 2015 - \log_7 2016)$$

$$= \log_7 1 - \log_7 2016 = -\log_7 2016 = -(\log_7 32 \cdot 9 \cdot 7) = -(\log_7 32 + \log_7 9 + \log_7 7)$$

$$= -(\log_7 2^5 + \log_7 3^2 + 1) = -5\log_7 2 - 2\log_7 3 - 1 = -5a - 2b - 1.$$

Bài tập 9. Cho hai số thực dương a, b ($a \neq 1$) thỏa mãn các điều kiện $\log_a b = \frac{b}{4}$ và $\log_2 a = \frac{16}{b}$.

Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = 12$.

B. $S = 10$.

C. $S = 16$.

D. $S = 18$.

Hướng dẫn giải**Chọn D**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \log_a b = \frac{b}{4} \\ \log_2 a = \frac{16}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^{\frac{b}{4}} \\ a = 2^{\frac{16}{b}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \left(2^{\frac{16}{b}}\right)^{\frac{b}{4}} \\ a = 2^{\frac{16}{b}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2^{\frac{16}{b} \cdot \frac{b}{4}} \\ a = 2^{\frac{16}{b}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 16 \\ a = 2 \end{cases}.$$

Vậy ta có $S = 16 + 2 = 18$.

Bài tập 10. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 - 20x + 2 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log(x_1 + x_2) - \log x_1 - \log x_2$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. 0.

D. 10.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } P = \log(x_1 + x_2) - \log x_1 - \log x_2 = \log(x_1 + x_2) - \log(x_1 \cdot x_2) = \log \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}.$$

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 20x + 2 = 0$ nên ta có $x_1 + x_2 = 20$; $x_1 \cdot x_2 = 2$.

$$\text{Vậy ta có } P = \log \frac{20}{2} = 1.$$

Bài tập 11. Cho $M = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^{16}} x}$. Tính M .

A. $M = \frac{272}{\log_a x}$.

B. $M = \frac{136}{\log_a x}$.

C. $M = \frac{1088}{\log_a x}$.

D. $M = \frac{272}{3 \log_a x}$.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^{16}} x} = \log_x a + \log_x a^2 + \dots + \log_x a^{16} \\ &= \log_x a + \log_x a^2 + \dots + \log_x a^{16} = \log_x a + 2 \log_x a + \dots + 16 \log_x a \\ &= (1 + 2 + \dots + 16) \log_x a = \frac{16(1+16)}{2} \log_x a = \frac{136}{\log_a x}. \end{aligned}$$

Bài tập 12. Với x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn $x \log_{1512} 2 + y \log_{1512} 3 + z \log_{1512} 7 = 1$. Tính giá trị của biểu thức $Q = x + y + 3z$.

A. 1512.

B. 12.

C. 9.

D. 7.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Ta có

$$\begin{aligned} x \log_{1512} 2 + y \log_{1512} 3 + z \log_{1512} 7 = 1 &\Leftrightarrow \log_{1512} 2^x + \log_{1512} 3^y + \log_{1512} 7^z = \log_{1512} 1512 \\ &\Leftrightarrow \log_{1512} 2^x \cdot 3^y \cdot 7^z = \log_{1512} 1512 \Leftrightarrow 2^x \cdot 3^y \cdot 7^z = 1512 \Leftrightarrow 2^x \cdot 3^y \cdot 7^z = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } Q = 3 + 3 + 1 \cdot 3 = 9.$$

Bài tập 13. Giá trị biểu thức $P = \frac{1}{\log_2 2017!} + \frac{1}{\log_3 2017!} + \dots + \frac{1}{\log_{2017} 2017!}$ là

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\log_2 2017!} + \frac{1}{\log_3 2017!} + \dots + \frac{1}{\log_{2017} 2017!} = \log_{2017!} 2 + \log_{2017!} 3 + \dots + \log_{2017!} 2017 \\ &= \log_{2017!} (2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2017) = \log_{2017!} 2017! = 1. \end{aligned}$$

Bài tập 14. Giả sử $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\cos x = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Giá trị của biểu thức

$\log \sin x + \log \cos x + \log \tan x$ là

- A. $-\frac{3}{\sqrt{10}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. C. $\frac{3}{10}$. D. -1 .

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}.$$

$$\text{Khi đó } \log \sin x + \log \cos x + \log \tan x = \log (\sin x \cdot \cos x \cdot \tan x) = \log \sin^2 x \log \frac{1}{10} = -1.$$

Bài tập 15. Cho $\log_7 12 = x$, $\log_{12} 24 = y$ và $\log_{54} 168 = \frac{axy+1}{bxy+cx}$, trong đó a, b, c là các số

nguyên. Tính giá trị biểu thức $S = a + 2b + 3c$.

- A. $S = 4$. B. $S = 19$. C. $S = 10$. D. $S = 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \log_{54} 168 &= \frac{\log_7 (24 \cdot 7)}{\log_7 54} = \frac{\log_7 24 + 1}{\log_7 54} = \frac{\log_7 12 \log_{12} 24 + 1}{\log_7 54} \\ &= \frac{\log_7 12 \log_{12} 24 + 1}{\log_7 12 \log_{12} 54} = \frac{xy + 1}{x \cdot \log_{12} 54} \end{aligned}$$

$$\text{Tính } \log_{12} 54 = \log_{12} (27 \cdot 2) = 3 \log_{12} 3 + \log_{12} 2 = 3 \log_{12} \frac{3 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 24}{2 \cdot 12 \cdot 24} + \log_{12} \frac{24}{12}.$$

$$= 3 \log_{12} \frac{12^3}{24^2} + \log_{12} \frac{24}{12} = 3(3 - 2 \log_{12} 24) + (\log_{12} 24 - 1) = 8 - 5 \log_{12} 24 = 8 - 5y.$$

$$\text{Do đó: } \log_{54} 168 = \frac{xy+1}{x(8-5y)} = \frac{xy+1}{-5xy+8x}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \Rightarrow S=a+2b+3c=15. \\ c=8 \end{cases}$$

Bài tập 16. Với a, b thỏa mãn để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \geq 1 \\ ax+b & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x_0 = 1$. Khi đó giá trị biểu thức $S = \log_2(3a+2b)$ bằng?

A. $S = 1$.

B. $S = 2$.

C. $S = 3$.

D. $S = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 1$ suy ra:

$$+ \text{Hàm số liên tục tại } x_0 = 1: \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a+b=1 \quad (1).$$

$$+ \text{Tồn tại giới hạn } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}.$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}.$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax+b-1}{x-1}.$$

$$\Leftrightarrow 2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax+b-(a+b)}{x-1}.$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}.$$

$$S = \log_2(3a+2b) = \log_2 4 = 2.$$

Dạng 2. Đẳng thức chứa logarit

1. Phương pháp

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho $x, y > 0$ và $x^2 + 4y^2 = 12xy$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_2(x+2y) = \log_2 x + \log_2 y + 1$.

B. $\log_2\left(\frac{x+2y}{4}\right) = \log_2 x - \log_2 y$.

C. $\log_2(x+2y) = 2 + \frac{1}{2}(\log_2 x + \log_2 y).$

D. $4\log_2(x+2y) = \log_2 x + \log_2 y.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Với $x, y > 0$, ta có: $x^2 + 4y^2 = 12xy \Leftrightarrow (x+2y)^2 = 16xy$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2y)^2 = \log_2 16xy$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(x+2y) = 4 + \log_2 x + \log_2 y$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2y) = 2 + \frac{1}{2}(\log_2 x + \log_2 y).$$

Bài tập 2: Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính

$$M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x+3y)}.$$

A. $M = \frac{1}{4}.$

B. $M = 1.$

C. $M = \frac{1}{2}.$

D. $M = \frac{1}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $x^2 + 9y^2 = 6xy \Leftrightarrow (x-3y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3y.$

Vậy ta có

$$\begin{aligned} M &= \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x+3y)} = \frac{1 + \log_{12} 3y + \log_{12} y}{2 \log_{12} 6y} = \frac{\log_{12} 12 + \log_{12} 3 + \log_{12} y + \log_{12} y}{2(\log_{12} 6 + \log_{12} y)} \\ &= \frac{\log_{12} 36 + 2 \log_{12} y}{\log_{12} 36 + 2 \log_{12} y} = 1. \end{aligned}$$

Bài tập 3: Cho biểu thức $B = 3^{\log_3 a} - \log_5 a^2 \cdot \log_a 25$ với a là số dương, khác 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $B \geq 2a + 5.$

B. $\log_{a^2-4} B = 1.$

C. $B = a - 4.$

D. $B > 3.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{aligned} B &= 3^{\log_3 a} - \log_5 a^2 \cdot \log_a 25 = a - 2 \log_5 a \cdot \log_a 25 = a - 2 \log_5 a \cdot \log_a 5^2 = a - 4 \log_5 a \cdot \log_a 5 \\ &= a - 4. \end{aligned}$$

Vậy $B = a - 4.$

Bài tập 4: Gọi c là cạnh huyền, a và b là hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

- A. $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a$.
B. $\log_{b+c} a + \log_{b-c} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{b-c} a$.
C. $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a$.
D. $\log_{b+c} a + \log_{b-c} a = 4 \log_{b+c} a \cdot \log_{b-c} a$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow c^2 - b^2 = a^2 \Leftrightarrow (c+b) \cdot (c-b) = a^2 \Leftrightarrow \log_a (c+b) \cdot (c-b) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_a (b+c) + \log_a (c-b) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_a (b+c)} + \frac{1}{\log_a (c-b)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a \text{ (đpcm).}$$

Bài tập 5: Cho $\log_{27} 5 = a$, $\log_8 7 = b$, $\log_2 3 = c$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\log_{12} 35 = \frac{3b+2ac}{c+2}$.
B. $\log_{12} 35 = \frac{3b+3ac}{c+2}$.
C. $\log_{12} 35 = \frac{3b+2ac}{c+3}$.
D. $\log_{12} 35 = \frac{3b+3ac}{c+1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \log_{27} 5 = a \Leftrightarrow \log_3 5 = 3a ; \log_8 7 = b \Rightarrow \log_2 7 = 3b ; \log_2 3 = c$$

$$\log_{12} 35 = \frac{\log_3 5}{\log_3 12} = \frac{\log_3 5 + \log_3 7}{\log_3 3 + \log_3 4} = \frac{3a + \frac{\log_2 7}{\log_2 3}}{1 + 2 \log_3 2} = \frac{3a + \frac{3b}{c}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{c}} = \frac{3ac + 3b}{c + 2}.$$

Bài tập 6: Cho $\log_{\frac{1}{4}} (y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1$, với $y > 0, y > x$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $3x = 4y$.
B. $x = 3y$.
C. $x = \frac{3}{4}y$.
D. $y = \frac{3}{4}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$$\log_{\frac{1}{4}} (y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow -\log_4 (y-x) + \log_4 y = 1 \Leftrightarrow \log_4 y = 1 + \log_4 (y-x)$$

$$\Leftrightarrow \log_4 y = \log_4 4 \cdot (y-x) \Leftrightarrow y = 4(y-x) \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}y.$$

Bài tập 7: Số thực dương a, b thỏa mãn $\log_4 a = \log_{12} b = \log_{16} (a+b)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\frac{a}{b} \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$.
B. $\frac{a}{b} \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$.
C. $\frac{a}{b} \in (9; 12)$.
D. $\frac{a}{b} \in (9; 16)$.

Hướng dẫn giải.**Chọn B.**

Giả sử $\log_4 a = \log_{12} b = \log_{16} (a+b) = t$. Khi đó, ta có: $a = 4^t; b = 12^t; a+b = 16^t$. Từ đây,

ta có phương trình: $4^t + 12^t = 16^t \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^t + \left(\frac{3}{4}\right)^t = 1$ (*).

Vế trái của phương trình (*) nghịch biến nên (*) có 1 nghiệm duy nhất là $t = 1$. Suy ra

$$a = 4; b = 12 \text{ suy ra } \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \in \left(0; \frac{2}{3}\right).$$

Bài tập 8: Có tất cả bao nhiêu số dương a thỏa mãn đẳng thức

$$\log_2 a + \log_3 a + \log_5 a = \log_2 a \cdot \log_3 a \cdot \log_5 a.$$

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

Ta có

$$\log_2 a + \log_3 a + \log_5 a = \log_2 a \cdot \log_3 a \cdot \log_5 a$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a + \log_3 2 \cdot \log_2 a + \log_5 2 \cdot \log_2 a = \log_2 a \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 a \cdot \log_5 a$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a \cdot (1 + \log_3 2 + \log_5 2) = \log_2 a \cdot \log_3 5 \cdot \log_5^2 a$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a \cdot (1 + \log_3 2 + \log_5 2 - \log_3 5 \cdot \log_5^2 a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 a = 0 \\ 1 + \log_3 2 + \log_5 2 - \log_3 5 \cdot \log_5^2 a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \log_5 a = \pm \sqrt{\frac{1 + \log_3 2 + \log_5 2}{\log_3 5}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 5^{\pm \sqrt{\frac{1 + \log_3 2 + \log_5 2}{\log_3 5}}} \end{cases}.$$

Bài tập 9: Cho n là một số nguyên dương, tìm n sao cho

$$\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2 \cdot 2017^2 \cdot \log_a 2019$$

A. 2017.

B. 2019.

C. 2016.

D. 2018.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Đặt

$$\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2 \cdot 2017^2 \cdot \log_a 2019$$

(*).

$$\text{Ta có } n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = n^3 \log_a 2019.$$

$$\text{Vậy VT (*)} = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \log_a 2019 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \cdot \log_a 2019.$$

Hay từ (*) ta có

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \cdot \log_a 2019 = 1008^2 \cdot 2017^2 \cdot \log_a 2019 \Leftrightarrow n^2(n+1)^2 = 2^2 \cdot 1008^2 \cdot 2017^2$$

$$\Leftrightarrow n^2(n+1)^2 = 2016^2 \cdot 2017^2 \Leftrightarrow n^2 + n - 4066272 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2016 \\ n = -2017 \end{cases} \Rightarrow n = 2016 \quad (\text{vì } n \in \mathbb{N}^*).$$

Bài tập 10: Cho $\log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2 xy$, với $xy > 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $x > y$. B. $x < y$. C. $x = y$. D. $x = y^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$$\log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2 xy \Leftrightarrow \log_2(x^2 + y^2) = \log_2 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y.$$

Dạng 3. Biểu thị biểu thức theo một biểu thức đã cho và từ đó tìm GTLN, GTNN

1. Phương pháp giải

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+y^2}(2x-4y) = 1$. Tính $P = \frac{x}{y}$ khi biểu thức

$S = 4x + 3y - 5$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $P = \frac{8}{5}$. B. $P = \frac{9}{5}$. C. $P = -\frac{13}{4}$. D. $P = \frac{17}{44}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \log_{x^2+y^2}(2x-4y) = 1 \Rightarrow 2x - y = x^2 + y^2 + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4.$$

Khi đó ta có

$$S = 4x + 3y - 5 = 4(x-1) + 3(y+2) - 7 \leq \sqrt{(4^2 + 3^2)((x-1)^2 + (y+2)^2)} - 7 = 3.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} \\ 4x+3y-5=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy ta có } P = \frac{x}{y} = \frac{\frac{13}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{13}{4}.$$

Bài tập 2. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức

$$P = \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3 \log_b\left(\frac{a}{b}\right).$$

- A. $P_{\min} = 19$. B. $P_{\min} = 13$. C. $P_{\min} = 14$. D. $P_{\min} = 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Với điều kiện đề bài, ta có

$$\begin{aligned} P &= \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3 \log_b\left(\frac{a}{b}\right) = \left[2 \log_{\frac{a}{b}} a\right]^2 + 3 \log_b\left(\frac{a}{b}\right) = 4 \left[\log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b} \cdot b\right)\right]^2 + 3 \log_b\left(\frac{a}{b}\right) \\ &= 4 \left[1 + \log_{\frac{a}{b}} b\right]^2 + 3 \log_b\left(\frac{a}{b}\right). \end{aligned}$$

Đặt $t = \log_{\frac{a}{b}} b > 0$ (vì $a > b > 1$), ta có $P = 4(1+t)^2 + \frac{3}{t} = 4t^2 + 8t + \frac{3}{t} + 4 = f(t)$.

$$\text{Ta có } f'(t) = 8t + 8 - \frac{3}{t^2} = \frac{8t^3 + 8t^2 - 3}{t^2} = \frac{(2t-1)(4t^2 + 6t + 3)}{t^2}$$

Vậy $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$. Khảo sát hàm số, ta có $P_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 15$.

Bài tập 3. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

A. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}-19}{9}$.

B. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}+19}{9}$.

C. $P_{\min} = \frac{18\sqrt{11}-29}{9}$.

D. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3(1-xy) - \log_3(x+2y) = 3(xy-1) + (x+2y) - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3(1-xy) - \log_3(x+2y) = 3(xy-1) + (x+2y)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3(1-xy) + 3(1-xy) = \log_3(x+2y) + (x+2y)$$

Xét $f(t) = \log_3 t + t, (t > 0)$

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$$

$$\text{Suy ra : } f(3(1-xy)) = f(x+2y) \Leftrightarrow 3-3xy = x+2y \Leftrightarrow x = \frac{3-2y}{1+3y}$$

$$\text{Điều kiện } \frac{1-xy}{x+2y} > 0 \Leftrightarrow \frac{5y-2}{6y^2+3} > 0 \Leftrightarrow y > \frac{2}{5}$$

$$P = x + y = y + \frac{3-2y}{1+3y}$$

$$P' = 1 + \frac{-11}{(1+3y)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-1-\sqrt{11}}{3} \\ y = \frac{-1+\sqrt{11}}{3} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta có $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Bài tập 4. Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$ thỏa mãn điều kiện $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 1$

Khi biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của $a+b+c$ bằng

- A. 3. B. $3.2^{\frac{1}{3\sqrt{3}}}$. C. 4. D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x \log_2 x - \log_2^3 c$ với $x \in [1; 2]$.

Ta có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 3 \log_2 x - \frac{3}{\ln 2} - \frac{3 \log_2^2 x}{x \ln 2}$;

$$f''(x) = 6x - \frac{3}{x \ln 2} - \frac{6 \log_2 x}{x^2 \ln^2 2} + \frac{3 \log_2^2 x}{x^2 \ln 2}.$$

Vì $f'''(x) = 6 \left(1 - \frac{1}{x^3 \ln^3 2} \right) + \frac{3}{x^2 \ln 2} + \frac{6 \log_2 x (3 - \log_2 x)}{x^3 \ln^2 2} > 0 \forall x \in [1; 2]$ nên

$$f''(x) \geq f''(1) \approx 1,67 > 0.$$

Như vậy hàm số $f'(x)$ đồng biến và có nghiệm duy nhất trên $[1; 2]$ vì $f'(1) < 0; f'(2) > 0$ và có đồ thị lõm trên $[1; 2]$. Do đó ta có bảng biến thiên

x	1	x_0	2
$f(x)$	1	$f(x_0)$	1

Từ bảng biến thiên ta nhận thấy rằng $f(x) \leq 1$ cho nên

$$P \leq 3 + \log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 4$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 2$ và các hoán vị.

Bài tập 5. Trong tất cả các cặp $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$. Với giá trị nào của m thì tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ sao cho $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$?

A. $(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$.

B. $(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$ và $(\sqrt{10} + \sqrt{2})^2$.

C. $\sqrt{10} - \sqrt{2}$ và $\sqrt{10} + \sqrt{2}$.

D. $\sqrt{10} - \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện: $4x + 4y - 4 \geq 0$.

Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y - 4 \geq x^2 + y^2 + 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2 \quad (C_1).$$

Miền nghiệm của bất phương trình là hình tròn (cả bờ) (C_1) có tâm $I_1(2; 2)$ bán kính $R_1 = \sqrt{2}$.

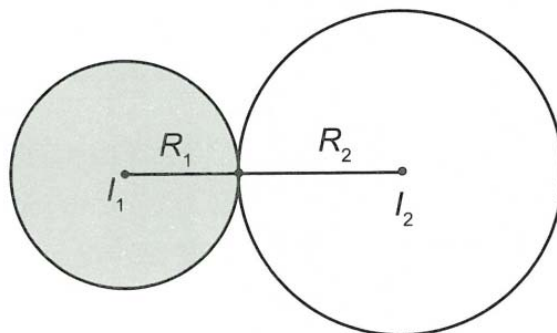
$$\text{Mặt khác: } x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = m \quad (*).$$

Với $m = 0$ thì $x = -1; y = 1$ (không thỏa mãn $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2$).

Với $m > 0$ thì $(*)$ là đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1; 1)$ bán kính $R_2 = \sqrt{m}$.

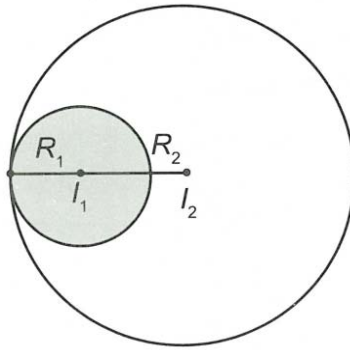
Để tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ thì (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau.

Trường hợp 1: (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài.



Khi đó: $R_1 + R_2 = I_1 I_2 \Leftrightarrow \sqrt{m} + \sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$.

Trường hợp 2: (C_1) nằm trong (C_2) và hai đường tròn tiếp xúc trong.



Khi đó: $R_2 - R_1 = I_1 I_2 \Leftrightarrow \sqrt{m} - \sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = (\sqrt{10} + \sqrt{2})^2$.

Vậy $m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$ và $m = (\sqrt{10} + \sqrt{2})^2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 6. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức

$$P = \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3 \log_b\left(\frac{a}{b}\right) \text{ bằng}$$

A. $P_{\min} = 19$.

B. $P_{\min} = 13$.

C. $P_{\min} = 14$.

D. $P_{\min} = 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có:

$$P = \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3 \log_b\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{2}{\log_a \frac{a}{b}} \right)^2 + 3(\log_b a - 1)$$

$$= \left(\frac{2}{1 - \log_a b} \right)^2 + 3(\log_b a - 1).$$

Đặt $\log_a b = t$ ($0 < t < 1$). Khi đó $P = \frac{4}{(1-t)^2} + \frac{3}{t} - 3 = f(t)$ với $0 < t < 1$.

Ta có $f'(t) = \frac{8}{(1-t)^3} - \frac{3}{t^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$+\infty$	15	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có $P_{\min} = 15$.

Bài tập 7. Cho hai số thực x, y thỏa mãn:

$$x^2 + y^2 \geq 3 \text{ và } \log_{x^2+y^2} \left[x(4x^2 - 3x + 4y^2) - 3y^2 \right] \geq 2$$

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - y$.

Khi đó biểu thức $T = 2(M + m + 1)$ có giá trị gần nhất số nào sau đây?

- A. 7. B. 8. C. 9. D. 10.

Hướng dẫn giải

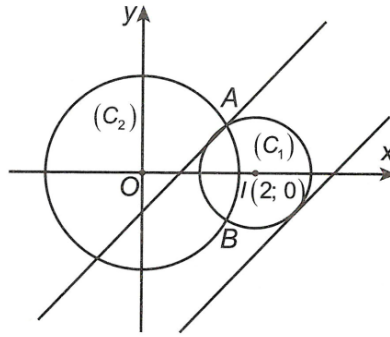
Chọn D

Ta có $\log_{x^2+y^2} \left[x(4x^2 - 3x + 4y^2) - 3y^2 \right] \geq 2 \Leftrightarrow \log_{x^2+y^2} \left[(x^2 + y^2)(4x - 3) \right] \geq 2$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(4x - 3) \geq (x^2 + y^2)^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 \leq 1.$$

Tập hợp các số thực x, y thỏa mãn: $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 3 \\ (x - 2)^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$ những điểm thuộc miền trong hình tròn (C_1)

có tâm $I(2;0)$, bán kính $R_1 = 1$ và nằm ngoài hình tròn (C_2) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R_2 = \sqrt{3}$.



Biểu thức: $P = x - y \Rightarrow x - y - P = 0$ là họ đường thẳng Δ song song với đường $y = x$.

Các giao điểm của hai hình tròn là $A\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

P đạt giá trị nhỏ nhất khi đường thẳng Δ đi qua A.

Khi đường thẳng Δ qua điểm A, ta có: $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - P_{\min} = 0 \Rightarrow P_{\min} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$.

P đạt giá trị lớn nhất khi đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C_1) ta có:

$$d(I; \Delta) = R_1 \Leftrightarrow \frac{|2 - P|}{\sqrt{1 + 1}} = 1 \Leftrightarrow P = 2 \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow P_{\max} = 2 + \sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó } T = 2(M + m + 1) = 2\left(2 + \sqrt{2} + \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right) \approx 10.$$