BẤT ĐẲNG THỨC QUA CÁC ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN NĂM HỌC 2016 - 2017

Ngày 10 tháng 11 năm 2016

Tóm tắt nội dung

Tài liệu bao gồm 2 phần chính:

- **Phần 1:** Lời giải câu Bất đẳng thức trong đề thi chọn đội tuyển của các trường Chuyên, các Tỉnh, đề thi HSG cấp tỉnh năm học 2016 - 2017, cũng như các kỳ thi tập huấn đội tuyển (Gặp gỡ toán học, Trại hè... năm 2016).
- **Phần 2:** Phần bổ sung các kỹ thuật, phương pháp chứng minh BĐT.[1]

Xin gửi lời cám ơn chân thành đến các bạn trong nhóm luôn ủng hộ để hoàn thành tài liệu. Mọi đóng góp về tài liệu xin gửi về: *anh110004@gmail.com*

Nguyễn Tuấn Anh

THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp

Mục lục

[1]Các kỹ thuật được trình bày trong phần 1 cũng như các kỹ thuật thông dụng hiện nay.

1 Phần 1

Bài 1 (Tp. HCM - Ngày thứ 1).

Với a, b, c là các số thực có tổng bằng 0. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \left(a^2+1\right)^2 + \left(b^2+1\right)^2 + \left(c^2+1\right)^2 + 6\sqrt{6}abc$$

Lời Giải.

- Nếu $a = b = c = 0$ thì $P = 3$.
- Ngược lại ta chỉ cần tìm GTNN của P trong trường hợp có hai số dương và một số âm (tại sao?). Không mất tính tổng quát ta giả sử $a, b > 0; c < 0$ khi đó ta đặt $c = -d$ với $d > 0$ ta được:

$$d = a + b$$

Vậy

$$P = a^4 + b^4 + d^4 + 2\left(a^2+b^2+d^2\right) - 6\sqrt{6}abd + 3$$

Theo BĐT AM - GM ta lại có:

$$a^4 + b^4 + d^4 + 2\left(a^2+b^2+d^2\right)$$

$$= a^4 + b^4 + \overbrace{\frac{d^4}{16} + \ldots + \frac{d^4}{16}}^{16\ \text{lần}} + \left(\frac{2}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^2\right) + \left(\frac{2}{3}b^2 + \frac{2}{3}b^2 + \frac{2}{3}b^2\right) + \overbrace{\frac{1}{6}d^2 + \ldots + \frac{1}{6}d^2}^{12\ \text{lần}}$$

$$\geq 36\sqrt[36]{\frac{2^6.a^{10}b^{10}d^{88}}{2^{64}.2^{12}.3^{18}}} = 36\sqrt[36]{\frac{a^{10}b^{10}d^{88}}{2^{64}.2^6.3^{18}}} = 6\sqrt[36]{\frac{3^{18}.a^{10}b^{10}d^{88}}{2^{34}}} = 6\sqrt[36]{\frac{3^{18}.a^{10}b^{10}d^{36}.\left(d^2\right)^{26}}{2^{34}}}$$

Vì

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab \Rightarrow d^2 \geq 2^2ab$$

Do đó:

$$a^4 + b^4 + d^4 + 2\left(a^2+b^2+d^2\right) \geq 6\sqrt[36]{\frac{3^{18}.a^{10}b^{10}d^{36}.\left(d^2\right)^{26}}{2^{34}}} \geq 6\sqrt[36]{\frac{3^{18}.2^{52}.a^{10}b^{10}d^{36}.a^{26}.b^{26}}{2^{34}}}$$

$$= 6\sqrt[36]{3^{18}.2^{18}}abd = 6\sqrt{6}abd$$

Vậy

$$P = a^4 + b^4 + d^4 + 2\left(a^2+b^2+d^2\right) - 6\sqrt{6}abd + 3 \geq 3$$

Cả hai trường hợp ta được $P \geq 3$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 0$ hoặc $a = b = \dfrac{\sqrt{6}}{3}, c = -\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ và các hoán vị của nó. Tức GTNN của P là 3. □

Nhận xét: Bài toán kiểm tra kỹ năng chọn điểm rơi khi dùng BĐT AM - GM (đây là kỹ năng khá quan trọng)[2]

Bài 2 (PTNK).

Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho BĐT sau:

$$x^k y^k z^k \left(x^3 + y^3 + z^3\right) \leq 3$$

đúng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$.

Lời Giải.

Cách 1: Chọn $x = y = 0.8, z = 1.4$ dễ dàng kiểm chứng $k = 1, 2$ BĐT trên không đúng. Ta sẽ chứng minh k nguyên dương nhỏ nhất để BĐT đề bài cho luôn đúng là $k = 3$.

Với $k = 3$ ta cần chứng minh:

$$x^3 y^3 z^3 \left(x^3 + y^3 + z^3\right) \leq 3$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x \leq y \leq z$. Khi đó luôn tồn tại $m > n \geq 0$ sao cho $x = m - n, y = m + n$. Khi đó:

$$\begin{cases} z = 3 - 2m \\ m = \dfrac{x + y}{2} \leq 1 \end{cases}$$

- Xét hàm số:

$$f(n) = (m - n)^3 (m + n)^3 z^3 \left[z^3 + (m - n)^3 + (m + n)^3\right] = z^3 \left(m^2 - n^2\right)^3 \left(z^3 + 2m^3 + 6mn^2\right)$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} f'(n) &= z^3 \left[-6n\left(m^2 - n^2\right)^2 \left(z^3 + 2m^3 + 6mn^2\right) + \left(m^2 - n^2\right)^3 (12mn)\right] \\ &= z^3 \left(m^2 - n^2\right)^2 \left[-6n\left(z^3 + 2m^3 + 6mn^2\right) + \left(m^2 - n^2\right)(12mn)\right] \\ &= z^3 \left(m^2 - n^2\right)^2 \left(-6nz^3 - 48mn^3\right) \leq 0 \end{aligned}$$

Do đó:

$$f(n) \leq f(0) = m^6 z^3 \left(z^3 + 2m^3\right) = m^6 (3 - 2m)^3 \left((3 - 2m)^3 + 2m^3\right)$$

- Xét hàm số:

$$g(m) = m^6 (3 - 2m)^3 \left[(3 - 2m)^3 + 2m^3\right]$$

[2] Ta sẽ gặp lại kỹ năng này qua đề thi của tỉnh ***Bình Dương, Bến Tre***

Ta có:

$$\begin{aligned} g'(m) &= 18m^5(3-2m)^2(m-1)\left(8m^3-45m^2+63m-27\right) \\ &= 18m^5(3-2m)^2(m-1)\left[(m-1)\left(8m^2-37m+26\right)-1\right] \geq 0 \quad (\text{với mọi } 0 \leq m \leq 1) \end{aligned}$$

Vậy nên: $g(m) \leq g(1) = 3$

Tóm lại:

$$x^3y^3z^3\left(x^3+y^3+z^3\right) \leq 3$$

Cách 2:(Nguyễn Văn Huyện)

Lập luận tương tự như cách 1. Ta cần chứng minh:

$$x^3y^3z^3\left(x^3+y^3+z^3\right) \leq 3$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử z là số lớn nhất trong ba số x, y, z. Đặt $t = \dfrac{x+y}{2}$ và:

$$f(x,y,z) = x^3y^3z^3\left(x^3+y^3+z^3\right)$$

Ta sẽ chứng minh $f(x,y,z) \leq f(t,t,z)$. Ta có:

$$f(t,t,z) - f(x,y,z) = z^3\left[t^6\left(2t^3+z^3\right) - x^3y^3\left(x^3+y^3+z^3\right)\right]$$

Mà:

$$\begin{aligned} t^6\left(2t^3+z^3\right) - x^3y^3\left(x^3+y^3+z^3\right) &= z^3\left(t^6-x^3y^3\right) + 2t^9 - x^3y^3\left(x^3+y^3\right) \\ &= z^3\left(t^6-x^3y^3\right) + 2t^9 - x^3y^3(x+y)\left(x^2+y^2-xy\right) \\ &= z^3\left(t^6-x^3y^3\right) + 2t^9 - 2tx^3y^3\left(4t^2-3xy\right) \\ &\geq t^3\left(t^6-x^3y^3\right) + 2t^9 - 2tx^3y^3\left(4t^2-3xy\right) \\ &= 3t\left(t^2-xy\right)\left[t^6+xy\left(2xy+t^2\right)\left(t^2-xy\right)\right] \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy

$$f(x,y,z) \leq f(t,t,z) = f(t,t,3-2t) = t^6(3-2t)^3\left[2t^3+(3-2t)^3\right]$$

Ta chỉ cần chứng minh:

$$\begin{aligned} & t^6(3-2t)^3\left[2t^3+(3-2t)^3\right] \leq 3 \\ \Leftrightarrow\ & 3(t-1)^2\left(1+2t+3t^2+4t^3+5t^4+6t^5-236t^6+494t^7-396t^8+136t^9-16t^{10}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

BĐT cuối luôn đúng với $t \leq 1$.[3] Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

[3] Việc kiểm chứng có thể thực hiện bằng khảo sát hàm số. Hoặc có thể làm tương tự như cách 1.

Cách 3:(luofangxiang) Ta đặt:

$$\begin{cases} m = xyz \\ 8n = (x+y)(y+z)(x+z) \\ 6p = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \end{cases}$$

Khi đó ta có:

- $n = \dfrac{(x+y)(y+z)(x+z)}{8} \le \dfrac{\left(\frac{2x+2y+2z}{3}\right)^3}{8} = 1$
- $p = \dfrac{xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)}{6} = \dfrac{(x+y)(y+z)(x+y) - 2xyz}{6}$

  $$\ge \frac{(x+y)(y+z)(x+y) - \dfrac{(x+y)(y+z)(x+y)}{4}}{6} = \frac{(x+y)(y+z)(x+y)}{8} = n$$
- $(x+y+z)^2(x+y)(y+z)(z+x) \ge 24xyz\left(x^2+y^2+z^2\right)$

  Thật vậy, BĐT trên tương đương:

  $$(x+y+z)^2(x+y)(y+z)(z+x) - 24xyz(x^2+y^2+z^2) \ge 0$$

  $$\Leftrightarrow (x+y+z)^2[(x+y)(y+z)(z+x) - 8xyz] - 8xyz\left[3(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)^2\right] \ge 0$$

  $$\Leftrightarrow (x+y+z)^2\left[x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2\right] - 4xyz\left[(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2\right] \ge 0$$

  $$\Leftrightarrow (x-y)^2\left[(x-y+z)^2 + 4yz\right] + (y-z)^2\left[(x+y-z)^2 + 4zx\right] + \\ +(z-x)^2\left[(-x+y+z)^2 + 4xy\right] \ge 0$$

  BĐT cuối hiển nhiên đúng. Vậy ta được:

  $$m\left(x^2+y^2+z^2\right) \le 3n$$

Qua trở lại bài toán. Ta có:

$$\begin{aligned}
& x^3y^3z^3(x^3+y^3+z^3) \le 3 \\
\Leftrightarrow\ & x^3y^3z^3[3(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz) + 3xyz] \le 3 \\
\Leftrightarrow\ & x^3y^3z^3(x^2+y^2+z^2) \le 1 + x^3y^3z^3(xy+yz+xz-xyz) \\
\Leftrightarrow\ & x^3y^3z^3\left(x^2+y^2+z^2\right) \le 1 + x^3y^3z^3\left[\frac{xy(3-z) + yz(3-x) + zx(3-y)}{3}\right] \\
\Leftrightarrow\ & m^3(x^2+y^2+z^2) \le 1 + 2m^3p
\end{aligned}$$

Theo đánh giá thứ 2 ta chỉ cần chứng minh:

$$3m^2n \leq 1 + 2m^3n$$

Để chứng minh điều trên, theo đánh giá thứ 1 ta chỉ cần chứng minh:

$$3m^2 \leq 1 + 2m^3 \Leftrightarrow (m-1)^2(2m+1) \geq 0$$

Bài toán được chứng minh.

Cách 4: (Nguyễn Tăng Vũ)

Ta chỉ cần chứng minh:

$$x^3y^3z^3\left(x^3+y^3+z^3\right) \leq 3$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử z là số nhỏ nhất trong ba số x, y, z. Khi đó $z \leq 1$.

Ta có: $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = (3-z)^3 - 3xy(x+y)$. Khi đó:

$$\begin{aligned} & x^3y^3z^3\left(x^3+y^3+z^3\right) \leq 3 \\ \Leftrightarrow\ & (3-z)^3 + z^3 \leq \frac{3}{x^3y^3z^3} + 3xy(x+y) \\ \\ \Leftrightarrow\ & 3z^2 - 9z + 9 \leq \frac{1}{x^3y^3z^3} + x^2y + y^2x \end{aligned}$$

Ta lại có:

$$\frac{1}{x^3y^3z^3} + x^2y + y^2x \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3y^3}{x^3y^3z^3}} \geq \frac{3}{z}$$

Vậy nên ta chỉ cần chứng minh:

$$3z^2 - 9z + 9 \leq \frac{3}{z} \Leftrightarrow z^3 - 3z^2 + 3z - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (z-1)^3 \leq 0$$

BĐT cuối cùng hiển nhiên đúng theo giả sử ban đầu.

Vậy $k = 3$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa yêu cầu bài toán. □

Nhận xét:

- Kết quả trên chặt hơn bài toán trong Mathematical Reflections 5 (2013)- S280 và cách giải trong Mathematical Reflections 5 không đủ mạnh để chứng minh cho bài toán trên:

  Với ba số thực dương x, y, z có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

  $$x^4y^4z^4\left(x^3+y^3+z^3\right) \leq 3$$

- Trong cách giải thứ 2 có thể đánh giá $f(x,y,z) \leq f(t,t,z)$ đơn giản hơn như sau:[4]

$$x^3y^3\left(x^3+y^3\right) = xy.xy.xy(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right) \leq (x+y)\left[\frac{(x+y)^2}{4}\right]^4 = 2.\left(\frac{x+y}{2}\right)^9$$

[4]Cách đánh giá tham khảo của **luofangxiang**

- Áp dụng cách giải $1, 2$ dễ dàng có được lời giải cho bài toán sau: **Bulgarian TST năm 2010**

Với ba số thực dương x, y, z có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$xyz\left(x^2+y^2+z^2\right) \le 3$$

Bài 3 (Đề thi chọn HSG lớp 12 - Hà Nội)**.**

Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ac+2abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-2(a+b+c)$$

Lời Giải.

Cách 1:

Vì a, b, c dương thỏa mãn $ab+bc+ac+2abc=1$ nên tồn tại x, y, z dương sao cho:

$$a=\frac{x}{y+z}; b=\frac{y}{z+x};\ c=\frac{z}{x+y}$$

Khi đó biểu thức P được viết lại là:

$$P=\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}-2\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)$$

Dự đoán GTNN là 3 tà tiến hành phân tích SOS (tổng các đại lượng bình phương)

Ta có:

$$P-3=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}-2\right)-2\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\sum\frac{(x-y)^2}{xy}-\sum\frac{(x-y)^2}{(z+x)(z+y)}$$

$$=\sum(x-y)^2\left[\frac{1}{xy}-\frac{1}{(z+x)(z+y)}\right]\ge 0$$

Vậy nên GTNN của P là 3 đạt được khi $x=y=z$ tức $a=b=c=\dfrac{1}{2}$

Nhận xét: Qua cách phân tích SOS trên ta được một kết quả sau:

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 2\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)+3$$

Nhưng thực chất ta có kết quả mạnh hơn có thể giải quyết nhanh bài toán:

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)$$

Chứng minh:

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\geq\frac{4x}{y+z}$$

cộng các BĐT tương tự ta chứng minh được kết quả trên.

Khi đó:

$$P=\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}-2\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)\geq 2\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)\geq 3$$

Cách 2: (Cao Dũng)

Từ giả thiết suy ra:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+2=\frac{1}{abc}$$

Đặt $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$

Khi đó

$$x+y+z+2=xyz\leq\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3\Rightarrow x+y+x\geq 6$$

Vậy nên:

$$P=x+y+z-2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{(x+y+z)(x+y+z+2)-2(xy+yz+xz)}{x+y+z+2}$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2+2(x+y+z)}{x+y+z+2}\overset{AM-GM}{\geq}\frac{6(x+y+z)-12}{x+y+z+2}$$

$$=6-\frac{24}{x+y+z+2}\geq 6-\frac{24}{6+2}=3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=2$ tức $a=b=c=\frac{1}{2}$. Do đó GTNN của P là 3. [5]

□

Bài 4 (THPT chuyên KHTN - ĐHQG Hà Nội - Ngày thứ 3)**.**

Với x, y là các số thực dương sao cho $2x+y, 2y+x\neq 2$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{(2x^2+y)(4x+y^2)}{(2x+y-2)^2}+\frac{(2y^2+x)(4y+x^2)}{(2y+x-2)^2}-3(x+y)$$

Lời Giải. Ta có:

$$\frac{(2x^2+y)(4x+y^2)}{(2x+y-2)^2}\geq 2x+y-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{(2xy-6x-3y+2)^2}{(2x+y-2)^2}\geq 0$$

Tương tự cho hạng tử còn lại. Do vậy ta được:

$$P\geq -1$$

[5]Một bài với giả thiết tương tự là đề thi Olympic chuyên Khoa học Tự nhiên 2016

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 2xy-6x-3y+2=0 \\ 2xy-6y-3x+2=0 \\ 2x+y-2;2y+x-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=\dfrac{9-\sqrt{65}}{4} \\ x=y=\dfrac{9+\sqrt{65}}{4} \end{array}\right.$$

Vậy nên GTNN của P là -1. □

Bài 5 (THPT chuyên KHTN - ĐHQG Hà Nội - Ngày thứ 4)**.**

Với a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2(ca+1)}+\frac{b}{c^2(ab+1)}+\frac{c}{a^2(cb+1)}\geq\frac{9}{(1+abc)(ab+bc+ca)}$$

Lời Giải.

Cách 1: Theo BĐT Cauchy ta có:

$$\left(\frac{a}{b^2(ca+1)}+\frac{b}{c^2(ab+1)}+\frac{c}{a^2(cb+1)}\right)\left(\frac{ca+1}{a}+\frac{ab+1}{b}+\frac{cb+1}{c}\right)\geq\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

Do đó ta cần chứng minh:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\geq\left(\frac{ca+1}{a}+\frac{ab+1}{b}+\frac{cb+1}{c}\right)\frac{9}{(abc+1)(ab+bc+ca)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(ab+bc+ca)^2}{9abc}\geq\frac{3abc+ab+bc+ca}{(abc+1)(ab+bc+ca)}$$

$$\Leftrightarrow(abc+1)(ab+bc+ca)^3-27(abc)^2-9abc(ab+bc+ca)\geq 0$$

Ta thấy vế trái BĐT cuối cùng là hàm lõm theo abc nên theo phương pháp ABC[6] ta cần chứng minh 2 trường hợp sau:

- **TH1:** Có một biến bằng 0. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a=0$ khi đó BĐT trở thành:

  $$(bc)^3\geq 0$$

  điều này là hiển nhiên.

[6] Tham khảo "ABC Method abstract concreteness - Nguyễn Anh Cường"

- **TH2:** Có hai biến bằng nhau. Ta giả sử $b = c = \dfrac{3-a}{2}$. Khi đó BĐT cần chứng minh được viết lại là:

$$\left(a\left(\frac{3-a}{2}\right)^2+1\right)\left(a\left(3-a\right)+\left(\frac{3-a}{2}\right)^2\right)^3$$

$$-27\left(a\left(\frac{3-a}{2}\right)^2\right)^2-9a\left(\frac{3-a}{2}\right)^2\left(a\left(3-a\right)+\left(\frac{3-a}{2}\right)^2\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{27}{256}(3-a)^3(a-1)^2\left(a^4-a^3-9a^2+13a+4\right)\geq 0$$

BĐT cuối luôn đúng.

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Cách 2: (http://artofproblemsolving.com/) Theo BĐT Holder ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b^2(ca+1)}\sum_{cyc}ab(ca+1)\sum_{cyc}ab\geq(a+b+c)^3$$

Do vậy ta cần chứng minh:

$$27=(a+b+c)^3\geq\frac{9}{(abc+1)\left(ab+bc+ca\right)}\left(3abc+ab+bc+ca\right)\left(ab+bc+ca\right)$$

BĐT trên hiển nhiên đúng vì:

$$ab+bc+ca\leq 3$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ □

Bài 6 (HSG 10 - KHTN)**.**

Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+3\sqrt{6}\leq\sqrt{8}abc$$

Lời Giải. (Ngô Trung Hiếu)

Sử dụng BĐT Cauchy - Schwarz, ta có:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{2ab}\leq\sqrt{2\left(a^2+b^2+2ab\right)}=\sqrt{2}\left(a+b\right)$$

Một cách tương tự, ta có:

$$\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{2bc}\leq\sqrt{2}\left(b+c\right)$$
$$\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{2ca}\leq\sqrt{2}\left(b+c\right)$$

Cộng theo vế các BĐT trên với chú ý $a + b + c = abc$ ta có:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)\leq\sqrt{8}abc$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\geq 3\sqrt{3}$$

Sử dụng BĐT AM - GM, ta có

$$abc=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$$

Do đó $abc\geq 3\sqrt{3}$. Từ đây theo BĐT AM - GM, ta thu được:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\geq 3\sqrt[3]{abc}\geq 3\sqrt{3}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$. □

Bài 7 (Đề chọn đội tuyển chuyên Nguyễn Du - Đăk Lăk lần 1 - 2016)**.**

Với ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}\leq 1$$

Lời Giải.

Cách 1:

Sử dụng đánh giá: $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2+a}+\dfrac{1}{6}\geq\dfrac{1}{2\left(a^{\frac{-4}{3}}+a^{\frac{-2}{3}}+1\right)}$ Khi đó:

$$1-\left(\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}\right)+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(a^{\frac{-4}{3}}+a^{\frac{-2}{3}}+1\right)}+\frac{1}{\left(b^{\frac{-4}{3}}+b^{\frac{-2}{3}}+1\right)}+\frac{1}{\left(c^{\frac{-4}{3}}+c^{\frac{-2}{3}}+1\right)}\right]$$

Sử dụng **Bổ đề** với x,y,z dương thỏa $xyz=1$ thì:

$$\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}\geq 1$$

ta được điều phải chứng minh.

Cách 2: (Ngô Trung Hiếu)

BĐT đã cho tương đương:

$$\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}\geq 1$$

Theo BĐT Cauchy - Schwarz, ta có:

$$\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}\geq\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{6+a+b+c}$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{6+a+b+c}\geq 1$$

hay

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\geq 3$$

Điều này hiển nhiên đúng theo BĐT AM - GM kết hợp với điều kiện $abc=1$ như sau:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$$

Ta có điều cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 3:

BĐT được viết lại là:

$$\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}\leq 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{4+2a}+\frac{b}{4+2b}+\frac{c}{4+2c}\geq \frac{1}{2}$$

Vì số 4 là vấn đề tạo nên khó khăn nên ta thay

$$(a,b,c)\to\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$$

Khi đó BĐT trở thành:

$$\frac{1}{4a+2}+\frac{1}{4b+2}+\frac{1}{4c+2}\geq\frac{1}{2}$$

Vì $abc=1$ nên tồn tại x,y,z sao cho:

$$a=\frac{yz}{x^2};b=\frac{zx}{y^2};c=\frac{xy}{z^2}$$

Vậy nên BĐT cần chứng minh là:

$$\frac{x^2}{4yz+2x^2}+\frac{y^2}{4zx+2y^2}+\frac{z^2}{4xy+2z^2}\geq\frac{1}{2}$$

Theo BĐT Cauchy ta được:

$$\frac{x^2}{4yz+2x^2}+\frac{y^2}{4zx+2y^2}+\frac{z^2}{4xy+2z^2}\geq\frac{(x+y+z)^2}{4\left(xy+yz+xz\right)+2\left(x^2+y^2+z^2\right)}$$

Vậy ta cần chứng minh:

$$\frac{(x+y+z)^2}{4\left(xy+yz+xz\right)+2\left(x^2+y^2+z^2\right)}\geq\frac{1}{2}$$

BĐT trên là hiển nhiên vì nó là đẳng thức.

Cách 4: (Quốc Hưng)

BĐT đã cho tương đương với:

$$\frac{2\left(a+b+c\right)+\left(ab+bc+ca\right)+12}{\left(a+2\right)\left(b+2\right)\left(c+2\right)}\leq 1$$

$$\Leftrightarrow 4\left(a+b+c\right)+\left(ab+bc+ca\right)+12\leq abc+2\left(ab+bc+ca\right)+4\left(a+b+c\right)+8$$

$$\Leftrightarrow 4\leq ab+bc+ca+abc$$

BĐT trên đúng theo AM - GM kết hợp với $abc = 1$.

Cách 5:

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$. Ta chứng minh:

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \leq \frac{1}{a+2} + \frac{2}{\sqrt{bc}+2}$$

Thật vậy, BĐT trên tương đương:

$$\frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \leq \frac{2}{\sqrt{bc}+2}$$

$$\Leftrightarrow (b+c+4)\left(\sqrt{bc}+2\right) \leq 2(bc+2b+2c+4)$$

$$\Leftrightarrow (b+c)\sqrt{bc} + 4\sqrt{bc} \leq 2bc + 2b + 2c$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{bc}\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2 \leq 2\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2$$

BĐT trên hiển nhiên đúng do $bc \leq 1$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{1}{a+2} + \frac{2}{\sqrt{bc}+2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc}{1+2bc} + \frac{2}{\sqrt{bc}+2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc\sqrt{bc}+6bc+2}{(1+2bc)\left(\sqrt{bc}+2\right)} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow bc\sqrt{bc} + 6bc + 2 \leq 2 + \sqrt{bc} + 2bc + 4\sqrt{bc}$$

$$\Leftrightarrow bc\sqrt{bc} + 4bc \leq 5\sqrt{bc}$$

BĐT cuối hiển nhiên đúng vì $bc \leq 1$. □

Bài 8 (Đề chọn đội tuyển Tỉnh Đăk Lăk lần 1 - 2016)**.**

Tìm số dương k lớn nhất sao cho BĐT sao luôn đúng

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} - k\right) \geq k$$

với mọi a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c = ab+bc+ca$.

Lời Giải.

- Với $a = b = 2, c = 0$ ta được:

$$4\left(\frac{1}{4} + 1 - k\right) \geq k \Leftrightarrow k \leq 1$$

  Ta sẽ chứng minh $k = 1$ là số dương lớn nhất thỏa để BĐT đề bài luôn đúng

- Ta cần chứng minh:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} - 1\right) \geq 1$$

  Đặt $p = a+b+c = ab+bc+ca = q$ BĐT được viết lại là:

$$p\left[\frac{p^2+q-(pq-r)}{pq-r}\right] \geq 1$$

$$\Leftrightarrow p\left(\frac{p+r}{p^2-r}\right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow p \geq p - r$$

$$\Leftrightarrow r \geq 0$$

  BĐT cuối cùng là hiển nhiên vì a, b, c không âm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2, c = 0$ và các hoán vị của nó.

Vậy $k = 1$ là giá trị cần tìm. $\square$

Bài 9 (Đề thi chọn đội tuyển Nguyễn Du (Đăk Lăk) vòng 2)**.**

Với ba số thực a, b, c thuộc đoạn $[0; 1]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$$

Lời Giải.

Cách 1:(diendantoanhoc.net) BĐT đã cho tương đương:

$$f(a) = \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) - 1 \leq 0$$

Ta có:

$$f''(a) = \frac{2b}{(c+a+1)^3} + \frac{2c}{(a+b+1)} \geq 0$$

Do vậy:

$$f(a) \leq \max\{f(0); f(1)\}$$

- $f(0) = \dfrac{b}{c+1} + \dfrac{c}{b+1} + (1-b)(1-c) - 1 = \dfrac{bc(bc-1)}{(b+1)(c+1)} \leq 0$
- $f(1) = \dfrac{1}{b+c+1} + \dfrac{b}{c+2} + \dfrac{c}{b+2} - 1 = \dfrac{b(b+2)(b-1) + c(c-1)(c+2)}{(b+c+1)(b+2)(c+2)} \leq 0$

BĐT được chứng minh.

Cách 2:(diendantoanhoc.net) Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$ khi đó:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} \leq \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{b+c+1} + \frac{c}{b+c+1} = 1 - \frac{1-a}{b+c+1}$$

Vậy ta cần chứng minh:

$$(1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1-a}{b+c+1}$$
$$\Leftrightarrow (1-b)(1-c)(b+c+1) \leq 1$$

Theo BĐT AM- GM ta lại có:

$$(1-b)(1-c)(b+c+1) \leq \left(\frac{1-b+1-c+b+c+1}{3}\right)^3 = 1$$

BĐT được chứng minh xong. □

Nhận xét:

- Nếu thực hiện tương tự xét hàm cho biến b, c như đã làm cho a thì ta chỉ cần chứng minh:

  $$f(x,y,z) - 1 \leq 0$$

  với x, y, z là 0 hoặc 1.

- Kỹ thuật trên dựa vào tính chất của hàm số lồi, lõm. Mà đơn cử là hàm số bậc nhất (cũng có tính chất tương tự vậy mặc dù không là hàm lồi hay lõm) và hàm số bậc hai (Có thể tham khảo bài viết " Một tính chất thú vị của tam thức bậc hai và nhị thức bậc nhất - Võ Quốc Bá Cẩn " THTT - số 444,).

Bài 10 (Đề kiểm tra đội tuyển toán chuyên Bảo Lộc lần 2-2016)**.**

Với ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x^4+1+2xy} + \frac{y}{y^4+1+2yz} + \frac{z}{z^4+1+2zx} \leq \frac{3}{4}$$

Lời Giải.

Cách 1: (Ngô Trung Hiếu)

Ta có:

$$\frac{x}{x^4+1+2xy} + \frac{y}{y^4+1+2yz} + \frac{z}{z^4+1+2zx} \leq \frac{x}{2x^2+2xy} + \frac{y}{2y^2+2yz} + \frac{z}{2z^2+2zx}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}\right) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{3}{4}$$

Cách 2:

Áp dụng BĐT AM - GM ta được:

$$\frac{1}{x^3+\frac{1}{x}+2y}+\frac{1}{y^3+\frac{1}{y}+2z}+\frac{1}{z^3+\frac{1}{z}+2x} \le \frac{1}{4\sqrt{xy}}+\frac{1}{4\sqrt{yz}}+\frac{1}{4\sqrt{zx}} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{3}{4}$$

□

Bài 11 (Đề kiểm tra đội tuyển toán chuyên Bảo Lộc lần 3-2016).

Với ba số thực $a, b, c \in (0; 1)$. Chứng minh rằng:

$$\left(a-a^2\right)\left(b-b^2\right)\left(c-c^2\right) \ge (a-bc)(b-ca)(c-ab)$$

Lời Giải. Ta chỉ cần chứng minh BĐT trong trường hợp

$$\begin{cases} a \ge bc \\ b \ge ca \\ c \ge ab \end{cases}$$

Khi đó BĐT cần chứng minh là

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc\,(ab+bc+ca) \ge abc\left(a^2+b^2+c^2+a+b+c\right)$$

Biến đổi khéo léo ta thấy 2 vế ghép lại là các hằng đẳng thức, do đó BĐT trên được viết lại là:

$$\frac{1}{2}\left[a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2\right] \ge \frac{1}{2}abc\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[a\,(a-bc)\,(b-c)^2+b\,(b-ca)\,(c-a)^2+c\,(c-ab)\,(a-b)^2\right] \ge 0$$

BĐT trên hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Nhận xét: Qua bài giải trên bằng phép biến đổi tương đương ta thấy bài toán sau cũng đúng:

Với ba số thực dương a, b, c lớn hơn 1. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2-a\right)\left(b^2-b\right)\left(c^2-c\right) \ge (bc-a)(ca-b)(ab-c)$$

Bài 12 (Đề chọn đội tuyển Bình Dương 2016).

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^3+y^2+z=2\sqrt{3}+1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{1}{x}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^3}$$

Lời Giải. Ta sẽ chọn điểm rơi giả định là $x=a; y=b; z=c$ khi đó:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{x^3}{a^4} \ge \dfrac{4}{a^3} \\[2ex] \dfrac{1}{y^2}+\dfrac{y^2}{b^4} \ge \dfrac{2}{b^2} \\[2ex] \dfrac{1}{z^3}+\dfrac{3z}{c^4} \ge \dfrac{4}{c^3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^3}+\left(\frac{x^3}{3a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{3z}{c^4}\right)\geq \frac{4}{3a^3}+\frac{2}{b^2}+\frac{4}{c^3}$$

Vậy ta cần chọn a, b, c sao cho:

$$\begin{cases} a^3+b^2+c=2\sqrt{3}+1 \\ 3a^4=b^4=\dfrac{c^4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left\{a=1; b=\sqrt[4]{3}; c=\sqrt{3}\right.$$

Khi đó

$$P=\frac{1}{x}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^3}\geq 1+\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

Vậy GTNN của P là $1+\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ đạt được khi $x=1; y=\sqrt[4]{3}; z=\sqrt{3}$. □

Bài 13 (Đề chọn đội tuyển chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng)**.**

Với bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn $ab=c^2+4d^2=4$. Chứng minh rằng:

$$(a-c)^2+(b-d)^2\geq \frac{8}{5}$$

Lời Giải. (http://artofproblemsolving.com/)

Từ giả thiết ta được:

$$\begin{cases} b=\dfrac{4}{a} \\ c^2=4\left(1-d^2\right) \end{cases} \Rightarrow -1\leq d\leq 1$$

Vậy nên ta chỉ cần chứng minh hai BĐT sau luôn đúng:

$$\begin{cases} a^2+\dfrac{16}{a^2}+4\left(1-d^2\right)+d^2+2a\sqrt{4\left(1-d^2\right)}-\dfrac{8d}{a}\geq \dfrac{8}{5} \\ \\ a^2+\dfrac{16}{a^2}+4\left(1-d^2\right)+d^2-2a\sqrt{4\left(1-d^2\right)}-\dfrac{8d}{a}\geq \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a^4+12a^2-15d^2a^2+20a^3\sqrt{1-d^2}-40da+80\geq 0 \\ \\ 5a^4+12a^2-15d^2a^2-20a^3\sqrt{1-d^2}-40da+80\geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(a^2+\dfrac{10}{3}a\sqrt{1-d^2}\right)^2+165\left(\dfrac{ad}{3}-\dfrac{4}{11}\right)^2+2\left(a^2-\dfrac{16}{3}\right)^2+\dfrac{128}{99}\geq 0 \\ \\ 3\left(a^2-\dfrac{10}{3}a\sqrt{1-d^2}\right)^2+165\left(\dfrac{ad}{3}-\dfrac{4}{11}\right)^2+2\left(a^2-\dfrac{16}{3}\right)^2+\dfrac{128}{99}\geq 0 \end{cases}$$

Hai BĐT cuối luôn đúng nên BĐT đề bài được chứng minh. Đẳng thức không thể xảy ra tức

$$(a-c)^2+(b-d)^2>\frac{8}{5}$$

□

Bài 14 (Đề thi chọn đội tuyển tỉnh Quảng Bình - Ngày thứ 2).

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác và $a \geq b \geq c$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a(a+b-\sqrt{ab})}+\sqrt{b(a+c-\sqrt{ac})}+\sqrt{c(c+b-\sqrt{bc})} \geq a+b+c$$

Lời Giải.

Cách 1: (MathUniverse)

Đặt $a=x^2, b=y^2, c=z^2$ khi đó BĐT trở thành:

$$f(y)=x\sqrt{x^2-xy+y^2}+y\sqrt{x^2-xz+z^2}+z\sqrt{y^2-yz+z^2}-x^2-y^2-z^2 \geq 0$$

Ta thấy:

$$f''(y)=\frac{3x^3}{4(x^2-xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3z^3}{4(z^2-zy+y^2)^{\frac{3}{2}}}-2$$

Từ điều kiện $x \geq y \geq z$ ta được

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2 \geq \dfrac{3}{4}x^2 \\ y^2-yz+z^2 \geq z^2 \end{cases}$$

do đó:

$$f''(y) \leq \sqrt{\frac{4}{3}}+\frac{3}{4}-2<0$$

Vậy $f(y)$ là hàm lõm thế nên:

$$f(y) \geq \min\{f(y=x), f(y=z)\}$$

- $f(x)=(x+z)\sqrt{x^2-xz+z^2}-x^2-z^2$

  Ta có

  $$\begin{aligned} &(x+z)\sqrt{x^2-xz+z^2} \geq x^2+z^2 \\ \Leftrightarrow\ &(x+z)^2\left(x^2-xz+z^2\right) \geq \left(x^2+z^2\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ &(x+z)\left(x^3+z^3\right) \geq \left(x^2+z^2\right)^2 \end{aligned}$$

  do vậy $f(x)=(x+z)\sqrt{x^2-xz+z^2}-x^2-z^2 \geq 0$

- Tương tự $f(z)=(x+z)\sqrt{x^2-xz+z^2}-x^2-z^2 \geq 0$

Vậy bài toán được chứng minh.

Cách 2: (MathUniverse)

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác và $a \geq b \geq c$ nên ta có:

$$a-\sqrt{ab}+b \geq c-\sqrt{ca}+a \geq b-\sqrt{bc}+c$$

Khi đó:

$$\sqrt{a(a-\sqrt{ab}+b)}+\sqrt{b(a-\sqrt{ac}+c)}+\sqrt{c(b-\sqrt{bc}+c)}$$

$$\geq \sqrt{b(a-\sqrt{ab}+b)}+\sqrt{c(a-\sqrt{ac}+c)}+\sqrt{a(b-\sqrt{bc}+c)}$$

Do đó:

$$2\left(\sqrt{a(a-\sqrt{ab}+b)}+\sqrt{b(a-\sqrt{ac}+c)}+\sqrt{c(b-\sqrt{bc}+c)}\right)$$

$$\geq \sum\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\sqrt{a-\sqrt{ab}+b}=\sum\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\right)}$$

$$\geq \sum(a+b)=2(a+b+c)$$

Cách 3: Võ Quốc Bá Cẩn

Đặt $a=x^2, b=y^2, c=z^2$ khi đó BĐT trở thành:

$$x\sqrt{x^2-xy+y^2}+y\sqrt{x^2-xz+z^2}+z\sqrt{y^2-yz+z^2}\geq x^2+y^2+z^2$$

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}=\frac{\sqrt{(x^3+y^3)(x+y)}}{x+y}\geq \frac{x^2+y^2}{x+y}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{x(x^2+y^2)}{x+y}+\frac{y(x^2+z^2)}{x+z}+\frac{z(y^2+z^2)}{y+z}\geq x^2+y^2+z^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x^2+y^2)-x^2(x+y)}{x+y}+\frac{y(x^2+z^2)-y^2(x+z)}{x+z}+\frac{z(y^2+z^2)-z^2(y+z)}{y+z}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy(y-x)}{x+y}+\frac{xy(x-y)+yz(z-y)}{x+z}+\frac{yz(y-z)}{y+z}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy(x-y)(y-z)}{x+y}+\frac{yz(y-z)(x-y)}{(x+z)(y+z)}\geq 0$$

BĐT cuối hiển nhiên đúng do $x\geq y\geq z$. □

Nhận xét: Qua lời giải 1 và 3 ta thấy bài toán đúng với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a\geq b\geq c$. Riêng cách 2 một cách chứng minh rất tinh tế nhưng phải thêm giả thiết a, b, c là ba cạnh của tam giác (đây là bài trong đề TST 2013 của Iran).

Bài 15 (Đề thi chọn đội tuyển tỉnh Hòa Bình).

Cho a, b, c là các số thực dương có tích bằng 1. x, y, z là các số thực. Chứng minh rằng:

$$x^2(a+b)+y^2(b+c)+z^2(c+a) \geq 2(xy+yz+zx)$$

Lời Giải.

Cách 1: (diendantoanhoc.net)

Áp dụng BĐT Cauchy ta được:

$$\left(\sum x^2\left(a+b+1\right)\right)\left(\sum \frac{1}{a+b+1}\right) \geq (x+y+z)^2$$

Vậy nên ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1} \leq 1$$

Ta lại có: $a+b \geq \sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}$ (tương tự cho các hạng tử còn lại) nên:

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{b^2c}+\sqrt[3]{bc^2}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{c^2a}+\sqrt[3]{ca^2}+1}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}+\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{a}}+\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=1$$

Cách 2: Ta sẽ chứng minh một BĐT mạnh hơn như sau:

Nếu a, b, c, x, y, z là các số thực dương thì BĐT sau luôn đúng:

$$x^2\left(a+b\right)+y^2\left(b+c\right)+z^2\left(c+a\right) \geq 2\left(xy+yz+xz\right)\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$$

Do BĐT là thuần nhất với x, y, z và a, b, c nên ta chuẩn hóa như sau:

$$\begin{cases} xy+yz+xz=3 \\ a+b+c=1 \end{cases}$$

Khi đó BĐT cần chứng minh là:

$$x^2\left(1-c\right)+y^2\left(1-a\right)+z^2\left(1-b\right) \geq 2\sqrt{3\left(ab+bc+ca\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2} \geq \sqrt{3\left(ab+bc+ca\right)}+\frac{ax^2}{2}+\frac{by^2}{2}+\frac{cz^2}{2}$$

Ta có:

$$\sqrt{3\left(ab+bc+ca\right)}+\frac{ax^2}{2}+\frac{by^2}{2}+\frac{cz^2}{2}$$

$$\leq\sqrt{\frac{3\left(ab+bc+ca\right)}{4}}+\sqrt{\frac{3\left(ab+bc+ca\right)}{4}}+\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+\left(\frac{y^2}{2}\right)^2+\left(\frac{z^2}{2}\right)^2}$$

$$\leq\sqrt{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+\left(\frac{y^2}{2}\right)^2+\left(\frac{z^2}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}.\sqrt{\left(a+b+c\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+\left(\frac{y^2}{2}\right)^2+\left(\frac{z^2}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\sqrt{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+\left(\frac{y^2}{2}\right)^2+\left(\frac{z^2}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}\leq\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\geq 3$$

BĐT cuối cùng hiển nhiên đúng do $xy+yz+xz=3$. Ta chứng minh xong kết quả trên.

Quay trở lại bài toán: Không mất tính tổng quát ta chứng minh cho x,y,x là các số thực dương.

Ta chỉ cần chứng minh: $\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3}}\geq 1$ BĐT này hiển nhiên đúng do giả thiết bài toán $abc=1$.

□

Nhận xét:

- Kết quả trên ta liên tưởng đến một BĐT khá quen thuộc:

  $$\frac{x}{y+z}\left(a+b\right)+\frac{y}{z+x}\left(b+c\right)+\frac{z}{x+y}\left(c+a\right)\geq\sqrt{3\left(ab+bc+ca\right)}$$

  Cách chứng minh tương tự chỉ cần chỉ ra:

  $$\frac{xy}{\left(y+z\right)\left(z+x\right)}+\frac{yz}{\left(z+x\right)\left(x+y\right)}+\frac{zx}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)}\geq\frac{3}{4}$$
  $$\Leftrightarrow xy\left(x+y\right)+yz\left(y+z\right)+zx\left(z+x\right)\geq 6xyz$$

- Qua bài trên ta được một bổ đề sau:

  Nếu x,y,z,a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+xz\geq\frac{3}{4}$ thì BĐT sau luôn đúng:

  $$x\left(a+b\right)+y\left(b+c\right)+z\left(c+a\right)\geq\sqrt{3\left(ab+bc+ca\right)}$$

- Cũng từ bài giải ta cũng có một BĐT mạnh hơn nữa như sau:

  Nếu a,b,c,x,y,z là các số thực dương thì BĐT sau luôn đúng:

  $$x^2\left(a+b\right)+y^2\left(b+c\right)+z^2\left(c+a\right)\geq 2\sqrt{\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\left(ab+bc+ca\right)}$$

Bài 16 (Đề thi chọn đội tuyển tỉnh Hà Tĩnh).

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^5 + b^5 + c^5 = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^6b^6 + b^6c^6 + c^6a^6 \le 3$$

Lời Giải.

Cách 1:

Vì hàm số $f(t) = \sqrt{t}$ là hàm lõm nên:

$$a^5\sqrt{a^2b^{12}} + b^5\sqrt{b^2c^{12}} + c^5\sqrt{c^2a^{12}} \le \left(a^5 + b^5 + c^5\right)\sqrt{\frac{a^6b^6 + b^6c^6 + c^6a^6}{a^5 + b^5 + c^5}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^6b^6 + b^6c^6 + c^6a^6} \le \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow a^6b^6 + b^6c^6 + c^6a^6 \le 3$$

Cách 2: (diendantoanhoc.net) Theo BĐT AM - GM ta có:

$$a^5b^5\left(a^5 + b^5 + 1 + 1 + 1\right) \ge 5a^6b^6$$

Tương tự cho b^6c^6, c^6a^6 ta được:

$$5\left(a^6b^6 + b^6c^6 + c^6a^6\right) \le a^5b^5\left(a^5 + b^5\right) + b^5c^5\left(b^5 + c^5\right) + c^5a^5\left(c^5 + a^5\right) + 3\left(a^5b^5 + b^5c^5 + c^5a^5\right)$$

$$\Leftrightarrow 5\left(a^6b^6 + b^6c^6 + c^6a^6\right) \le 3\left(a^5b^5 + b^5c^5 + c^5a^5\right) + \left(a^5b^5 + b^5c^5 + c^5a^5\right)\left(a^5 + b^5 + c^5\right) - 3a^5b^5c^5$$

$$\Leftrightarrow 5\left(a^6b^6 + b^6c^6 + c^6a^6\right) \le 6\left(a^5b^5 + b^5c^5 + c^5a^5\right) - 3a^5b^5c^5$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$6\left(a^5b^5 + b^5c^5 + c^5a^5\right) - 3a^5b^5c^5 \le 15$$

mà

$$a^5b^5c^5 \ge \frac{\left(a^5 + b^5 + c^5\right)\left[4\left(a^5b^5 + b^5c^5 + c^5a^5\right) - \left(a^5 + b^5 + c^5\right)^2\right]}{9}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(a^5b^5 + b^5c^5 + c^5a^5\right) - 3a^5b^5c^5 \le \left(a^5 + b^5 + c^5\right)^2 = 9$$

Vậy nên ta chỉ cần chứng minh

$$a^5b^5 + b^5c^5 + c^5a^5 \le 3$$

Nhưng đây lại là kết quả hiển nhiên do $a^5 + b^5 + c^5 = 3$.

Vậy BĐT được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Chúng ta còn một cách nữa nhưng trước hết là nhận xét về bài toán

Nhận xét:

- Một bài tương tự: **Vasile Citoaje GM-A 2003**

  Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3$. Chứng minh rằng:
  $$a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4\le 3$$

- Tổng quát hơn:[7]

  Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^n+b^n+c^n=3$, với n là số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng:
  $$a^{n+1}b^{n+1}+b^{n+1}c^{n+1}+c^{n+1}a^{n+1}\le 3$$

Qua trở lại bài toán. Ta có

$$f(k)=\left(\frac{a^kb^k+b^kc^k+c^ka^k}{3}\right)^{\frac{1}{k}}$$

là hàm tăng. Do đó nếu với giả thiết các số a, b, c dương thỏa $a^5+b^5+c^5=3$ ta sẽ đặt ra câu hỏi vậy thì số r lớn nhất để

$$\left(\frac{a^rb^r+b^rc^r+c^ra^r}{3}\right)^{\frac{1}{r}}\le 1\Leftrightarrow a^rb^r+b^rc^r+c^ra^r\le 3$$

sẽ có giá trị là bao nhiêu?

Cách 3:[8] Thay vì chứng minh bài toán ta sẽ đi tìm số r lớn nhất để

$$a^rb^r+b^rc^r+c^ra^r\le 3$$

- Với $a=\sqrt[5]{\frac{3}{2}}, b=\sqrt[5]{\frac{3}{2}-\varepsilon}, c=\sqrt[5]{\varepsilon}$ ta cần:
  $$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{r}{5}}\left(\frac{3}{2}-\varepsilon\right)^{\frac{r}{5}}+\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{r}{5}}(\varepsilon)^{\frac{r}{5}}+(\varepsilon)^{\frac{r}{5}}\left(\frac{3}{2}-\varepsilon\right)^{\frac{r}{5}}\le 3$$
  Cho $\varepsilon\to 0^+$ ta cần có:
  $$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{r}{5}}\le 3\Leftrightarrow r\le\frac{5\ln 3}{\ln 9-\ln 4}$$

- Ta sẽ chứng minh với $r=\dfrac{5\ln 3}{\ln 9-\ln 4}>6$ thì BĐT sau luôn đúng:
  $$a^rb^r+b^rc^r+c^ra^r\le 3$$
  Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b\ge c$ và đặt
  $$f(a,b,c)=a^rb^r+b^rc^r+c^ra^r$$

[7] Cách chứng minh hoàn toàn tương tự với chú ý:
$$4\left(a^nb^n+b^nc^n+c^na^n\right)-3a^nb^nc^n\le\left(a^n+b^n+c^n\right)^2=9$$

[8] Tham khảo từ ”Algebraic Inequalities - Old and New Methods - Vasile Cirtoaje”

+ Ta chứng minh:

$$a^rb^r + b^rc^r + c^ra^r \leq t^{2r} + 2t^rc^r \ ; \left(t = \sqrt[5]{\frac{a^5+b^5}{2}}\right)$$

$$a^rb^r + b^rc^r + c^ra^r \leq t^{2r} + 2t^rc^r$$

$$\Leftrightarrow a^rb^r + (b^r + a^r - 2t^r)\, c^r \leq t^{2r}$$

Ta lại có:

$$\begin{cases} 2t^r \leq b^r + a^r \\ \\ c^r \leq \sqrt{a^rb^r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{a^5+b^5}{2}\right)^{\frac{r}{5}} \leq \dfrac{a^r+b^r}{2} \\ \\ c^r \leq \sqrt{a^rb^r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[5]{\left(\dfrac{a^5+b^5}{2}\right)} \leq \sqrt[r]{\left(\dfrac{a^r+b^r}{2}\right)} \\ \\ c^r \leq \sqrt{a^rb^r} \end{cases}$$

BĐT cuối luôn đúng do đó ta cần chứng minh:

$$a^rb^r + (b^r + a^r - 2t^r)\sqrt{a^rb^r} \leq t^{2r}$$

$$\Leftrightarrow \left(t^r + \sqrt{a^rb^r}\right)^2 \geq 2a^rb^r + (b^r + a^r)\sqrt{a^rb^r}$$

$$\Leftrightarrow \left(t^r + \sqrt{a^rb^r}\right)^2 \geq \sqrt{a^rb^r}\left(\sqrt{a^r} + \sqrt{b^r}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow t^r + \sqrt{a^rb^r} \geq \sqrt[4]{a^rb^r}\left(\sqrt{a^r} + \sqrt{b^r}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{a^r}+\sqrt{b^r}}{2} - \sqrt[4]{a^rb^r}\right)^2 + t^r - \left(\frac{\sqrt{a^r}+\sqrt{b^r}}{2}\right)^2 \geq 0$$

Vì

$$t^r \geq \left(\frac{\sqrt{a^r}+\sqrt{b^r}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{(\sqrt{a})^{10} + \left(\sqrt{b}\right)^{10}}{2}\right)^{\frac{1}{10}} \geq \left(\frac{(\sqrt{a})^{r} + \left(\sqrt{b}\right)^{r}}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$$

BĐT cuối đúng do đó:

$$a^rb^r + b^rc^r + c^ra^r \leq t^{2r} + 2t^rc^r$$

+ Ta cần chứng minh:

$$t^{2r} + 2t^rc^r \leq 3 \ ; \left(t = \sqrt[5]{\frac{a^5+b^5}{2}}, r = \frac{\ln 3}{\ln 9 - \ln 4}\right)$$

Vì $a^5+b^5+c^5=3$ nên

$$t^{2r}+2t^rc^r\le 3\Leftrightarrow \frac{t^{2r}+2t^rc^r}{3}\le\left(\frac{2t^5+c^5}{3}\right)^{\frac{2r}{5}}$$

BĐT trên là thuần nhất nên ta chuẩn hóa $t=1$ (khi đó $c\le 1$). BĐT cần chứng minh là:

$$g\left(c\right)=\frac{2r}{5}\ln\left(\frac{2+c^5}{3}\right)-\ln\left(\frac{1+2c^r}{3}\right)\ge 0$$

Bằng công cụ đạo hàm ta dễ dàng chứng minh được $g(c)$ là hàm lõm, kết hợp với $g\left(1\right)=0;\ \lim\limits_{c\to 0^+}g\left(c\right)=\frac{2r}{5}\ln\left(\frac{2}{3}\right)-\ln\left(\frac{1}{3}\right)>0$. Ta được:

$$g\left(c\right)=\frac{2r}{5}\ln\left(\frac{2+c^5}{3}\right)-\ln\left(\frac{1+2c^r}{3}\right)\ge 0$$

Vậy $r=\dfrac{5\ln 3}{\ln 9-\ln 4}>6$ là số lớn nhất để BĐT sau luôn đúng:

$$\left(\frac{a^rb^r+b^rc^r+c^ra^r}{3}\right)^{\frac{1}{r}}\le 1$$

Qua lại bài toán trong đề thi của chúng ta. Từ kết quả trên ta được:

$$\left(\frac{a^6b^6+b^6c^6+c^6a^6}{3}\right)^{\frac{1}{6}}\le\left(\frac{a^rb^r+b^rc^r+c^ra^r}{3}\right)^{\frac{1}{r}}\le 1$$

Ta được điều phải chứng minh.

Bài 17 (Đề thi chọn đội tuyển tỉnh Đồng Nai)**.**

Với ba số thực dương a,b,c có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+3}}$$

LỜI GIẢI.

Cách 1: Theo BĐT AM- GM, ta chỉ cần chứng minh:

$$3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}}}\ge\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+3}}$$

Tức là:

$$\left(a^3+b^3+c^3+3\right)^3\ge 27\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$$

BĐT trên là hiển nhiên vì theo BĐT Schur ta có:

$$\left(a^3+b^3+c^3+3\right)^3=\left(a^3+b^3+c^3+3abc\right)^3\ge\left[ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)\right]^3$$

$$\ge\left[3\sqrt[3]{a^2b^2c^2\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}\right]^3=27\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Tương tự như trên ta cần chứng minh:

$$\left(a^3 + b^3 + c^3 + 3\right)^3 \geq 27\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$$

Ta có:

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + 1 \geq a + b$$

do đó:

$$\left(a^2 + b^2 + c^2 + 3\right)^3 \geq \left[2\left(a+b+c\right)\right]^3 \geq \left[3\sqrt[3]{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}\right]^3 = 27\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Theo BĐT AM - GM ta có:

$$\begin{cases} \left(a^3 + a^3 + 1\right) + \left(b^3 + b^3 + 1\right) + \left(c^3 + c^3 + 1\right) \geq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \end{cases}$$

Vậy BĐT được chứng minh đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Cách 3: Ta chứng minh một kết quả mạnh hơn như sau:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a+b+c+3}}$$

Áp dụng BĐT Holder ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}\right)^2 \left[a^2\left(b+c\right) + b^2\left(c+a\right) + c^2\left(a+b\right)\right] \geq \left(a+b+c\right)^3$$

Vậy nên ta chỉ cần chứng minh:

$$\left(a+b+c\right)^3 \geq \frac{27\left[a^2\left(b+c\right) + b^2\left(c+a\right) + c^2\left(a+b\right)\right]}{a+b+c+3}$$

$$\Leftrightarrow \left(a+b+c\right)^4 + 3(a+b+c)^3 \geq 27\left[a^2\left(b+c\right) + b^2\left(c+a\right) + c^2\left(a+b\right)\right]$$

Theo BĐT Schur ta có:

$$\left(a+b+c\right)^3 - 3 \geq 4\left[a^2\left(b+c\right) + b^2\left(c+a\right) + c^2\left(a+b\right)\right]$$

nên ta chỉ cần chứng minh:

$$\left(a+b+c\right)^4 + 3(a+b+c)^3 \geq \frac{27}{4}\left[(a+b+c)^3 - 3\right]$$

$$\Leftrightarrow 4(a+b+c)^4 - 15(a+b+c)^3 + 81 \geq 0$$

Xét hàm số $f(t) = 4t^4 - 15t^3 + 81$ với $t \geq 3$ ta có:

$$f'(t) = 16t^3 - 45t = t\left(16t^2 - 45\right) > 0$$

do vậy:

$$4(a+b+c)^4 - 15(a+b+c)^3 + 81 \geq 4.3^4 - 15.3^3 + 81 = 0$$

Tóm lại:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a+b+c+3}}$$

Áp dụng kết quả vừa chứng minh ta dễ dàng hoàn thành bài toán. $\square$

Nhận xét: Qua bài giải trên ta được kết quả sau:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} &\geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a+b+c+3}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2(a+b+c)}} \\ &\geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+3}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+3}}\end{aligned}$$

Bài 18 (Đề thi chọn đội tuyển tỉnh Quảng Trị - Vòng 2)**.**

Với ba số thực không âm x, y, z có tổng bằng 2. Chứng minh rằng:

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq x^3 + y^3 + z^3 \leq 1 + \frac{1}{2}\left(x^4 + y^4 + z^4\right)$$

Lời Giải.

Cách 1:

- Ta chứng minh: $x^2y + y^2z + z^2x \leq x^3 + y^3 + z^3$. Theo BĐT AM - GM ta có:

  $$\begin{cases} x^3 + x^3 + y^3 \geq 3x^2y \\ y^3 + y^3 + z^3 \geq 3y^2z \\ z^3 + z^3 + x^3 \geq 3z^2x \end{cases}$$

  Cộng theo vế ta được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

- Ta chứng minh: $x^4 + y^4 + z^4 + 2 \geq 2x^3 + 2y^3 + 2z^3$

  Không mất tính tổng quát ta giả sử $x \geq y \geq z$

  + Nếu $x \leq 1$.

    Khi đó hàm số

    $$f(x) = x^4 - 2x^3$$

    có $f''(x) \leq 0$ và $(1, 1, 0) \succ (x, y, z)$ do đó:

    $$\left(x^4 - 2x^3\right) + \left(y^4 - 2y^3\right) + \left(z^4 - 2z^3\right) \geq (-1) + (-1) + 0 = -2$$

    BĐT được chứng minh.

+ Nếu $x > 1$. Khi đó tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $x = 1 + \varepsilon$ và $y + z = 1 - \varepsilon$.

  Ta lại có hàm số
  $$f(y) = y^4 - 2y^3$$
  có $f''(y) \leq 0$ và $(1 - \varepsilon, 0) \succ (y, z)$ nên:
  $$\left(y^4 - 2y^3\right) + \left(z^4 - 2z^3\right) \geq (1 - \varepsilon)^4 - 2(1 - \varepsilon)^3$$
  Vậy ta chỉ cần chứng minh:
  $$(1 + \varepsilon)^4 - 2(1 + \varepsilon)^3 + (1 - \varepsilon)^4 - 2(1 - \varepsilon)^3 + 2 \geq 0$$
  Thế nhưng BĐT trên là hiển nhiên vì:
  $$(1 + \varepsilon)^4 - 2(1 + \varepsilon)^3 + (1 - \varepsilon)^4 - 2(1 - \varepsilon)^3 + 2 = 2\varepsilon^4 > 0$$
  Vậy khi $x > 1$ thì
  $$x^4 + y^4 + z^4 + 2 > 2x^3 + 2y^3 + 2z^3$$
  .

BĐT thứ 2 được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ $x = y = 1, z = 0$ và các hoán vị của nó.

Cách 2:

- Chứng minh $x^2y + y^2z + z^2x \leq x^3 + y^3 + z^3$ như trên.
- Ta chứng minh: $x^4 + y^4 + z^4 + 2 \geq 2x^3 + 2y^3 + 2z^3$.

  Ta đặt:
  $$\begin{cases} q = xy + yz + zx \\ r = xyz \end{cases}$$
  BĐT được viết lại là:
  $$\begin{aligned} & 16 - 16q + 2q^2 + 8r + 2 \geq 2\left(8 - 6q + 3r\right) \\ \Leftrightarrow\ & 2q^2 - 4q + 2r + 2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2(q - 1)^2 + 2r \geq 0 \end{aligned}$$
  BĐT cuối hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1, z = 0$ và các hoán vị của nó.

$\square$

Bài 19 (Đề thi chọn đội tuyển tỉnh Thanh Hóa - Vòng 2).

Với ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(2xy+yz+zx)^2}+\frac{1}{(2yz+zx+xy)^2}+\frac{1}{(2zx+xy+yz)^2}\le\frac{3}{16x^2y^2z^2}$$

Lời Giải.

Cách 1:

Quan sát giả thiết bài toán ta thực hiện thay

$$(x,y,z)\to\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)$$

BĐT cần chứng minh được viết lại là:

$$\frac{1}{(2x+y+z)^2}+\frac{1}{(2y+z+x)^2}+\frac{1}{(2z+x+y)^2}\le\frac{3}{16}$$

Ta lại có:

$$\frac{1}{(2x+y+z)^2}+\frac{1}{(2y+z+x)^2}+\frac{1}{(2z+x+y)^2}$$

$$\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x+y)(x+z)}+\frac{1}{(y+z)(y+x)}+\frac{1}{(z+x)(z+y)}\right]$$

Vì vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{1}{(x+y)(x+z)}+\frac{1}{(y+z)(y+x)}+\frac{1}{(z+x)(z+y)}\le\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow 3\left[(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz\right]\ge 8(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow 3\left[(x+y+z)(xy+yz+zx)-\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}\right]\ge 8(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow 3(xy+yz+zx)\left[(x+y+z)^2-1\right]\ge 8(x+y+z)^2$$

Ta lại có:

$$\left[xyz(x+y+z)\right]^2=(xy+yz+zx)^2\ge 3xyz(x+y+z)\Rightarrow xy+yz+zx=xyz(x+y+z)\ge 3$$

nên ta chỉ cần chứng minh:

$$9(x+y+z)^2-9\ge 8(x+y+z)^2$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2\ge 9$$

Điều này là hiển nhiên vì $x + y + z \geq 3$. Bài toán được chứng minh, đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Cách 2:[9]

Lập luận tương tự như trên ta cần chứng minh:

$$3\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right) \geq 8\left(x+y+z\right)$$

Theo BĐT AM- GM ta có:

$$x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y \geq 6xyz$$

$$\Leftrightarrow 9\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right) \geq 8\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)$$

Vậy nên ta chỉ cần chứng minh

$$xy + yz + zx \geq 3$$

BĐT trên hiển nhiên vì:

$$\left[xyz\left(x+y+z\right)\right]^2 = \left(xy+yz+zx\right)^2 \geq 3xyz\left(x+y+z\right) \Rightarrow xy+yz+zx = xyz\left(x+y+z\right) \geq 3$$

Bài toán được chứng minh.

Cách 3: Ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{\left(2x+y+z\right)^2} + \frac{1}{\left(2y+z+x\right)^2} + \frac{1}{\left(2z+x+y\right)^2} \leq \frac{3}{16}$$

Thực hiện bước đồng bậc hóa như sau:

$$\frac{\left(x+y+z\right)^2}{\left(2x+y+z\right)^2} + \frac{\left(x+y+z\right)^2}{\left(2y+z+x\right)^2} + \frac{\left(x+y+z\right)^2}{\left(2z+x+y\right)^2} \leq \frac{3}{16}\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Khi đó ta chuẩn hóa $x + y + z = 1$ BĐT cần chứng minh là:

$$\frac{1}{\left(1+x\right)^2} + \frac{1}{\left(1+y\right)^2} + \frac{1}{\left(1+z\right)^2} \leq \frac{3}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

BĐT tách biến nên ta có khá nhiều hướng để xử lý:

- **Hướng 1:** [10]

  Xét hàm số $f\left(x\right) = \dfrac{x}{\left(x+1\right)^2}$ có

$$f''\left(x\right) = \frac{2\left(x-2\right)}{\left(x+1\right)^4} < 0 \quad \left(0 \leq x \leq 1\right)$$

[9] Sau khi biến đổi thì đây là bài toán IMO Shortlist 2009 - Problem A2. Cách giải 2,3 được trích dẫn trong đấy.

[10] Trích trong IMO Shortlist 2009 - Problem A2

Áp dụng BĐT Jensen cho hàm lõm $f(x)$ ta được:

$$a\frac{x}{(x+1)^2}+b\frac{y}{(y+1)^2}+c\frac{z}{(z+1)^2}\le(a+b+c)\,.\frac{A}{(A+1)^2}$$

trong đó $A=\dfrac{ax+by+cz}{a+b+c}$.

Chọn $a=\dfrac{1}{x},b=\dfrac{1}{y},c=\dfrac{1}{z}$ khi đó $A=\dfrac{1}{3}<1$ thỏa mãn điều kiện để áp dụng BĐT Jensen nên ta được:

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}\le\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}+1\right)^2}=\frac{3}{16}(x+y+z)$$

Bài toán được chứng minh.

- **Hướng 2:** *(Với các bài toán BĐT có dạng tách biến thì phương pháp* ***Tiếp tuyến, hệ số bất định*** *tỏ ra khá hiệu quả)* Ta sẽ tìm một đánh giá:

$$\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{3}{16x}\le ax+b$$

Để tìm được a,b ta cần chú ý điểm rơi là $x=\dfrac{1}{3}$ và ta được:

$$\begin{cases}a=\dfrac{27}{32}\\[2ex] b=\dfrac{-9}{32}\end{cases}$$

Vậy nên bằng biến đổi tương đương ta dễ dàng kiểm tra được:

$$\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{3}{16x}\le\frac{27}{32}x-\frac{9}{32}$$

Làm tương tự với y,z cộng lại ta được điều phải chứng minh.

$\square$

Một sự trùng hợp ngẫu nhiên đề chọn đội tuyển tỉnh Bà Rịa - Vũng Tàu cũng có dạng tương tự.

Bài 20 (Đề thi chọn đội tuyển Tỉnh Bà Rịa - Vũng Tàu).

Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(2x+y+z)^2}+\frac{1}{(2y+z+x)^2}+\frac{1}{(2z+x+y)^2}\le\frac{3}{16}$$

Lời Giải. Áp dụng cách giải 1 và 2 ta dễ dàng có được lời giải. $\square$

Bài 21 (Đề thi chọn đội tuyển Tỉnh Bà Rịa - Vũng Tàu).

Với x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)\le\frac{3}{2}$$

Lời Giải.

Cách 1: Ta có:

$$\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)^2\le\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)=\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$$

và

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}}$$

$$\le\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{x^2y^2}}}+\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{z^2\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}}}\le\frac{4}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}}$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{3\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}}\le\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\ge 4\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$$

Theo BĐT Schur ta có:

$$1+9x^2y^2z^2\ge 4\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$$

Do vậy ta cần chứng minh:

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\ge 9x^2y^2z^2$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2z^2\le\frac{1}{27}$$

BĐT cuối hiển nhiên đúng vì

$$\frac{1}{27}=\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3\ge x^2y^2z^2$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Cách 2: (artofproblemsolving.com & diendantoanhoc.net)

Ta có: $x^3+xy^2 \geq 2x^2y; y^3+yz^2 \geq 2y^2z; z^3+zx^2 \geq 2z^2x$

Do đó

$$x+y+z=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right) \geq 3\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)$$

- **Hướng 1:** Ta lại có:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+1}} \leq \sqrt{3\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\right)}$$

Vậy nên ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1} \leq \frac{27}{4(x+y+z)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2+1}+\frac{y^2}{y^2+1}+\frac{z^2}{z^2+1}+\frac{27}{4(x+y+z)^2} \geq 3$$

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{y^2}{y^2+1}+\frac{z^2}{z^2+1} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3}=\frac{(x+y+z)^2}{4}$$

Do đó ta cần:

$$\frac{(x+y+z)^2}{4}+\frac{27}{4(x+y+z)^2} \geq 3$$

BĐT là hiển nhiên vì:

$$\begin{cases} \dfrac{(x+y+z)^2}{4}+\dfrac{9}{4(x+y+z)^2} \geq \dfrac{3}{2} \\ \\ \dfrac{18}{4(x+y+z)^2} \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Bài toán được chứng minh.

- **Hướng 2:** Ta cần chứng minh:

$$\frac{x+y+z}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right) \leq \frac{3}{2}$$

Từ giả thiết ta có: $0 \leq x, y, z \leq 1$ nên ta dễ dàng chứng minh được đánh giá sau:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq -\frac{3}{8}x+\frac{5\sqrt{3}}{8}$$

Vậy nên ta cần:

$$\frac{x+y+z}{3}\left[-\frac{3}{8}(x+y+z)+\frac{15\sqrt{3}}{8}\right] \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(x+y+z)^2}{8}+\frac{5\sqrt{3}}{8}(x+y+z) \leq \frac{3}{2}$$

BĐT cuối luôn đúng do $x+y+z \leq \sqrt{3}$. Bài toán được chứng minh.

Cách 3: (artofproblemsolving.com)

Theo BĐT Vasc[11] và BĐT Cauchy ta có

$$x^2y + y^2z + z^2x \le \sqrt{\left(x^3y + y^3z + z^3\right)\left(xy + yz + zx\right)}$$

$$\le \sqrt{\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\left(xy+yz+zx\right)}{3}} = \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}$$

Mặt khác ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \le \sqrt{3\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2}\right)}$$

$$\le \sqrt{3\left(\frac{1}{xy+yz+zx+x^2} + \frac{1}{xy+yz+zx+y^2} + \frac{1}{xy+yz+zx+z^2}\right)}$$

$$\le \sqrt{3\left(\frac{1}{(x+y)(x+z)} + \frac{1}{(y+z)(y+x)} + \frac{1}{(z+x)(z+y)}\right)} = \sqrt{\frac{6(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$\le \sqrt{\frac{6\left(x+y+z\right)}{\frac{8}{9}\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{xy+yz+zx}}$$

Vậy nên ta chỉ cần chứng minh:

$$\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}.\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{xy+yz+zx}} \le \frac{3}{2}$$

Điều đó là hiển nhiên. Bài toán được chứng minh. $\square$

Bài 22 (Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên Đại học Vinh ngày thứ 1)**.**

Tìm tất cả các số thực k sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực a, b, c

$$ab + bc + ca \le \frac{(a+b+c)^2}{3} + k\max\left\{(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2\right\} \le a^2 + b^2 + c^2$$

Lời Giải.

Cách 1:

- Điều kiện cần: Chọn $a = 3, b = 2, c = 1$. BĐT đã cho trở thành:

$$11 \le 12 + 4k \le 14 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ge k \ge -\frac{1}{4}$$

[11]Với mọi số thực x, y, z ta luôn có:

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 \ge 3\left(x^3y + y^3z + z^3x\right)$$

- Điều kiện đủ: Với mỗi k thỏa mãn $\frac{1}{2} \geq k \geq -\frac{1}{4}$ ta sẽ chứng minh BĐT đề bài luôn đúng.

  Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$. BĐT được viết lại là:

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} + k(c-a)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow 3\left(ab+bc+ca\right) \leq (a+b+c)^2 + 3k(c-a)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b+c)^2 + 3k(c-a)^2 \geq 3\left(ab+bc+ca\right) \\ (a+b+c)^2 + 3k(c-a)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-c)^2 + (6k+1)(c-a)^2 + (a-b)^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 + (1-3k)(c-a)^2 + (a-b)^2 \geq 0 \end{cases}$$

  Ta lại có:

$$(b-c)^2 + (a-b)^2 \geq \frac{(a-c)^2}{2}$$

  Nên ta chỉ cần chứng minh:

$$\begin{cases} \left(6k + \dfrac{3}{2}\right)(c-a)^2 \geq 0 \\ \\ \left(\dfrac{3}{2} - 3k\right)(c-a)^2 \geq 0 \end{cases}$$

  Hai BĐT cuối luôn đúng vì $\frac{1}{2} \geq k \geq -\frac{1}{4}$.

Vậy $\frac{1}{2} \geq k \geq -\frac{1}{4}$ là các giá trị cần tìm.

Cách 2: (diendantoanhoc.net)

- Điều kiện cần: Chọn $a = 3, b = 2, c = 1$. BĐT đã cho trở thành:

$$11 \leq 12 + 4k \leq 14 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq k \geq -\frac{1}{4}$$

- Điều kiện đủ: Với mỗi k thỏa mãn $\frac{1}{2} \geq k \geq -\frac{1}{4}$ ta sẽ chứng minh BĐT đề bài luôn đúng.

  Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$. BĐT được viết lại là:

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} + k(c-a)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Đặt $\begin{cases} a = c + x \\ b = c + y \end{cases}$; $(x \ge y \ge 0)$ BĐT trên được viết lại là:

$$\begin{cases} y^2 - xy + (3k+1)\,x^2 \ge 0 \\ y^2 - xy + \left(1 - \dfrac{3}{2}k\right) x^2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - xy + \dfrac{1}{4}x^2 + 3\left(k + \dfrac{1}{4}\right) x^2 \ge 0 \\ y^2 - xy + \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{3}{4}(1 - 2k)\,x^2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(y - \dfrac{1}{2}x\right)^2 + 3\left(k + \dfrac{1}{4}\right) x^2 \ge 0 \\ \left(y - \dfrac{1}{2}x\right)^2 + \dfrac{3}{4}(1 - 2k)\,x^2 \ge 0 \end{cases}$$

Hai BĐT cuối luôn đúng vì $\dfrac{1}{2} \ge k \ge -\dfrac{1}{4}$

Vậy $\dfrac{1}{2} \ge k \ge -\dfrac{1}{4}$ là các giá trị cần tìm. □

Bài 23 (Đề thi chọn HSG cấp Tỉnh - Bến Tre)**.**

Với ba số thực dương a, b, c. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{1344}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{2016}{\sqrt{a+b+c}}$$

LỜI GIẢI. (Nguyễn Minh Thành)

Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}a + b \ge \sqrt{ab} \\ \dfrac{1}{4}a + b + 4c \ge 3\sqrt[3]{abc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{4}a + b \ge \sqrt{ab} \\ \dfrac{1}{12}a + \dfrac{b}{3} + \dfrac{4}{3}c \ge 3\sqrt[3]{abc} \end{cases} \Rightarrow a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \le \frac{4}{3}(a+b+c)$$

Do đó:

$$P = \frac{1344}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{2016}{\sqrt{a+b+c}} \ge 2016\left(\frac{1}{2(a+b+c)} - \frac{1}{\sqrt{a+b+c}}\right)$$

Ta lại có:

$$\frac{1}{2(a+b+c)} - \frac{1}{\sqrt{a+b+c}} + \frac{1}{2} = \frac{1 - 2\sqrt{a+b+c} + (a+b+c)}{2(a+b+c)} = \frac{\left(\sqrt{a+b+c} - 1\right)^2}{2(a+b+c)} \ge 0$$

Vậy ta được $P \geq -1008$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \dfrac{16}{21}; b = \dfrac{4}{21}; c = \dfrac{1}{21}$ hay nói cách khác GTNN của P là -1008. □

Bài 24 (Đề thi chọn HSG Tỉnh Quảng Ninh - Ngày 1)**.**

Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) = 1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{a^2 - ab + b^2}}{\sqrt{ab} + 1} + \frac{\sqrt{b^2 - bc + c^2}}{\sqrt{bc} + 1} + \frac{\sqrt{c^2 - ca + a^2}}{\sqrt{ca} + 1}$$

Lời Giải.

Ta có:

$$\frac{\sqrt{a^2 - ab + b^2}}{\sqrt{ab} + 1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)}}{\sqrt{ab} + 1} \geq \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}}{\sqrt{ab} + 1} \geq \frac{(a+b)}{a+b+2}$$

Để đơn giản ta đặt $x = a + b, y = b + c, z = c + a$. Khi đó ta có:

$$P \geq \frac{x}{x+2} + \frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+2} \quad (x, y, z > 0; xyz = 1)$$

- **Hướng 1:** Ta dự đoán

  $$\frac{x}{x+2} + \frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+2} \geq 1$$

  Thật vậy:

  $$\frac{x}{x+2} + \frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+2} \geq 1$$

  $$\Leftrightarrow \frac{2(xyz + xy + yz + xz - 4)}{(x+2)(y+2)(z+2)} \geq 0$$

  BĐT cuối hiển nhiên vì $xyz = 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ hay $a = b = c = \dfrac{1}{2}$ nên GTNN của P là 1.

- **Hướng 2:** Ta có:

  $$\frac{x}{x+2} \geq \frac{1}{x^{\frac{-4}{3}} + x^{\frac{-2}{3}} + 1} \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2 a^3}{(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)(a+2)} \geq 0; \left(a = x^{\frac{1}{3}}\right)$$

  Áp dụng tương tự cho y, z nên ta được:

  $$P \geq \frac{1}{x^{\frac{-4}{3}} + x^{\frac{-2}{3}} + 1} + \frac{1}{y^{\frac{-4}{3}} + y^{\frac{-2}{3}} + 1} + \frac{1}{z^{\frac{-4}{3}} + z^{\frac{-2}{3}} + 1}$$

  Ta sử dụng **Bổ đề** Với x, y, z là các số thực dương có tích bằng 1 thì BĐT sau luôn đúng:

  $$\frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{y^2 + y + 1} + \frac{1}{z^2 + z + 1} \geq 1$$

  Ta thu được:

  $$P \geq 1$$

  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ hay $a = b = c = \dfrac{1}{2}$ nên GTNN của P là 1.

- **Hướng 3:** Ta dự đoán
$$\frac{x}{x+2}+\frac{y}{y+2}+\frac{z}{z+2}\geq 1$$
Theo BĐT Cauchy ta có:
$$\frac{x}{x+2}+\frac{y}{y+2}+\frac{z}{z+2}\geq\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2}{x+y+z+6}$$
Vậy nên ta cần có:
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq 3$$
Điều trên là hiển nhiên vì $xyz=1$.

- **Hướng 4:**[12] Dự đoán GTNN là 1 và ta cần chứng minh:
$$\frac{x}{x+2}+\frac{y}{y+2}+\frac{z}{z+2}\geq 1$$
Vì $xyz=1$ nên tồn tại các số thực dương k,m,n sao cho:
$$x=\frac{k}{m};y=\frac{m}{n};z=\frac{n}{k}$$
Khi đó BĐT được viết lại là:
$$\frac{k}{k+2m}+\frac{m}{m+2n}+\frac{n}{n+2k}\geq 1$$
Theo BĐT Cauchy ta được:
$$\frac{k}{k+2m}+\frac{m}{m+2n}+\frac{n}{n+2k}\geq\frac{(k+m+n)^2}{(k+m+n)^2}=1$$
Từ đó dễ dàng hoàn thành bài toán.

□

Bài 25 (Đề thi chọn đội tuyển Tỉnh Bắc Ninh)**.**

Với ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=9$. Tìm GTLN của biểu thức sau:
$$P=\frac{ab}{3a+4b+5c}+\frac{bc}{3b+4c+5a}+\frac{ca}{3c+4a+5b}-\frac{1}{\sqrt{ab\,(a+2c)\,(b+2c)}}$$

Lời Giải. Ta sẽ chia P thành 2 phần và đánh giá như sau:

- Ta có:
$$\frac{1}{\sqrt{ab\,(a+2c)\,(b+2c)}}\geq\sqrt{\frac{9}{3a.3b.\,(a+2c)\,(b+2c)}}\geq 3.\sqrt{\frac{1}{(a+b+c)^4}}=\frac{1}{27}$$

[12] Đây là cách đổi biến thường gặp khi các biến có điều kiện tích bằng hằng số.

- Ta lại có:

$$\frac{ab}{3a+4b+5c}+\frac{bc}{3b+4c+5a}+\frac{ca}{3c+4a+5b}$$

$$\leq \sum_{cyc}\frac{ab}{6\sqrt[6]{(a+b)(b+c)^3(c+a)^2}}$$

$$\leq \frac{1}{6}\sum_{cyc}\sqrt[6]{\frac{ab.(ab)^3.(ab)^2}{(a+b)(b+c)^3(c+a)^2}}$$

$$\leq \frac{1}{36}\sum_{cyc}\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{3ab}{b+c}+\frac{2ab}{c+a}\right)=\frac{1}{36}\sum_{cyc}\frac{1}{a+b}\left(2c\left(a+b\right)+a\left(b+c\right)\right)$$

$$=\frac{1}{36}\left[18+\sum_{cyc}\frac{a\left(b+c\right)}{a+b}\right]$$

Ta lại có:

$$\frac{a\left(b+c\right)}{a+b}+\frac{b\left(c+a\right)}{b+c}+\frac{c\left(a+b\right)}{c+a}\leq a+b+c$$

Thật vậy BĐT trên tương đương:

$$ab^3+bc^3+ca^3\geq abc\left(a+b+c\right)$$

BĐT này đúng vì:

$$ab^3+ab^2c+abc^2\geq 3ab^2c$$

(tương tự cho các hạng tử còn lại)

Vậy:

$$P\leq\frac{1}{36}\left(18+9\right)-\frac{1}{27}=\frac{77}{108}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$. Do đó GTLT của P là $\dfrac{77}{108}$ □

Bài 26 (Đề thi chọn đội tuyển Tỉnh Thái Nguyên)**.**

Với ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $ac\geq 12; bc\geq 8$. Tìm GTNN của biểu thức sau:

$$P=a+b+c+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{8}{abc}$$

Lời Giải. Ta dự đoán điểm rơi $a = 3, b = 2, c = 4$ và sử dụng BĐT AM - GM như sau:

$$P = a + b + c + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{8}{abc}$$

$$= 72.\frac{a}{72} + 48.\frac{b}{48} + 96.\frac{c}{96} + 8.\frac{1}{4ab} + 6.\frac{1}{3bc} + 4.\frac{1}{2ca} + 8.\frac{1}{abc}$$

$$\geq 242.\sqrt[242]{\frac{a^{72}b^{48}c^{96}}{72^{72}.48^{48}.96^{96}.4^{8}.3^{6}.2^{4}.a^{20}.b^{22}.c^{18}}} = 242.\sqrt[242]{\frac{a^{52}b^{26}c^{78}}{72^{72}.48^{48}.96^{96}.4^{8}.3^{6}.2^{4}}}$$

$$\geq 242.\sqrt[242]{\frac{(ac)^{52}(bc)^{26}}{72^{72}.48^{48}.96^{96}.4^{8}.3^{6}.2^{4}}} \geq 242.\sqrt[242]{\frac{(12)^{52}(8)^{26}}{72^{72}.48^{48}.96^{96}.4^{8}.3^{6}.2^{4}}}$$

$$= 242.\sqrt[242]{\frac{1}{24^{242}}} = \frac{121}{12}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 3, b = 2, c = 4$. Do đó GTNN của P là $\dfrac{121}{12}$ □

Bài 27 (Đề thi chọn đội tuyển Tỉnh Thái Nguyên)**.**

Với ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+a)^3} + \frac{1}{(1+b)^3} + \frac{1}{(1+c)^3} + \frac{3}{32}(ab + bc + ca) \geq \frac{21}{32}$$

Lời Giải. (http://diendantoanhoc.net/) Ta sẽ dùng bổ đề

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2} \geq \frac{1}{xy+1} \Leftrightarrow \frac{(x^3y + y^3x - 2x^2y^2) + (xy-1)^2}{(x+1)^2(y+1)^2(xy+1)} \geq 0$$

Ta có:

$$\frac{1}{(1+a)^3} + \frac{1}{(1+a)^3} + \frac{1}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(1+a)^6}.\frac{1}{8}} = \frac{3}{2(1+a)^2}$$

Khi đó:

$$2\sum_{cyc}\frac{1}{(1+a)^3} + \frac{3}{8} \geq \frac{3}{2}\sum_{cyc}\frac{1}{(1+a)^2} \geq \frac{3}{4}\sum_{cyc}\frac{1}{ab+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{1}{(1+a)^3} + \frac{3}{32}(ab+bc+ca) \geq \frac{3}{8}\sum_{cyc}\frac{1}{ab+1} + \frac{3}{32}(ab+bc+ca) - \frac{3}{16}$$

Vậy nên ta cần chứng minh:

$$\frac{3}{8}\sum_{cyc}\frac{1}{ab+1} + \frac{3}{32}(ab+bc+ca) - \frac{3}{16} \geq \frac{21}{32}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8}\sum_{cyc}\frac{1}{ab+1} + \frac{3}{32}(ab+bc+ca) \geq \frac{27}{32}$$

Theo BĐT AM- GM ta lại có:

$$\frac{3}{8}\sum_{cyc}\frac{1}{ab+1}+\frac{3}{32}(ab+bc+ca+3)$$

$$\geq \frac{3}{32}.\frac{36}{3+ab+bc+ca}+\frac{3}{32}(ab+bc+ca+3)\geq \frac{36}{32}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8}\sum_{cyc}\frac{1}{ab+1}+\frac{3}{32}(ab+bc+ca)\geq \frac{27}{32}$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Bài 28 (Đề thi chọn đội tuyển Tỉnh Thái Nguyên)**.**

Với ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz \geq 1$ và $z \leq 1$. Tìm GTNN của biểu thức sau:

$$P=\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}+\frac{4-z^3}{3(1+xy)}$$

Lời Giải. Ta sử dụng bổ đề quen thuộc sau:

$$\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}\geq \frac{2\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}$$

Thật vậy,

$$\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}-\frac{2\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+\sqrt{xy}(x-y)^2+x^2+y^2-(x+y)\sqrt{xy}}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\geq 0$$

Do đó:

$$P=\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}+\frac{4-z^3}{3(1+xy)}\geq \frac{2\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}+\frac{1}{1+xy}$$

Ta lại có:

$$\frac{2\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}+\frac{1}{1+xy}-\frac{3}{2}=\frac{\left(\sqrt{xy}-1\right)^3}{2\left(1+\sqrt{xy}\right)(1+xy)}\geq 0$$

Do đó:

$$P\geq \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$. Vậy GTNN của P là $\frac{3}{2}$. □

Bài 29 (Đề thi chọn đội tuyển Tỉnh Hà Nam)**.**

Với ba số thực không âm a, b, c và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Tìm GTNN của biểu thức sau:

$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}$$

Lời Giải.

Cách 1:

Không mất tính tổng quát, ta tìm GTNN của P với điều kiện $a+b+c=3$. Khi đó P được viết lại là:

$$P=\sqrt{\frac{a}{3-a}}+\sqrt{\frac{b}{3-b}}+\sqrt{\frac{c}{3-c}}$$

Ta lại có:

$$\sqrt{\frac{a}{3-a}}\geq\frac{2}{3}a$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{3-a}\geq\frac{4}{9}a^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{a\left(a-\frac{3}{2}\right)^2}{3-a}\geq 0$$

Đánh giá tương tự cho b,c ta được:

$$P=\sqrt{\frac{a}{3-a}}+\sqrt{\frac{b}{3-b}}+\sqrt{\frac{c}{3-c}}\geq\frac{2}{3}a$$

$$P\geq\frac{2}{3}(a+b+c)=2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{3}{2},c=0$ và các hoán vị của nó. Do đó GTNN của P là 2.

Cách 2: (http://diendantoanhoc.net/)

Ta có:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}\geq\frac{2a}{a+b+c}\Leftrightarrow a\left[(a+b+c)^2-4a\,(b+c)\right]\geq 0\Leftrightarrow a(a-b-c)^2\geq 0$$

Đánh giá tương tự cho hai hạng tử còn lại ta được:

$$P\geq 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b,c=0$ và các hoán vị của nó. Do đó GTNN của P là 2.

Cách 3: (http://diendantoanhoc.net/)

Không mất tính tổng quát ta giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a,b,c. Ta có đánh giá sau:[13]

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}\geq 2\sqrt{\frac{a+b}{a+b+2c}}$$

Do đó:

$$P\geq 2\sqrt{\frac{a+b}{a+b+2c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}=2\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2c}{a+b}}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}$$

[13]Đánh giá này có nhiều khai thác rất thú vị có thể tham khảo qua bài viết "Ứng dụng một bổ đề hay trong chứng minh BĐT - Ngô Trung Hiếu, Cao Minh Quang - THTT 469"

Đặt $x=\sqrt{\dfrac{2c}{a+b}}$ khi đó $x\in\left[0;\sqrt{\frac{1}{2}}\right]$, xét hàm số:

$$f\left(x\right)=2\sqrt{\frac{1}{1+2x^2}}+x$$

Bằng khảo sát hàm số ta được:

$$f\left(x\right)\geq f\left(0\right)=2$$

Tức $P\geq 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b,c=0$ và các hoán vị của nó. Do đó GTNN của P là 2.

□

Bài 30 (Đề thi chọn HSG Tỉnh Ninh Bình)**.**

Với ba số thực dương a,b,c, có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}\geq 4\left(\frac{1}{a+7}+\frac{1}{b+7}+\frac{1}{c+7}\right)$$

Lời Giải.

Cách 1:

Áp dụng BĐT Cauchy kết hợp với AM - GM ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\geq\frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}\geq\frac{8}{a+2b+c+4}=\frac{8}{b+7}$$

Đánh giá tương tự cho hai các đại lượng còn lại và cộng lại bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2: (http://diendantoanhoc.net/)

Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\geq\frac{1}{\frac{a+1}{2}+\frac{b+1}{2}}=\frac{2}{a+b+2}$$

Đánh giá tương tự cho hai hạng tử còn lại. Vậy nên ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{c+a+2}=\frac{1}{5-a}+\frac{1}{5-b}+\frac{1}{5-c}\geq\frac{2}{a+7}+\frac{2}{b+7}+\frac{2}{c+7}$$

Ta lại có:

$$\frac{1}{5-a}-\frac{2}{a+7}\geq\frac{3}{32}a-\frac{3}{32}\Leftrightarrow\frac{\left(a-1\right)^2\left(a+3\right)}{32\left(5-a\right)\left(a+7\right)}\geq 0$$

Vậy nên:

$$\frac{1}{5-a}+\frac{1}{5-b}+\frac{1}{5-c}-\frac{2}{a+7}-\frac{2}{b+7}-\frac{2}{c+7}\geq\frac{3}{32}\left(a+b+c\right)-\frac{9}{32}=0$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Bài 31 (Đề thi HSG cấp Tỉnh - Phú Yên).

Với bốn số thực dương x, a, b, c thỏa mãn $x^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{x+2a} + \frac{b}{x+2b} + \frac{c}{x+2c} \le \frac{3}{\sqrt{3}+2}$$

Lời Giải. Trước tiên ta thuần nhất hóa BĐT lại như sau:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+2a} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+2b} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+2c} \le \frac{3}{\sqrt{3}+2}$$

Và chuẩn hóa:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3$$

Vậy nên ta cần chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{3}+2a} + \frac{b}{\sqrt{3}+2b} + \frac{c}{\sqrt{3}+2c} \le \frac{3}{\sqrt{3}+2}$$

Ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{3}+2a} \le \left(-12+7\sqrt{3}\right)(a-1) + \frac{1}{\sqrt{3}+2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\left(2\sqrt{3}-3\right)(a-1)^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2a+\sqrt{3}\right)} \le 0$$

Đánh giá tương tự cho b, c nên ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{3}+2a} + \frac{b}{\sqrt{3}+2b} + \frac{c}{\sqrt{3}+2c} \le \left(-12+7\sqrt{3}\right)(a+b+c-3) + \frac{3}{\sqrt{3}+2} \le \frac{3}{\sqrt{3}+2}$$

BĐT trên đúng vì $a+b+c \le 3$. Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Bài 32 (Đề thi chọn đội tuyển Tỉnh Lạng Sơn ngày thứ 1).

Với ba số thực dương x, y, z có tích bằng 1. Tìm GTLN của biểu thức sau:

$$P = \frac{1}{x^2+2y^2+3} + \frac{1}{y^2+2z^2+3} + \frac{1}{z^2+2x^2+3}$$

Lời Giải. (http://diendantoanhoc.net/)

Ta có:

$$\frac{1}{x^2+2y^2+3} \ge \frac{2}{xy+y+1}$$

Do đó:

$$P \ge \frac{2}{xy+y+1} + \frac{2}{yz+z+1} + \frac{2}{zx+x+1} = \frac{2z}{z+yz+1} + \frac{2}{yz+z+1} + \frac{2}{zx+x+1} = 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. Do đó GTNN của P là 2. □

Bài 33 (Đề thi chọn đội tuyển Tỉnh Quảng Nam).

Với bốn số thực không âm a, b, c, d. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c+d)^3 \le 4\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)+24\,(abc+bcd+cda+dab)$$

Lời Giải. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge c \ge d$.

Ta có:

$$4\left(a^3+b^3+c^3\right)+24abc \ge (a+b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+6abc \ge ab\,(a+b)+bc\,(b+c)+ca\,(c+a)$$

BĐT trên hiển nhiên đúng theo BĐT Schur.

Ta thay $c := c+d$ ta được:

$$4\left[a^3+b^3+(c+d)^3\right]+24ab\,(c+d) \ge (a+b+c+d)^3$$

$$\Leftrightarrow 4\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)+12cd\,(c+d)+24abc+24abd \ge (a+b+c+d)^3$$

Vậy nên ta chỉ cần chứng minh:

$$2cd\,(a+b) \ge cd\,(c+d)$$

Điều trên là hiển nhiên. Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=d=0$ và các hoán vị của nó. □

Bài 34 (Đề thi chọn đội tuyển Tỉnh Nam Định - Ngày thứ 2).

Với ba số thực dương a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{\left(a+\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{\left(b+\sqrt{c}\right)^2}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{\left(c+\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt{c^2-ca+a^2}} \le 12$$

Lời Giải. (http://diendantoanhoc.net/)

Ta có:

$$\frac{\left(a+\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} \le \frac{\left(a+\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{\frac{3}{4}(a-b)^2+\frac{1}{4}(a+b)^2}} = \frac{2\left(a+\sqrt{b}\right)^2}{a+b} \le 2\left(\frac{a^2}{a}+\frac{\left(\sqrt{b}\right)^2}{b}\right) = 2a+2$$

Tương tự cho hai số hạng còn lại cộng lại ta được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ □

Bài 35 (Đề thi chọn HSG Tỉnh Bình Thuận).

Với ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{a+b+c}{2} \ge \frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}$$

Lời Giải.

- Theo BĐT Cauchy ta được:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2}$$

- Theo BĐT AM - GM, ta lại có:

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\leq\frac{ab}{2\sqrt{ab}}+\frac{bc}{2\sqrt{bc}}+\frac{ca}{2\sqrt{ca}}$$

$$=\frac{\sqrt{ab}}{2}+\frac{\sqrt{bc}}{2}+\frac{\sqrt{ca}}{2}\leq\frac{2(a+b+c)}{4}=\frac{a+b+c}{2}$$

Bài toán được chứng minh, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

□

Bài 36 (Đề thi HSG Tỉnh Bình Định).

Với ba số thực dương a,b,c có tích bằng 1. Tìm GTNN của biểu thức sau:

$$P=\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$

Lời Giải. (http://diendantoanhoc.net/)

Ta có:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$

$$=\frac{(bc)^2}{a(b+c)}+\frac{(ca)^2}{b(c+a)}+\frac{(ab)^2}{c(a+b)}\geq\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Ta lại có:

$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}-\frac{3}{2}=\frac{(ab+bc+ca)(ab+bc+ca-3)}{2(ab+bc+ca)}\geq 0$$

Vậy nên:

$$P\geq\frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$, tức GTNN của P là $\frac{3}{2}$. □

Nhận xét: Áp dụng kết quả bài toán trên kết hợp BĐT Nesbitt ta dễ dàng có được lời giải của bài toán sau: **Hong Kong TST 2016**

Với ba số thực dương a,b,c có tích bằng 1. Tìm GTNN của biểu thức sau:

$$P=\frac{a^3+8}{a^3(b+c)}+\frac{b^3+8}{b^3(c+a)}+\frac{c^3+8}{c^3(a+b)}$$

Bài 37 (Đề thi chọn đội tuyển Tỉnh Hải Phòng)**.**

Với ba số thực dương $a, b, c \geq \dfrac{1}{2}$ *có tổng bằng* 6*. Chứng minh rằng:*

$$ab + bc + ca \geq 3\sqrt{abc + ab + bc + ca - 4}$$

Lời Giải. Không mất tính tổng quát ta giả sử $c \geq a \geq b$.
Trước tiên ta khẳng định biểu thức trong căn luôn dương. Ta có:

$$ab + bc + ca + abc - \left(a + c - \frac{1}{2}\right)\left(b + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\left(a + c - \frac{1}{2}\right)b$$

$$= \frac{1}{4}(2a - 1)(2c - 1)(b + 1) \geq 0$$

Mà:

$$\left(a + c - \frac{1}{2}\right)\left(b + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\left(a + c - \frac{1}{2}\right)b - \frac{13}{2}$$

$$= \left(6 - b - \frac{1}{2}\right)\left(b + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\left(6 - b - \frac{1}{2}\right)b - \frac{13}{2} = \frac{3}{4}(2b - 1)(5 - b) \geq 0$$

Do đó $ab + bc + ca + abc \geq \dfrac{13}{2}$ tức căn thức tồn tại. Quay trở lại chứng minh bài toán.
Với các giả sử thứ tự như trên sẽ tồn tại hai số $m \geq n \geq 0$ sao cho:

$$a = m + n; b = m - n$$

Do $a + b + c = 6$ nên $c = 6 - 2m \geq 2$ tức $m \leq 2$.
Khi đó BĐT được viết lại là:

$$(ab + bc + ca)^2 + 36 \geq 9(ab + bc + ca) + 9abc$$

$$\Leftrightarrow \left(m^2 - n^2 + (6 - 2m)(2m)\right)^2 + 36 \geq 9\left(m^2 - n^2 + (6 - 2m)(2m)\right) + 9\left(m^2 - n^2\right)(6 - 2m)$$

$$\Leftrightarrow 9m^4 - 54m^3 + 6m^2n^2 + 117m^2 - 42mn^2 - 108m + n^4 + 63n^2 + 36 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 9(m - 2)^2(m - 1)^2 + n^2\left[6(m - 2)^2 + 18(2 - m) + 3 + n^2\right] \geq 0$$

BĐT cuối hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$ hoặc $a = b = 1, c = 4$ và các hoán vị của nó. $\square$

Nhận xét: Giả thiết $a, b, c \geq \dfrac{1}{2}$ nhằm để căn thức tồn tại chưa tham gia vào lời giải do đó ta có thể mạnh giả thiết lên chỉ cần $ab + bc + ca + abc \geq 4$.

Bài 38 (Đề thi HSG cấp Tỉnh Quảng Ngãi).

Với ba số thực $x, y, z \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = x^5y + xy^5 + \frac{6}{x^2+y^2} - 3(x+y) - 2016z$$

Lời Giải. Ta có:

$$P = x^5y + xy^5 + \frac{6}{x^2+y^2} - 3(x+y) - 2016z \geq x^5y + xy^5 + \frac{6}{x^2+y^2} - 3(x+y) - 2016$$

Xét hàm số:

$$f(x) = x^5y + xy^5 + \frac{6}{x^2+y^2} - 3(x+y)$$

Ta có:

$$f'(x) = 5x^4y - \frac{12}{(x^2+y^2)^2} + y^5 - 3 \leq 5 - \frac{12}{4} + 1 - 3 = 0$$

Do đó:

$$P \geq y + y^5 + \frac{6}{1+y^2} - 3(1+y) - 2016$$

Tương tự như trên ta được:

$$P \geq y + y^5 + \frac{6}{1+y^2} - 3(1+y) - 2016 \geq -2017$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$, nên GTNN của P là -2017 □

Bài 39 (Đề thi chọn đội tuyển Tỉnh Quảng Ngãi).

Với ba số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{a+1}{1+b^2} + \frac{b+1}{1+c^2} + \frac{c+1}{1+a^2} \geq 6 \geq \frac{8}{a^2+b^2+2} + \frac{8}{b^2+c^2+2} + \frac{8}{c^2+a^2+2}$$

Lời Giải.

- Ta chứng minh: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{a+1}{1+b^2} + \frac{b+1}{1+c^2} + \frac{c+1}{1+a^2} \geq 6$ Ta có:

$$\frac{a+1}{1+b^2} \geq \frac{(a+1)}{2}(b-1) + \frac{a+1}{2} = \frac{ab+b}{2} \Leftrightarrow \frac{(a+1)b(b-1)^2}{2(1+b^2)} \geq 0$$

  Đánh giá tương tự cho các số hạng còn lại, ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{ab}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{ca}{2} + \frac{a+b+c}{2} \geq 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{ab}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{ca}{2} \geq \frac{9}{2}$$

  BĐT cuối đúng theo AM - GM.

- Ta chứng minh:[14] $\frac{4}{a^2+b^2+2}+\frac{4}{b^2+c^2+2}+\frac{4}{c^2+a^2+2}\le 3$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b\ge c$.

  Đặt
$$f(a,b,c)=\frac{1}{a^2+b^2+2}+\frac{1}{b^2+c^2+2}+\frac{1}{c^2+a^2+2}$$
  Ta có:
$$f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)-f(a,b,c)$$
$$=\frac{(b-c)^2}{2}\left[\frac{1}{(b^2+c^2+2)\left(2+\frac{(b+c)^2}{2}\right)}-\frac{1}{(4+2a^2+b^2+c^2)\left(4+2a^2+\frac{(b+c)^2}{2}\right)}\right]$$
  Ta lại có:
$$\left(b^2+c^2+2\right)\left(2+\frac{(b+c)^2}{2}\right)<\left(4+2a^2+b^2+c^2\right)\left(4+2a^2+\frac{(b+c)^2}{2}\right)$$
  Do đó:
$$f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)\ge f(a,b,c)$$
  Ta cần chứng minh:
$$f(3-2t,t,t)=\frac{2}{(3-2t)^2+t^2+2}+\frac{1}{2t^2+2}\le\frac{3}{4}$$
  Thật vậy, BĐT trên tương đương:
$$\frac{3(t-1)^2\left(5t^2-2t+1\right)}{4\left(t^2+1\right)\left(5t^2-12t+11\right)}\ge 0$$

Bài toán được chứng minh. □

Bài 40 (Đề thi Olympic chuyên Khoa học Tự nhiên 2016)**.**

Với ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ac+2abc=1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{a(a+1)}{(2a+1)^2}+\frac{b(b+1)}{(2b+1)^2}+\frac{c(c+1)}{(2c+1)^2}\le\frac{9}{16}$$

Lời Giải.

Cách 1:

Vì a,b,c dương thỏa mãn $ab+bc+ac+2abc=1$ nên tồn tại ba số thực dương x,y,z sao cho:
$$a=\frac{x}{y+z},b=\frac{y}{z+x},c=\frac{z}{x+y}$$

[14]Tham khảo trong "Inequalities Theorems, Techniques and Selected Problems - Cvetkovski, Zdravko"

Khi đó BĐT được viết lại là:

$$\frac{x\left(x+y+z\right)}{\left(2x+y+z\right)^2}+\frac{y\left(x+y+z\right)}{\left(x+2y+z\right)^2}+\frac{z\left(x+y+z\right)}{\left(x+y+2z\right)^2}\le\frac{9}{16}$$

Ta chuẩn hóa $x+y+z=3$ khi đó ta cần chứng minh:

$$\frac{x}{\left(3+x\right)^2}+\frac{y}{\left(3+y\right)^2}+\frac{z}{\left(3+z\right)^2}\le\frac{3}{16}$$

Khi đó đặt $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\left(3+x\right)^2}$ ta có:

$$f''\left(x\right)=\frac{2\left(x-6\right)}{\left(3+x\right)^4}<0$$

Theo BĐT Jensen cho hàm lõm $f(x)$ ta được:

$$\frac{x}{\left(3+x\right)^2}+\frac{y}{\left(3+y\right)^2}+\frac{z}{\left(3+z\right)^2}\le 3.\frac{\dfrac{x+y+z}{3}}{\left(3+\dfrac{x+y+z}{3}\right)^2}=\frac{3}{16}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$ tức $a=b=c=\dfrac{1}{2}$

Cách 2: (diendantoanhoc.net)

Lập luận như trên ta cần chứng minh:

$$\frac{x\left(x+y+z\right)}{\left(2x+y+z\right)^2}+\frac{y\left(x+y+z\right)}{\left(x+2y+z\right)^2}+\frac{z\left(x+y+z\right)}{\left(x+y+2z\right)^2}\le\frac{9}{16}$$

Ta có:

$$\frac{x\left(x+y+z\right)}{\left(2x+y+z\right)^2}+\frac{y\left(x+y+z\right)}{\left(x+2y+z\right)^2}+\frac{z\left(x+y+z\right)}{\left(x+y+2z\right)^2}$$

$$\le\left(x+y+z\right)\left[\frac{x}{4\left(x+y\right)\left(x+z\right)}+\frac{y}{4\left(y+z\right)\left(y+x\right)}+\frac{z}{4\left(z+x\right)\left(z+y\right)}\right]$$

$$\le\left(x+y+z\right)\left[\frac{x\left(y+z\right)+y\left(z+x\right)+z\left(x+y\right)}{4\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}\right]$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$9\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\ge 8\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)$$

$$\Leftrightarrow 9\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\ge 8\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)+8xyz$$

$$\Leftrightarrow\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\ge 8xyz$$

BĐT cuối hiển nhiên đúng theo AM -GM.

Cách 3:

BĐT đã cho tương đương:

$$\frac{1}{(2a+1)^2}+\frac{1}{(2b+1)^2}+\frac{1}{(2c+1)^2}\ge\frac{3}{4}$$

Ta có đánh giá sau:

$$\frac{4}{(2a+1)^2}-\frac{3}{4a^2+2a+1}\Leftrightarrow\frac{(2a-1)^2}{(2a+1)^2(4a^2+2a+1)}\ge 0$$

Do vậy:

$$\frac{4}{(2a+1)^2}+\frac{4}{(2b+1)^2}+\frac{4}{(2c+1)^2}\ge 3\left(\frac{1}{4a^2+2a+1}+\frac{1}{4b^2+2b+1}+\frac{1}{4c^2+2c+1}\right)$$

Theo giả thiết ta có $8abc\le 1$ nên tồn tại $a'\ge a$ sao cho $2a'.2b.2c=1$ thế nên ta được:

$$\frac{1}{4a^2+2a+1}+\frac{1}{4b^2+2b+1}+\frac{1}{4c^2+2c+1}\ge\frac{1}{4a'^2+2a'+1}+\frac{1}{4b^2+2b+1}+\frac{1}{4c^2+2c+1}$$

Áp dụng **Bổ đề:** x,y,z dương thỏa mãn $xyz=1$ thì:

$$\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}\ge 1$$

Ta được:

$$\frac{1}{4a^2+2a+1}+\frac{1}{4b^2+2b+1}+\frac{1}{4c^2+2c+1}\ge\frac{1}{4a'^2+2a'+1}+\frac{1}{4b^2+2b+1}+\frac{1}{4c^2+2c+1}\ge 1$$

Vậy nên:

$$\frac{1}{(2a+1)^2}+\frac{1}{(2b+1)^2}+\frac{1}{(2c+1)^2}\ge\frac{3}{4}$$

Cách 4:(diendantoanhoc)

Ta cần chứng minh

$$\frac{1}{(2a+1)^2}+\frac{1}{(2b+1)^2}+\frac{1}{(2c+1)^2}\ge\frac{3}{4}$$

Ta sẽ chứng minh một kết quả mạnh hơn là:

$$\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}+\frac{1}{(2b+1)(2c+1)}+\frac{1}{(2c+1)(2a+1)}\ge\frac{3}{4}$$

Thật vậy:

$$\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}+\frac{1}{(2b+1)(2c+1)}+\frac{1}{(2c+1)(2a+1)}\ge\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(a+b+c)+3}{(2a+1)(2b+1)(2c+1)}\ge\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(a+b+c)+3}{4+2(a+b+c)+1}\ge\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow a+b+c\ge\frac{3}{2}$$

BĐT cuối là hiển nhiên vì theo BĐT AM - GM kết hợp với giả thiết ta có:

$$1 = ab + bc + ca + 2abc \le \frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{2(a+b+c)^3}{27}$$

$$\Rightarrow a + b + c \ge \frac{3}{2}$$

Bài toán được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{2}$

Cách 5:(diendantoanhoc)

Ta cần chứng minh

$$\frac{1}{(2a+1)^2} + \frac{1}{(2b+1)^2} + \frac{1}{(2c+1)^2} \ge \frac{3}{4}$$

Vì a, b, c dương thỏa mãn $ab + bc + ca + 2abc = 1$ nên tồn tại x, y, z dương sao cho:

$$a = \frac{x}{y+z}, b = \frac{y}{z+x}, c = \frac{z}{x+y}$$

Vậy nên BĐT được viết lại là:

$$\frac{(y+z)^2}{[(x+y)+(x+z)]^2} + \frac{(z+x)^2}{[(y+z)+(y+x)]^2} + \frac{(x+y)^2}{[(z+x)+(z+y)]^2} \ge \frac{3}{4}$$

Ta lại có:

$$\frac{(y+z)^2}{[(x+y)+(x+z)]^2} + \frac{(z+x)^2}{[(y+z)+(y+x)]^2} + \frac{(x+y)^2}{[(z+x)+(z+y)]^2}$$

$$\ge \frac{1}{2}\left[\frac{(y+z)^2}{(x+y)^2+(x+z)^2} + \frac{(z+x)^2}{(y+z)^2+(y+x)^2} + \frac{(x+y)^2}{(z+x)^2+(z+y)^2}\right]$$

Theo BĐT Nesbitt thì:

$$\frac{(y+z)^2}{(x+y)^2+(x+z)^2} + \frac{(z+x)^2}{(y+z)^2+(y+x)^2} + \frac{(x+y)^2}{(z+x)^2+(z+y)^2} \ge \frac{3}{2}$$

Bài toán được chứng minh. $\square$

Nhận xét: Đến đây ta thấy có sự liên kết giữa các đề thi: Tỉnh Bà Rìa - Vũng Tàu, Thanh Hóa, Olympic chuyên Khoa học Tự nhiên và Problem A2 - IMO Shortlist 2009. Mặc dù dạng BĐT giống sau vài bước biến đổi là như nhau nhưng giả thiết mạnh yếu khác nhau vì vậy cho ta rất nhiều lời giải hay (với lời giải bằng phép biến đổi tương đương thì chúng gần như là một bài).

Bài 41 (Trại hè Hùng Vương lần XII Bắc Giang 2016, Lớp 10)**.**

Với ba số thực a, b, c thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) \ne 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^2 + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} - \frac{1}{4}$$

Lời Giải. Bài toán có dạng khá cồng kềnh một thao tác hay dùng khi gặp những BĐT như vậy là đặt lại ẩn.

Cách 1: Ta đặt

$$\begin{cases} 2x = a+b \\ 2y = b+c \\ 2z = c+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x+z-y \\ b = x+y-z \\ c = y+z-x \end{cases}$$

BĐT đã cho tương đương với

$$\sum\left(1+\frac{z-y}{x}\right)^2 + 2\left(1+\frac{z-y}{x}\right)\left(1+\frac{x-z}{y}\right)\left(1+\frac{y-x}{z}\right) \geq 2\left(3+\sum\frac{z-y}{x}\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow \sum\left(\frac{z-y}{x}\right)^2 + 2\sum\left(\frac{z-y}{x}.\frac{x-z}{y}\right) + 2\sum\frac{z-y}{x} + 2\left(\frac{z-y}{x}\right)\left(\frac{x-z}{y}\right)\left(\frac{y-x}{z}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z-y}{x} + \frac{x-z}{y} + \frac{y-x}{z}\right)^2 \geq 0$$

vì

$$\sum\frac{z-y}{x} = -\left(\frac{z-y}{x}\right)\left(\frac{x-z}{y}\right)\left(\frac{y-x}{z}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị của nó.

Cách 2: (Đáp án của BTC)

Ta đặt:

$$x = \frac{a}{a+b}, y = \frac{b}{b+c}, z = \frac{c}{c+a}$$

Khi đó:

$$(1-x)(1-y)(1-z) = xyz$$

$$\Leftrightarrow 1 + xy + yz + zx = 2xyz + x + y + z$$

$$\Leftrightarrow 2 + (x+y+z)^2 = 4xyz + 2(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Rightarrow 4xyz + 2(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2 = \left[(x+y+z)^2 + \frac{9}{4}\right] - \frac{1}{4} \geq 3|x+y+z| - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4xyz + 2(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2 = \left[(x+y+z)^2 + \frac{9}{4}\right] - \frac{1}{4} \geq 3(x+y+z) - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4xyz \geq x + y + z - \frac{1}{4}$$

Vậy nên ta được:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^2 + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} - \frac{1}{4}$$

□

Bài 42 (Trại hè Hùng Vương lần XII Bắc Giang 2016, Lớp 11).

Với ba số thực không âm x, y, z có tổng bằng 3. Tìm GTNN và GTLN của biểu thức sau:

$$P=\sqrt{x^3-\frac{2}{3}x^2+4}+\sqrt{y^3-\frac{2}{3}y^2+4}+\sqrt{z^3-\frac{2}{3}z^2+4}$$

Lời Giải. Ta sẽ chứng minh:

$$\sqrt{39}\le P=\sqrt{x^3-\frac{2}{3}x^2+4}+\sqrt{y^3-\frac{2}{3}y^2+4}+\sqrt{z^3-\frac{2}{3}z^2+4}\le 9$$

- $P=\sqrt{x^3-\frac{2}{3}x^2+4}+\sqrt{y^3-\frac{2}{3}y^2+4}+\sqrt{z^3-\frac{2}{3}z^2+4}\ge\sqrt{39}$

  Ta có:

$$\sqrt{x^3-\frac{2}{3}x^2+4}\ge\frac{5\sqrt{39}}{78}(x-1)+\frac{\sqrt{39}}{3}=\frac{5\sqrt{39}}{78}x+\frac{7\sqrt{39}}{26}$$

$$\Leftrightarrow x^3-\frac{2}{3}x^2+4\ge\frac{1}{156}(5x+21)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{52}(x-1)^2(52x+61)\ge 0$$

  Do đó:

$$\sqrt{x^3-\frac{2}{3}x^2+4}+\sqrt{y^3-\frac{2}{3}y^2+4}+\sqrt{z^3-\frac{2}{3}z^2+4}\ge\frac{5\sqrt{39}}{78}(x+y+z)+\frac{21\sqrt{39}}{26}=\sqrt{39}$$

  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$

- $P=\sqrt{x^3-\frac{2}{3}x^2+4}+\sqrt{y^3-\frac{2}{3}y^2+4}+\sqrt{z^3-\frac{2}{3}z^2+4}\le 9$

  Ta có:

$$\sqrt{x^3-\tfrac{2}{3}x^2+4}\le x+2$$

$$\Leftrightarrow x^3-\tfrac{2}{3}x^2+4\le(x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow x(x-3)\left(x+\tfrac{4}{3}\right)\le 0$$

  BĐT cuối hiển nhiên đúng do $x\le 3$. Do đó:

$$P=\sqrt{x^3-\frac{2}{3}x^2+4}+\sqrt{y^3-\frac{2}{3}y^2+4}+\sqrt{z^3-\frac{2}{3}z^2+4}\le(x+y+z)+6=9$$

  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=0, z=3$ và các hoán vị của nó.

Vậy GTNN của P là $\sqrt{39}$ đạt được khi $x=y=z=1$ và GTLN của P là 9 đạt được khi $x=y=0, z=3$. □

Nhận xét:

- Đánh giá
$$\sqrt{x^3-\frac{2}{3}x^2+4}\geq \frac{5\sqrt{39}}{78}(x-1)+\frac{\sqrt{39}}{3}=\frac{5\sqrt{39}}{78}x+\frac{7\sqrt{39}}{26}$$
có được nhờ phương pháp tiếp tuyến dựa vào điểm rơi $x=1$ [15].

- Đối với đánh giá thứ hai:
$$\sqrt{x^3-\frac{2}{3}x^2+4}\leq x+2$$
phương pháp tiếp tuyến không dùng được nữa vì điểm rơi của x, y, z lệch nhau. Ở đây dùng hệ số bất định tức tìm một đánh giá dạng:
$$\sqrt{x^3-\frac{2}{3}x^2+4}\leq ax+b$$
Ta tìm a, b sao cho đánh giá trên đúng với mọi $x\in[0;3]$.

Bài 43 (Đề thi Olympic GGTH 2016 - Khối 11 & 12)**.**

Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:
$$(3a+2b+c)^3\geq 6\sqrt{3}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Lời Giải.

Cách 1: (diendantoanhoc.net)

Đặt $x=a+b, y=a+c$ thì $3a+2b+c=2x+y$; $(x, y\geq 0)$. Ta lại có:
$$\begin{cases} a+b+c\leq 2a+b+c=x+y \\ ab+bc+ca\leq a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)=xy \end{cases}$$
Vậy nên ta chỉ cần chứng minh:
$$(2x+y)^3\geq 6\sqrt{3}xy(x+y)$$
Ta chuẩn hóa $y=1$ và chỉ cần chứng minh:
$$(2x+1)^3\geq 6\sqrt{3}x(1+x)$$
$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2\left(x+\frac{\sqrt{3}+2}{4}\right)\geq 0$$
BĐT cuối là hiển nhiên. Đẳng thức xảy ra khi $a=0, b=\frac{\sqrt{3}-1}{2}c$.

[15] Một vài đánh giá trong bài cũng dùng phương pháp tiếp tuyến để làm đánh giá trung gian.

Cách 2: (Nguyễn Văn Huyện)

Đặt $F=(3a+2b+c)^3-6\sqrt{3}(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Khi đó:

$$F=6\sqrt{3}\left[2a\left(a+b+c\right)+bc\right]a$$

$$+\frac{9-4\sqrt{3}}{33}\left[33a+4\left(6-\sqrt{3}\right)b+\left(9+4\sqrt{3}\right)c\right]\left[\sqrt{3}a+\left(1+\sqrt{3}\right)b-c\right]^2\geq 0$$

□

Bài 44 (Đề thi Olympic GGTH 2016 - Khối 10)**.**

Cho ΔABC có độ dài không vượt quá 1. Gọi p,R,r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp của ΔABC. Chứng minh rằng:

$$p\left(1-2Rr\right)\leq 1$$

Lời Giải. Gọi a,b,c là ba cạnh của tam giác. Khi đó tồn tại các số thực dương x,y,z sao cho:

$$\begin{cases} a=x+y \\ b=y+z \\ c=z+x \end{cases}$$

Khi đó:

$$p=x+y+z;\quad r=\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}};\quad R=\frac{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}{4\sqrt{xyz\left(x+y+z\right)}}$$

Do đó BĐT được viết lại là:

$$\left(x+y+z\right)\left[1-\frac{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}{2\left(x+y+z\right)}\right]\leq 1$$

$$\Leftrightarrow x+y+z-\frac{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}{2}\leq 1$$

Đến đây ta trả về ẩn cũ và nhận được lời giản khá đơn giản:

$$x+y+z-\frac{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}{2}\leq 1$$

$$\Leftrightarrow\frac{a+b+c-abc}{2}\leq 1$$

$$\Leftrightarrow a+b+c\leq 2+abc$$

$$\Leftrightarrow\left(1+ab-a-b\right)+\left(abc-ab\right)+\left(1-c\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(1-a\right)\left(1-b\right)+\left(1-c\right)\left(1-ab\right)\geq 0$$

BĐT cuối hiển nhiên đúng do giả thiết các cạnh của tam giác không vượt quá 1. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1, b = 1, c$ và các hoán vị của nó. □

Nhận xét:

- Bước chuyển đổi a, b, c thành x, y, z trên thường được gọi là phép thế Ravi. Đương nhiên với bài toán này thì chưa cần dùng đến vì biểu thức cần chứng minh có thể biến đổi như sau:
$$p(1 - 2Rr) = p - 2Rpr = p - 2RS = p - \frac{abc}{2} = \frac{a + b + c - abc}{2}$$
Tuy nhiên với các bài toán có biểu thức tương đối phức tạp thì phép biến đổi Ravi tỏ ra khá hiệu quả.

- Có thể tham khảo cách đổi biến này qua bài viết: "Useful substitutions in triangles inequalities - Daniel Sitaru "

2 Phần 2

Ngoài những kỹ thuật cơ bản (sử dụng BĐT cổ điển, biến đổi tương đương,...) ta còn một số kỹ thuật, phương pháp mà tính hiệu quả của nó đã được khẳng định qua rất nhiều bài viết với những lời giải đẹp. Tài liệu sẽ điểm lại một số kỹ thuật đó. Trước hết là kỹ thuật cũng là yêu cầu đầu tiên khi ta học về BĐT.

2.1 Kỹ thuật chọn điểm rơi

Trong chứng minh BĐT việc đảm bảo dấu bằng luôn xảy ra qua các bước đánh giá là vô cùng quan trọng. Bởi nếu trong các bước đánh giá mà mỗi bước có dấu bằng xảy ra với biến x xảy ra khác nhau thì qua các bước đánh giá đó ta chỉ thu được BĐT mà đẳng thức không thể xảy ra, có nghĩa ta đã làm yếu BĐT đi và việc không chứng minh được là điều tất yếu. Ví dụ đơn giản như sau:

Ví dụ 1.

Với mọi số thực x. Chứng minh rằng:

$$x^2+2+\frac{1}{x^2+2}\geq\frac{5}{2}$$

Phân tích và lời giải Nếu ta vận dụng BĐT AM - GM như sau:

$$x^2+2+\frac{1}{x^2+2}\geq 2\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+2}}=2$$

Dấu bằng không thể xảy ra vì:

$$x^2+2=\frac{1}{x^2+2}\Leftrightarrow x^2+2=1\ \ (VN)$$

vậy nên ta chỉ được:

$$x^2+2+\frac{1}{x^2+2}>2\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+2}}=2$$

BĐT đã yếu đi qua bước đánh giá trên đó là lý do không thể chứng minh được bài toán.
Vậy làm sau để có được một đánh giá hợp lý? Trước tiên ta phải đoán nếu đẳng thức xảy ra thì $x=$? Sau đó mỗi bước đánh giá ta luôn nhớ phải đảm bảo đẳng thức sẽ xảy ra. Cụ thể với bài toán trên không khó để đoán đẳng thức xảy ra khi $x=0$ do đó ta đánh giá khéo léo hơn như sau:

$$x^2+2+\frac{1}{x^2+2}=\frac{x^2+2}{4}+\frac{1}{x^2+2}+\frac{3\left(x^2+2\right)}{4}\geq 2\sqrt{\frac{x^2+2}{4\left(x^2+2\right)}}+\frac{6}{4}=\frac{5}{2}$$

□

Tóm lại khi làm việc với BĐT cái nhìn đầu tiên là hãy dự đoán dấu bằng của BĐT sẽ xảy ra khi nào.
Nếu bước dự đoán không dễ dàng hay nói cách khác điểm rơi là số rất xấu không thể đoán được thì thế nào?
Đối với mỗi dạng có giả thiết khác nhau sẽ có cách đánh giá khác nhau, hai ví dụ sau đây hy vọng bạn đọc nắm được ý tưởng khi gặp các BĐT mà dấu bằng khó đoán.

Ví dụ 2.

Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + 2b + 3c = 4$. Tìm GTNN của biểu thức sau:

$$P = a^2 + b^2 + c^4$$

Phân tích và lời giải Không khó để nhận ra ta cần một đánh giá dạng:

$$a^2 + b^2 + c^4 \geq k\left(a + 2b + 3c\right)$$

Và bước đánh giá đó là dùng BĐT AM- GM. Tuy nhiên rất khó để có thể biết GTNN của P xảy ra khi a, b, c có giá trị là bao nhiêu để áp dụng AM- GM hợp lý. Ta giả sử khi P đạt GTNN thì $a = x, b = y, c = z$ và sẽ tiến hành như sau:

$$\begin{cases} a^2 + x^2 \geq 2xa \\ b^3 + y^2 \geq 2yb \\ c^4 + 2z^3 \geq 3z^2c \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^4 + \left(x^2 + y^2 + 2z^3\right) \geq 2xa + 2yb + 3z^2c$$

Vậy là ta cần chọn x, y, z sao cho:

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{2y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2x}{3z^2} = \dfrac{1}{3} \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = \sqrt{2x} \\ 5x + 3\sqrt{2x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{16}{25} \\ z = \dfrac{4}{5} \\ x = \dfrac{8}{25} \end{cases}$$

Nhưng khi trình bày lời giải ta có thể làm ngắn ngọn như sau:
Ta có:

$$\begin{cases} a^2 + \left(\dfrac{8}{25}\right)^2 \geq \dfrac{16}{25}a \\ b^2 + \left(\dfrac{16}{25}\right)^2 \geq \dfrac{32}{25}b \\ c^3 + 2\left(\dfrac{4}{5}\right)^3 \geq \dfrac{48}{25}c \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^3 \geq \dfrac{16}{25}\left(a + 2b + 3c\right) - \dfrac{192}{125} = \dfrac{128}{125}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\dfrac{8}{25};b=\dfrac{16}{25};c=\dfrac{4}{5}$. Do đó GTNN của P là $\dfrac{128}{125}$ □

Ví dụ 3.

Với a,b,c là các số thực thay đổi sao cho $ab+bc+ca=1$. Tìm GTNN của biểu thức sau:

$$P=a^2+b^2+3c^2$$

Phân tích và lời giải Từ giả thiết bài toán gợi cho ta chọn cách đánh giá:

$$a^2+b^2+3c^2\geq k\left(ab+bc+ca\right)$$

Tương tự như ví dụ 2, ta không đoán được điểm rơi khi GTNN đạt được. Ta giả sử khi đó $a=x,b=y,c=z$ ta có đánh giá sau:

$$\begin{cases} xyab\leq \dfrac{(ay)^2+(bx)^2}{2} \\ yzbc\leq \dfrac{(bz)^2+(cy)^2}{2} \\ zxac\leq \dfrac{(az)^2+(cx)^2}{2} \end{cases}$$

Vấn đề còn lại là chon x,y,z thích hợp sao cho có thể tận dụng được $ab+bc+ca=1$. Do đó ta điều chỉnh lại như sau:

$$\begin{cases} xyzab\leq \dfrac{z(ay)^2+z(bx)^2}{2} \\ xyzbc\leq \dfrac{x(bz)^2+x(cy)^2}{2} \\ xyzac\leq \dfrac{y(az)^2+y(cx)^2}{2} \end{cases}$$

Vậy nên:

$$\left[yz\left(y+z\right)\right]a^2+\left[zx\left(z+x\right)\right]b^2+\left[xy\left(x+y\right)\right]c^2\geq 2xyz\left(ab+bc+ca\right)$$

Ta sẽ chọn x,y,z sao cho:

$$\begin{cases} y\left(y+z\right)=x\left(z+x\right) \\ 3z\left(y+z\right)=x\left(x+y\right) \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=y=\sqrt[4]{\dfrac{3}{11}} \\ z=\dfrac{\sqrt{33}-3}{2}.\sqrt[4]{\dfrac{1}{297}} \end{cases}$$

Phần trình bày lại giải dành cho bạn đọc. □

Để kết lại phần này bạn đọc nên xem lại trong phần một các bài **Bài 1 (Tp. HCM - Ngày thứ 1)**,**Bài 12 (Đề chọn đội tuyển Bình Dương 2016)**,**Bài 26 (Đề thi chọn đội tuyển Tỉnh Thái Nguyên)**

2.2 Phương pháp tiếp tuyến

Ý tưởng của phương pháp có thể giải thích như sau:

- **Giải tích:** Trong chương trình toán THPT ta thường xét đến đạo hàm cấp $1, 2$ do đó nếu $f''(x)$ không đổi dấu thì trong khai triển Taylor

  $$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

  ta được:

  $$\begin{cases} \text{Nếu } f''(x) \geq 0; \forall x \in [a;b] \text{ thì } f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0); \forall x_0 \in [a;b] \\ \text{Nếu } f''(x) \leq 0; \forall x \in [a;b] \text{ thì } f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0); \forall x_0 \in [a;b] \end{cases}$$

  (Chứng minh đơn giản bằng cách khai triển đến cấp 2.)

- **Hình học:** Ta biết rằng tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm (trừ điểm uốn) luôn nằm trên hoặc nằm dưới đồ thị hàm số trong một khoảng lồi - lõm tức là

  $$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0); \forall x \in (a;b)$$

  Hoặc là

  $$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0); \forall x \in (a;b)$$

  (Trong đó $(a;b)$ là một khoảng mà hàm số lồi hoặc lõm)

Chính vì vậy ta thường chọn nó làm một đánh giá phụ để chứng minh BĐT.

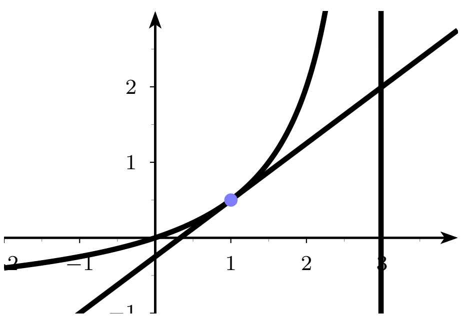
Ví dụ 4 (BĐT Nesbitt)**.**

Với ba số thực dương a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích và lời giải Trước tiên ta nhận xét được đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ta lại thấy tiếp tuyến của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{3-x}$ luôn nằm phía dưới đồ thị với mọi $0 < x < 3$.



Trên cơ sở đó ta mạnh dạn đưa ra đánh giá phụ:

$$\frac{a}{3-a} \geq \frac{3}{4}(a-1)+\frac{1}{2}$$

mà việc kiểm chứng rất dễ dàng bằng phép biến đổi tương đương.
Làm tương tự cho các biến b, c cộng lại ta được điều phải chứng minh. □

Một bài nữa để bạn đọc tập dợt

Ví dụ 5 (Baltic Way 2011)**.**

Với bốn số thực a, b, c, d không âm có tổng bằng 4. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8} \leq \frac{4}{9}$$

Phân tích và lời giải Ta sử dụng đánh giá:

$$\frac{a}{a^3+8} \leq \frac{6(a-1)}{9^2}+\frac{1}{9}$$

□

Điểm mạnh của phương pháp tiếp tuyến là sử dụng được cho các BĐT có điều kiện tổng là hằng số và biểu thức tách biến. Nếu điều kiện khác đi hoặc biểu thức không có dạng tách biến có thể sử dụng được phương pháp không? Hai ví dụ sẽ trả lời cho câu hỏi đó.

Ví dụ 6 (All-Russian Olympiad 2002)**.**

Với ba số thực dương a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca$$

Phân tích và lời giải BĐT không ở dạng tách biến không thể áp dụng phương pháp tiếp tuyến. Tuy nhiên nếu ta điều chỉnh lại biểu thức như sau:

$$a^2+2\sqrt{a}+b^2+2\sqrt{b}+c^2+2\sqrt{c} \geq 2(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2=9$$

Đến đây vấn đề trở nên đơn giản rất nhiều bằng cách sử dụng đánh giá sau:

$$a^2+2\sqrt{a} \geq 3(a-1)+3=3a$$

Ta có được lời giải cho bài toán. □

Ví dụ 7 (Toán học tuổi trẻ)**.**

Với các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Tìm GTNN của biểu thức sau:

$$P=5\left(a^3+b^3+c^3\right)+2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

Phân tích và lời giải Xét hàm số:

$$f(a) = 5a^3 + 2a^2b$$

Ta dự đoán cho đánh giá:

$$f(a) \geq f'(1)(a-1) + f(1)$$

$$\Leftrightarrow 5a^3 + 2a^2b \geq (15+4b)(a-1) + (5+2b)$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2(5a+2b+10) \geq 0$$

Vậy nên:

$$P \geq (15+4b)(a-1) + (5+2b) + (15+4c)(b-1) + (5+2c) + (15+4a)(c-1) + (5+2a)$$

$$\Leftrightarrow P \geq 4(ab+bc+ca) + 13(a+b+c) - 30 \geq 21$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ nên GTNN của P là 21. □

Nhận xét: Ví dụ này muốn nói lên nếu biểu thức cần chứng minh không ở dạng tách biến ta vẫn có thể dùng phương pháp tiếp tuyến bằng cách xét hàm và xem các biến còn lại là tham số.

Để hiểu hơn về phương pháp tiếp tuyến cũng như khẳng định lại tính hiệu quả của nó bạn đọc có thể đọc lại các bài giải của các đề thi **Thanh Hóa - Vòng 2, Hà Nam, Ninh Bình, Phú Yên, Quảng Ngãi, Trại hè Hùng Vương lần XII**

2.3 Phương pháp pqr

Các BĐT đối xứng ba biến x, y, z đều có thể quy về BĐT với các biến $p = x+y+z, q = xy+yz+zx, r = xyz$, như vậy thay vì chứng minh BĐT với ba biến x, y, z không có mối quan hệ với nhau ta quy về chứng minh BĐT với ba biến mới p, q, r có mối quan hệ mật thiết với nhau đó chính là ý tưởng chính của phương pháp.

Để thuận lợi cho việc áp dụng phương pháp ta cần nhớ một số phân tích cơ bản và một số đánh giá đơn giản như sau:[16]

2.3.1 Một số phân tích cơ bản

- $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q$
- $a^3 + b^3 + c^3 = p^3 - 3pq + 3r$
- $a^4 + b^4 + c^4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr$

[16] Tham khảo " BĐT schur và phương pháp biến đổi p, q, r - Võ Thành Văn ".

- $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = q^2 - 2pr$
- $ab\left(a+b\right) + bc\left(b+c\right) + ca\left(c+a\right) = pq - 3r$
- $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right) = pq - r$
- $\left(a+b\right)\left(a+c\right) + \left(b+c\right)\left(b+a\right) + \left(c+a\right)\left(c+b\right) = p^2 + q$
- $ab\left(a^2+b^2\right) + bc\left(b^2+c^2\right) + ca\left(c^2+a^2\right) = p^2q - 2q^2 - pr$
- $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = q^3 - 3pqr + 3r^2$
- $a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 = q^4 - 4pq^2r + 2p^2r^2 + 4qr^2$

2.3.2 Một số đánh giá đơn giản

- $p^2 \geq 3q$
- $p^3 \geq 27r$
- $q^2 \geq 3pr$
- $pq \geq 9r$
- $2p^3 + 9r \geq 7pq$
- $p^2q + 3pr \geq 4q^2$
- $p^4 + 3q^2 \geq 4p^2q$
- $p^4 + 4q^2 + 6pr \geq 5p^2q$
- $p^3 + 9r \geq 4pq$
- $q^3 + 9r^2 \geq 4pqr$
- $p^3r + q^3 \geq 6pqr$
- $r \geq \max\left\{0; \dfrac{p\left(4q-p^2\right)}{9}\right\}$
- $r \geq \max\left\{0; \dfrac{\left(4q-p^2\right)\left(p^2-q\right)}{6p}\right\}$

Chứng minh:

- $p^2 \geq 3q$

  BĐT tương đương với:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

- $p^3 \geq 27r$

  BĐT đúng theo AM - GM ba biến.

- $q^2 \geq 3pr$

  BĐT tương đương với:

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq abc\,(a+b+c)$$

- $pq \geq 9r$

  BĐT đúng theo AM - GM ba biến.

- $2p^3 + 9r \geq 7pq$

  BĐT tương đương với:

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq \left(a^2b+b^2c+c^2a\right) + \left(ab^2+bc^2+ca^2\right)$$

  BĐT này đúng theo BĐT AM - GM ba biến.

- $p^2q + 3pr \geq 4q^2$

  BĐT tương đương với:

$$a^3b+b^3c+c^3a+ab^3+bc^3+ca^3 \geq 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

  BĐT này đúng theo AM - GM ba biến.

- $p^4 + 3q^2 \geq 4p^2q$

  BĐT tương đương với

$$a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq 2abc\,(a+b+c)$$

  BĐT này đúng theo BĐT AM - GM.

- $p^4 + 4q^2 + 6pr \geq 5p^2q$

  BĐT tương đương:

$$a^2\,(a-b)\,(a-c) + b^2\,(b-a)\,(b-c) + c^2\,(c-a)\,(c-b) \geq 0$$

  BĐT là BĐT Schur bậc 4 nên hiển nhiên đúng.

- $p^3 + 9r \geq 4pq$

  BĐT trên tương đương với:

$$a\,(a-b)\,(a-c) + b\,(b-a)\,(b-c) + c\,(c-a)\,(c-b) \geq 0$$

  BĐT là BĐT Schur bậc 3 nên hiển nhiên đúng.

- $q^3 + 9r^2 \geq 4pqr$

  BĐT trên tương đương với:

  $$(x + y + z)^3 + 9xyz \geq 4(x + y + z)(xy + yz + xz)$$

  Trong đó $x = ab, y = bc, z = ca$. BĐT thu được hiển nhiên đúng vì nó là BĐT Schur bậc 3.

- $p^3 r + q^3 \geq 6pqr$

  BĐT tương đương với:

  $$pr\left(p^2 - 3q\right) + q\left(q^2 - 3pr\right) \geq 0$$

  BĐT này hiển nhiên đúng theo chứng minh trên.

- $r \geq \max\left\{0; \dfrac{p(4q - p^2)}{9}\right\}$

  Ta cần chứng minh: $r \geq \dfrac{p(4q - p^2)}{9}$. BĐT này tương đương với:

  $$a(a - b)(a - c) + b(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b) \geq 0$$

  BĐT này hiển nhiên đúng vì đây là BĐT Schur bậc 3.

- $r \geq \max\left\{0; \dfrac{(4q - p^2)(p^2 - q)}{6p}\right\}$

  Ta cần chứng minh: $r \geq \dfrac{(4q - p^2)(p^2 - q)}{6p}$. BĐT này tương đương với:

  $$a^2(a - b)(a - c) + b^2(b - a)(b - c) + c^2(c - a)(c - b) \geq 0$$

  BĐT này hiển nhiên đúng vì đây là BĐT Schur bậc 4.

Ta thấy trong quá trình chứng minh các đánh giá đơn giản trên ta dùng rất nhiều BĐT Schur. Đây là công cụ hữu hiệu khi kết hợp với kỹ thuật phân tích pqr trong chứng minh BĐT.[17]

2.3.3 BĐT Schur

Với mỗi số thực dương a, b, c, k. BĐT sau luôn đúng:

$$a^k(a - b)(a - c) + b^k(b - a)(b - c) + c^k(c - a)(c - b) \geq 0$$

Chứng minh:

Do tính đối xứng của BĐT nên ta giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó:

$$a^k(a - b)(a - c) \geq b^k(a - b)(b - c)$$

Vì vậy:

$$a^k(a - b)(a - c) + b^k(b - a)(b - c) + c^k(c - a)(c - b)$$

$$\geq c^k(c - a)(c - b) \geq 0$$

[17] Bạn đọc có thể tham khảo bài viết " BĐT Schur và ứng dụng - Trần Xuân Đáng - Toán học tuổi trẻ "

2.3.4 Ví dụ minh họa

Ví dụ 8.

Với các số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng:

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x + y + z)$$

Phân tích và lời giải Để đơn giản ta chuẩn hóa $p = x+y+z = 1$ và đặt $q = xy+yz+zx, r = xyz$. Khi đó BĐT trên tương đương với:

$$1 - 4q + 2q^2 + 3r \geq 0$$

Ta lại có:

$$9r + 2 \geq 7q \Leftrightarrow 3r \geq \frac{7q}{3} - \frac{2}{3}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$1 - 4q + 2q^2 + \frac{7q}{3} - \frac{2}{3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(3q - 1\right)\left(2q - 1\right) \geq 0$$

BĐT trên luôn đúng vì $q \leq \dfrac{1}{3}$. □

Ví dụ 9 (Iran - 1996)**.**

Với các số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng:

$$(xy + yz + zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right] \geq \frac{9}{4}$$

Phân tích và lời giải Ta chú ý rằng:

$$\sum_{cyc}(x+y)^2(y+z)^2 = \left[\sum_{cyc}\left(x+y\right)\left(y+z\right)\right]^2 - 4\left(x+y+z\right)\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)$$

Do đó BĐT đã cho tương đương:

$$q\left(\frac{\left(p^2+q\right)^2 - 4p\left(pq - r\right)}{\left(pq - r\right)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4p^4q - 17p^2q^2 + 4q^3 + 34pqr - 9r^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow pq\left(p^3 + 9r - 4pqr\right) + q\left(p^4 + 4q^2 + 6pr - 5p^2q\right) + r\left(pq - 9r\right)$$

Theo các đánh giá trên bài toán được chứng minh. □

Một khó khăn khi dùng phương pháp *pqr* đó là khối lượng tính toán khá nhiều. Tuy nhiên nếu thành thạo thì đây chỉ là kỹ năng cơ bản giống như kỹ năng cho phương pháp SOS. Tiếp đến ta đến với hai ví dụ để ta thấy tính hiệu quả cũng như vẻ đẹp khi ta kết hợp pqr và BĐT Schur.

Ví dụ 10 (BĐT schur và phương pháp biến đổi p, q, r - Võ Thành Văn).

Với các số thực dương x, y, z có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+2xyz \geq \frac{247}{54}$$

Phân tích và lời giải Ta chú ý $x+y+z=1$. BĐT đã cho tương đương:

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+2\frac{xyz}{x+y+z} \geq \frac{247}{54}$$

Theo BĐT Schur ta được:

$$\frac{xyz}{x+y+z} \geq \frac{1}{9}\left[4\left(xy+yz+zx\right)-\left(x+y+z\right)^2\right]=\frac{1}{9}\left[4\left(xy+yz+zx\right)-1\right]$$

Nên ta cần chứng minh:

$$\frac{1+q}{q-r}+\frac{2\left(4q-1\right)}{9}-\frac{247}{54} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 48q^2+259r+54 \geq 48qr+205q$$

$$\Leftrightarrow 48\left(q-\frac{1}{3}\right)^2+r\left(16-48q\right)+243r-173q+\frac{146}{3} \geq 0$$

Lại theo BĐT Schur ta lại có:

$$r \geq \frac{p\left(4q-p^2\right)}{9}=\frac{4q-1}{9}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$48\left(q-\frac{1}{3}\right)^2+r\left(16-48q\right)+27\left(4q-1\right)-173q+\frac{146}{3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 48\left(q-\frac{1}{3}\right)^2+16r\left(1-3q\right)+\frac{65}{3}\left(1-3q\right) \geq 0$$

BĐT trên là hiển nhiên vì $q \leq \dfrac{1}{3}$ □

Ví dụ 11 (Trần Nam Dũng).

Với các số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng:

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+abc+8 \geq 5\left(a+b+c\right)$$

Phân tích và lời giải Ta có:

$$4\left(a^2+b^2+c^2\right)+2abc+16 \geq 4\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{9abc}{a+b+c}+15$$

$$\geq 4\left(p^2-2q\right)+4q-p^2+15$$

Do vậy ta cần chứng minh:

$$4\left(p^2-2q\right)+4q-p^2+15\geq 10p$$

$$\Leftrightarrow 3p^2-10p+15-4q\geq 0$$

Mà $q\leq \dfrac{p^2}{3}$ do vậy ta cần có:

$$3p^2-10p+15-\frac{4p^2}{3}\geq 0\Leftrightarrow \frac{5}{3}(p-3)^2\geq 0$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Ta đã thấy rõ tính linh hoạt khi ta thay ba biến x,y,z thành ba biến mới p,q,r có mối quan hệ mật thiết với nhau, cũng như vẻ đẹp của bài chứng minh khi kết hợp với BĐT Schur. Hơn nữa với những bài khó hơn ta không đơn thuần là biến đổi và dùng Schur mà còn kết hợp với chia trường hợp để xử lý bài toán - Đó là cả một kỹ thuật, bài viết sẽ không trình bày ở đây mời bạn đọc xem trong tài liệu mục 8.

2.4 Phương pháp dồn biến

Trong chứng minh BĐT ta thường gặp các BĐT có dạng: $f(x,y,z)\geq 0$ để đánh giá cho vế trái ta thường tìm một chặn dưới cho nó bằng cách áp dụng các BĐT phụ, hàm số... Một trong số đó là tìm chặn dưới ứng với các biến "ít lệch" hơn (suy nghĩ này rất tự nhiên vì hầu hết các đẳng thức xảy ra trong chứng minh BĐT là khi các biến bằng nhau). Tùy vào mỗi bài mỗi giả thiết ta có một số cách khác nhau như:

$$f(x,y,z)\geq f\left(\frac{x+y}{2};\frac{x+y}{2};z\right);f(x,y,z)\geq f\left(\sqrt{xy};\sqrt{xy};z\right)$$

$$f(x,y,z)\geq f\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}};\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}};z\right)$$

Khi đó thay vì chứng minh ta chuyển về chứng minh các chặn dưới đó lớn hơn hoặc bằng 0 với số biến ít hơn (vì vậy phương pháp có tên là dồn biến).

Tài liệu sẽ điểm qua 3 ví dụ đại diện cho ba cách dồn biến thông dụng trong chứng minh BĐT.

Ví dụ 12 (BĐT Nesbitt)**.**

Với các số thực dương x,y,z. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}$$

Phân tích và lời giải Do BĐT có dạng tổng nên ta chọn cách dồn biến:

$$f(x,y,z)\geq f\left(\frac{x+y}{2};\frac{x+y}{2};z\right)$$

Xét

$$f(x,y,z)=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}-\frac{3}{2}$$

Ta hy vọng có đánh giá sau luôn đúng:

$$f(x,y,z)-f\left(\frac{x+y}{2};\frac{x+y}{2};z\right)=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}-\frac{2\,(x+y)}{2z+x+y}\ge 0$$

Thật vậy:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}\ge\frac{(x+y)^2}{2xy+xz+yz}\ge\frac{2\,(x+y)}{2z+x+y}$$

Do vậy thay vì chứng minh bài toán với 3 biến x,y,z giờ ta chỉ chứng minh BĐT với 2 biến t,z:

$$\frac{2t}{t+z}+\frac{z}{2t}\ge\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(t-z)^2}{2\,(t+z)\,t}\ge 0$$

□

Nhận xét: Nếu ta kết hợp chuẩn hóa thì ta chỉ cần chứng minh BĐT với 1 biến khi đó công việc trở nên dễ dàng hơn.

Ví dụ 13 (MOSP-2001)**.**

Với các số thực dương x,y,z thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$(x+y)(y+z)(z+x)\ge 4(x+y+z-1)$$

Phân tích và lời giải BĐT có điều kiện tích ba biến là hằng số nên ta sẽ chọn cách dồn biến:

$$f(x,y,z)\ge f\left(\sqrt{xy},\sqrt{xy},z\right)$$

Xét

$$f(x,y,z)=(x+y)(y+z)(z+x)-4(x+y+z-1)$$

Ta cần đánh giá sau đây là đúng:

$$\begin{aligned}
&f(x,y,z)-f\left(\sqrt{xy},\sqrt{xy},z\right)\\
&=xy\left(x+y-2\sqrt{xy}\right)+z\left(x^2+y^2+xz+yz-2xy-2z\sqrt{xy}\right)-4\left(x+y-2\sqrt{xy}\right)\\
&=xy\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+z\left[(x-y)^2+z\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\right]-4\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\\
&=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left[z^2+xy+z\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-4\right]\\
&=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left[(z+x)(z+y)+2z\sqrt{xy}-4\right]
\end{aligned}$$

Ta lại có:

$$(z+x)(z+y) \geq 4\sqrt{z^2xy} = 4\sqrt{z}$$

vế trái của BĐT trên sẽ lớn hơn hoặc bằng 4 nếu $z \geq 1$. Điều này hoàn toàn có được bằng cách sắp lại thứ tự các biến trong BĐT (vì BĐT là đối xứng).

Tóm lại ta chỉ cần chứng minh:

$$2t(t+z)^2 - 4(2t+z-1) \geq 0; (t = \sqrt{xy})$$

$$\Leftrightarrow 2t\left(t + \frac{1}{t^2}\right)^2 - 4\left(2t + \frac{1}{t^2} - 1\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t-1)^2(t^4 + 2t^3 + 1 - t^2)}{t^3} \geq 0$$

BĐT cuối luôn đúng vì $t \leq 1$. □

Nhận xét: Phương pháp dồn biến sẽ trở nên hiệu quả hơn nếu ta biết áp dụng kết hợp với các kỹ thuật khác: Sắp thứ tự biến, chuẩn hoán, đạo hàm,...

Bây giờ ta lại xét lại một ví dụ cũ bên trên nhưng với cách nhìn mới hơn.

Ví dụ 14 (All-Russian Olympiad 2002)**.**

Với ba số thực dương a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$$

Phân tích và lời giải Để thuận tiện trong phép chứng minh ta sẽ đặt $\sqrt{a} = x; \sqrt{b} = y; \sqrt{c} = z$. Khi đó giả thiết bài toán sẽ là:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

Nên ta chọn cách dồn biến:

$$f(x,y,z) \geq f\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, z\right)$$

với $f(x,y,z) = x + y + z - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2$

Ta hy vọng

$$f(x,y,z)-f\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},z\right)=\left(x+y-2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)-\left[x^2y^2-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2\right]$$

$$=\left(x+y-2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)+\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{-(x-y)^2}{x+y+2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}}\right)+\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^2$$

$$=(x-y)^2\left[\frac{(x+y)^2}{4}-\frac{1}{x+y+2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}}\right]\geq 0$$

Đánh giá trên không phải lúc nào cũng đúng, do đó ta cần sắp lại thứ tự các biến và hy vọng khi đó nó sẽ đúng.
Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x\geq y\geq z$. Khi đó $z\leq 1; x+y\geq\sqrt{2}$ và:

$$\frac{(x+y)^2}{4}-\frac{1}{x+y+2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}}\geq\frac{1}{2}-\frac{1}{2+\sqrt{2}}>0$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},z\right)=2t+\sqrt{3-2t^2}-t^4-2t^2\left(3-2t^2\right)\geq 0; \text{với} t=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\geq 1$$

Mà

$$2t+\sqrt{3-2t^2}-t^4-2t^2\left(3-2t^2\right)$$

$$=3t^4-6t^2+2t+\sqrt{3-2t^2}=3\left(t^2-1\right)^2+2\left(t-1\right)+\frac{2\left(t^2-1\right)}{\sqrt{3-2t^2}+1}\geq 0$$

Bài toán được chứng minh. □

Trên là ba cách dồn biến thông dụng. Đương nhiên tùy mỗi bài toán khác nhau ta sẽ chọn cách dồn biến khác nhau [18]

Để kết lại phần dồn biến bạn đọc hãy điểm lại các bài giải trong đề thi của **Phổ thông năng khiếu, Đăk Lăk lần 1, Thái Nguyên**.

Ngoài ra bạn đọc hãy xem ví dụ sau đây để có một hướng nhìn khác về cách dồn biến - không đơn thuần là các phép biến đổi tương đương.

Ví dụ 15 (IMO-1984)**.**

[18] Bạn đọc nên xem quyển " Sáng tạo BĐT - Phạm Kim Hùng " để thấy được những cách dồn biến rất đặc biệt.

Với ba số thực không âm x, y, z có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$0 \leq xy + yz + xz - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

Phân tích và lời giải

Ý tưởng: Giả sử ta cần đánh giá $f(x, y, z) \geq f(t; t; z)$; $t = \dfrac{x+y}{2}$ khi đó ta sẽ khảo sát hàm số:

$$g(\varepsilon) = f(t + \varepsilon; t - \varepsilon; z)$$

với $\varepsilon \geq 0$. Ta chứng minh đây là hàm tăng (bằng công cụ đạo hàm) vì vậy:

$$f(x, y, z) = g\left(\frac{x-y}{2}\right) \geq g(0) = f(t; t; z)$$

Qua trở lại bài toán, ta chứng minh:

$$xy + yz + xz - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

Xét

$$f(x, y, z) = xy + yz + xz - 2xyz - \frac{7}{27}$$

với giả sử $x \geq y \geq z$. Với mỗi (x, y, z) cố định ta đặt $\dfrac{1}{3} \leq t = \dfrac{x+y}{2} \leq \dfrac{1}{2}$

- Xét hàm số:

  $$g(\varepsilon) = f(t+\varepsilon, t-\varepsilon, z) = (t + \varepsilon)(t - \varepsilon) + 2t(1 - 2t) - 2(t + \varepsilon)(t - \varepsilon)(1 - 2t) - \frac{7}{27}; (\varepsilon \geq 0)$$

  có

  $$g'(\varepsilon) = -2\varepsilon + 4\varepsilon(1 - 2t) = \varepsilon(2 - 8t) \leq 0$$

  Vì vậy:

  $$g(\varepsilon) \leq g(0)$$

- Từ trên ta được:

  $$g\left(\frac{x-y}{2}\right) \leq g(0)$$

  $$\Leftrightarrow xy + yz + xz - 2xyz - \frac{7}{27} \leq t^2 + 2t(1 - 2t) - 2t^2(1 - 2t) - \frac{7}{27}$$

  Mà

  $$t^2 + 2t(1 - 2t) - 2t^2(1 - 2t) - \frac{7}{27} = \frac{1}{27}(3t - 1)^2(12t - 7) \leq 0$$

Bài toán được chứng minh. $\square$

2.5 Phương pháp SOS

SOS là viết tắt của Sum of Square. Ý tưởng phương pháp là đưa bài toán chứng minh BĐT về phân tích thành tổng các đại lượng bình phương. Ví dụ:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geq 0$$

Vậy là ta chứng minh được BĐT AM - GM ba biến.

Ví dụ 16 (Moldova MO 2006)**.**

Với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2\left(\frac{b}{c} - 1\right) + b^2\left(\frac{c}{a} - 1\right) + c^2\left(\frac{a}{b} - 1\right) \geq 0$$

Phân tích và lời giải BĐT trên tương đương với:

$$a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 \geq abc\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2(a-b+c)(b-c)^2 + b^2(a+b-c)(a-c)^2 + c^2(b+c-a)(a-b)^2 \geq 0$$

□

Nhận xét: Lời giải trên rất đẹp tuy nhiên có 2 vấn đề phát sinh:

- Để biến đổi thu được BĐT cuối không phải là chuyện dễ dàng, vậy có một cách thức nào cho việc phân tích này?
- Nếu các phần

$$S_a = a^2(a-b+c); S_b = b^2(a+b-c); S_c = c^2(b+c-a)$$

trong một bài toán khác chúng không đảm bảo là không âm vậy có chứng minh được BĐT hay không?

Chính hai vấn đề trên là động lực để phương pháp SOS xuất hiện.

2.5.1 Các phân tích cơ bản

Một số phân tích sau sẽ giúp chúng ta rút ngắn thời gian khi sử dụng SOS cũng như có định hướng cho các phép biến đổi

- $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$
- $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{(a-b)^2}{ab}$
- $a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a-b)^2$

- $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$
- $a^2+b^2+c^2-\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$
- $(a+b)(b+c)(c+a)-8abc=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2$
- $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$
- $\sqrt{2(a^2+b^2)}-(a+b)=\dfrac{(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+(a+b)}$
- $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}-\dfrac{3}{2}=\sum_{Sym}\dfrac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)}$
- $(a+b+c)^3-27abc=\dfrac{7a+b+c}{2}(b-c)^2+\dfrac{a+7b+c}{2}(c-a)^2+\dfrac{a+b+7c}{2}(a-b)^2$

2.5.2 Định lý SOS

Xét biểu thức

$$S=f(a,b,c)=S_a(b-c)^2+S_b(a-c)^2+S_c(a-b)^2$$

trong đó $S_a; S_b; S_c$ là các hàm số theo a,b,c

1. Nếu $S_a; S_b; S_c \geq 0$ thì $S \geq 0$.

2. Với $a \geq b \geq c$ và:

   - $\begin{cases} S_b \geq 0 \\ S_b+S_a \geq 0 \\ S_b+S_c \geq 0 \end{cases}$ thì $S \geq 0$.

   Mở rộng:

   \+ Nếu $\begin{cases} S_a \geq S_b \geq S_c \\ S_b+S_c \geq 0 \end{cases}$ thì $S \geq 0$.

   \+ Nếu $\begin{cases} S_a \leq S_b \leq S_c \\ S_b+S_a \geq 0 \end{cases}$ thì $S \geq 0$.

   - $\begin{cases} S_a; S_c \geq 0 \\ S_a+2S_b \geq 0 \\ S_c+2S_b \geq 0 \end{cases}$ thì $S \geq 0$.

   - $\begin{cases} S_b; S_c \geq 0 \\ a^2S_b+b^2S_a \geq 0 \end{cases}$ thì $S \geq 0$.

3. Nếu $\begin{cases} S_a + S_b + S_c \geq 0 \\ S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \geq 0 \end{cases}$ thì $S \geq 0$.

Chứng minh:[19]

1. Nếu $S_a; S_b; S_c \geq 0$ thì $S \geq 0$. (hiển nhiên)

2. Với $a \geq b \geq c$ và:

   - Ta có: $\begin{cases} S_b \geq 0 \\ S_b + S_a \geq 0 \\ S_b + S_c \geq 0 \end{cases}$

     Vì $a \geq b \geq c \Rightarrow (a-c)^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2$ nên

     $$S = S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_c + S_b)(a-b)^2 \geq 0$$

   - Ta có: $\begin{cases} S_a; S_c \geq 0 \\ S_a + 2S_b \geq 0 \\ S_c + 2S_b \geq 0 \end{cases}$

     Nếu $S_b \geq 0$ kết hợp với $S_a; S_c \geq 0$ ta được điều phải chứng minh. Ở đây ta chỉ xét với $S_b \leq 0$.

     Vì $(a-c)^2 \leq 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2$ nên:

     $$S = S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 2S_b)(b-c)^2 + (S_c + 2S_b)(a-b)^2 \geq 0$$

   - Ta có: $\begin{cases} S_b; S_c \geq 0 \\ a^2S_b + b^2S_a \geq 0 \end{cases}$

     Vì $a \geq b \geq c$ nên $\dfrac{a-c}{b-c} \geq \dfrac{a}{b}$ khi đó:

     $$S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 = (b-c)^2\left[S_a + S_b.\left(\frac{a-c}{b-c}\right)^2\right] \geq (b-c)^2\left[S_a + S_b.\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]$$

     Vì vậy $\begin{cases} S_b; S_c \geq 0 \\ a^2S_b + b^2S_a \geq 0 \end{cases}$ thì $S \geq (b-c)^2\left[S_a + S_b.\left(\dfrac{a}{b}\right)^2\right] + S_c(a-b)^2 \geq 0$

3. Ta có: $\begin{cases} S_a + S_b + S_c \geq 0 \\ S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \geq 0 \end{cases}$

   Ta chứng minh khi $\begin{cases} S_a < 0 \\ S_b + S_c \geq 0 \end{cases}$ các trường hợp khác tương tự.

[19] Khi làm một bài thi mà sử dụng phương pháp SOS, học sinh phải kèm phép chứng minh vào bài giải tránh bị mất điểm.

Ta có:

$$(S_b+S_c)\left[S_a(b-c)^2+S_b(a-c)^2+S_c(a-b)^2\right]$$

$$=(S_b+S_c)^2a^2-2\left(S_b+S_c\right)\left(bS_c+cS_b\right)a+\left(S_b+S_c\right)\left[c^2S_b+b^2S_c+S_a(b-c)^2\right]$$

$$=\left[\left(S_b+S_c\right)a-\left(bS_c+cS_b\right)\right]^2+\left(S_aS_b+S_bS_c+S_cS_a\right)(b-c)^2\geq 0$$

2.5.3 Ví dụ minh họa

Ví dụ 17 (BĐT Schur)**.**

Với a, b, c là ba số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

Phân tích và lời giải Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\geq b\geq c$

BĐT trên tương đương:

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-6abc$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\geq a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-a+b+c}{2}(b-c)^2+\frac{a-b+c}{2}(c-a)^2+\frac{a+b-c}{2}(a-b)^2\geq 0$$

Khi đó ta thấy:

$$\begin{cases} S_b=\dfrac{a-b+c}{2}\geq 0\\ S_b+S_a=\dfrac{a-b+c}{2}+\dfrac{-a+b+c}{2}=c\geq 0\\ S_b+S_c=\dfrac{a-b+c}{2}+\dfrac{a+b-c}{2}=a\geq 0\end{cases}$$

Do đó theo định lý SOS ta được điều phải chứng minh. □

Ví dụ 18.

Với a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sum\limits_{sym}a^2}{\sum\limits_{sym}ab}+2\sum_{sym}\frac{bc}{(b+c)^2}\geq\frac{5}{2}$$

Phân tích và lời giải Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\geq b\geq c$.

BĐT tương đương với:

$$\frac{\sum\limits_{sym} a^2}{\sum\limits_{sym} ab} - 1 + 2\sum_{sym}\left[\frac{bc}{(b+c)^2} - \frac{1}{4}\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{sym}(a-b)^2}{\sum\limits_{sym} ab} + 2\sum_{sym}\left[\frac{(b-c)^2}{4(b+c)^2}\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym}\left[\frac{1}{2\sum\limits_{sym} ab} - \frac{1}{2(a+b)^2}\right](a-b)^2 \geq 0$$

Vậy nên:

$$S_a = \frac{1}{2(ab+bc+ac)} - \frac{1}{2(b+c)^2}; S_b = \frac{1}{2(ab+bc+ac)} - \frac{1}{2(c+a)^2};$$

$$S_c = \frac{1}{2(ab+bc+ac)} - \frac{1}{2(a+b)^2}$$

Ta thấy rằng $0 \leq S_b \leq S_c$ do đó theo định lý SOS ta cần $b^2S_a + a^2S_b \geq 0$

Thật vậy,

$$b^2S_a + a^2S_b = \frac{a^2+b^2}{2(ab+bc+ac)} - \frac{b^2}{2(b+c)^2} - \frac{a^2}{2(c+a)^2}$$

$$= \frac{a^3c + b^3c - a^2bc - ab^2c + a^3b + b^3a - 2a^2b^2}{2(ab+bc+ac)(b+c)^2(c+a)^2} \overset{AM-GM}{\geq} 0$$

Bài toán được chứng minh. □

Bài viết sẽ không liệt kê ra các ví dụ áp dụng định lý SOS nữa (vì như vậy sẽ quá dài) mà để bạn đọc tự trải nghiệm nó [20]. Đôi khi ý tưởng của phương pháp cũng mang một giá trị quý không kém gì phương pháp, ví dụ cuối cùng sau minh chứng cho điều đó.

Ví dụ 19.

Với ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{3}{2}$$

Phân tích và lời giải Không mất tính tổng quát, ta giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c.

[20] Hãy chọn một BĐT đối xứng ba biến và cố gắng phân tích để sử dụng định lý SOS.

Ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}-3\le 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)}+\frac{a+b+2c}{(b+c)(c+a)(a+b)}(a-c)(b-c)\le 2\left[\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)(b-c)}{ac}\right]$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{2}{ab}-\frac{1}{(b+c)(c+a)}\right](a-b)^2+\left[\frac{2}{ac}-\frac{a+b+2c}{(b+c)(c+a)(a+b)}\right](a-c)(b-c)\ge 0$$

Vế trái là biểu thức của những số hạng không âm do đó bài toán được chứng minh. □

Kết lại phương pháp SOS bạn đọc hãy em lại bài giải của các đề thi **HSG lớp 12 - Hà Nội, Bảo Lộc lần 3, Đại học Vinh ngày thứ 1**

HẾT

Tài liệu

[1] *http://diendantoanhoc.net/*

[2] *http://artofproblemsolving.com/*

[3] *https://nttuan.org*

[4] *https://www.facebook.com/groups/110865909255110/*

[5] *Sáng tạo BĐT - Phạm Kim Hùng*

[6] *Bất đẳng thức suy luận và khám phá - Phạm Văn Thuận, Lê Vĩ.*

[7] *Sử dụng AM - GM để chứng minh BĐT - Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh.*

[8] *Bất đẳng thức schur và phương pháp biến đổi* p, q, r *- Võ Thành Văn*