BÀI GIẢNG GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1. Giới hạn hữu hạn tại một điểm.

Định nghĩa 1:

Cho $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\backslash\{x_0\}$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_n\in(a;b)\backslash\{x_0\}, x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L$.

Nhận xét:

- Giới hạn của hàm số được định nghĩa thông qua khái niệm giới hạn của dãy số.

- Hàm số không nhất thiết phải xác định tại x_0.

Định nghĩa 2 (Giới hạn một bên):

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_0<x_n<b, x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L.$

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $a<x_n<x_0, x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L.$

STUDY TIP

$x\to x_0^+$ nghĩa là $x\to x_0$ và $x>x_0.$

$x\to x_0^-$ nghĩa là $x\to x_0$ và $x<x_0.$

Định lí 1

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L.$

2. Giới hạn vô cực tại một điểm.

Định nghĩa 3

Cho $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\backslash\{x_0\}$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_n\in(a;b)\backslash\{x_0\}, x_n\to x_0$ ta có $f(x_n)=+\infty.$

Lưu ý:

Các định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty; \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty; \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty; \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty;$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

3. Lưu ý:

a) $f(x)$ không nhất thiết phải xác định tại điểm x_0.

b) Ta chỉ xét giới hạn của $f\left(x\right)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $\left(a;b\right)$ (dù nhỏ) chứa x_0 mà $f\left(x\right)$ xác định trên $\left(a;b\right)$ hoặc trên $\left(a;b\right)\backslash\left\{x_0\right\}$.

Chẳng hạn, hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ có tập xác định là $D=\left[0;+\infty\right)$. Do đó ta không xét giới hạn của hàm số tại điểm $x_0=0$, do không có một khoảng $\left(a;b\right)$ nào chứa điểm 0 mà $f\left(x\right)$ xác định trên đó cả. Tương tự vậy ta cũng không xét giới hạn của $f\left(x\right)$ tại mọi điểm $x_0<0$.

c) Ta chỉ xét giới hạn bên phải của $f\left(x\right)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $\left(x_0;b\right)$ (khoảng nằm bên phải x_0) mà $f\left(x\right)$ xác định trên đó.

Tương tự, ta chỉ xét giới hạn bên trái của $f\left(x\right)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $\left(a;x_0\right)$ (khoảng nằm bên trái x_0) mà $f\left(x\right)$ xác định trên đó.

Chẳng hạn, với hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x-1}$, tại điểm $x_0=1$, ta chỉ xét giới hạn bên phải. Với hàm số $g\left(x\right)=\sqrt{1-x}$, tại điểm $x_0=1$, ta chỉ xét giới hạn bên trái.

d) $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x^-_o} f(x)=\lim\limits_{x\to x^+_o} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x^-_o} f(x)=\lim\limits_{x\to x^+_o} f(x)=-\infty$

II. ĐỊNH NGHĨA GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

1. Giới hạn hữu hạn tại vô cực.

Định nghĩa 4

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $\left(a;+\infty\right)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\left(x_n\right)$, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta đều có $\lim f(x)=L$.

LƯU Ý: Định nghĩa $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

2. Giới hạn vô cực tại vô cực.

Định nghĩa 5

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $\left(a;+\infty\right)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\left(x_n\right)$, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta đều có $\lim f(x)=+\infty$.

LƯU Ý: Các định nghĩa: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

III. MỘT SỐ GIỚI HẠN ĐẶC BIỆT

a) $\lim\limits_{x\to x_o} x=x_o$.

b) $\lim\limits_{x\to x_o} c=c; \lim\limits_{x\to\pm\infty} c=c$ (c là hằng số)

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{c}{x^k}=0$ (c là hằng số, k nguyên dương).

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số nguyên lẻ; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số nguyên chẵn.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-f(x)\right] = -\infty$.

IV. ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Định lí 2

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = M$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)\pm g(x)\right] = L\pm M$.

b) $\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)g(x)\right] = LM$; $\lim\limits_{x\to x_o}\left[cf(x)\right] = cL$ với c là một là một hằng số.

c) $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M} (M\neq 0)$.

STUDY TIP: Giới hạn hữu hạn, giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số tại một điểm bằng tổng, hiệu, tích, thương các giới hạn của chúng tại điểm đó (trong trường hợp thương, giới hạn của mẫu phải khác không).

Định lí 3

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = L$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to x_o}\left|f(x)\right| = \left|L\right|$.

b) $\lim\limits_{x\to x_o}\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$.

c) Nếu $f(x)\geq 0$ với mọi $J\setminus\left\{x_o\right\}$, trong đó J là khoảng nào đó chứa x_o, thì $L\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_o}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

LƯU Ý: Định lí 2 và định lí 3 vẫn đúng khi thay $x\to x_o$ bởi $x\to x^-_o, x\to x^+_o$.

V. QUY TẮC VỀ GIỚI HẠN VÔ CỰC

Các định lí và quy tắc dưới đây được áp dụng cho mọi trường hợp: $x\to x_o, x\to x^-_o, x\to x^+_o, x\to+\infty$ và $x\to-\infty$.

Tuyên nhiên, để cho gọn, ta chỉ phát biểu cho trường hợp $x\to x_o$.

Quy tắc 1 (Quy tắc tìm giới hạn của tích).

$L=\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)g(x)\right]$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

STUDY TIP: Giới hạn của tích hai hàm số

- Tích của một hàm số có giới hạn hữu hạn khác 0 với một hàm số có giới hạn vô cực là một hàm số có giới hạn vô cực.

- Dấu của giới hạn theo quy tắc dấu của phép nhân hai số.

Quy tắc 2 (Quy tắc tìm giới hạn của thương)

$L=\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L>0$	0	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
$L<0$	0	+	$-\infty$
		-	$+\infty$

(Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x\neq x_o$).

STUDY TIP: Giới hạn của thương hai hàm số. Tử thức có giới hạn hữu hạn khác 0:

- Mẫu thức càng tang (dần đến vô cực) thì phân thức càng nhỏ (dần đến 0).

- Mẫu thức càng nhỏ (dần đến 0) thì phân thức có giá trị tuyệt đối càng lớn (dần đến vô cực).

- Dấu của giới hạn theo quy tắc dấu của phép chia hai số.

VI. CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH: GỒM $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0.\infty$ VÀ $\infty-\infty$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ GIỚI HẠN HÀM SỐ

DẠNG 1: TÌM GIỚI HẠN XÁC ĐỊNH BẰNG CÁCH SỬ DỤNG TRỰC TIẾP CÁC ĐỊNH NGHĨA, ĐỊNH LÍ VÀ QUY TẮC.

Phương pháp:

- Xác định đúng dạng bài toán: giới hạn tại một điểm hay giới hạn tại vô cực? giới hạn xác định hay vô định?
- với giới hạn hàm số tại một điểm ta cần lưu ý: Cho $f(x)$ là hàm số sơ cấp xác định trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0. Khi đó, $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$.
- Với giới hạn hàm số tại vô cực ta "xử lí" tương tự như giới hạn dãy số.
- Với giới hạn xác định, ta áp dụng trực tiếp định nghĩa giới hạn hàm số, các định lí về giới hạn hữu hạn và các quy tắc về giới hạn vô cực.

STUDY TIP: Dùng định nghĩa chứng minh hàm số $y=f(x)$ không có giới hạn khi $x\to x_0$

- Chọn hai dãy số khác nhau (a_n) và (b_n) thỏa mãn a_n và b_n thuộc tập xác định của hàm số $y=f(x)$ và khác x_0; $a_n\to x_0; b_n\to x_0$.
- Chứng minh $\lim f(a_n)\neq \lim f(b_n)$ hoặc chứng minh một trong hai giới hạn này không tồn tại.
- Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ không tồn tại. TH $x\to x_0^{\pm}$ hoặc $x\to\pm\infty$ chứng minh tương tự.

Ví dụ 1: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=1$ **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=-1$ **C.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=0$ **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ không tồn tại.

Đáp án D

Lời giải

Xét dãy số (x_n) với $x_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$.

Ta có $x_n\to+\infty$ và $\lim\sin x_n=\lim\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$. (1)

Lại xét dãy số (y_n) với $y_n=-\frac{\pi}{2}+2n\pi$.

Ta có $y_n\to+\infty$ và $\lim\sin y_n=\lim\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=-1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ không tồn tại. Vậy chọn đáp án D.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)=\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to3}f(x)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

STUDY TIP: Giới hạn tại một điểm

Nếu $f(x)$ xác định tại x_0 và tồn tại một khoảng $(a;b)$ thuộc tập xác định của $f(x)$ chứa x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=f(x_o)$.

- Việc sử dụng hay không sử dụng MTCT để tính $f(x_o)$ tùy thuộc vào mức độ phức tạp của $f(x_o)$ và khả năng tính toán của độc giả.

Đáp án C.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $(0;+\infty)$.

Cách 1 (sử dụng định nghĩa):

Giải sử (x_n) là một dãy số bất kỳ, thỏa mãn $x_n>0, x_n\neq3$ và $x_n\to3$ khi $n\to+\infty$. Ta có

$\lim f(x_n)=\lim\frac{x_n^2+1}{2\sqrt{x_n}}=\frac{3^2+1}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (áp dụng quy tắc về giới hạn hữu hạn của dãy số). Do đó

$\lim\limits_{x\to3}f(x)=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2 (sử dụng định lí về giới hạn hữu hạn):

Theo định lí 1 ta có:

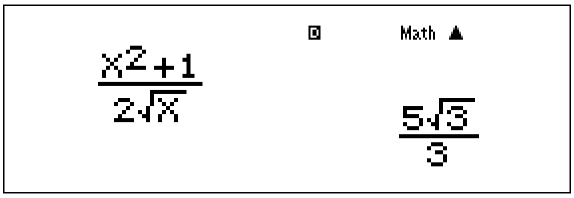
$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}}=\frac{\lim_{x\to3}\left(x^2+1\right)}{\lim_{x\to3}\left(2\sqrt{x}\right)}=\frac{\lim_{x\to3}x^2+\lim_{x\to3}1}{\lim_{x\to3}2.\lim_{x\to3}\sqrt{x}}=\frac{\lim_{x\to3}x.\lim_{x\to3}x+\lim_{x\to3}1}{\lim_{x\to2}2.\sqrt{\lim_{x\to3}x}}=\frac{3.3+1}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Tuy nhiên trong thực hành, vì là câu hỏi trắc nghiệm nên ta làm như sau.

Cách 3: Vì $f(x)$ là hàm số sơ cấp xác định trên $(0;+\infty)$ chứa điểm $x_0=3$ nên $\lim_{x\to3} f(x)=f(3)=\frac{10}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Do đó sử dụng MTCT ta làm như cách 4 dưới đây.

Cách 4: Nhập biểu thức của vào màn hình. Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$, máy hỏi X ? nhập 3 $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như hình:



Do đó chọn đáp án C.

Ví dụ 3: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây ?

A. $\lim_{x\to3}\frac{x+2}{x-2}=1$. **B.** $\lim_{x\to3}\frac{x+2}{x-2}=5$.

C. $\lim_{x\to3}\frac{x+2}{x-2}=-1$. **D.** Hàm số $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ không có giới hạn khi $x\to3$.

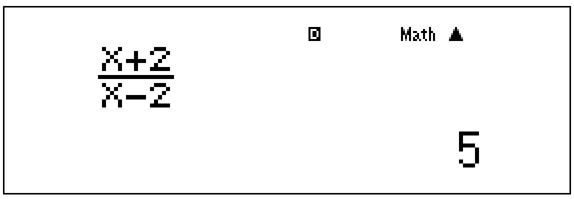
Đáp án B

Lời giải

Hàm số $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ xác định trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$. Ta có $3\in(2;+\infty)$.

Cách 1 : $\lim_{x\to3} f(x)=f(3)=\frac{3+2}{3-2}=5$.

Cách 2 : Nhập biểu thức của hàm số $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ và màn hình MTCT. Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$, máy hỏi X? nhập 3 $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như hình:



Vậy $\lim_{x\to3}\frac{x+2}{x-2}=5$.

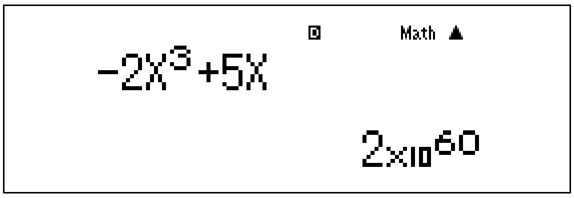
Ví dụ 4: $\lim_{x\to-\infty}\left(-2x^3+5x\right)$ bằng:

A. -2. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giá trị của $f(x)=-2x^3+5x$ tại một điểm có giá trị âm rất nhỏ (do ta đang xét giới hạn của hàm số khi $x\to-\infty$), chẳng hạn tại -10^{20}. Máy hiển thị kết quả như hình:



Đó là một giá trị dương rất lớn. Vậy chọn đáp án C , tức $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+5x\right)=+\infty$.

Cách 2: Ta có $-2x^3+5x=x^3\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=-2<0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=+\infty$.

Vậy theo Quy tắc 1, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+5x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=+\infty$. Do đó chọn C.

Lưu ý 1:

- Để hiểu tại sao $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=-2$ xin xem lại phần các giới hạn đặc biệt.

- Bài toán thuộc dạng tính giới hạn hàm số khi x dần tới vô cực, nhưng là khi $x\to-\infty$. Do đó không thể áp dụng ngay các kết quả đã biết về giới hạn dãy số, vì giới hạn dãy số được xét khi $n\to+\infty$. Ta chỉ có thể áp dụng các kĩ thuật đã biết đối với giới hạn dãy số.

Lưu ý 2: Có thể dễ dàng chứng minh được kết quả như sau :

Cho hàm số $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x+a_0$ $(a_k\neq0)$ là một đa thức bậc k.

x	k	a_k	Giới hạn của $f(x)$
$x\to+\infty$	Tùy ý	$a_k>0$	$+\infty$
		$a_k<0$	$-\infty$
$x\to-\infty$	k chẵn	$a_k>0$	$+\infty$
		$a_k<0$	$-\infty$
	k lẻ	$a_k>0$	$-\infty$

		$a_k < 0$	$+\infty$

Thật vậy, ta có $f(x) = x^k\left(a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a_0}{x^k}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a_0}{x^k}\right) = a_k$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k tùy ý, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ nếu k chẵn, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ nếu k lẻ nên ta dễ dàng suy ra bảng kết quả trên.

Ví dụ 5: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4 - 2x^2 + 1\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 3. **D.** 2.

Đáp án A

Lời giải

Cách 1: Theo nhận xét trên thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4 - 2x^2 + 1\right) = +\infty$ ($x \to -\infty$, k chẵn và $a_k > 0$). Thật vậy, ta có $3x^4 - 2x^2 + 1 = x^4\left(3 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = 3 > 0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4 - 2x^2 + 1\right) = +\infty$.

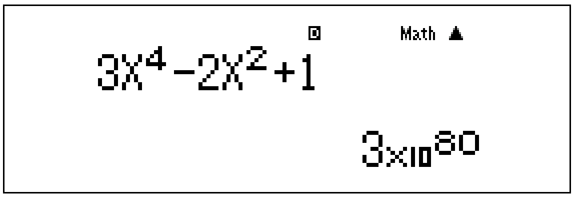
STUDY TIP

- Giới hạn tại vô cực của hàm đa thức là vô cực, chỉ phụ thuộc vào số hạng chứa lũy thừa bậc cao nhất.

- Giới hạn của hàm đa thức tại $+\infty$ phụ thuộc vào hệ số của lũy thừa bậc cao nhất. (Giống với giới hạn của dãy số dạng đa thức).

- Giới hạn của hàm đa thức tại $-\infty$ phụ thuộc vào bậc và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$ tại $x = -10^{20}$, ta được kết quả như hình :



Kết quả là một số dương rất lớn. Do đó chọn đáp án A,

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$. Khẳng định nào dưới đây đúng ?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ không tồn tại.

Đáp án B.

Lời giải

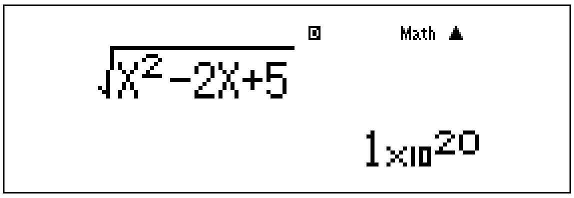
Hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-2x+5}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Có thể giải nhanh như sau : Vì x^2-2x+5 là một hàm đa thức của x nên có giới hạn tại vô cực. Mà $\sqrt{x^2-2x+5}>0$ với mọi x nên giới hạn của $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-2x+5}$ tại $-\infty$ chắc chắn là $+\infty$.

Thật vậy, ta có $\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=\left|x\right|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\left|x\right|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=1>0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+5}=+\infty$.

Hoặc ta có thể sử dụng MTCT để tính giá trị của $f\left(x\right)$ tại một giá trị âm rất nhỏ của x, chẳng hạn tại $x=-10^{20}$ ta được kết quả như hình:



Kết quả này là một số dương rất lớn. Do đó ta chọn đáp án B. (Dễ thấy kết quả hiển thị trên máy tính như trên chỉ là kết quả gần đúng do khả năng tính toán hạn chế của MTCT. Tuy nhiên kết quả đó cũng giúp ta lựa chọn được đáp án chính xác).

STUDY TIP

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|x\right|=+\infty$.

Khi $x\to-\infty$ thì $x>0$.

Với $x<0$ ta có $\sqrt{x^2}=-x$.

Cần đặc biệt lưu ý các điều trên khi tính giới hạn tại $-\infty$ của hàm chứa căn thức.

Ví dụ 7: Giới hạn của hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}$ khi $x\to-\infty$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** 3.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Ta có:

$$\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}=\left|x\right|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\left|x\right|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\left|x\right|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)$$

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}\left|x\right|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)=1-2=-1<0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\right]=-\infty$.

Lưu ý:

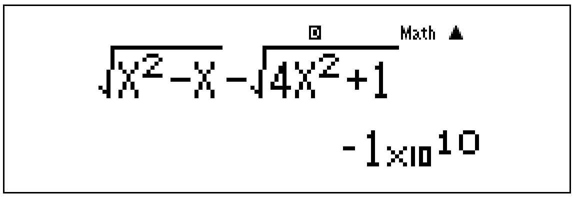
- Độc giả nên đọc lại phần giới hạn dãy số có chứa căn thức để hiểu hơn tại sao lại có định hướng giải như vậy (mà không đi nhân chia với biểu thức liên hợp).

- Có thể thấy như sau: Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+1}=+\infty$.

Mà hệ số của x^2 trong $4x^2+1$ lớn hơn hệ số của x^2 trong x^2-x nên suy ra

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=-\infty.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả như hình.



Vậy chọn đáp án A.

Ví dụ 8: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2017}{3x^3-5x^5}$ bằng:

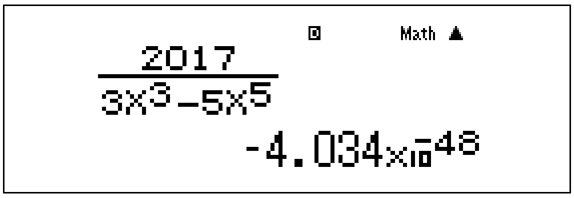
A. $\dfrac{2017}{3}$. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^3-5x^5\right)=-\infty$ nên theo quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2017}{3x^3-5x^5}=0$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=10^{10}$ ta được kết quả như hình.



Đó là một kết quả rất gần 0. Do đó chọn đáp án D.

STUDY TIP

Khi hàm số không xác định tại x_0 thì ta thử áp dụng các quy tắc về giới hạn vô cực. Đó là các quy tắc áp dụng cho các dạng $L.\infty$; $\dfrac{L}{\infty}$; $\dfrac{L}{0}$. Lưu ý cách xác định dấu của giới hạn.

- Dạng $\dfrac{L}{\infty}$: giới hạn là 0.

- Dạng $L.\infty$ và $\dfrac{L}{0}$: Giới hạn là vô cực.

Ví dụ 9: Giới hạn bên phải của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{3x-7}{x-2}$ khi $x\to 2$ là

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{7}{2}$.

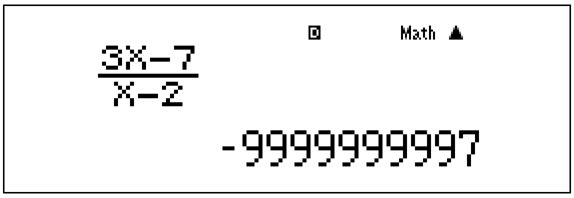
Đáp án B.

Lời giải

Hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{3x-7}{x-2}$ xác định trên $\left(-\infty;+\infty\right)\setminus\left\{2\right\}$.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x-2\right)=0$, $x-2>0$ với mọi $x>2$ và $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(3x-7\right)=3.2-7=-1<0$. Do đó theo quy tắc 2 thì $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x-7}{x-2}=-\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Tính giá trị của $f\left(x\right)=\dfrac{3x-7}{x-2}$ tại $x=2$ ta thấy máy báo lỗi Math Error (do $f\left(x\right)$ không xác định tại $x=2$). Quay lại tính giá trị của $f\left(x\right)$ tại $x=2+10^{-10}$ (tức $2,0000000001$) là một giá trị của x lớn hơn 2 và rất gần 2. Kết quả là một số âm rất nhỏ.



Do đó chọn đáp án B.

Ví dụ 10: Xét bài toán "Tìm $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}$", bạn Hà đã giải như sau:

Bước 1: Vì $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(2x^2-5x+2\right)=0$.

Bước 2: $2x^2-5x+2>0$ với $x<2$ và x đủ gần 2,

Bước 3: $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(3x^2+x-1\right)=13>0$

Bước 4: nên theo quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}=+\infty$.

Hỏi lời giải trên của bạn Hà đã sai từ bước thứ mấy ?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Đáp án B

Lời giải

Xét dấu biểu thức $g\left(x\right)=2x^2-5x+2$ ta thấy $g\left(x\right)<0$ với mọi $x\in\left(1;2\right)$.

Vậy lời giải sai từ bước 2. (Lời giải đúng cho ra kết quả $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}=-\infty$).

STUDY TIP

$x\to x_0^+$ nghĩa là $x\to x_0$ và $x>x_0$.

$x\to x_0^-$ nghĩa là $x\to x_0$ và $x<x_0$.

Nếu $x\to x_0^+$ thì tính giá trị hàm số tại $x=x_0+10^{-k}$.

Nếu $x\to x_0^-$ thì tính giá trị hàm số tại $x=x_0-10^{-k}$.

Trong đó k là một sô nguyên dương.

Ví dụ 11: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-x}{(x-4)^2}$ bằng:

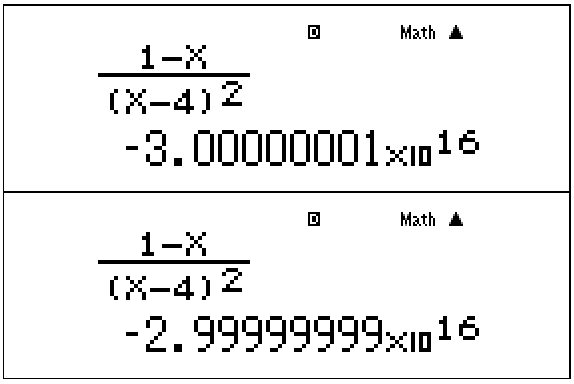
A. 0. **B.** -3. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 4}(1-x)=-3<0$, $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)^2=0$ và $(x-4)^2>0$ với mọi $x\neq 4$ nên theo quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-x}{(x-4)^2}=-\infty$. Vậy chọn đáp án C.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=4+10^{-8}$ hoặc tại $x=4-10^{-8}$ ra được các kết quả như hình



Vậy chọn đáp án C.

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}5x+2 \text{ khi } x\geq 1\\ x^2-3 \text{ khi } x<1\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=7$. **B.** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-2$.

C. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=7$. **D.** $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=7$.

Đáp án D.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(5x+2) = 5.1+2 = 7$. Vì chỉ có một đáp án đúng nên chọn đáp án D.

STUDY TIP

Cần xác định đúng biểu thức của $f(x)$ khi $x \to x_0^+$ và khi $x \to x_0^-$.

Giải thích thêm : Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-3) = 1^2-3 = -2$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ không tồn tại.

Các đáp án A, B, C đều sai.

STUDY TIP

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$.

Ví dụ 13: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-5} \text{ khi } x \geq 3 & (1) \\ \dfrac{x^2-5}{x+2} \quad \text{ khi } x < 3 & (2) \end{cases}$.

Trong biểu thức (2) ở trên, cần thay số 5 bằng số nào để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \to 3$?

A. 19. **B.** 1.

C. -1. **D.** Không có số nào thỏa mãn.

Đáp án C.

Lời giải

Hàm số đã cho các định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \sqrt{x^2-5} = \sqrt{3^2-5} = 2$.

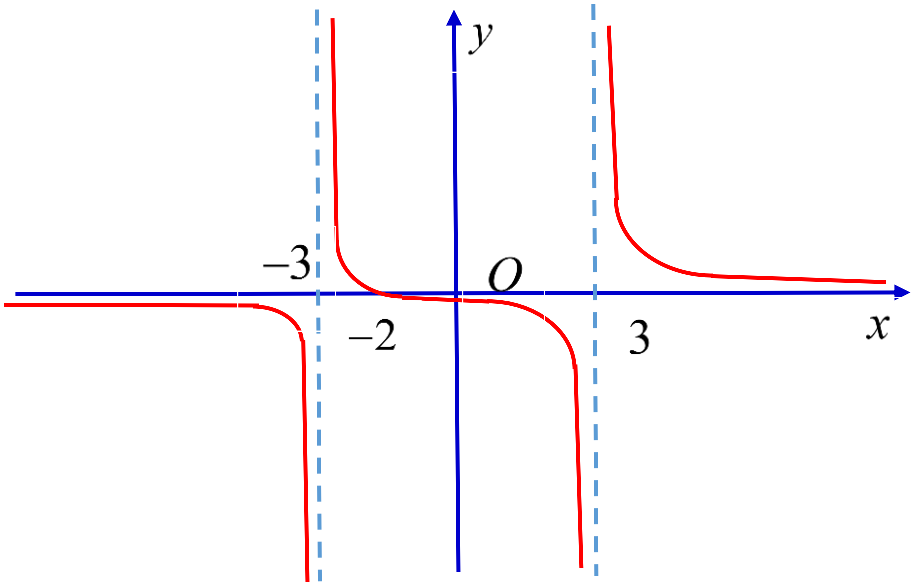
Đặt $f(x) = \dfrac{x^2-m}{x+2}$ khi $x < 3$ (m là tham số, $m > 0$).

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} = \dfrac{x^2-m}{x+2} = \dfrac{3^2-m}{3+2} = \dfrac{9-m}{5}$.

Để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \to 3$ thì $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \Leftrightarrow \dfrac{9-m}{5} = 2 \Leftrightarrow m = -1$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\sqrt{X^2-5}$ khi $X = 3$ được kết quả bằng 2. Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\dfrac{X^2-A}{X+2}$ khi $X = 3$ và lần lượt nhận các giá trị bằng 19,1 và -1. Ta thấy khi $A = -1$ thì biểu thức nhận giá trị bằng 2. Vậy chọn đáp án C.

Ví dụ 14: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Quan sát đồ thị và cho biết trong các giới hạn sau, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. **C.** $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)$. **D.** $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$.

Đáp án C.

Lời giải

Khi $x\to-3^+$, đồ thị hàm số là một đường cong đi lên từ phải qua trái. Do đó $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)=+\infty$.

Tương tự như vậy ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=-\infty$.

Do đó chọn đáp án C.

DẠNG 2: TÌM GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG $\frac{0}{0}$.

STUDY TIP

- Khi tính giới hạn mà không thể áp dụng trực tiếp các định lí về giới hạn hữu hạn hay các quy tắc về giới hạn vô cực đã biết thì ta gọi đó là các dạng vô định.
- Kí hiệu các dạng vô định gồm: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$ và $\infty-\infty$. Để tính giới hạn dạng vô định ta phải biến đổi biểu thức của hàm số về dạng áp dụng được các định lí và quy tắc đã biết. Làm như vậy gọi là *"khử dạng vô định"*.

Bài toán:

Tính $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức hoặc căn thức.

Phương pháp giải (tự luận)

✓ Phân tích tử và mẫu thành tích các nhân tử và giản ước. Cụ thể, vì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ nên $f(x)$ và $g(x)$ cùng có nghiệm $x=x_0$. Do đó ta phân tích được $f(x)=(x-x_0)A(x)$ và

$g(x)=(x-x_0)B(x)$. Khi đó ta có: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)A(x)}{(x-x_0)B(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A(x)}{B(x)}$ và công việc còn lại là đi tính $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A(x)}{B(x)}$.

✓ Nếu $f(x)$ và $g(x)$ có chứa căn thức thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp trước khi phân tích chúng thành tích để giản ước.

STUDY TIP

Phân tích đa thức thành nhân tử:

✓ Áp dụng hằng đẳng thức đáng nhớ.

✓ Khi đã biết $f(x)$ có nghiệm $x=x_0$, ta sử dụng lược đồ Hooc-ne hoặc chia $f(x)$ cho $x=x_0$ được thương $A(x)$. Khi đó $f(x)=(x-x_0)A(x)$.

✓ Áp dụng kết quả: nếu phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thì $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Tổng quát: nếu phương trình $a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x^1+a_0=0$ có các nghiệm thực $x_1,\ x_2,...,x_m$ thì $a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x^1+a_0=a_k(x-x_1)...(x-x_m)A(x)$, trong đó $A(x)$ là đa thức bậc $k-m$. Tuy nhiên, trong thực tế, ta dùng kết quả này khi có đủ k nghiệm thực, tức $m=k$. Trường hợp ngược lại nên dùng lược đồ Hooc-ne. (với phương trình bậc hai, bậc ba có thể dùng MTCT để tìm nghiệm)

Ví dụ 1: Tính $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

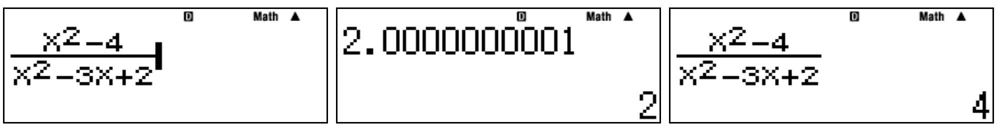
A. 1. **B.** 4. **C.** -2. **D.** -4.

Phân tích: Vì $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)=0$ nên đây là giới hạn vô định dạng $\dfrac{0}{0}$. Ta thấy x^2-4 và x^2-3x+2 đều triệt tiêu tại $x=2$ nên $x=2$ là nghiệm của x^2-4 và x^2-3x+2. Từ đó ta có cách giải như sau.

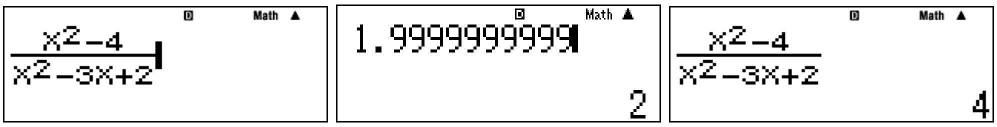
Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{2+2}{2-1}=4$.

Cách 2: Dử dụng MTCT tính giá trị hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ tại $x=2$ ta thấy máy báo lỗi Math Error (do hàm số không xác định tại $x=2$). Quay lại tính giá trị hàm số tại $2{,}0000000001$ ta được kết quả như sau:



Lại quay lại tính giá trị hàm số tại 1,9999999999 ta được kết quả như sau:



Vậy chọn đáp án B.

Ví dụ 2: Tính giới hạn $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^m - x^n}{x-1}\ (m,\ n\in\mathbb{N}^*)$, ta được kết quả:

A. $+\infty$. **B.** $m-n$. **C.** m. **D.** 1.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^m - x^n}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^m-1}{x-1} - \dfrac{x^n-1}{x-1}\right)$.

Lại có $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1\right) = m$.

Tương tự: $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1} = n$.

Vậy $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^m - x^n}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^m-1}{x-1} - \dfrac{x^n-1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x-1} - \lim_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1} = m-n$.

Cách 2: Cho m và n các giá trị cụ thể, chẳng hạn $m=3$ và $m=7$. Sử dụng MTCT tính $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^7}{x-1}$ ta được kết quả $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^7}{x-1} = -4$. Vậy đáp án đúng là B.

STUDY TIP

- $x^m - 1 = (x-1)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1\right)$
- $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x-1} = m$
- $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1} = n$

Ví dụ 3: Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2} = 0$. **B.** $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2} = +\infty$.

C. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2} = -\infty$. **D.** $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ không tồn tại.

Phân tích: Vì $\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}-2\right)=0$ và $\lim_{x\to 1}\left(x^3-3x+2\right)=0$ nên đây là dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Tuy nhiên ta chưa thể phân tích ngay $\sqrt{x+3}-2$ thành nhân tử mà phải nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp của $\sqrt{x+3}-2$ là $\sqrt{x+3}+2$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}=\dfrac{\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(x^3-3x+2\right)}$

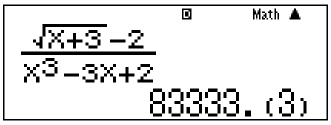
$$=\frac{x-1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)^2(x+2)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)}.$$

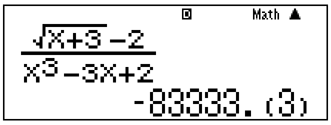
Mà $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)}=+\infty$.

Do đó $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)}$ không tồn tại.

Suy ra $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ không tồn tại. Vậy chọn đáp án D.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ tại $x=1$ ta thấy máy báo lỗi Math Error. Quay lại tính giá trị biểu thức tại $x=1,000001$ và tại $x=0,999999$ ta được kết quả:





Hai kết quả trên là một số dương rất lớn, một số âm rất nhỏ. Do đó có thể kết luận $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ không tồn tại.

Nhận xét:

- Nếu chỉ tính giá trị biểu thức tại một điểm thì rất dễ chọn đáp án sai.

- Ở đây ta đã chuyển dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ về dạng xác định $\dfrac{L}{0}$.

- Dùng MTCT tìm nghiệm của phương trình $x^3-3x+2=0$ ta được $x_1=1,\ x_2=-2$. Như vậy phải có một nghiệm là nghiệm kép do là phương trình bậc ba. Trong trường hợp này, theo Tip trên đã nêu, ta nên dùng lược đồ Hooc-ne để phân tích đa thức x^3-3x+2 thành nhân tử.

Ví dụ 4: Giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$ bằng:

A. 1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Phân tích: $\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}\right)=0$ và $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$ nên đây là dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Ta chưa thể phân tích $f(x)=\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}$ thành nhân tử. Mà $f(x)$ lại là hiệu của hai căn thức không cùng bậc. Ta để ý thấy $\sqrt{2x-1}$ và $\sqrt[3]{3x-2}$ đều đạt giá trị bằng 1 tại $x=1$ nên ta biến đổi như sau: $f\left(x\right)=\left(\sqrt{2x-1}-1\right)+\left(1-\sqrt[3]{3x-2}\right)$ rồi tiến hành nhân chia với biểu thức liên hợp.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}=\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}+\dfrac{1-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$

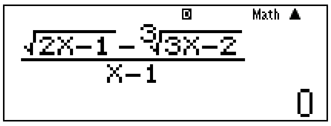
$$=\frac{2x-2}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(x-1\right)}+\frac{3-3x}{\left(1+\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{\left(3x-2^2\right)}\right)\left(x-1\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}-\frac{3}{1+\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{\left(3x-2^2\right)}}.$$

Tac có: $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}-\dfrac{3}{1+\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{\left(3x-2^2\right)}}\right]=0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}=0$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$ tại $x=1$ ta thấy máy báo lỗi Math Error. Quay lại tính giá trị biểu thức tại $x=0,99999999$ và tại $x=1,00000001$ ta được kết quả:



Do đó chọn đáp án B tức là $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}=0$.

STUDY TIP

Cho $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{A\left(x\right)}-\sqrt[3]{B\left(x\right)}}{x-x_0}$ (chứa hai căn khác bậc) trong đó $A\left(x_0\right)=B\left(x_0\right)=m$ thì ta biến đổi như sau: $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{A\left(x\right)}-m+m-\sqrt[3]{B\left(x\right)}}{x-x_0}$.

Ví dụ 5: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{\left(x-1\right)^2}$.

A. 0. **B.** -2. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Cách 1: Đặt $t=x-1$ thì $x=t+1$, $\lim\limits_{x\to 1}t=0$ và

$$\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}=\frac{\sqrt[3]{6t+1}-\sqrt{4t+1}}{t^2}=\frac{\sqrt[3]{6t+1}-(2t+1)}{t^2}+\frac{(2t+1)-\sqrt{4t+1}}{t^2}$$

$$=\frac{6t+1-\left(8t^3+12t^2+6t+1\right)}{t^2\left[\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2\right]}+\frac{\left(4t^2+4t+1\right)-(4t+1)}{t^2\left(2t+1+\sqrt{4t+1}\right)}$$

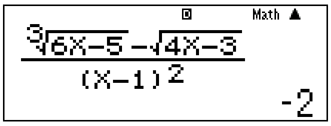
$$=\frac{-8t-12}{\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2}+\frac{4}{2t+1+\sqrt{4t+1}}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}=\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{-8t-12}{\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2}+\frac{4}{2t+1+\sqrt{4t+1}}\right).$

Mà $\lim\limits_{t\to0}\frac{-8t-12}{\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2}=-\frac{12}{3}=-4$; $\lim\limits_{t\to0}\frac{4}{2t+1+\sqrt{4t+1}}=\frac{4}{2}=2.$

Vậy $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}=-4+2=-2.$

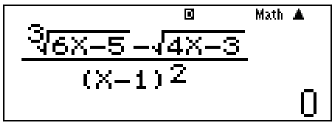
Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}$ tại $x=0,9999999$ và tại $x=1,0000001$ ta đều được kết quả:



Do đó chọn đáp án B.

Lưu ý:

- Trong cách thứ 2, nếu ta tính giá trị biểu thức tại $x=0,999999999$ hoặc tại $x=1,000000001$ thì ta được kết quả:



Do vượt quá giới hạn tính toán của máy. Do đó nếu không thử lại với cá trị lớn hơn thì có thể ta sẽ chọn đáp án A.

ở bài này có nhiều vấn đề cần phân tích thêm. Nếu làm như ví dụ 4 thì ta sẽ biến đổi $\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}=\frac{\sqrt[3]{6x-5}-1}{(x-1)^2}+\frac{1-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}$ rồi nhân liên hợp để thu được $\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}$

$$=\frac{6\left(1+\sqrt{4x-3}\right)-4\left(\sqrt[3]{(6x-5)^2}+\sqrt[3]{6x-5}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(6x-5)^2}+\sqrt[3]{6x-5}+1\right)\left(1+\sqrt{4x-3}\right)}$$

- Ta thấy giới hạn mới thu được vẫn còn là dạng vô định $\frac{0}{0}$ nên vẫn tiếp tục phải khử dạng vô định. Mà việc khử này sẽ rất phức tạp do biểu thức mới thu được khá cồng kềnh. Để giải quyết khó khăn đó ta thấy trong lời giải trình bày ở trên, ta tiến hành đổi biến để cho mẫu gọn lại và không thêm bớt 1 trên tử thức mà thêm bớt nhị thức $2t+1$. Vậy cơ sở nào để tìm ra nhị thức đó?

Ta mong muốn sau khi thêm bớt tử thức với một lượng $A(t)$ nào đó rồi tách ra thành hai phân thức để nhân liên hợp thì trên tử thức xuất hiện nhân tử t^2 để giản ước với t^2 dưới mẫu

$$\frac{\sqrt[3]{6t+1}-\sqrt{4t+1}}{t^2}=\frac{\sqrt[3]{6t+1}-A(t)}{t^2}+\frac{A(t)-\sqrt{4t+1}}{t^2}.$$

Vậy ta phải có $A^2(t)-(4t+1)=kt^2 \Rightarrow A^2(t)=kt^2+4t+1 \Rightarrow k=4$

và $A^2(t)=(2t+1)^2 \Rightarrow A(t)=2t+1$.

- Ở nhiều bài toán giới hạn, ta thấy việc sử dụng MTCT là nhanh hơn giải thông thường. Tuy nhiên chúng tôi vẫn khuyến nghị độc giả nên nắm vững phương pháp giải thông thường (theo hình thức tự luận), vì nhiều bài tập không chỉ đơn thuần là tính giới hạn mà người ra đề có thể hỏi bằng nhiều hình thức khác nhau, đặc biệt có nhiều cách ra đề hạn chế việc sử dụng MTCT để tìm ra đáp án.

STUDY TIP

Trong nhiều bài toán, không nên chỉ tính giá trị hàm số tại một điểm mà nên tính lại một số điểm từ lớn đến nhỏ và từ cả hai phía trái, phải của x_0.

Ví dụ 6: Giới hạn của hàm số $f(x)=\frac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}$ khi $x\to 1$ bằng

A. $-\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{-a-2}{3}$. **D.** $\frac{2-a}{3}$.

Lời giải

Cách 1: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-a-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-a-1}{x^2+x+1}=-\frac{a}{3}$

Cách 2: (Đặc biệt hóa để sử dụng MTCT) Cho a một giá trị bất kì, chẳng hạn $a=1$, thì $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$. Dùng MTCT ta tìm được $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}=-\frac{1}{3}=-\frac{a}{3}$.

Vậy chọn đáp án A.

Giải thích: phương trình $x^2-(a+2)x+a+1=0$ có tổng các hệ số bằng 0 nên ta có một nghiệm bằng 1, nghiệm còn lại bằng $a+1$. Do đó ta phân tích được $x^2-(a+2)x+a+1=(x-1)(x-a-1)$.

STUDY TIP

- Nếu đa thức có tổng các hệ số bằng 0 thì đa thức có một nghiệm bằng 1.

- Nếu đa thức có tổng các hệ số của các lũy thừa bậc chẵn bằng tổng các hệ số của lũy thừa bậc lẻ thì đa thức có một nghiệm bằng -1.

Ví dụ 7: Giả sử $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}=L$. Hệ số a bằng bao nhiêu để $L=3$?

A. -6. **B.** 6. **C.** -12. **D.** 12.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{2x\left(\sqrt{1+ax}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{2\left(\sqrt{1+ax}+1\right)}=\dfrac{a}{4}$

Vậy $L=\dfrac{a}{4}$. Do đó $L=3\Leftrightarrow\dfrac{a}{4}=3\Leftrightarrow a=12$. Đáp án đúng là D.

Cách 2: Sử dụng MTCT tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}$ lần lượt với a bằng -6, 6, -12, 12. Ta thấy với $a=12$ thì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}$ bằng 3. Vậy chọn đáp án D.

STUDY TIP

Một trong các kĩ thuật giải bài toán trắc nghiệm là thử lần lượt các đáp án và chọn ra đáp án thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. Các bài toán liên quan đến giới hạn đặc biệt

Trong sách giáo khoa đại số và giải tích 11 có nêu một giới hạn đặc biệt dạng $\dfrac{0}{0}$

Đó là $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Sau đây ta xét một số ví dụ áp dụng kết quả này.

Ví dụ 8: Cho a và b là các số thực khác 0. Khi đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{\sin bx}$ bằng

A. a. **B.** b. **C.** $\dfrac{a}{b}$. **D.** $\dfrac{b}{a}$.

Lời giải

Đáp án C.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin bx}.\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{b}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin bx}$

Đổi biến $t=bx$ ta thấy khi $x\to 0$ thì $t\to 0$. Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}$.

Cách 2: Cho a và b các giá trị cụ thể, chẳng hạn $a=2,b=3$.

Sử dụng MTCT tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 3x}$ ta được kết quả bằng $\dfrac{2}{3}$, tức là bằng $\dfrac{a}{b}$.

Vậy chọn C.

STUDY TIP

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin A(x)}{A(x)}=1$, với điều kiện $\lim_{x\to 0}A(x)=0$

Ví dụ 9: Cho số thực a khác 0. Khi đó $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos ax}$ bằng

A. $\frac{2}{a^2}$.　　**B.** $\frac{2}{a}$.　　**C.** $2a^2$.　　**D.** $2a$.

Lời giải

Đáp án A

Cách 1: Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos ax}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{ax}{2}}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\frac{ax}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{ax}{2}}.\frac{2}{a^2}\right]=\frac{2}{a^2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{ax}{2}}{\sin\frac{ax}{2}}\right)^2=\frac{2}{a^2}.1^2=\frac{2}{a^2}.$$

Cách 2: Cho a là một giá trị cụ thể, chẳng hạn $a=2$ (không nên lấy $a=1$, vì khi đó giá trị của $\frac{2}{a^2}$ và $\frac{2}{a}$ cũng bằng nhau). Sử dụng MTCT tính giới hạn $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}$ ta được kết quả bằng $\frac{1}{2}$, tức là bằng $\frac{2}{a^2}$. Vậy chọn đáp án A.

STUDY TIP

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^k A(x)}{A^k(x)}=1$$

điều kiện $\lim_{x\to 0}A(x)=0$

Ví dụ 10: $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$ bằng

A. $\tan a$.　　**B.** $\cot a$.　　**C.** $\sin a$.　　**D.** $\cos a$.

Lời giải

Đáp án D

Cách 1: Ta có $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{2.\frac{x-a}{2}}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}.\cos\frac{x+a}{2}\right)$

Mà $\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=1$ (xem STUDY TIP trên), $\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\cos a$.

Vậy $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a$. Do đó chọn đáp án D.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giới hạn $\lim_{x\to 1}\frac{\sin x-\sin 1}{x-1}$ (ứng với $a=1$).

So sánh kết quả với $\tan 1,\cot 1,\sin 1,\cos 1$ ta được $\lim_{x\to 1}\frac{\sin x-\sin 1}{x-1}=\cos 1$.

Vậy chọn đáp án D.

3. Đọc thêm

Ví dụ 11: Cho a và b là các số nguyên dương. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{\sin bx}=\frac{5}{3}$. Tích ab có thể nhận giá trị bằng số nào trong các số dưới đây?

A. 15. **B.** 60. **C.** 240. **D.** Cả ba đáp án trên.

Lời giải

Đáp án D

Ta có $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}.\frac{bx}{\sin bx}.\frac{a}{b}\right)=1.1.\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$

Vậy để $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{\sin bx}=\frac{5}{3}$ thì $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$. Vì a và b là các số nguyên dương nên suy ra $a=5k,b=3k$ với k nguyên dương. Do đó $ab=15k^2$.

+ $15k^2=15\Leftrightarrow k^2=1\Rightarrow k=1\Rightarrow ab=15$.

+ $15k^2=60\Leftrightarrow k^2=4\Rightarrow k=2\Rightarrow ab=60$.

+ $15k^2=240\Leftrightarrow k^2=16\Rightarrow k=4\Rightarrow ab=240$

Vậy cả ba đáp án đều đúng. Do đó chọn đáp án D.

STUDY TIP

Ngoài giới hạn $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, Sách giáo khoa giải tích 12 nâng cao chương 2, 5 còn giới thiệu thêm các giới hạn:

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x)=\frac{\ln(1+x^3)-1}{x^k}$, trong đó k là một số nguyên dương. Tìm tất cả các giá trị của k để $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới 0.

A. $k\in\mathbb{Z},k>3$. **B.** $k\in\mathbb{Z},0<k<3$. **C.** $k\in\mathbb{Z},k\ge 3$. **D.** $k\in\mathbb{Z},0<k\le 3$.

Lời giải

Đáp án D

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)-1}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)-1}{x^3}.\dfrac{1}{x^{k-3}}\right)$

Mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)-1}{x^3}=1$ nên để $f\left(x\right)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới 0 thì hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{1}{x^{k-3}}$ phải có giới hạn hữu hạn khi x dần tới 0. Muốn vậy thì $k-3\le 0\Leftrightarrow k\le 3$. Vì k nguyên dương nên đáp án là D.

Cách 2: Sử dụng MTTCT tìm giới hạn khi $k=3$, ta được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)-1}{x^3}=1$.

Vậy ta chỉ xét đáp án C hoặc D. Chẳng hạn với đáp án C, ta sử dụng MTCT tìm giới hạn khi $k=4$. Ta được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)-1}{x^3}=-\infty$. Do đó loại đáp án C. Vậy đáp án đúng là D.

*** Trong chương trình lớp 12 sẽ được học khái niệm căn bậc n.

Định nghĩa

Cho số thực b và số nguyên dương n $\left(n\ge 2\right)$. Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n=b$

Với n chẵn và:

$+b<0$: Không tồn tạo căn bậc n của b.

$+b=0$: Có một căn bậc n của b là số 0.

$+b>0$: Có hai căn trái dấu, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$

Sau đây ta xét một vài ví dụ liên quan đến căn bậc n.

STUDY TIP

$a=\sqrt[n]{b}\Rightarrow a^n=b$

-Mọi số thực đều có một căn bậc lẻ và chỉ có một căn bậc lẻ

- Chỉ có số không âm mới có căn bậc chẵn.

Số 0 có một căn bậc chẵn là 0.

Các số dương có hai căn bậc chẵn đối nhau.

Ví dụ 13: Cho a là một số thực khác 0 và n là một số nguyên dương, $n\ge 2$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{a}{n}$.

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{n}{a}$.

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{1}{n}$.

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{1}{a}$.

Lời giải

Đáp án A.

Cách 1: Sử dụng MTCT tìm giới hạn với $n=5$ và $a=3$, ta được kết quả $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+3x}-1}{x}=\dfrac{3}{5}$ vậy đáp án đúng là A.

Cách 2: Đổi biến đặt $t=\sqrt[n]{1+ax}\Rightarrow t^n=1+ax\Rightarrow x=\dfrac{t^n-1}{a}$

Ta có khi $x\to 0$ thì $t\to 1$ và

$$\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=a\frac{t-1}{t^n-1}=a\frac{t-1}{(t-1)\left(t^{n-1}+t^{n-2}+...+t+1\right)}=\frac{a}{t^{n-1}+t^{n-2}+...+t+1}$$

Mà $\lim\limits_{x\to 1}\frac{a}{t^{n-1}+t^{n-2}+..+t+1}=\frac{a}{n}$ nên suy ra $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\frac{a}{n}$. Vậy chọn A.

STUDY TIP

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\frac{a}{n}$$

$$a^n-b^n=(a-b)\times\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

$$a^n-1=(a-1)\times\left(a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1\right)$$

Ví dụ 14: Biết $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\frac{a}{b}$ trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, a và b là các số nguyên dương. Tổng $a+b$ bằng

A. 137. **B.** 138. **C.** 139. **D.** 140.

Lời giải

Đáp án C.

Với những bài dạng này, sẽ khó sử dụng MTCT để tìm đáp án đúng.

Đặt $t=x-8$. Suy ra $x=t+8$. $\lim\limits_{x\to 8}t=0$ và

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\frac{\sqrt{t+9}-\sqrt[3]{t+27}}{\sqrt[4]{t+16}-2}=\frac{3\sqrt{1+\frac{t}{9}}-3\sqrt[3]{1+\frac{t}{27}}}{2\sqrt[4]{1+\frac{t}{16}}-2}$$

$$=\frac{3}{2}\frac{\frac{\sqrt{1+\frac{t}{9}}-1}{t}-\frac{\sqrt[3]{1+\frac{t}{27}}-1}{t}}{\frac{\sqrt[4]{1+\frac{t}{16}}-1}{t}}=g(t)$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\lim\limits_{t\to 0}g(t)$. Áp dụng ví dụ 13 Ta có:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{t}{9}}-1}{t}=\frac{\frac{1}{9}}{2}=\frac{1}{18};\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{t}{27}}-1}{t}=\frac{\frac{1}{27}}{3}=\frac{1}{81};\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+\frac{t}{16}}-1}{t}=\frac{\frac{1}{16}}{4}=\frac{1}{64}$$

Vậy $\lim\limits_{t\to 0}g(t)=\frac{3}{2}.\frac{\frac{1}{18}-\frac{1}{81}}{\frac{1}{64}}=\frac{112}{27}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\dfrac{112}{27}$. Vậy $a=112,b=27$ và $a+b=139$

******* Tính giới hạn vô định dạng $\dfrac{0}{0}$ bằng đạo hàm (Quy tắc L'Hôpital).

STUDY TIP

*****Quy tắc L'Hôpital

$$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{g(x_0)}.$$

Trong đó $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$, $x_0\in(a;b)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ (Hoặc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$)

Và $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ tồn tại

Trước khi đọc phần này xin đọc chương đạo hàm trong chương trình lớp 11

Ví dụ 15: Ta xét lại ví dụ 9 đã nêu ở trên.

Cho số thực a khác 0. Khi đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos ax}$ bằng

A. $\dfrac{2}{a^2}$. **B.** $\dfrac{2}{a}$. **C.** $2a^2$. **D.** $2a$.

Lời giải

Đáp án <u>A</u>

Ngoài hai lời giải đã nêu ở trên ta còn một cách áp dụng Quy tắc L'Hopital như sau:

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos ax}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{a\sin ax}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{a^2\cos ax}=\frac{2}{a^2}$$

Ở đây ta áp dụng Quy tắc L'Hopital 2 lần. Cách sử dụng Quy tắc này rất hữu dụng khi giải các bài toán trắc nghiệm. Tuy nhiên không áp dụng Quy tắc này cho các bài toán tự luận do Quy tắc L'Hopital không được trình bày trong chương trình THPT.

STUDY TIP

Có thể áp dụng quy tắc L'Hopital nhiều lần để tính giới hạn

Đề nghị: Độc giả hãy vận dụng quy tắc L'Hopital để giải các ví dụ đã nêu ở dạng 2 này.

bài tập dạng trắc nghiệm. Nếu là bài tập dạng tự luận thì các em cần trình bày chi tiết theo phương pháp đã nêu trên. Riêng A và B, ta giải tự luận như sau:

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}+\sqrt{5})=+\infty$$

Ví dụ 16: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x+1}{5-2x}$ bằng:

A. 0 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $+\infty$ **D.** $-\infty$

Đáp án D

Cách 1: Theo kết quả đã nêu ở trên thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=-\infty$

Cách 2: Sử dụng MTCT

Bổ sung: Nếu là bài toán tự luận 'Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}$" thì ta có hai cách giải như sau:

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-3+\frac{1}{x}}{\frac{5}{x}-2}$. Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3+\frac{1}{x})=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{5}{x}-2)=-2<0$ nên theo qui tắc 2, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-3+\frac{1}{x}}{\frac{5}{x}-2}=-\infty$

Cách 2 : Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^2}}$. Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3})=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^2})=0$ và

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^2}\right)<0$ với mọi $x<0$ nên theo qui tắc 2, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^2}}=-\infty$

 STUDY TIP

k	a	$\lim\limits_{x\to-\infty}ax^k$
Chẵn	+	$+\infty$
	-	$-\infty$
Lẻ	+	$-\infty$
	-	$+\infty$

Ví dụ 17: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^5+x^3+7}{2x^3-3x^2+1}$ **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3x^2-x^3}{4x^2+1}$ **C.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^4+5}{x-x^3+1}$ **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x^6}{1+x-5x^2}$

Đáp án C

Lời giải

Cách 1 : Theo cách ghi kết quả ở trên thì

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^5+x^3+7}{2x^3-3x^2+1}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3x^2-x^3}{4x^2+1}=-\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$;

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^4+5}{x-x^3+1}=3\lim_{x\to-\infty}x=-\infty;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x^6}{1+x-5x^5}=\frac{1}{5}\lim_{x\to-\infty}x^4=+\infty;$$

Cách 2 : sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn

Khi đến C thấy $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^4+5}{x-x^3+1}=3\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ nên dừng lại và chọn đáp án C

Ví dụ 4 : Giới hạn $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ bằng :

A. 2 **B.** -2 **C.** 1 **D.** -1

Đáp án B

Lời giải :

Cách 1 :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=-2$$

Vậy chọn đáp án B

Cách 2 : Sử dụng MTCT

Ví dụ 18: Giới hạn $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$ bằng :

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $-\infty$ **D.** $+\infty$

Đáp án B

Lời giải :

Cách 1 : Theo ví dụ đã trình bày ở dạng 1 thì $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1})=-\infty$

Ta đưa x^2 ra ngoài căn rồi chia cả tử và mẫu cho x. Cụ thể như sau :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2x+3}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2x+3}==\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{1}{2}$$

Vậy đáp án đúng là B

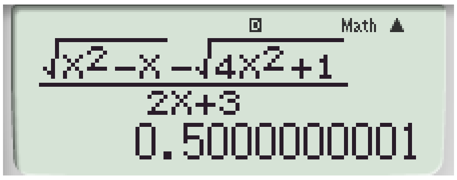
Cách 2 : Sử dụng máy tính tính giá trị hàm số tại $x=10^{-10}$ ta được kết quả như hình bên. Vậy chọn đáp án B

Cách 3 : Ta có thể giải bài này bằng phương pháp loại trừ như sau :

Vì $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1})=-\infty;\ \lim_{x\to-\infty}(2x+3)=-\infty$ nên giới hạn cần tìm phải mang dấu dương. Mặt khác bậc tử và bậc mẫu bằng nhau nên giới hạn cần tìm là hữu hạn.

Đáp án cần tìm là đáp án B

STUDY TIP



Ví dụ 19: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}=\dfrac{\sqrt{a}}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Giá trị nhỏ nhất của tích ab bằng :

A. 6 **B.** 12 **C.** 18 **D.** 24

Đáp án C

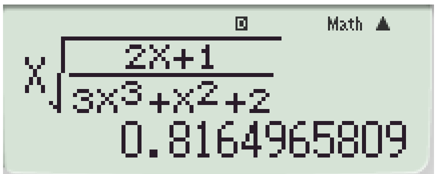
Lời giải :

Ta có : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2x^3+x^2}{3x^3+x^2+2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Vậy $\dfrac{\sqrt{a}}{b}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ Dễ dàng suy ra được tích của ab là 18.

Chú ý : Nếu sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=10^{10}$ thì ta thu được kết quả như hình bên. Do đó, nếu không có kiến thưc về giới hạn hàm số, rất khó tìm ra được đáp án đúng nếu chỉ dùng MTCT. Ngược lại nếu có kiến thức vững vàng, bạn đọc sẽ nhanh chóng tìm ra đáp án, thậm chí là trong chớp mắt ! Vì vậy, tôi xin nhắc lại, tôi khuyến nghị các bạn đọc nên giải bài tập theo kiểu tự luận một cách căn cơ để có thể đối mặt với các bài toán ‘’chống MTCT’’

STUDY TIP



Dạng 4 : Dạng vô định $0.\infty$

Bài toán : Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)v(x)]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)]=0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}[v(x)]=\pm\infty$

Phương pháp : Ta có thể biến đổi $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)v(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{\dfrac{1}{v(x)}}$ để đưa về dạng $\dfrac{0}{0}$ hoặc

$\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)v(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{\dfrac{1}{v(x)}}$ để đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Tuy nhiên, trong nhiều bài tập, ta chỉ cần biến đổi đơn giản như đưa biểu thức vào trong/ ra ngoài dâu căn, quy đồng mẫu thức …. Là đưa được về dạng quen thuộc.

Ví dụ 20: Giới hạn $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)$ bằng :

A. 0 **B.** -1 **C.** 1 **D.** $-\infty$

Đáp án B

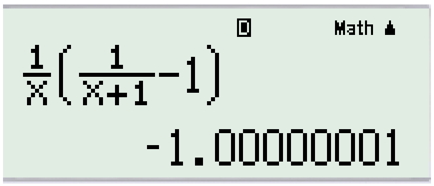
Phân tích : Ta có $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)=0$ nên chưa có thể áp dụng các định lí, qui tắc để tính giới hạn.

Lời giải :

Cách 1 : Ta có $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1-(x+1)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-1}{x+1}=-1$

Cách 2 : Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $-0,00000001$ ta được kết quả như hình bên. Do đó chọn đáp án B, tức $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)=-1$

STUDY TIP



Ví dụ 21: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$ bằng :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Đáp án C

Phân tích : Vì $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0;\ \lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}=+\infty$ nên chưa có thể áp dụng các định lý và qui tắc để tính giới hạn.

Lời giải :

Cách 1 : Với mọi $x>2$ ta có : $(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}=\sqrt{\frac{(x-2)^2x}{x^2-4}}=\sqrt{\frac{(x-2)x}{x+2}}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{(x-2)x}{x+2}}=0$. Vậy chọn đáp án C

Cách 2: Sử dụng MTCT

Ví dụ 22: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+1)\sqrt{\frac{2x+1}{5x^3+x+2}}$ bằng:

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ **D.** $-\sqrt{2}$

Đáp án B

Phân tích: Ví dụ tương tự đã được nghiên cứu trong phần dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Tuy nhiên vì $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+1)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{\frac{2x+1}{5x^3+x+2}}=0$ nên giới hạn này cũng có thể coi như dạng $0.\infty$

Lời giải

Cách 1: Với $x<-1$ ta có $x+1<0$ nên $x+1=-\sqrt{(x+1)^2}$. Do đó

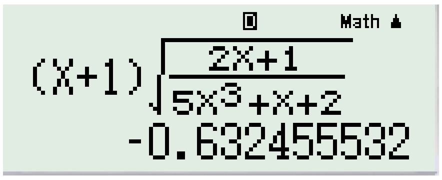
$$\lim_{x\to -\infty}(x+1)\sqrt{\frac{2x+1}{5x^3+x+2}}=-\lim_{x\to -\infty}\sqrt{\frac{(x+1)^2(2x+1)}{5x^3+x+2}}=-\frac{\sqrt{10}}{5}$$

Vậy chọn đáp án B

Cách 2: Sử dụng MTCT. Tính giá trị hàm số tại $x=10^{-10}$ ta được kết quả như hình bên. So sánh các đáp số A, B, C, D ta chọn đáp án đúng là **B.**

STUDY TIP

Ta chỉ quan tâm đến lũy thừa bậc cao nhất là x^3. Hệ số của x^2 trong $(x+1)^2$ là 1^2 do $(x+1)^2=x^2+2x+1$. Hệ số của x trong 2x + 1 là 2 nên hệ số của x^3 trên tử là $1^2.2$. Ở đây không nhất thiết phải khai triển tích thành đa thức để tìm hệ số của x^3.



Ví dụ 23: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sin\frac{1}{x})$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** $+\infty$ **D.** Không tồn tại

Đáp án B

Phân tích: Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}=0$. Ta có dạng $0.\infty$. Lời giải như sau :

Lời giải :

Cách 1 : Ta có : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sin\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

Đặt $t=\frac{1}{x}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}t=0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sin\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\text{sint}}{t}=1$

Cách 2: Sử dụng MTCT (Lưu ý chuyển máy về chế độ Radian)

STUDY TIP

Ở ví dụ 4 ta đã chuyển dạng $0.\infty$ thành $\frac{0}{0}$ do ta liên tưởng đến giới hạn đặc biệt $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

Ví dụ 24: Giới hạn $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\frac{\pi}{2}-x)\tan x$ bằng

A. 1 **B.** 0 **C.** $-\infty$ **D.** Không tồn tại

Đáp án A

Phân tích: vì $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\frac{\pi}{2}-x)=0;\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan x=\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{\sin x}{\cos x}=+\infty$ nên ta có dạng $0.\infty$

Lời giải :

Cách 1 : Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x$ thì $x=\frac{\pi}{2}-t,\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}t=0$ và

$(\frac{\pi}{2}-x)\tan x=t\tan(\frac{\pi}{2}-t)=\text{t}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{\cos(\frac{\pi}{2}-t)}=\frac{t}{\sin t}\cos t$. Do đó

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\frac{\pi}{2}-x)\tan x=\lim\limits_{t\to o^+}\frac{t}{\sin t}\cos t=1$

Cách 2 : Sử dụng MTCT

STUDY TIP

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan x=+\infty;\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\tan x=+\infty$. Lưu ý để tránh nhầm lẫn giữa hai giới hạn này

Dạng 5 : Dạng $\infty-\infty$

Bài toán : Tính $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)-v(x)]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=+\infty$ Hoặc tính $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)+v(x)]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=-\infty$

Phương pháp : Nhân hoặc chia với biểu thức liên hợp (nếu có căn thức) hoặc qui đồng để đưa về cùng một phân thức (nếu chứa nhiều phân thức).

Ví dụ 25: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $+\infty$ **D.** $-\infty$

Đáp án A

Lời giải :

Cách 1:

Phân tích: Ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ nên bài này thuộc dạng $\infty-\infty$. Tương tự như giới hạn dãy số, ta nhân chia với biểu thưc liên hợp. Lời giải cụ thể như sau:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$

Cách 2: Sử dụng MTCT

Ví dụ 26: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1}+3x\right)$ bằng

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $-\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $-\frac{1}{6}$

Đáp án D

Lời giải:

Phân tích: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+x+1}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}(3x)=-\infty$ nên bài này thuộc dạng vô

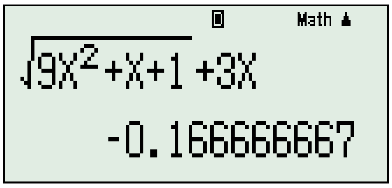
định $\infty-\infty$ (mặc dù biểu thức của hàm số lấy giới hạn có hạng tổng). Ta tiến hành nhân chia với biểu thức liên hợp. Lời giải cụ thể như sau:

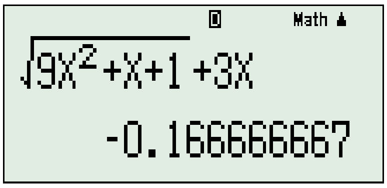
Ta có: $\lim\left(\sqrt{9x^2+x+1}+3x\right)=\lim\dfrac{x+1}{\sqrt{9x^2+x+1}-3x}=\lim\dfrac{x+1}{-x\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3x}$

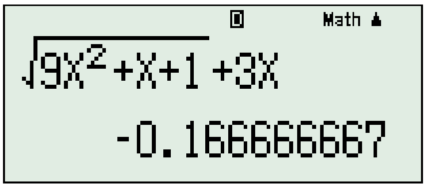
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3}=\dfrac{1}{-3-3}=\dfrac{-1}{6}$. Vậy chọn đáp án **D.**

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả như hình bên. Sử dụng kĩ thuật tìm dạng phân số của một số thập phân vô hạn tuần hoàn ta được $-0,1(6)=\dfrac{-1}{6}$ (xem lại phần giới hạn dãy số). Vậy chọn đáp án **D**.

 Studytip:







Ví dụ 27. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}\right)$ bằng:

A. $\frac{13}{24}$ **B.** $\frac{7}{12}$ **C.** $-\frac{13}{24}$ **D.** $-\frac{7}{12}$

Lời giải

Cách 1: Phân tích:

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+3x}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}=+\infty$ nên đấy cũng là dạng vô định $\infty-\infty$. Tuy nhiên vì là hiệu của hai căn thức không cùng bậc nên ta chưa thể nhâ chia với biểu thức liên hợp luôn được. Nhận thấy $x>0$ thì $\sqrt{4x^2}=\sqrt[3]{8x^3}=2x$ nên ta thêm bớt $2x$ rồi nhân chia liên hợp.

Với $x>0$: $\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}=\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)+\left(2x-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}\right)$

$$=\frac{3x}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}-\frac{2+\frac{1}{x^2}}{4+2\sqrt[3]{8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{\left(8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}}$$

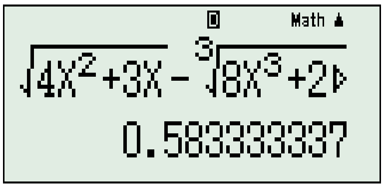
Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}\right)$

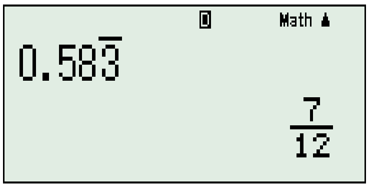
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2}-\frac{2+\frac{1}{x^2}}{4+2\sqrt[3]{8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{\left(8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}}\right)=\frac{3}{2+2}-\frac{2}{4+4+4}=\frac{7}{12}.$$

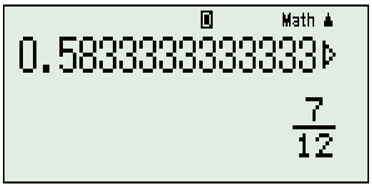
Do đó chọn **B.**

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả như hình bên. Sử dụng kì thuật tìm dạng phân số của một số thập phân vô hạn tuần hoàn ta được $-0,58(3)=\frac{7}{12}$. (xem lại phần giới hạn dãy số). Vậy chọn đáp án **D.**

 Studytip:







Lưu ý: Ta xem lại một Ví dụ đã trình bày ở dạng 1 như sau:

Ví dụ 28. Giới hạn của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}$ khi $x\to+\infty$ bằng:

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** -1 **D.** 3

Phân tích: Ví dụ này cũng thuộc dạng $\infty-\infty$ nhưng lại không phải là dạng vô định. Bằng các định lí và quy tắc, ta tính được giới hạn hàm số mà không cần phải nhân chia với biểu thức liên hợp. Ta xem cách giải cho tiết dưới đây.

Lời giải

$$\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}-|x|\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=|x|\left(\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}\right).$$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}|x|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}=1-2=-1<0.$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[|x|\left(\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}\right)\right]=-\infty.$

Studytip:

Cũng là $\infty-\infty$ nhưng khi nào là xác định, khi nào là vô định? Khi nào phải nhân chia liên hợp, khi nào thì đưa x^n ra ngoài căn rồi đặt nhân tử chung như Ví dụ 4? Để có câu trả lời mời quý độc giả hãy đọc lại phần giới hạn dãy số có chứa căn.

Ví dụ 29. Trong các giới hạn sau giới hạn nào là hữu hạn:

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-3x\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{1+x+2x^2}\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3x+2}\right)$.

Lời giải

Cách 1: Với các kết quả đã biết phần giới hạn dãy số có chứa căn, ta thấy ngay đáp án là **D.** Thật vậy:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+4x+3}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)=+\infty.$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2+x+1}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-3x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-3x\right)=+\infty.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{1+x+2x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+2}\right)=-\infty$

do $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+2}\right)=1-\sqrt{2}<0.$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3x+2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-1}=\frac{-3}{2}.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT để tìm lần lượt các giới hạn.

Ví dụ 30. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -3 **D.** -2

Lời giải

Cách 1: Vì $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x^2-4}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$ nên ta có dạng $\infty-\infty.$

Theo phương pháp đã nêu từ đầu, ta đi quy đồng mẫu số các phân thức.

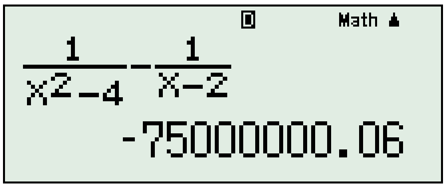
Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\dfrac{1}{(x-2)(x+2)}-\dfrac{1}{(x-2)}\right]=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x-1}{(x-2)(x+2)}.$

Vì $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x-1}{(x+2)}=\dfrac{-3}{4}<0, \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0$ và $x-2>0$ với mọi $x>2$ nên theo quy tắc 2,

$\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x-1}{(x-2)(x+2)}=-\infty.$ Do đó chọn B

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=2,00000001$ ta được kết quả như hình bên.

Do đó chọn đáp án B, tức là $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)=-\infty.$



Ví dụ 31. Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để giới hạn: $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{a}{x^2-6x+8}-\dfrac{b}{x^2-5x+6}\right)$ là hữu hạn:

A. $a-4b=0.$ **B.** $a-3b=0.$ **C.** $a-2b=0.$ **D.** $a-b=0.$

Lời giải

Cách 1: Ta có $\dfrac{a}{x^2-6x+8}-\dfrac{b}{x^2-5x+6}=\dfrac{a}{(x-2)(x-4)}-\dfrac{b}{(x-2)(x-3)}$

$=\dfrac{a(x-3)-b(x-4)}{(x-2)(x-3)(x-4)}=\dfrac{g(x)}{(x-2)(x-3)(x-4)}.$

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0;\ \lim\limits_{x\to 2^-}(x-3)=-1;\ \lim\limits_{x\to 2^-}(x-4)=-2;\ \lim\limits_{x\to 2^-}g(x)=2b-a.$

Do đó nếu $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)\neq 0\Leftrightarrow 2b-a\neq 0$ thì giới hạn cần tìm là vô cực theo quy tắc 2.

Từ đó chọn được đáp án đúng là C.

(Thật vậy, nếu $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)=2b-a=0$ thì

$$\frac{a}{x^2-6x+8}-\frac{b}{x^2-5x+6}=\frac{bx-2b}{(x-2)(x-3)(x-4)}=\frac{b}{(x-3)(x-4)}$$

Và do đó $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{a}{x^2-6x+8}-\frac{b}{x^2-5x+6}\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{b}{(x-3)(x-4)}=\frac{b}{2}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Với mỗi đáp án, lấy các giá trị cụ thể của a và b, thay vào hàm số rồi tính giới hạn.

Từ đó chọn được đáp án là **C.**

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

DẠNG 1. BÀI TẬP TÍNH GIỚI HẠN BẰNG CÁCH SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, ĐỊNH LÍ VÀ CÁC QUY TẮC.

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để $B>7$ với $B=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3+3x+m^2-2m\right)$.

A. $m<1$ hoặc $m>3$ **B.** $m<-1$ hoặc $m>3$ **C.** $-1<m<3$ **D.** $1<m<3$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & khi\ x<1\\ \sqrt{2x-2} & khi\ x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ bằng:

A. 0 **B.** 2 **C.** $-\infty$ **D.** $+\infty$

Câu 3: Trong các hàm số sau, hàm số nào có giới hạn tại điểm $x=1$?

A. $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$ **B.** $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ **C.** $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ **D.** $t(x)=\dfrac{1}{x-1}$

Câu 4: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=0$ **B.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=-1$ **C.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=1$ **D.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ không tồn tại.

Câu 5: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x^3-x^2+x+1\right)$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^4+3x+1\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^2-7x^3+2\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-x^5+2\right)$.

Câu 6: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-2x\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-x\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+4x+3}\right)$.

Câu 7: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $+\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{6-x^2}{9+3x}$. **B.** $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{1-2x}}{5+5x}$. **C.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5-3x^3}{(x-2)^4}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3-4}{(x+1)^2}$

Câu 8: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là vô cực?

A. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2x}}$.

B. $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x^3+2x^2}{\left(x^2-x+6\right)^2}$.

C. $\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{\dfrac{9x^2-x}{(2x-1)\left(x^4-3\right)}}$.

D. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2(2x-1)}{x^4+x+1}$.

Câu 9: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là vô cực?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{\sqrt{5x^2+x+2}+4x}$.

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)^3+8}{x}$.

C. $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{3-x}}{x^4+x}$.

D. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{4x^3-x^3+2}$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $f(x)=mx+\sqrt{9x^2-3x+1}$ có giới hạn hữu hạn khi $x\to+\infty$.

A. $m=-3$ **B.** $m\neq-3$ **C.** $m\geq 0$ **D.** $m<0$

DẠNG 2. GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG $\dfrac{0}{0}$.

Câu 11: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{|3x+6|}{x+2}$

A. Bằng 3 **B.** Bằng -3 **C.** Bằng 0 **D.** không tồn tại

Câu 12: Cho a là một số thực khác 0. Kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x-a}$ bằng:

A. $3a^3$ **B.** $2a^3$ **C.** a^3 **D.** $4a^3$

Câu 13: Cho $C=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-mx+m-1}{x^2-1}, m$ là tham số thực. Tìm m để $C=2$.

A. $m=2$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=1$ **D.** $m=-1$

Câu 14: Cho a và b là các số thực khác 0. Nếu $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=6$ thì $a+b$ bằng:

A. 2 **B.** -4 **C.** -6 **D.** 8

Câu 15: Cho a và b là các số thực khác 0. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{\sin bx}$ bằng:

A. $\dfrac{a}{2b}$ **B.** $-\dfrac{a}{2b}$ **C.** $\dfrac{2a}{b}$ **D.** $-\dfrac{2a}{b}$

Câu 16: Cho a,b,c là các số thực khác $0, 3b-2c\neq 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a,b,c để:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}=\frac{1}{2}.$$

A. $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{10}$ **B.** $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{6}$ **C.** $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{12}$

Câu 17: Cho m và n là các số nguyên dương phân biệt. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^m-x^n}$ bằng:

A. $m-n$ **B.** $n-m$ **C.** $\frac{1}{m-n}$ **D.** $\frac{1}{n-m}$

Câu 18: Để tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}$, bạn Bính đã trình bày bài giải như sau:

Bước 1: Ta có:

$$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}-\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}.$$

Bước 2: $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{5(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{5x-4}+1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{5}{\sqrt{5x-4}+1}=\frac{5}{2}.$

Bước 3: $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}=1.$

Bước 4: $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}.$

Hỏi lời giải của bạn Bính đã mắc lỗi sai ở bước nào?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Câu 19: Biết $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}=\frac{m}{n}$ trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Tổng $2m+n$ bằng:

A. 68 **B.** 69 **C.** 70 **D.** 71

Câu 20: Biết $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)\left(x^2+3x-18\right)}=\frac{m}{n}$, trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Khi đó $3m+n$ bằng:

A. 55 **B.** 56 **C.** 57 **D.** 58

Câu 21: Giới hạn $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{5x-4}}{(x-1)^2}$ bằng:

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Câu 22: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^3-1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$. **C.** $\lim\limits_{x\to-3}\left|\frac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|$. **D.** $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\left(x^2-x-6\right)^2}{x^3+2x^2}$.

Câu 23: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào khác 0?

A. $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}}$. **B.** $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{x^2-9}{\sqrt{\left(x^2+1\right)(3-x)}}$.

C. $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x^2+2x+1}}$. **D.** $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Câu 24: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào không tồn tại?

A. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2+11x+18}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)^3-27}{x}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$. **D.** $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x|x+2|}{x^2+3x+2}$.

Câu 25: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào không hữu hạn?

A. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x^2+x-10}{x^3-8}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}$.

DẠNG 3. GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Câu 26: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng -1?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{x+1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^2+3}{5x^2-x^3}$. **C.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{x^2-5x}$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{3x+x^2}$.

Câu 27: Trong các giới hạn hữu hạn sau đây, giới hạn nào là lớn nhất?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)(3-2x-5x^3)}{x(x^3-1)}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x^2+1)(2x^2+x)}{(2x^4+x)(x+1)}$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2+1)(2x^2-x+4)}{x^3(3x+1)}$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x^2+1)(2-x^3)}{(2x^4+x)(x+1)}$.

Câu 28: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào là $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^2+x-1}{3+x}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+x+5}{1+2x}$. **C.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3x^3+x^2}{5+x-2x^2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x^4+1}{2-x-x^2}$.

Câu 29: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 30: Cho a,b,c là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a,b,c để

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax-b\sqrt{9x^2+2}}{cx+1}=5$.

A. $\dfrac{a-3b}{c}=5$. **B.** $\dfrac{a-3b}{c}=-5$. **C.** $\dfrac{a+3b}{c}=5$. **D.** $\dfrac{a+3b}{c}=-5$.

Câu 31: Cho a và b là các tham số thực . Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{4x^2+3x+1}{cx+1}-(ax+b)\right]=0, a$ và b thỏa mãn hệ thức nào trong các hệ thức dưới đây ?

A. $a+b=9$. **B.** $a+b=-9$. **C.** $a-b=9$. **D.** $a-b=-9$.

Câu 32: Trong các giới hạn sau , giới hạn nào là $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4-x-1}{x^2+x+2}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{1+2|x|}$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^5+x-11}}{2x^2+x+1}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{1-2x}}$.

Câu 33: Tìm giới hạn nhỏ nhất trong các giới hạn hữu hạn sau.

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{2x-x^2}{8x^2-x+3}}$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2-x+2}$.

D. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}$.

Câu 34: Trong các giới hạn hữu hạn sau , giới hạn nào là lớn nhất?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{(2x-5)(1-x)^2}{3x^3-x+1}}$.

B. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}}$.

D. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-2|x|}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

Câu 35: Trong các giới hạn hữu hạn sau , giới hạn nào là nhỏ nhất?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}+2x}{3-4|x|}$.

B. $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{x}{x^3-1}}$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{3x^4+4x^5+2}{9x^5+5x^4+4}}$.

DẠNG 4. GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG $0.\infty$.

Câu 36: Cho a là một số thực dương. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}$.

A. bằng $-\dfrac{1}{a^2}$. **B.** là $+\infty$. **C.** là $-\infty$. **D.** không tồn tại.

Câu 37: Trong các giới hạn sau , giới hạn nào là hữu hạn ?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{x^3}{2x^4+x^2+1}}$.

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{3x}{x^2-1}}$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3+x}}$.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)\sqrt{\dfrac{x}{2x^4+x+1}}$.

Câu 38: Trong các giới hạn hữu hạn sau , giới hạn nào là nhỏ nhất?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{2x+1}{x^3+x+2}}$.

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{3x-11}{x^3+1}}$.

C. $\lim\limits_{x\to1^+}(x^3-1)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$.

D. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)\sqrt{\dfrac{x+1}{5x^3+2x+1}}$.

Câu 39: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x}}\right)$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$

Câu 40: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

A. 2. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$

DẠNG 5. DẠNG VÔ ĐỊNH $\infty-\infty$.

Câu 41: Cho n là một số nguyên dương. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{n}{1-x^n}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

A. $\dfrac{n}{2}$. **B.** $\dfrac{n-1}{2}$. **C.** $\dfrac{n+1}{2}$. **D.** $\dfrac{n+2}{2}$

Câu 42: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1} & khi\, x>1\\ mx+2 & khi\, x\le 1\end{cases}$. Với giá trị nào của m thì hàm số $f\left(x\right)$ có giới hạn tại điểm $x=1$

A. 2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3

Câu 43: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực k sao cho giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{k}{x^2-1}\right)$ là hữu hạn.

A. $k=2$. **B.** $k\ne 2$. **C.** $k<2$. **D.** $k>2$.

Câu 44: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào là -1?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$.

Câu 45: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+5}+\text{ax}\right)=+\infty$ nếu.

A. $a\ge 1$. **B.** $a\le 1$. **C.** $a>1$. **D.** $a<1$.

Câu 46: Cho a và b là các số thực khác 0. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=3$, thì tổng $a+b$ bằng

A. 2. **B.** -6. **C.** 7. **D.** -5.

Câu 47: Cho a và b là các số thực khác 0. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\text{ax+b-}\sqrt{x^2-6x+2}\right)=5$ số lớn hơn trong hai số a và b là số nào trong các số dưới đây?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 48: Trong các giới hạn dưới đây, giới hạn nào là vô cực?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+3}\right)$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x+1}+5x\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+5x}\right)$.

Câu 49: Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x}+\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5}\right)=-\dfrac{m}{n}$ trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Tìm bội số chung nhỏ nhất của m và n.

A. 135. **B.** 136. **C.** 138. **D.** 140.

Câu 50: Cho a và b là các số nguyên dương. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+\text{ax}}+\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}\right)=\dfrac{7}{27}$, hỏi a và b thỏa mãn hệ thức nào dưới đây?

A. $a+2b=33$. **B.** $a+2b=34$. **C.** $a+2b=35$. **D.** $a+2b=36$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

DẠNG 1. BÀI TẬP TÍNH GIỚI HẠN BẰNG CÁCH SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, ĐỊNH LÝ VÀ CÁC QUI TẮC.

Câu 1. Đáp án B.

Cách 1: Ta có $B=\lim\limits_{x\to-1}\left(x^2+3x+m^2-2m\right)=m^2-2m+4$.

Do đó $B>7\Leftrightarrow m^2-2m+4>7\Leftrightarrow m<-1$ hay $m>3$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính B khi $m=4$ và $m=0$.

Khi $m = 4$ thì $B = 12 > 7$, do đó chỉ xét A và B.

Khi $m = 0$ thì $B = 4 < 7$, do đó A sai vậy B đúng.

Câu 2. Đáp án D.

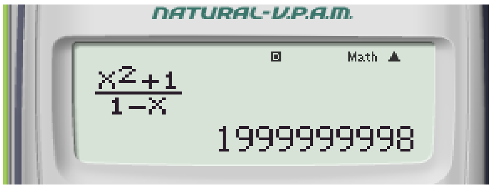
Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2+1}{1-x}$.

Vì $\lim\limits_{x \to -1^-}\left(x^2+1\right) = 2$; $\lim\limits_{x \to -1^-}(1-x) = 0$ và $1 - x > 0; \forall x < 1$

nên theo quy tắc 2: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2+1}{1-x} = +\infty$.

Cách 2: Ta có $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2+1}{1-x}$.

Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x = 0{,}99999999$ ta được kết quả 199999998.



Vậy chọn D.

Câu 3. Đáp án A.

Vì $\lim\limits_{x \to 1}|x-1| = 0$, $|x-1| > 0, \forall x \neq 1$ nên $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{|x-1|} = +\infty$.

Giải thích thêm:

+ Hàm số $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ xác định trên khoảng $(1;+\infty)$ nên không tồn tại giới hạn bên trái tại $x = 1$, do đó không tồn tại giới hạn tại $x = 1$.

+ Hàm số $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ xác định trên khoảng $(-\infty;1)$ nên không tồn tại giới hạn bên phải tại $x = 1$, do đó không tồn tại giới hạn tại $x = 1$.

+ Vì $\lim\limits_{x \to 1}(x-1) = 0$, $x - 1 > 0, \forall x > 1, x - 1 < 0, \forall x < 1$

nên $\lim\limits_{x \to 1^-} t(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} t(x) = \lim\limits_{x \to 1^{+-}} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 1^-} t(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} t(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x \to 1} t(x)$.

Câu 4. Đáp án D.

Xét dãy số (x_n) với $x_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$. Ta có $x_n \to 0$ và $\lim \cos\dfrac{1}{x_n} = \lim \cos[(2n+1)\pi] = -1$ (1).

Lại xét dãy số (y_n) với $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$. Ta có $y_n \to 0$ và $\lim \cos\dfrac{1}{y_n} = \lim \cos(2n\pi) = 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ không tồn tại.

Câu 5. **Đáp án C.**

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x^3 - x^2 + x + 1) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^4 + 3x + 1) = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} (4x^2 - 7x^3 + 2) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x - x^5 + 2) = +\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn bằng $-\infty$.

Câu 6. **Đáp án D.**

Cách 1: Ta có

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 4x + 3} + 2x\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 4x + 3} - 2x\right) = +\infty$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 4x + 3} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{4 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2}} - 1\right) = +\infty$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{4x^2 + 4x + 3}\right) = -\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn bằng $-\infty$.

Câu 7. **Đáp án C.**

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to-3^+} \left(6 - x^2\right) = -3 < 0$; $\lim\limits_{x\to-3^+} (9 + 3x) = 0$ và $9 + 3x > 0, \forall x > -3$.

Vậy theo quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{6 - x^2}{9 + 3x} = -\infty$.

Tương tự: $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{\sqrt{1 - 2x}}{5 + 5x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{5 - 3x^3}{(x + 2)^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2x^3 - 4}{(x + 1)^2} = -\infty$.

Do đó đáp án đúng là C (Thật ra ta chỉ cần tính đến C là chọn được đáp án đúng).

Cách 2: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn bằng $+\infty$.

Câu 8. **Đáp án B.**

Cách 1: Các hàm số trong A, C, D đều xác định tại các điểm điểm tính giới hạn. Do đó đáp án là B.

Thật vậy, ta tính được bằng MTCT: $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^3 + 2x^2}{\left(x^2 - x - 6\right)^2} = +\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn vô cực.

Câu 9. **Đáp án C**

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^-} (\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{3 - x}) = \sqrt{2} - 2 < 0$;

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x^4+x)=0$; $(x^4+x)=x(x^3+1)>0, \forall x<-1$.

Vậy $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{3-x}}{x^4+x}=-\infty$

Bổ sung:

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{5x^2+x+2}+4x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x(-\sqrt{5+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+4)=-\infty$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{\sqrt{5x^2+x+2}+4x}=0$.

+ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-2)^3+8}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8+8}{x}=\lim\limits_{x\to0}(x^2-6x+12)=12$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^3-x^2+2)=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{4x^3-x^2+2}=0$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn vô cực.

Câu 10. Đáp án A

Cách 1: Sử dụng MTCT tính toán khi $m=-3$ ta được kết quả $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x+\sqrt{9x^2-3x+1})=-\dfrac{1}{2}$. Vậy ta chỉ xét các đáp án **A** và **D**.

Lại sử dụng MTCT tính toán khi $m=-1$ ta được kết quả $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+\sqrt{9x^2-3x+1})=+\infty$. Vậy loại đáp án **D**. Do đó đáp án đúng là **A**.

Cách 2: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+\sqrt{9x^2-3x+1})$.

+ Nếu $m\ge0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+\sqrt{9x^2-3x+1})=+\infty$.

+ Nếu $m<0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx+\sqrt{9x^2-3x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(m+\sqrt{9-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)$.

Ta thấy nếu $m\ne-3$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(m+\sqrt{9-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)\ne0$ và do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+\sqrt{9x^2-3x+1})=\infty$.

Ngược lại nếu $m=-3$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x+\sqrt{9x^2-3x+1})=-\dfrac{1}{2}$. Vậy đáp án đúng là **A**.

DẠNG 2. GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG $\dfrac{0}{0}$.

Câu 11. Đáp án D.

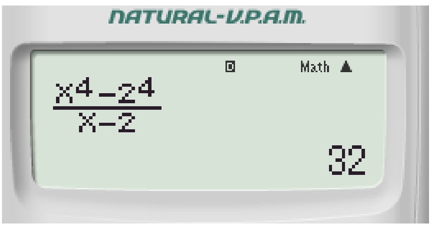
Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{|3x+6|}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{3(x+2)}{x+2}=3$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{|3x+6|}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{-3(x+2)}{x+2}=-3$.

Vậy $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{|3x+6|}{x+2}\ne\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{|3x+6|}{x+2}$ nên $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{|3x+6|}{x+2}$ không tồn tại.

Câu 12. Đáp án D.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x^3+x^2a+xa^2+a^3)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(x^3+xa^2+x^2a+a^3)=4a^3$.

Cách 2: Cho a một giá trị cụ thể rồi tính giới hạn bằng máy tính cầm tay. Chẳng hạn với $a=2$ ta có $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-2^4}{x-2}=32=4.2^3$. Do đó chọn đáp án **D.**



Câu 13. **Đáp án B.**

Cách 1: $C=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-mx+m-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-m+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-m+1}{x+1}=\dfrac{2-m}{2}$

Vậy $C=2\Leftrightarrow m=-2$.

Cách 2: Thay lần lượt các giá trị của m vào, rồi tìm C cho đến khi gặp kết quả $C=2$ thì dừng lại.

Câu 14. **Đáp án C**

Đặt $g(x)=x^2+ax+b$. Rõ ràng là nếu $g(2)\neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{x-2}$ không thể hữu hạn. Do đó điều kiện đầu tiên là $g(2)=0\Leftrightarrow 2a+b=-4$.

Khi đó $g(x)=(x-2)(x-\frac{b}{2})$ và $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-\frac{b}{2})=2-\frac{b}{2}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{x-2}=6\Rightarrow 2-\dfrac{b}{2}=6\Rightarrow b=-8\Rightarrow a=2\Rightarrow a+b=-6.$

Câu 15. **Đáp án B.**

Cách 1: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{x}.\dfrac{bx}{\sin bx}.\dfrac{1}{b})$.

Mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{\sin bx}=\dfrac{-a}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin bx}=1$ **nên** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{ax+b}}{\sin bx}=\dfrac{-a}{2b}$;

Cách 2: Cho a và b các giá trị cụ thể, thay vào rồi tính giới han. Chẳng hạn với $a=b=1$, sử dụng MTCT ta tính được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{\sin x}=\dfrac{1}{2}$. Từ đó chọn đáp án đúng là B.

Câu 16. **Đáp án D.**

Cách 1: $\dfrac{\tan ax}{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}=a.\dfrac{\tan ax}{ax}.\dfrac{x}{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}$

Lại có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{ax}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin ax}{ax}.\dfrac{1}{\cos ax})=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sqrt{1+bx}-1}{x}-\dfrac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x})=\dfrac{b}{2}-\dfrac{c}{3}=\dfrac{3b-2c}{6}$

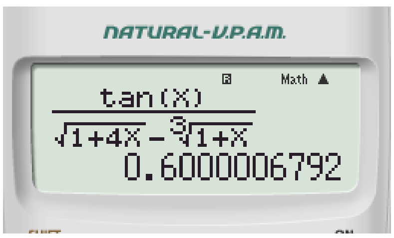
Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}=\dfrac{6a}{3b-2c}$.

Do đó hệ thức liên hệ giữa a,b,c là $\dfrac{6a}{3b-2c}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{12}$

Cách 2: Sử dụng MTCT. Với mỗi đáp án, chọn các giá trị cụ thể của a,b,c thỏa mãn hệ thức rồi thay vào để tính giới hạn. Nếu giới hạn tìm được bằng $\dfrac{1}{2}$ thì đó là đáp án đúng.

Chẳng hạn, với đáp án A, chọn $a=1;b=4;c=1$, sử dụng MTCT tính được

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+x}}=\dfrac{3}{5}$.



Vậy A không phải là đáp án đúng.

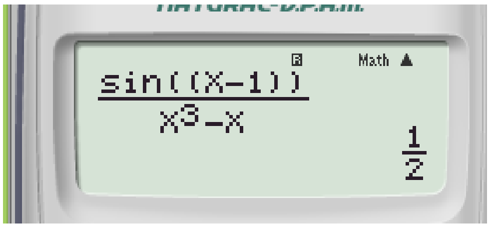
Tương tự vậy B và C cũng không phải là đáp án đúng. Vậy đáp án đúng là D.

Câu 17. Đáp án C.

Cách 1: Ta có $\frac{\sin(x-1)}{x^m-x^n}=\frac{\sin(x\text{-}1)}{x-1}=\frac{x-1}{x^m-x^n}$

Mà $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^m-x^n}{x-1}=m-n$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}=1$ nên $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x^m-x^n}=\frac{1}{m-n}$

Cách 2: Cho m và n các giá trị cụ thể, thay vào rồi sử dụng MTCT tính giới hạn. Chẳng hạn với $m=3;n=1$ ta tính được $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x^3-x}=\frac{1}{2}=\frac{1}{m-n}$.



Vậy đáp án đúng là C

Câu 18. Đáp án A.

Vì ta chưa thể biết được các giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5\text{x}-4}-1}{x-1};\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2\text{x}-4}-1}{x-1}$ có hữu hạn hay không nên chưa thể viết được: $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5\text{x}-4}-\sqrt{2\text{x}-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5\text{x}-4}-1}{x-1}-\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2\text{x}-4}-1}{x-1}$

Do đó lời giải đã mắc lỗi sai ngay ở bước đầu tiên.

Ta sửa lại như sau:

Bước 1: Ta có $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5\text{x}-4}-\sqrt{2\text{x}-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{5\text{x}-4}-1}{x-1}-\frac{\sqrt{2\text{x}-1}-1}{x-1}\right)$

Câu 19. Đáp án A.

Ta có $\frac{\sqrt[3]{8\text{x}+11}-\sqrt{\text{x}+7}}{x^2-3\text{x}+2}=\frac{\sqrt[3]{8\text{x}+11}-3}{x^2-3\text{x}+2}-\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-3\text{x}+2}$

$$=\frac{x-2}{(x-2)(x-1)(\sqrt[3]{(8\text{x}+11)^2}+3\sqrt[3]{8+11}+9)}-\frac{x-2}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+7}+3)}$$

$$=\frac{8}{(x-1)(\sqrt[3]{(8\text{x}+11)^2}+3\sqrt[3]{8+11}+9)}-\frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+7}+3)}$$

Ta có $\lim\limits_{x\to2}\frac{8}{(x-1)(\sqrt[3]{(8\text{x}+11)^2}+3\sqrt[3]{8+11}+9)}=\frac{8}{27}$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+7}+3)}=\frac{1}{6}$

Do đó $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{8\text{x}+11}-\sqrt{\text{x}+7}}{x^2-3\text{x}+2}=\frac{8}{27}-\frac{1}{6}=\frac{7}{54}$

Vậy $m=7;n=54$ và $2m+n=68$.

Câu 20. Đáp án C.

Ta có $\frac{\sqrt{6\text{x}-9}-\sqrt[3]{27\text{x-}54}}{(x-3)(x^2+3\text{x-}18)}=\frac{\sqrt{6\text{x}-9}-\sqrt[3]{27\text{x-}54}}{(x-3)^2(x+6)}$

Sử dụng MTCT ta tính được:

$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{6\text{x}-9}-\sqrt[3]{27\text{x-}54}}{(x-3)^2}=\frac{1}{6}$; $\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{x+6}=\frac{1}{9}$

nên $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{6\text{x}-9}-\sqrt[3]{27\text{x-}54}}{(x-3)(x^2+3\text{x-}18)}=\frac{1}{54}$. Vậy $3m+n=57$.

Giải tự luận: Đặt $t=x-3$ thì $\lim\limits_{x\to3}t=0$ và

$$\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)^2}=\frac{\sqrt{6t+9}-\sqrt[3]{27t+27}}{t^2}=\frac{\sqrt{6t+9}-(t+3)}{t^2}+\frac{(t+3)-\sqrt[3]{27t+27}}{t^2}$$

$$=\frac{-t^2}{t^2\left(\sqrt{6t+9}+t+3\right)}+\frac{t^3+9t^2}{t^2\left[\left(t+3\right)^2+\left(t+3\right)\sqrt[3]{27t+27}+\sqrt[3]{(27t+27)^2}\right]}$$

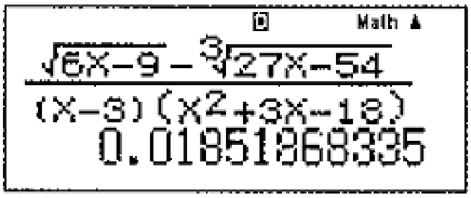
$$=\frac{-1}{\left(\sqrt{6t+9}+t+3\right)}+\frac{t+9}{\left(t+3\right)^2+\left(t+3\right)\sqrt[3]{27t+27}+\sqrt[3]{(27t+27)^2}}$$

Ta có $\lim\limits_{t\to 0}\frac{-1}{\left(\sqrt{6t+9}+t+3\right)}=-\frac{1}{6};\lim\limits_{t\to 0}\frac{t+9}{\left(t+3\right)^2+\left(t+3\right)\sqrt[3]{27t+27}+\sqrt[3]{(27t+27)^2}}=\frac{1}{3}$

Vậy $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{\left(x-3\right)^2}=\frac{-1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x+6}=\frac{1}{9}$ nên $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{\left(x-3\right)^2\left(x^2+3x-18\right)}=\frac{1}{54}$.

Lưu ý: Nếu sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=3,00000001$ và tại $x=2,99999999$ ta đều thu được kết quả bằng 0 hoặc máy báo lỗi (tùy theo loại máy). Điều này là do vượt quá khả năng tính toán của máy. Ta thay đổi tính giá trị của hàm số tại $x=2,99999$ thì ta được kết quả như sau



Kết quả hiển thị trên máy như vậy rất khó để ta tìm ra giới hạn chính xác của hàm số. Tuy nhiên nếu phân tích kĩ một chút rồi biến đổi như trong lời giải trên thì ta vẫn có thể tìm ra đáp án đúng chỉ bằng MTCT.

Câu 21. **Đáp án A**

Bài tập này có dạng tương tự như bài tập trên. Bằng MTCT, không khó để tìm ra đáp án đúng là **A.** Tuy nhiên nếu giải tự luận thì có một số vấn đề cần bàn. Đặt $t=x-1$ thì $x=t+1$, $\lim\limits_{x\to 1^+}=0$ và

$$\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{5x-4}}{\left(x-1\right)^2}=\frac{\sqrt{3t+1}-\sqrt[3]{5t+1}}{t^2}=\frac{\sqrt{3t+1}-1}{t^2}+\frac{1-\sqrt[3]{5t+1}}{t^2}$$

$$=\frac{3t}{t^2\left(\sqrt{3t+1}+1\right)}+\frac{5t}{t^2\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{\left(5t+1\right)^2}\right)}$$

$$=\frac{3\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)-5\left(\sqrt{3t+1}+1\right)}{t\left(\sqrt{3t+1}+1\right)\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)}$$

Ta có $\lim\limits_{t\to 0^+}=\frac{3\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)-5\left(\sqrt{3t+1}+1\right)}{t\left(\sqrt{3t+1}+1\right)\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)}=-\infty$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt[2]{5x-4}}{(x-1)^2}=-\infty.$

Ta thấy sau khi đổi biến cho gọn, ta thêm bớt tử với hàng số 1 rồi tách ra thành hai phân thức và nhân chia liên hợp mà không thêm bớt đa thức. Vậy khi nào thì thêm bớt hằng số, khi nào thì thêm bớt với đa thức? Quý độc giả hãy nghiên cứu kĩ hai bài tập trên và tự rút ra nhận xét.

Câu 22. **Đáp án D**

Ta có $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\left(x^2-x-6\right)^2}{x^3+2x^2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x-3)^2(x+2)^2}{x^2(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x-3)^2(x+2)}{x^2}=0.$

Câu 23. **Đáp án C**

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+1}}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{(x+1)^2}}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+3x+2}{|x+1|}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to(-1)^-}(x+2)=-1\neq 0.$$

Câu 24. **Đáp án C**

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x\sqrt{3+x^2}}{2x}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{3+x^2}}{2x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$ nên $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$ không tồn tại.

Câu 25. **Đáp án B**

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x-1}{x-3}=+\infty.$$

DẠNG 3. GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG $\frac{\infty}{\infty}$.

Câu 26. **Đáp án B**

\+ $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2-1}{x+1}=-\infty$; + $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^3-x^2+3}{5x^2-x^3}=-1$;

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{x^2-5x}=0$; + $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{3x+x^2}=2$;

Câu 27. **Đáp án C**

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)(3-2x-5x^3)}{x(x^3-1)}=-5$. + $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x^2+1)(2x^2+x)}{(2x^4+x)(x+1)}=0$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2+1)(2x^2-x+4)}{x^3(3x+1)}=\dfrac{2}{3}$. + $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3x^2+1)(2-x^3)}{(2x^4+x)(x+1)}=-\dfrac{3}{2}$.

Câu 28. **Đáp án B**

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^2+x-1}{3+x}=+\infty$. + $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+x+1}{1+2x}=-\infty$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3x^3+x^2}{5+x-2x^2}=+\infty$. + $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x^4+1}{2-x-x^2}=+\infty$.

Câu 29. **Đáp án C**

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+3x}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+3}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{2}{x}}=\frac{-1+3}{-2-1}=-\frac{2}{3}$$

Câu 30. **Đáp án C**

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax-b\sqrt{9x^2+2}}{cx+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax+bx\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{cx+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a+b\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{c+\frac{1}{x}}=\dfrac{a+3b}{c}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax-b\sqrt{9x^2+2}}{cx+1}=5\Leftrightarrow\dfrac{a+3b}{c}=5$.

Câu 31. **Đáp án A**

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x^2+3x+1}{x+2}-(ax+b)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[(4x+5)+\frac{11}{x+2}-(ax+b)\right].$$

Do đó $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{4x^2+3x+1}{x+2}-(ax+b)\right]=0\Rightarrow a=4;b=-5\Rightarrow a-b=9$.

Câu 32. **Đáp án D**

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4-x-1}{x^2+x+2}=+\infty$. + $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{1+2|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{1-2x}=+\infty$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^5+x-11}}{x^2+x+2}=+\infty$. + $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{1-2x}}=-\infty$.

Câu 33. **Đáp án D**

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3\sqrt{1+\dfrac{2}{x^6}}}{3x^3-1}=-\dfrac{1}{3}$. **Ta có**

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{2x-x^2}{8x^2-x+3}}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-x^2}{8x^2-x+3}}=\sqrt[3]{-\dfrac{1}{8}}=-\dfrac{1}{2}$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2-x+2}=0$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2|x|+3}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}=2$.

Câu 34. Đáp án B

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{(2x-5)(1-x)^2}{3x^3-x+1}}=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)|x|\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}{x-5x^2}=\dfrac{2}{5}$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-2|x|}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-2|x|}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-x}=1$.

Câu 35. Đáp án A

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}+2x}{3-4|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+2x}{3+4|x|}=\dfrac{1}{4}$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{x}{x^3-1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{(1-2x)^2x}{x^3-1}}=2$ **(do** $1-2x>0,\forall x<\dfrac{1}{2}$ **).**

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{3x^4+4x^5+2}{9x^5+5x^4+4}}=\dfrac{2}{3}$.

DẠNG 4. GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG $0.\infty$.

Câu 36. Đáp án D

Cách 1: Ta có $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}=\dfrac{a-x}{ax}.\dfrac{1}{(x-a)^2}=\dfrac{-1}{ax(x-a)}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to a^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{-1}{ax(x-a)}=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to a^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{-1}{ax(x-a)}=-\infty$;

Vậy $\lim\limits_{x\to a^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{(x-a)^2}\neq\lim\limits_{x\to a^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{(x-a)^2}$ nên $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{(x-a)^2}$ không tồn tại.

Cách 2: Cho a một giá trị cụ thể, chẳng hạn $a=1,$ thay vào hàm số rồi sử dụng MTCT để tính giới hạn. Từ đó ta tìm được đáp án đúng là **D.**

Câu 37. **Đáp án C**

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\frac{x^3}{2x^4+x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3(x+1)^2}{2x^4+x^2+1}}=+\infty.$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\frac{3x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x(x+1)^2}{x^2-1}}=+\infty.$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\frac{x-1}{x^3+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{(x+2)^2(x-1)}{x^3+x}}=1.$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)\sqrt{\frac{x}{2x^4+x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x(x^2+1)^2}{2x^4+x^2+1}}=+\infty.$

Câu 38. **Đáp án B**

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\sqrt{\frac{2x+1}{x^3+x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{(2x+1)(x+1)^2}{x^3+x+2}}=-\sqrt{2}.$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)\sqrt{\frac{3x-11}{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{(3x-11)(1-2x)^2}{x^2+1}}=-2\sqrt{3}.$

+

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-1)\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1)(x-1)\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1)\sqrt{(x-1)}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}=0.$

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)\sqrt{\frac{x+1}{5x^3+2x+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{(x+1)(2-3x)}{5x^3+2x+1}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$

Câu 39. **Đáp án A**

Cách 1: Sử dụng MTCT.

Cách 2: Đặt $t=\frac{1}{x}$ thì $x=\frac{1}{t},\ \lim\limits_{x\to+\infty}t=0$ và

$$x^2\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-\sqrt{\frac{x+3}{x}}\right)=\frac{\sqrt{1+2t}-\sqrt[3]{1+3t}}{t^2}=\frac{\sqrt{1+2t}-(t+1)}{t^2}+\frac{(t+1)-\sqrt[3]{1+3t}}{t^2}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1+2t}+(t+1)}+\frac{t+3}{(t+1)^2+(t+1)\sqrt[3]{1+3t}+\sqrt[3]{(1+3t)^2}}$$

Do đó

$$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-\sqrt{\frac{x+3}{x}}\right)=\lim\limits_{t\to0}\left[\frac{-1}{\sqrt{1+2t}+(t+1)}+\frac{t+3}{(t+1)^2+(t+1)\sqrt[3]{1+3t}+\sqrt[3]{(1+3t)^2}}\right]$$

Câu 40. **Đáp án C**

Cách 1: Sử dụng MTCT.

Cách 2: Đặt $t=\frac{\pi}{4}-x$ thì $x=\frac{\pi}{4}-t$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} t=0$ **và**

$$\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\tan 2\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\tan t=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)\tan t$$

$$=\cot 2t\tan t=\frac{\cos 2t}{\sin 2t}.\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{2t}{\sin 2t}.\frac{\sin t}{t}.\frac{\cos 2t}{2\cos t}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2t}{\sin 2t}.\frac{\sin t}{t}.\frac{\cos 2t}{2\cos t}=\frac{1}{2}.$

DẠNG 5. DẠNG VÔ ĐỊNH $\infty-\infty$.

Câu 41. **Đáp án B**

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giới hạn với một giá trị cụ thể của n rooif so sánh với đáp án.

Chẳng hạn $n=3$ ta có $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)=1.$

Cách 2: $\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}=\frac{n-\left(1+x+x^2+...+x^{n-1}\right)}{1-x^n}=\frac{1-x+1-x^2+...+1-x^{n-1}}{1-x^n}$

$$=\frac{1+\left(1+x\right)+\left(1+x+x^2\right)+....+1+x+x^2+...+x^{n-2}}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right)=\frac{n-1}{2}.$

Lưu ý: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right)=\frac{n-1}{2}.$

Câu 42. **Đáp án B**

Theo câu 41, ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}\right)=1.$

Lại có $\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(mx+2\right)=m+2$. Để $f\left(x\right)$ có giới hạn tại điểm $x=1$ thì

$\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)\Leftrightarrow m+2=1\Leftrightarrow m=-1.$

Câu 43. **Đáp án A**

Ta có $\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^2-1}=\frac{x+1-k}{x^2-1}$. Mà $\lim\limits_{x\to 1}\left(x+1-k\right)=2-k$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=0$ nên để

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^2-1}\right)$ là hữu hạn thì điều kiện cần là $2-k=0\Leftrightarrow k=2.$

Thật vậy, khi $k=2$, $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}$. Nên $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$

Lưu ý: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^n-1}\right)$ hữu hạn $\Leftrightarrow k=n.$

Câu 44. Đáp án B

Cách 1: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn. Đến ý B ta được giới hạn bằng -1. Vậy đáp án đúng là **B.**

Cách 2: Ta thấy ngay A và C là các giới hạn vô cực, B và D là dạng vô định $\infty-\infty$. Ta xét giới hạn ở ý **B.**

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\dfrac{2x}{-x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}-1}=-1$. Vậy đáp án là **B.**

Bổ sung:

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=+\infty$ + $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)=+\infty$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}=1.$

Câu 45. Đáp án D

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giới hạn khi $a=1$ và $a=0$, ta được

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+5}+x\right)=\dfrac{3}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x+5}=+\infty$. Từ đó suy ra đáp án đúng là **D**

Cách 2: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+5}+ax\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(a-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}\right).$

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty$ nên để $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+5}+ax\right)=+\infty$ thì $a-1<0\Leftrightarrow a<1.$

Câu 46. Đáp án D

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(a-\sqrt{1+\dfrac{b}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\right).$

Do đó nếu $a\neq1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=\infty$. Vậy $a=1$. Khi đó

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-bx-2}{x+\sqrt{x^2+bx+2}}=-\dfrac{b}{2}.$

Vậy: $-\dfrac{b}{2}=3\Leftrightarrow b=-6$. Do đó $a+b=-5$.

Câu 47. Đáp án C

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax+b-\sqrt{x^2-6x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(a-\sqrt{1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\right)+b.$

Do đó nếu $a\neq1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax+b-\sqrt{x^2-6x+2}\right)=\infty$. Vậy $a=1$. Khi đó ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+b-\sqrt{x^2-6x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x-2}{x+\sqrt{x^2-6x+2}}+b=\dfrac{6}{2}+b=b+3.$

Vậy: $-b+3=5\Leftrightarrow b=2$. DO đó số lớn hơn trong hai số a và b là số 2. Chọn đáp án **C.**

Câu 48. Đáp án C

Cả bốn giới hạn đều có dạng $\infty-\infty$, tuy nhiên chỉ có giới hạn ở ý C, hệ số trong hai số hạng là khác nhau.Theo kết quả đã biết thì giới hạn ở ý C chắc chắn là $-\infty$. Do đó đáp án đúng là C, Thật vậy:

$$+\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2+3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3}{-x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2+\frac{3}{x}}\right)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\sqrt{}$$

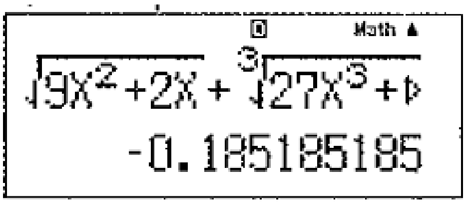
$$+\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+1}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)}=-\frac{1}{4}.$$

$$+\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x+1}+5x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{9+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+5\right)=-\infty.$$

$$+\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+5x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-5x}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3x^2+5x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-5x}{-x\left(\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{5}{x}}\right)}=\frac{5}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{}}{6}$$

Câu 49. Đáp án A

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả



Áp dụng kĩ thuật tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn ta có $0,(185)=\frac{5}{27}$. Vậy $\frac{m}{n}=\frac{5}{27}$.

Từ đó chọn đáp án đúng là **A.**

Cách 2: $\sqrt{9x^2+2x}+\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5}=\left(\sqrt{9x^2+2x}+3x\right)+\left(\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5}-3x\right)$

$$=\frac{2x}{\sqrt{9x^2+2x}-3x}-\frac{4x^2+5}{\sqrt[3]{\left(27x^3+4x^2+5\right)^2}+3x\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5}+9x^2}.$$

Suy ra $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x}+\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5}\right)=\frac{2}{-6}+\frac{4}{9+9+9}=-\frac{5}{27}$.

Từ đó chọn đáp án đúng là **A.**

Câu 50. Đáp án B

Làm tương tự như câu 49, ta có: $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}\right)=\frac{-a}{6}+\frac{b}{27}=\frac{2b-9a}{54}$.

Do đó $2b-9a=14$. Suy ra a là số chẵn. Vậy $a+2b$ là số chẵn. Từ đó loại được đáp án A và C.

Giải hệ $\begin{cases}a+2b=34\\2b-9a=14\end{cases}$ được $a=2;b=16$.

Giải hệ $\begin{cases} a+2b=36 \\ 2b-9a=14 \end{cases}$ được $a=\dfrac{11}{5}$ (loại).

Vậy B là đáp án đúng.