SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH
ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang, gồm 05 câu)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 11 THPT
NĂM HỌC 2022-2023
Môn thi: **TOÁN**
Thời gian làm bài: **150** phút *(không kể thời gian giao đề)*

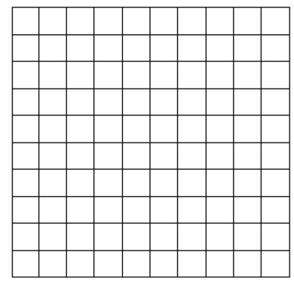
Câu 1. *(6,0 điểm)*

a) Giải phương trình $\dfrac{\sin 2x - 2\cos^2 x - 5\sin x - \cos x + 4}{2\cos x + \sqrt{3}} = 0$.

b) Trên các cạnh *AB, BC, CA* của tam giác *ABC* lần lượt lấy $2, 4, n$ điểm phân biệt ($n > 3$ và các điểm không trùng với các đỉnh của tam giác *ABC*). Biết rằng số tam giác có các đỉnh lấy từ $n+6$ điểm đã cho là 247. Tìm hệ số của x^9 trong khai triển $P(x) = \left(x^2 - 2x\right)^n$.

Câu 2. *(5,0 điểm)*

a) Tính giới hạn $\mathrm{L} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)\sqrt{1-2x} + \sqrt[3]{1+3x} - x - 2}{x^2}$.



b) Bảng hình vuông $(10 \text{x} 10)$ gồm 100 hình vuông đơn vị, mỗi hình có diện tích bằng 1. Hỏi có bao nhiêu hình chữ nhật tạo thành từ các hình vuông đơn vị của bảng. Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật trên, tính xác suất để hình chữ nhật chọn được có diện tích là số chẵn.

Câu 3. *(5,0 điểm)*

a) Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'*. Hãy dựng đường thẳng Δ cắt cả hai đường thẳng *AC'* và *BA'* đồng thời song song với đường thẳng *BD*. Gọi *I, J* lần lượt là giao điểm của Δ với *AC'* và *BA'*. Tính tỷ số $\dfrac{AI}{AC'}$.

b) Cho hình chóp *S.ABC* có $SA = SB = 2a, SC = a, \angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = \alpha$. Gọi *M* là trung điểm *SB*. Tính diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi $mp(P)$ chứa *AM* và song song với *BC*. Tìm $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ để diện tích thiết diện lớn nhất.

Câu 4. *(2,0 điểm)* Cho các số thực a, b, c dương thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\mathrm{P} = \dfrac{a}{a+bc} + \sqrt{3}\left(\dfrac{b}{b+ca} + \dfrac{c}{c+ab}\right)$.

Câu 5. *(2,0 điểm)* Cho dãy số (a_n) xác định bởi $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2 \\ a_{n+1} = 1 + a_1 a_2 \dots a_{n-1} + \left(a_1 a_2 \dots a_{n-1}\right)^2, \forall n \geq 2 \end{cases}$

Tìm $\lim\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}\right)$.

-----------------------------------HẾT-----------------------------------

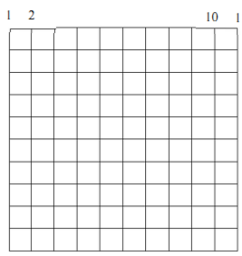
- Thí sinh không được sử dụng tài liệu
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

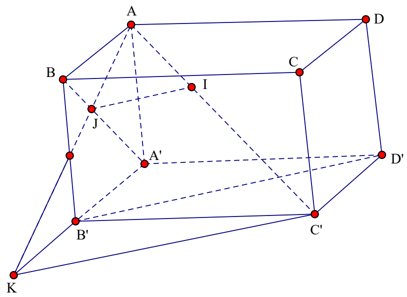
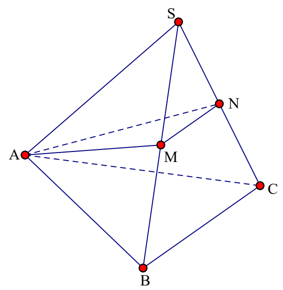
Họ và tên thí sinh: ……………………………………………Số báo danh: …………………

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH CẤP THPT
NĂM HỌC 2022-2023
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN LỚP 11

Lưu ý: ***Mọi cách giải khác đáp án mà đúng đều cho điểm tương ứng***

Câu	***Nội dung***	***Điểm***
Câu 1a **3 điểm**	Điều kiện: $\cos x \neq -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \neq \pm\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}(*)$	**0,5**
	Với đk trên, phương trình đã cho tương đương $\sin 2x-2\cos^2 x-5\sin x-\cos x+4=0 \Leftrightarrow \sin 2x+2\sin^2 x-5\sin x-\cos x+2=0$ $\Leftrightarrow (2\sin x-1)(\cos x+\sin x-2)=0$	**0,5**
	$\Leftrightarrow (2\sin x-1)\left[\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-2\right]=0$	**0,5**
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sin x-1=0\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,(VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$	**1,0**
	Đối chiếu với điều kiện (*) được nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.	**0,5**
Câu 1b **3 điểm**	Số tam giác là $C_{n+6}^3-C_4^3-C_n^3=247$	**1,0**
	$\Leftrightarrow \dfrac{(n+6)(n+5)(n+4)}{6}-\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=251$	**0,5**
	$\Leftrightarrow 18n^2+72n-1386=0 \Leftrightarrow n^2+4n-77=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}n=7\\ n=-11\quad (KTM)\end{array}\right.$	**0,5**
	Khi đó $P(x)=\left(x^2-2x\right)^7$ có số hạng tổng quát là $C_7^k x^{2(7-k)}.(-2x)^k=C_7^k.(-2)^k x^{14-k}$	**0,5**
	Số hạng chứa x^9 xuất hiện khi $14-k=9 \Leftrightarrow k=5$. Vậy hệ số cần tìm là $C_7^5(-2)^5=-672$	**0,5**
Câu 2a **2,5 điểm**	Ta có $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\left(\sqrt{1-2x}-1\right)}{x^2}+\dfrac{\sqrt{1-2x}-(1-x)}{x^2}+\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-(1+x)}{x^2}\right)$	**1,0**
	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1-2x}-1}{x}+\dfrac{\left(\sqrt{1-2x}-(1-x)\right)\left(\sqrt{1-2x}+1-x\right)}{x^2\left(\sqrt{1-2x}+1-x\right)}+\dfrac{(1+3x)-(1+x)^3}{x^2\left(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}(1+x)+(1+x)^2\right)}\right)$	**0,75**
	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-2}{\sqrt{1-2x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}+1-x}-\dfrac{3+x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}(1+x)+(1+x)^2}\right)=-1-\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{5}{2}$	**0,75**
Câu 2b **2,5 điểm**	Mỗi hình chữ nhật tương ứng với việc chọn 2 đường nằm ngang và 2 đường nằm dọc của hình vuông đã cho. Vậy số hình chữ nhật là $C_{11}^2.C_{11}^2=3025$	**1,0**
	Đánh số đường nằm dọc lần lượt từ trái qua phải là $1,2,...,10,11$ (6 đường đánh số lẻ và 5 đường đánh số chẵn). Đánh số đường nằm ngang lần lượt từ trên xuống dưới là $1,2,...,10,11$ (6 đường đánh số lẻ và 5 đường đánh số chẵn). Trước hết đếm số hình chữ nhật có diện tích là số lẻ 	**0,5**

	Để có một hình chữ nhật có diện tích là số lẻ thì mỗi kích thước của hình chữ nhật đó phải là số lẻ.	
	–Xét kích thước thứ nhất: Để tạo ra kích thước là số lẻ, ta chọn lần lượt 1 đường đánh số lẻ (6 đường) ghép với 1 đường đánh số chẵn (5 đường). Như thế sẽ có $6.5=30$ (cách) – Xét kích thước thứ hai: Để tạo ra kích thước là số lẻ, ta chọn lần lượt 1 đường đánh số lẻ (6 đường) ghép với 1 đường đánh số chẵn (5 đường). Như thế sẽ có $6.5=30$ (cách) Do đó số hình chữ nhật như thế là: $30.30=900$ (hình)	**0,5**
	Vậy số hình chữ nhật có diện tích bằng chẵn là $3025-900=2125$ (hình). Xác suất cần tìm là $\dfrac{2125}{3025}=\dfrac{85}{121}$	**0,5**
Câu 3a **2,5 điểm**	Giả sử đã xác định được đường thẳng Δ cắt *AC'* và *BA'* lần lượt tại *I và J*. Xét phép chiếu song song lên *mp (ABB'A')* theo phương chiếu *D'B'*. Khi đó, hình chiếu của ba điểm thẳng hàng A, I, C' lần lượt là ba điểm thẳng hàng A, J, K (*K* là điểm đối xứng với *A'* qua *B'*). Do *J* thuộc *BA'* nên *J* chính là giao điểm của *AK* và *BA'*. Từ đó suy ra cách dựng:  	**0,75**
	Dựng *K* là hình chiếu của *C'* theo phương chiếu *D'B'* lên *mp (ABB'A')* Lấy giao điểm *J* của *AK* và *BA'* Qua *J* dựng đường thẳng Δ song song *C'K* ta được đường thẳng cần tìm	**0,75**
	Ta thấy $A'B'=B'K \Rightarrow A'K=2AB$. Do $AB//A'K$ nên $\dfrac{AJ}{JK}=\dfrac{AB}{A'K}=\dfrac{1}{2}$	**0,5**
	Lại có $IJ//C'K \Rightarrow \dfrac{AI}{IC'}=\dfrac{AJ}{JK}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{AI}{AC'}=\dfrac{1}{3}$	**0,5**
	Lưu ý: *Nếu học sinh dùng phương pháp vecto để tìm ra vị trí các điểm I, J và tính tỷ số* $\dfrac{AI}{AC'}$ *thì vẫn cho điểm tối đa.*	
Câu 3b **2,5 điểm**	Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm *SB, SC* thì thiết diện là tam giác *AMN*. Ta có $S_{AMN}=\dfrac{1}{2}\sqrt{AM^2.AN^2-\left(\overline{AM}.\overline{AN}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{AM^2.AN^2-\left(\overline{AM}.\overline{AN}\right)^2}$  	**0,5**
	Mặt khác $AM^2=SM^2+SA^2-2SM.SA.\cos\alpha=a^2\left(5-4\cos\alpha\right)$ $AN^2=SN^2+SA^2-2SN.SA.\cos\alpha=\dfrac{a^2}{4}\left(17-8\cos\alpha\right)$	**0,5**
	$\overline{AM}.\overline{AN}=\left(\overline{SM}-\overline{SA}\right)\left(\overline{SN}-\overline{SA}\right)=\overline{SM}.\overline{SN}-\overline{SA}.\overline{SN}-\overline{SA}.\overline{SM}+\overline{SA}^2=\dfrac{a^2}{2}\left(8-5\cos\alpha\right)$	**0,5**
	Khi đó $S_{AMN}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^4}{4}\left(5-4\cos a\right)\left(17-8\cos\alpha\right)-\dfrac{a^4}{4}\left(8-5\cos\alpha\right)^2}=\dfrac{a^2}{4}\sqrt{7\cos^2\alpha-28\cos\alpha+21}$	**0,5**

	Đặt $t=\cos\alpha\left(0\le t<1\right)$. Lập bảng biến thiên của hàm số $f\left(t\right)=7t^2-28t+21$ trên $\left[0;1\right)$ ta có GTLN của $f\left(t\right)$ bằng 21, đạt được khi $t=0$. Vậy S_{AMN} đạt GTLN bằng $\dfrac{\sqrt{21}a^2}{4}$ khi $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$	**0,5**
Câu 4 **2,0 điểm**	Ta có $ab+bc+ca=abc\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{bc}{a}}+\sqrt{\dfrac{ca}{b}}+\sqrt{\dfrac{ab}{c}}=\sqrt{\dfrac{bc}{a}}.\sqrt{\dfrac{ca}{b}}.\sqrt{\dfrac{ab}{c}}$ Do đó tồn tại tam giác ABC nhọn thỏa mãn $\sqrt{\dfrac{bc}{a}}=\tan A,\sqrt{\dfrac{ca}{b}}=\tan B,\sqrt{\dfrac{ab}{c}}=\tan C$	**0,5**
	Khi đó $P=\dfrac{1}{1+\dfrac{bc}{a}}+\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{ca}{b}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{ab}{c}}\right)=\dfrac{1}{1+\tan^2A}+\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{1+\tan^2B}+\dfrac{1}{1+\tan^2C}\right)$ $=\cos^2A+\sqrt{3}\left(\cos^2B+\cos^2C\right)=\dfrac{1}{2}\left[\cos 2A+\sqrt{3}\left(\cos 2B+\cos 2C\right)\right]+\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}$	**0,5**
	Xét $Q=\cos 2A+\sqrt{3}\left(\cos 2B+\cos 2C\right)=2\cos^2A-1+2\sqrt{3}\cos\left(B+C\right)\cos\left(B-C\right)$ $=2\cos^2A-1-2\sqrt{3}\cos A\cos\left(B-C\right)=2\left[\cos A-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(B-C\right)\right]^2-\dfrac{3}{2}\cos^2\left(B-C\right)-1$ $\ge-\dfrac{3}{2}\cos^2\left(B-C\right)-1\ge-\dfrac{5}{2}$	**0,5**
	Suy ra $P\ge\dfrac{4\sqrt{3}-3}{4}$ Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}A=\dfrac{\pi}{6}\\B=C=\dfrac{5\pi}{12}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=7+2\sqrt{3}\\b=c=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\end{cases}$	**0,5**
Câu 5 **2,0 điểm**	Ta có $a_{n+1}=1+a_1a_2\ldots a_{n-1}\left(1+a_1a_2\ldots a_{n-1}\right)$ nên bằng quy nạp, ta chứng minh được $a_{n+1}=1+a_1a_2\ldots a_n,\forall n\ge1$. Do đó $a_{n+1}+a_n=1+a_n+a_1a_2\ldots a_n=1+a_n^2$ với mọi $n\ge2$. Từ đó ta có biến đổi $a_{n+1}-1=a_n\left(a_n-1\right)\Leftrightarrow\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_{n+1}-1},\forall n\ge2$.	**0,75**
	Đặt $b_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n},\ \forall n\ge1$. Suy ra $b_n=1+\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{a_k-1}-\dfrac{1}{a_{k+1}-1}\right)=1+\dfrac{1}{a_2-1}-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=2-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$.	**0,75**
	Dễ thấy $a_n>1,\forall n\ge2$. Theo trên $a_{n+1}+a_n=1+a_n^2\Rightarrow a_{n+1}-a_n=\left(a_n-1\right)^2>0$, suy ra dãy $\left(a_n\right)$ tăng. Giả sử dãy $\left(a_n\right)$ bị chặn trên thì nó sẽ hội tụ về $L\left(L>1\right)$. Ta có $a_{n+1}\ge1+a_{n-1}+a_{n-1}^2$ với mọi $n\ge2$. Chuyển qua giới hạn, ta có $L\ge1+L+L^2$ hay $1+L^2\le0$, vô lý. Suy ra dãy $\left(a_n\right)$ không bị chặn trên. Do đó $\lim a_n=+\infty$. Do đó $\lim b_n=2$	**0,5**