

50 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VD - VDC
SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ GIẢI BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

ĐỀ BÀI

DẠNG TOÁN 1: HÌNH CHÓP CÓ CẠNH BÊN HOẶC MỘT MẶT VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa mặt bên (SBC) với mặt phẳng đáy bằng 45° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SB . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MD và CN .

- A. $\frac{3}{4}a$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. C. $2a$. D. $\frac{2a\sqrt{21}}{21}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $BC = 2a$. Gọi D là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{SB} = 2\overrightarrow{SD}$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc đoạn BC sao cho $BC = 4BH$. Tính góc giữa hai đường thẳng AD và SC biết SA tạo với mặt đáy một góc 60° .

- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 30° .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $5a$, cạnh bên $SA = 10a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) .

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB đều. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm I của AB . Gọi H, K lần lượt là trung điểm của DC và SB , biết $SH = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. Tính khoảng cách giữa HK và SC .

- A. $\frac{\sqrt{3}}{8}$. B. $\frac{\sqrt{15}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{15}}{8}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $AB = a, AD = 2a, SA = 3a$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD và P là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN) . Tính thể tích khối chóp $S.AMPN$.

- A. $\frac{1869a^3}{140}$. B. $\frac{5589a^3}{1820}$. C. $\frac{181a^3}{120}$. D. $\frac{1863a^3}{1820}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2 , SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = 2$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC) . Thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

- A. $\frac{4\sqrt{3} + 4}{3}$. B. $\frac{8\sqrt{3} - 8}{3}$. C. $2\sqrt{3} - 2$. D. $\frac{4\sqrt{3} - 4}{3}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của SB , CD . Tính cosin của góc giữa MN và (SAC) .

- A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{\sqrt{55}}{10}$. C. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$. D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\triangle ABC$ vuông tại B , $AB = 1, BC = \sqrt{3}$, $\triangle SAC$ đều, mặt phẳng (SAC) vuông với đáy. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Giá trị của $\cos \alpha$ bằng

- A. $\frac{2\sqrt{65}}{65}$ B. $\frac{\sqrt{65}}{20}$ C. $\frac{\sqrt{65}}{10}$ D. $\frac{\sqrt{65}}{65}$

Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng 2, gọi điểm M là tâm của mặt bên $ABB'A'$, các điểm N, P, Q, K lần lượt là trung điểm của các cạnh $AC, DD', D'C', B'C'$. Tính cosine góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và (AQK) .

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{102}}{34}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . SA vuông góc với mặt phẳng đáy. H và K là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh BC và CD sao cho $BH = \frac{3a}{4}$, $KD = x$ ($0 < x < a$). Tìm giá trị của x để hai mặt phẳng (SAH) và (SAK) tạo với nhau một góc bằng 45° .

- A. $x = \frac{a}{7}$. B. $x = \frac{a}{5}$. C. $x = \frac{2a}{7}$. D. $x = \frac{2a}{5}$.

Câu 11: Trong không gian, cho tam giác OAB cân ở O có $OA = OB = 5$; $\widehat{AOB} = \frac{4}{3}$. Điểm C di động trên tia Oz vuông góc (OAB) , gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Khi C di động trên tia Oz thì H luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng:

- A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a , góc $\widehat{BCD} = 120^\circ$. $SA \perp (ABCD)$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Gọi M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SOD . Hãy tính khoảng cách h từ M tới mặt phẳng (SBC) theo a .

- A. $h = \frac{a\sqrt{57}}{19}$. B. $h = \frac{a\sqrt{57}}{38}$. C. $h = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$. D. $h = \frac{2\sqrt{5}a}{19}$.

Câu 13: Cho tam giác ABC vuông tại A và đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại điểm A . Các điểm M, N thay đổi trên đường thẳng Δ sao cho $(MBC) \perp (NBC)$. Biết $AB = b$, $AC = c$. Giá trị nhỏ nhất của thể tích tứ diện $MNBC$ theo b và c bằng

- A. $\frac{3b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$. B. $\frac{b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$. C. $\frac{bc}{3\sqrt{b^2+c^2}}$. D. $\frac{b^2c^2}{3\sqrt{b^2+c^2}}$.

DẠNG TOÁN 2: HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP DẠNG KHÁC.

Câu 14: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC . Biết $MN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, tính sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

- A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AD ; H là giao điểm của CN và DM . Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a .

- A. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. B. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. C. $\frac{2a\sqrt{13}}{19}$. D. $\frac{a\sqrt{7}}{19}$.

Câu 16: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi E, M lần lượt là trung điểm các cạnh BC, SA , α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD) . Tính $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 17: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h . Gọi I là trung điểm cạnh bên SC . Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (AIB) .

- A. $\frac{2ah}{\sqrt{4h^2 + 9a^2}}$. B. $\frac{4ah}{\sqrt{4h^2 + 9a^2}}$. C. $\frac{ah}{\sqrt{4h^2 + 9a^2}}$. D. $\frac{2ah}{\sqrt{2h^2 + 3a^2}}$.

Câu 18: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tâm O . Gọi E là điểm đối xứng với D qua trung điểm của SA , M là trung điểm của AE , N là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC .

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a}{8}$.

Câu 19: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB' . Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN) .

- A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$. B. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. D. $\frac{4\sqrt{2}}{13}$.

Câu 20: Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A và $AB = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. $SA = SB = SC$. Gọi α là góc của hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) sao cho $\cos \alpha = \frac{5}{7}$. Khi đó thể tích của khối chóp $SABC$ là

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. B. $2a^3$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $\frac{2a^3}{\sqrt{5}}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = 2a$, tam giác SAB và tam giác SCB lần lượt vuông tại A, C . Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng $2a$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) bằng:

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 22: Cho hình chóp đều $SABCD$ có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng $3\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc SB, SD sao cho $SB = 3SM, SD = 3DN$. Khoảng cách giữa AM và CN bằng

A. $\frac{40}{\sqrt{857}}$.

B. $\frac{72}{\sqrt{857}}$.

C. $\frac{24}{\sqrt{153}}$.

D. $\frac{40}{\sqrt{257}}$.

Câu 23: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = 2a$, $AB = a$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Tính khoảng cách d từ M tới mặt phẳng (SAB) .

A. $d = \frac{a\sqrt{165}}{30}$.

B. $d = \frac{a\sqrt{15}}{3}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{65}}{15}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{65}}{10}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Tính cosin góc giữa MN và (SAC) , biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

B. $\frac{3\sqrt{310}}{20}$.

C. $\frac{\sqrt{310}}{20}$.

D. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Câu 25: Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 3a$, $AC = 4a$. Các mặt bên (SAB) , (SAC) , (SBC) cùng tạo với đáy (ABC) một góc 45° . Biết chân đường vuông góc hạ từ S xuống mặt phẳng (ABC) nằm ở miền trong tam giác ABC . Gọi góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) là α . Tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{10}$.

B. $\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

C. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

D. $\cos \alpha = \frac{1}{15}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

A. $\frac{a\sqrt{42}}{8}$.

B. $\frac{a\sqrt{42}}{12}$.

C. $\frac{a\sqrt{42}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{42}}{24}$.

DẠNG TOÁN 3: HÌNH LĂNG TRỤ TAM GIÁC.

Câu 27: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$, góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC' . Cosin của góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{13}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 28: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và các mặt bên đều là các hình vuông cạnh a . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và I là trung điểm của đoạn thẳng CC' . Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và GI bằng

A. $\frac{a\sqrt{11}}{22}$. B. $\frac{3a\sqrt{11}}{7}$. C. $\frac{a\sqrt{11}}{12}$. D. $\frac{3a\sqrt{11}}{22}$.

Câu 29: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$?

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 30: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, với $AB = AC = a$ và góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh bên $AA' = a$. Gọi M là trung điểm của CC' . Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'M)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{11}}{11}$. B. $\frac{\sqrt{33}}{11}$. C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. D. $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

Câu 31: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = AC = a$ và có cạnh bên bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BB', CC' . Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'MN)$

A. a . B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{3a}{2}$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 32: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C , $AB = 2a$, $AA' = a$, góc giữa BC' và $(ABB'A')$ bằng 60° . Gọi N là trung điểm AA' và M là trung điểm BB' . Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(BC'N)$.

A. $\frac{2a\sqrt{74}}{37}$. B. $\frac{a\sqrt{74}}{37}$. C. $\frac{2a\sqrt{37}}{37}$. D. $\frac{a\sqrt{37}}{37}$.

Câu 33: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, góc BAC bằng 120° , $AA' = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm $B'C'$ và CC' . Khoảng cách giữa 2 đường thẳng MN và AH là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 34: Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a . $AA_1 = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi D là trung điểm của BB_1 , M di động trên cạnh AA_1 . Giá trị lớn nhất của diện tích ΔMC_1D là

A. $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$. B. $\frac{a^2\sqrt{15}}{6}$. C. $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$. D. $\frac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

Câu 35: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a , M là điểm di chuyển trên đường thẳng $A'C'$; Tính khoảng cách lớn nhất giữa AM và BC'

A. $\frac{a\sqrt{34}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{17}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Câu 36: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. C. $a\sqrt{7}$. D. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 37: Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = 1, AC = 2$. Gọi φ là góc tạo bởi đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'BC)$ có số đo lớn nhất. Biết $\sin \varphi = \frac{p}{q}$ (với p, q nguyên tố cùng nhau). Giá trị tổng $p + q$ là

- A. 11. B. 7. C. 5. D. 9

Câu 38: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a . Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Gọi M, N là trung điểm của BC và CC' . Tính khoảng cách giữa $A'M$ và AN .

- A. $\frac{6a\sqrt{97}}{97}$. B. $\frac{3a\sqrt{97}}{97}$. C. $\frac{6a\sqrt{65}}{65}$. D. $\frac{3a\sqrt{65}}{65}$.

DẠNG TOÁN 4: HÌNH HỘP.

Câu 39: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . M là một điểm thỏa mãn $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng $(A'MB)$ và (ABC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{30}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{30}}{8}$. C. $\frac{\sqrt{30}}{16}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 40: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, A'C', BB'$. Tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.

- A. $\frac{5}{48}V$. B. $\frac{1}{8}V$. C. $\frac{7}{48}V$. D. $\frac{1}{6}V$.

Câu 41: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, có đáy là hình thoi cạnh $2a$, tâm O , $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và $AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm O . Gọi M là trung điểm CD . Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'M$ và $B'D'$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. B. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. C. $\frac{3\sqrt{21}}{7}$. D. $\frac{4\sqrt{21}}{7}$.

Câu 42: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có $AB = a, AD = a\sqrt{2}$, góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $A'B$ và K là hình chiếu vuông góc của A trên $A'D$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và $(ABB'A')$.

- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 30° .

Câu 43: Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A_1 lên $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD . Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) .

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 44: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi K là trung điểm của DD' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

A. $\frac{a}{3}$.

B. $\frac{a}{4}$.

C. $\frac{a}{5}$.

D. $\frac{a}{2}$.

Câu 45: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3a$, $AD = AA' = a$. Lấy điểm M thuộc đoạn AB' , điểm N thuộc đoạn $A'C'$ sao cho $AM = A'N = x$, $(0 \leq x \leq \sqrt{10}a)$. Tìm x theo a để đoạn MN nhỏ nhất.

A. 0.

B. $\frac{\sqrt{30}a}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{10}a}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{10}a}{3}$.

Câu 46: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 3a$. Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của BC , $C'D'$ và DD' . Tính khoảng cách từ A đến mp(MNP).

A. $\frac{15}{22}a$.

B. $\frac{9}{11}a$.

C. $\frac{3}{4}a$.

D. $\frac{15}{11}a$.

Câu 47: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân, $AA' = 2a$, $AB = AC = a$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$, I là tâm của hình chữ nhật $ABB'A'$. Thể tích của khối $AIGCG'$.

A. $\frac{a^3}{2}$.

B. $\frac{a^3}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{5}}{30}$.

Câu 48: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a . Mặt phẳng $(ABB'A')$ vuông góc với đáy, tam giác $A'AB$ vuông tại A' , góc giữa BA' và đáy bằng 60° . Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng IA' và DB' .

A. $\frac{a}{2\sqrt{55}}$.

B. $\frac{a}{\sqrt{55}}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{55}}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 50: Hai quả bóng hình cầu có kích thước khác nhau được đặt ở hai góc của một căn nhà hình hộp chữ nhật sao cho mỗi quả bóng đều tiếp xúc với hai bức tường và nền của nhà đó. Biết rằng trên bề mặt của hai quả bóng đều tồn tại một điểm có khoảng cách đến hai bức tường và nền nhà mà nó tiếp xúc bằng 1; 2; 4. Tổng độ dài đường kính của hai quả bóng đó là?

A. 7.

B. 12.

C. 14.

D. 16.

----- HẾT -----

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.C	3.D	4.D	5.D	6.B	7.B	8.D	9.C	10.A
11.A	12.A	13.D	14.B	15.A	16.A	17.A	18.A	19.C	20.A
21.B	22.A	23.A	24.C	25.A	26.A	27.D	28.D	29.D	30.D
31.B	32.A	33.D	34.A	35.C	36.D	37.D	38.B	39.A	40.A
41.B	42.B	43.B	44.A	45.C	46.D	47.B	48.C	49.B	50.C

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa mặt bên (SBC) với mặt phẳng đáy bằng 45° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SB . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MD và CN .

A. $\frac{3}{4}a$.

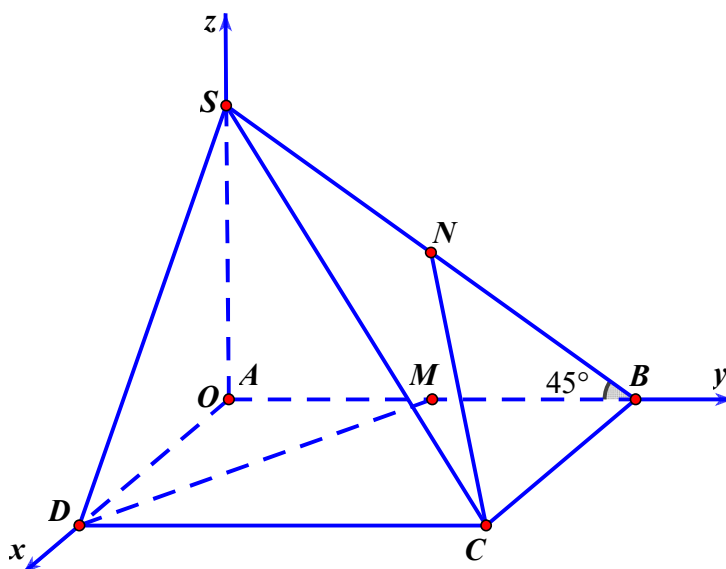
B. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

C. $2a$.

D. $\frac{2a\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi φ là giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

Ta có $BC = (SBC) \cap (ABCD)$ và $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Suy ra $\varphi = \widehat{ABS} = 45^\circ$.

Do $\triangle SAB$ vuông cân tại A nên $SA = a$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (như hình vẽ) sao cho $A \equiv O(0;0;0), D(a;0;0), B(0;a;0), S(0;0;a)$.

Khi đó $C(a;a;0), N\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right), M\left(0;\frac{a}{2};0\right)$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \overrightarrow{MD} = \left(a; \frac{-a}{2}; 0\right) \\ \overrightarrow{NC} = \left(a; \frac{a}{2}; \frac{-a}{2}\right) \\ \overrightarrow{CD} = (0; -a; 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [\overrightarrow{MD}; \overrightarrow{NC}] = \left(\frac{a^2}{4}; \frac{a^2}{2}; a^2\right) \\ \left| \overrightarrow{CD} \cdot [\overrightarrow{MD}; \overrightarrow{NC}] \right| = \frac{a^3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(MD, NC) = \frac{|\overrightarrow{CD} \cdot [\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{NC}]|}{\|[\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{NC}]\|} = \frac{\left| \frac{a^3}{2} \right|}{\frac{a^2 \sqrt{21}}{4}} = \frac{2a\sqrt{21}}{21}.$$

Cách khác:

Dựng hình bình hành $DMEC$.

Ta có $MD \parallel (CNE)$ nên $d(MD, CN) = d(MD, (CNE)) = d(M, (CNE))$.

Gọi I là hình chiếu của M lên CE và H là hình chiếu của M lên NI .

Suy ra $MH \perp (CNE)$ hay $d(MD, CN) = d(M, (CNE)) = MH$.

Gọi φ là giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

Ta có $BC = (SBC) \cap (ABCD)$ và $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Suy ra $\varphi = \widehat{ABS} = 45^\circ$.

Do $\triangle SAB$ vuông cân tại A nên $SA = a$.

Ta có $\sin \widehat{MEC} = \frac{MI}{ME} = \frac{BC}{CE} \Rightarrow MI = \frac{BC \cdot ME}{CE} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

$MH = \frac{MI \cdot MN}{\sqrt{MI^2 + MN^2}} = \frac{2a\sqrt{21}}{21}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $BC = 2a$. Gọi D là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{SB} = 2\overrightarrow{SD}$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc đoạn BC sao cho $BC = 4BH$. Tính góc giữa hai đường thẳng AD và SC biết SA tạo với mặt đáy một góc 60° .

A. 60° .

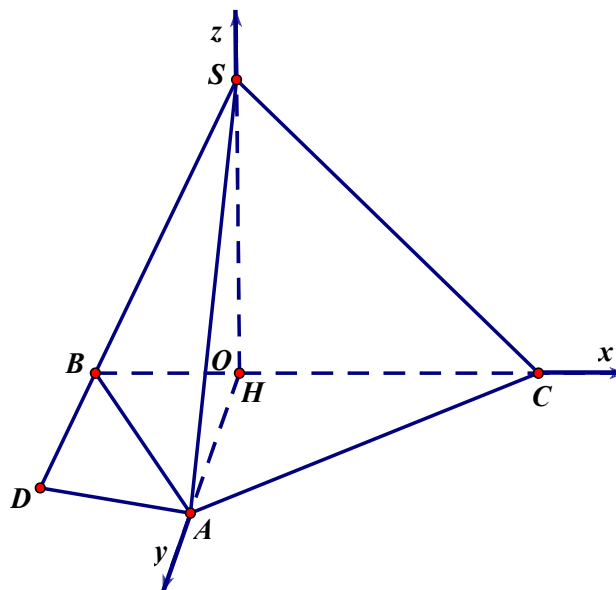
B. 45° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có } AH^2 = BH^2 + BA^2 - 2.BH.BA.\cos 60^\circ = \frac{a^2}{4} + a^2 - 2.\frac{a}{2}.a.\frac{1}{2} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\tan 60^\circ = \frac{SH}{AH} \Rightarrow SH = AH.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}.$$

$$AC = BC.\sin 60^\circ = 2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}, \quad HC = \frac{3}{4}BC = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Ta có } AH^2 + HC^2 = \frac{9a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = 3a^2 = AC^2 \text{ nên tam giác } AHC \text{ vuông tại } H, \text{ tức là } AH \perp HC.$$

Chọn $a = 1$ và chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (như hình vẽ) sao cho $O \equiv H(0;0;0)$, $C\left(\frac{3}{2};0;0\right)$,

$$A\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right), \quad S\left(0;0;\frac{3}{2}\right).$$

$$\text{Suy ra } B\left(-\frac{1}{2};0;0\right). \quad \overrightarrow{SB} = \left(-\frac{1}{2};0;-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{SD} = \left(-\frac{3}{4};0;-\frac{9}{4}\right) \Rightarrow D\left(-\frac{3}{4};0;-\frac{3}{4}\right).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{DA} = \left(\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{4}\right) \Rightarrow \vec{u} = (\sqrt{3};2;\sqrt{3}) \text{ là một vectơ chỉ phương của } AD.$$

$$\overrightarrow{SC} = \left(\frac{3}{2};0;-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \vec{v} = (1;0;-1) \text{ là một vectơ chỉ phương của } SC.$$

$$\text{Ta có } \vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow AD \perp SC.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AD và SC bằng 90° .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $5a$, cạnh bên $SA = 10a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) .

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}.$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}.$

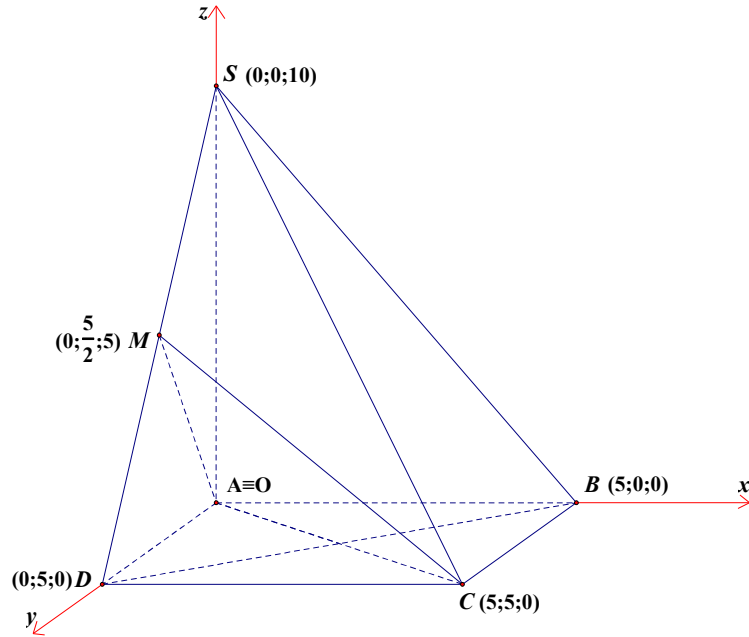
D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

Lời giải

Chọn D

Chuẩn hóa với $a = 1$.

Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sau:



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

$$A(0;0;0); D(0;5;0); B(5;0;0); C(5;5;0); S(0;0;10); M\left(0; \frac{5}{2}; 5\right).$$

$$\overrightarrow{BC} = (0;5;0), \overrightarrow{BS} = (-5;0;10).$$

$$[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BS}] = (50;0;25) \Rightarrow \text{một vectơ pháp tuyến của } (SBC) \text{ là } \vec{n}_1 = (2;0;1).$$

$$\overrightarrow{AC} = (5;5;0), \overrightarrow{AM} = \left(0; \frac{5}{2}; 5\right).$$

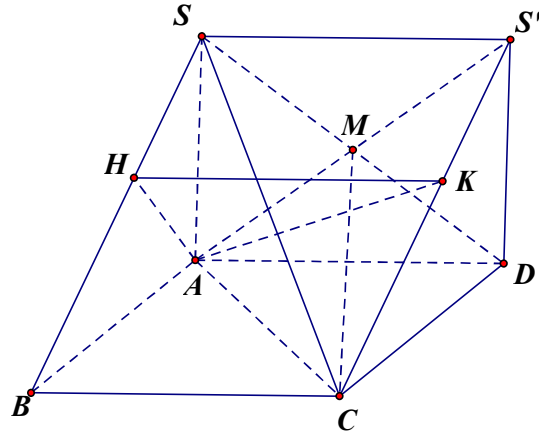
$$[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}] = \left(25; -25; \frac{25}{2}\right) \Rightarrow \text{một vectơ pháp tuyến của } (AMC) \text{ là } \vec{n}_2 = (2;-2;1).$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) .

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{5}{3\sqrt{5}}.$$

$$\text{Suy ra: } \tan \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^2} - 1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Cách khác:



Dựng hình bình hành $SADS'$. Khi đó $(SBC) \cap (AMC) = S'C$.

Dựng $AH \perp SB$ tại H và $HK \parallel BC$ ($K \in S'C$).

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) .

Khi đó ta có $(AHK) \perp S'C \Rightarrow \varphi = \widehat{HKA}$.

$$\text{Ta có } AH = \frac{AB \cdot AS}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = 2\sqrt{5}a.$$

$$\text{Do đó } \tan \varphi = \frac{AH}{HK} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB đều. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm I của AB . Gọi H, K lần lượt là trung điểm của

DC và SB , biết $SH = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. Tính khoảng cách giữa HK và SC .

A. $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

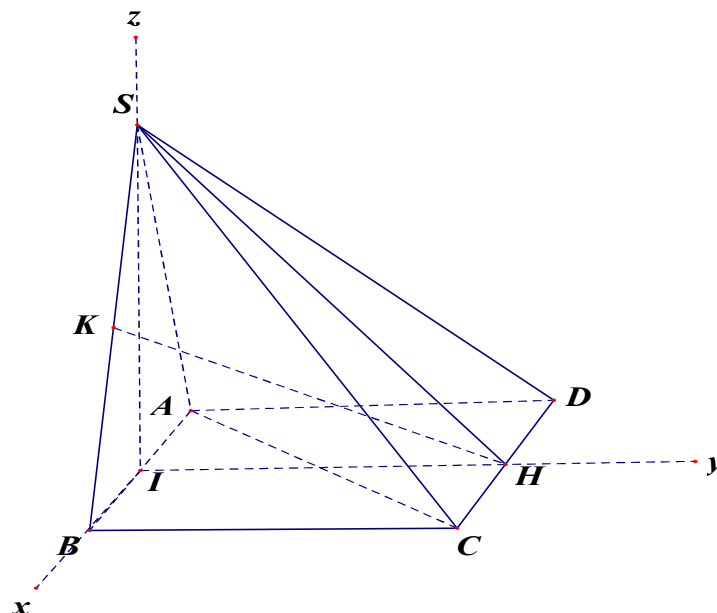
B. $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{15}}{8}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $AB = x$

$$\text{Ta có } SH^2 = SI^2 + IH^2 \Rightarrow \left(\frac{a\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 + x^2 \Rightarrow x = AB = a$$

Chuẩn hóa $a = 1$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho

$$O \equiv I(0;0;0), B\left(\frac{1}{2};0;0\right), C\left(\frac{1}{2};1;0\right), S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow H(0;1;0), K\left(\frac{1}{4};0;\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\overrightarrow{HK} = \left(\frac{1}{4}; -1; \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{SC} = \left(\frac{1}{2}; 1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{HS} = \left(0; -1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$[\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{SC}] = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{3}{4}\right), [\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{SC}] \cdot \overrightarrow{HS} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (-1) + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$d(HK, SC) = \frac{|[\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{SC}] \cdot \overrightarrow{HS}|}{|[\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{SC}]|} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $AB = a, AD = 2a, SA = 3a$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD và P là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN) . Tính thể tích khối chóp $S.AMPN$.

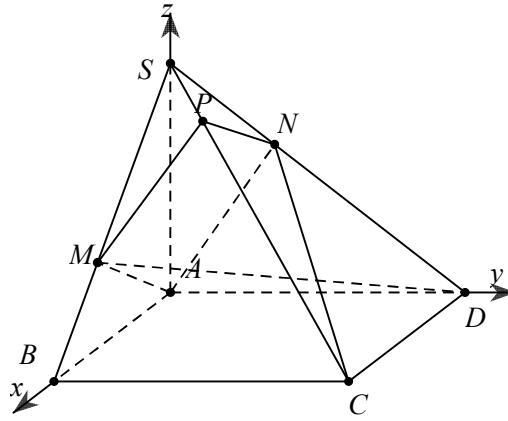
A. $\frac{1869a^3}{140}$.

B. $\frac{5589a^3}{1820}$.

C. $\frac{181a^3}{120}$.

D. $\frac{1863a^3}{1820}$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Ta có tọa độ các điểm $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;2a;0), C(a;2a;0), S(0;0;3a)$.

Suy ra $\overrightarrow{SB} = (a;0;-3a), \overrightarrow{SD} = (0;2a;-3a), \overrightarrow{SC} = (a;2a;-3a)$.

$$\text{Phương trình } SB: \begin{cases} x = a + t \\ y = 0 \\ z = -3t \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(a+t;0;-3t) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (a+t;0;-3t).$$

$$\text{Mà } AM \perp SB \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 \Leftrightarrow (a+t) + 9t = 0 \Rightarrow t = \frac{-a}{10} \Rightarrow M\left(\frac{9a}{10}; 0; \frac{3a}{10}\right).$$

$$\text{Tương tự vậy ta tìm được } N\left(0; \frac{18a}{13}; \frac{12a}{13}\right).$$

$$\text{Suy ra } \vec{n}_1 = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = -\frac{27a^2}{65}(1;2;-3).$$

Do đó ta có phương trình của $(AMN): x + 2y - 3z = 0$.

$$\text{Phương trình } SC: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3a - 3t \end{cases} \quad \text{nên tọa độ điểm } P \text{ là nghiệm của hệ}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3a - 3t \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9a}{14}, y = \frac{9a}{7}, z = \frac{15a}{14} \Rightarrow P\left(\frac{9a}{14}; \frac{9a}{7}; \frac{15a}{14}\right).$$

$$\text{Ta có: } [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}] = -\frac{27a^2}{70}(1;2;-3), [\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}] = \frac{27a^2}{91}(1;2;-3)$$

$$\text{Suy ra } S_{AMPN} = \frac{1}{2} \left(|[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}]| + |[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}]| \right) = \frac{621\sqrt{14} \cdot a^2}{1820} \text{ và } d(S, (AMN)) = \frac{9a}{\sqrt{14}}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.AMPN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9a}{\sqrt{14}} \cdot \frac{621\sqrt{14} \cdot a^2}{1820} = \frac{1863 \cdot a^3}{1820}.$$

Cách khác: (Công thức tính nhanh – trắc nghiệm)

$$a = \frac{SA}{SA} = 1; b = \frac{SB}{SM} = \frac{SB^2}{SA^2} = \frac{10}{9}; c = \frac{SC}{SP}; d = \frac{SD}{SN} = \frac{SD^2}{SA^2} = \frac{13}{9}.$$

Ta có $a + c = b + d \Rightarrow c = \frac{14}{9}$.

$$\frac{V_{S.AMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4a.b.c.d} = \frac{1863}{3640} \Rightarrow V_{S.AMPN} = \frac{1863}{3640} V_{S.ABCD} = \frac{1863}{3640} \cdot \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1863}{1820} a^3.$$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, SA vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$) và $SA=2$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC). Thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\frac{4\sqrt{3}+4}{3}$.

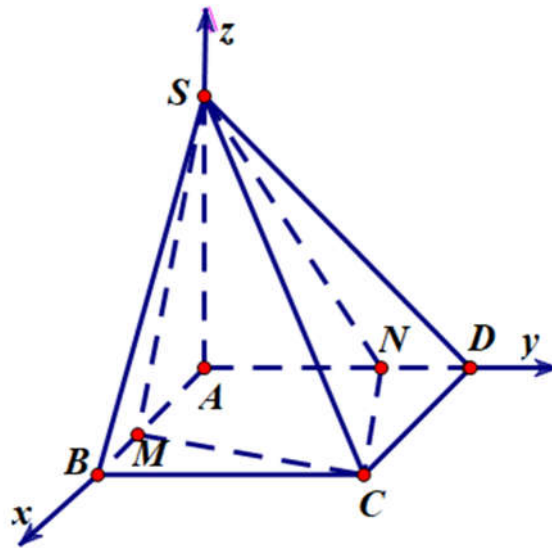
B. $\frac{8\sqrt{3}-8}{3}$.

C. $2\sqrt{3}-2$.

D. $\frac{4\sqrt{3}-4}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ trên sao cho $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;2;0)$, $S(0;0;2)$, suy ra $C(2;2;0)$.

Đặt $AM = m$, $AN = n$, $m, n \in [0;2]$, suy ra $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$.

$$\overrightarrow{SM} = (m; 0; -2), \overrightarrow{SC} = (2; 2; -2), \overrightarrow{SN} = (0; n; -2).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_{(SMC)}} = [\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC}] = (4; 2m-4; 2m), \overrightarrow{n_{(SNC)}} = [\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{SC}] = (4-2n; -4; -2n).$$

$$\text{Do } (SMC) \perp (SNC) \text{ nên } \overrightarrow{n_{(SMC)}} \cdot \overrightarrow{n_{(SNC)}} = 0 \Leftrightarrow 4(4-2n) - 4(2m-4) - 4mn = 0$$

$$\Leftrightarrow mn + 2(m+n) = 8.$$

$$\text{Mặt khác } mn + 2(m+n) \leq \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 + 2(m+n) \text{ nên ta có } \frac{(m+n)^2}{4} + 2(m+n) - 8 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+n \geq 4\sqrt{3}-4 \\ m+n \leq -4\sqrt{3}-4 \end{cases}. \text{ Do } m, n \geq 0 \text{ nên } m+n \geq 4\sqrt{3}-4.$$

$$S_{AMCN} = S_{ABCD} - S_{BMC} - S_{DNC} = 4 - (2-m) - (2-n) = m+n \geq 4\sqrt{3}-4.$$

$$V_{S.AMCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{AMCN} = \frac{2}{3} (m+n) \geq \frac{8\sqrt{3}-8}{3}.$$

Vậy thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMCN$ là $\frac{8\sqrt{3}-8}{3}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB=BC=a$, $AD=2a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của SB , CD . Tính cosin của góc giữa MN và (SAC) .

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

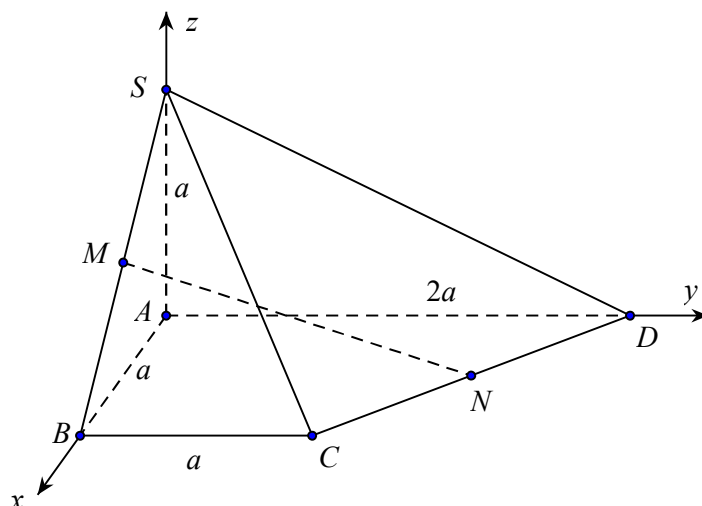
B. $\frac{\sqrt{55}}{10}$.

C. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ, với $O \equiv A$.

Tọa độ các đỉnh của hình chóp là: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;2a;0)$, $S(0;0;a)$.

$$\Rightarrow M\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right), N\left(\frac{a}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right).$$

Ta có: $-\frac{1}{a}\overrightarrow{SA} = (0;0;1) = \vec{u}$; $\frac{1}{a}\overrightarrow{SC} = (1;1;-1) = \vec{v}$.

Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) là $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (-1;1;0)$.

Lại có: $\frac{2}{a}\overrightarrow{MN} = (0;3;-1) = \vec{w}$.

Gọi α là góc giữa MN và (SAC) ta có: $\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{w}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{3}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{55}}{10}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có ΔABC vuông tại B , $AB=1, BC=\sqrt{3}$, ΔSAC đều, mặt phẳng (SAC) vuông với đáy. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Giá trị của $\cos \alpha$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{65}}{65}$

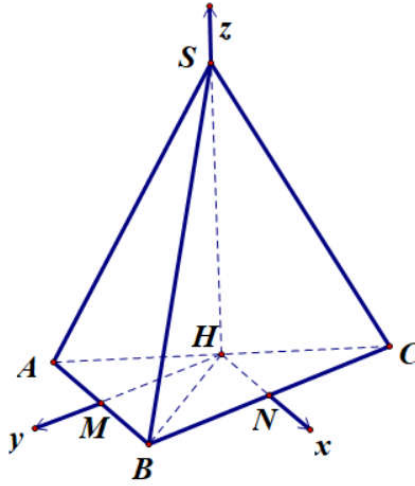
B. $\frac{\sqrt{65}}{20}$

C. $\frac{\sqrt{65}}{10}$

D. $\frac{\sqrt{65}}{65}$

Lời giải

Chọn D



Gọi H, M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB, BC .

$(SAC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp HM, SH \perp HN$.

ΔABC vuông tại $B \Rightarrow HM \perp HN$.

ΔABC vuông tại $B \Rightarrow AC = 2 \Rightarrow SH = \sqrt{3}$.

$$HM = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2}; HN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}.$$

Chọn hệ trục tọa độ như sau: $H(0;0;0); S(0;0;\sqrt{3}); M(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0); N(\frac{1}{2};0;0),$

$$B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$$

$$\overrightarrow{BM} = \left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right) \quad \overrightarrow{BN} = \left(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$\overrightarrow{BS} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}\right) \quad \overrightarrow{BS} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}\right)$$

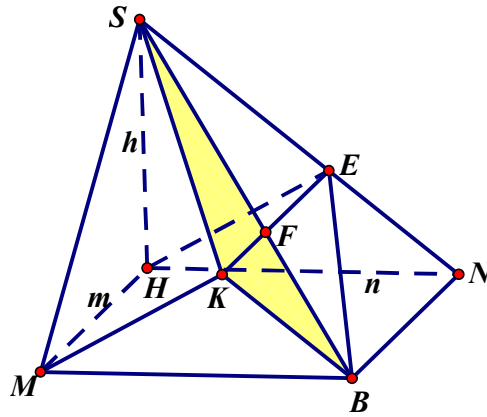
$$\vec{n}_1 = [\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BS}] = \left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right); \vec{n}_2 = [\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BS}] = \left(-\frac{3}{2}; 0; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{\left| -\frac{3}{16} \right|}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{16}} \cdot \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{16}}} = \frac{\sqrt{65}}{65}.$$

Chú ý: Ta có thể chứng minh công thức tổng quát sau:

Cho hình chóp $S.HMBN$ có đáy $HMBN$ là hình chữ nhật có $HM = m, HN = n$ và $SH \perp (HMBN)$ và $SH = h$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (MSB) và (NSB) thì

$$\cos \alpha = \frac{mn}{\sqrt{m^2 + h^2} \sqrt{n^2 + h^2}}.$$



Ta có: $BN \perp (SHN)$ nên dựng $HE \perp SN$ tại N thì $HE \perp (SNB)$.

Dựng hình bình hành $HEKM \Rightarrow MK \perp (SNB) \Rightarrow$ Hình chiếu của $\triangle MSB$ trên (SNB) là $\triangle KSB$.

$$\text{Ta có: } S_{MSB} = \frac{1}{2} MB \cdot MS = \frac{1}{2} n \sqrt{m^2 + h^2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{S_{KSB}}{S_{MSB}} = \frac{2S_{KSB}}{n \sqrt{m^2 + h^2}}$$

Gọi $F = EK \cap SB$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{S_{KSB}}{S_{ESB}} \cdot \frac{S_{ESB}}{S_{NSB}} &= \frac{FK}{FE} \cdot \frac{SE}{SN} = \frac{KE - EF}{FE} \cdot \frac{SE}{SN} = \left(\frac{KE}{EF} - 1 \right) \cdot \frac{SE}{SN} \\ &= \left(\frac{SN}{SE} - 1 \right) \frac{SE}{SN} = 1 - \frac{h^2}{n^2 + h^2} = \frac{n^2}{n^2 + h^2} \quad (\text{vì } \frac{SE}{SN} = \frac{SE \cdot SN}{SN^2} = \frac{SH^2}{SN^2} = \frac{h^2}{n^2 + h^2}) \\ \Rightarrow S_{KSB} &= \frac{n^2}{n^2 + h^2} S_{NSB} = \frac{n^2}{n^2 + h^2} \cdot \frac{m \sqrt{n^2 + h^2}}{2} = \frac{mn^2}{2 \sqrt{n^2 + h^2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \frac{S_{KSB}}{S_{MSB}} = \frac{mn}{\sqrt{m^2 + h^2} \sqrt{n^2 + h^2}}.$$

Áp dụng vào bài toán với $h = \sqrt{3}, m = \frac{\sqrt{3}}{2}, n = \frac{1}{2}$ ta được $\cos \alpha = \frac{\sqrt{65}}{65}$.

Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng 2, gọi điểm M là tâm của mặt bên $ABB'A'$, các điểm N, P, Q, K lần lượt là trung điểm của các cạnh $AC, DD', D'C', B'C'$. Tính cosine góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và (AQK) .

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

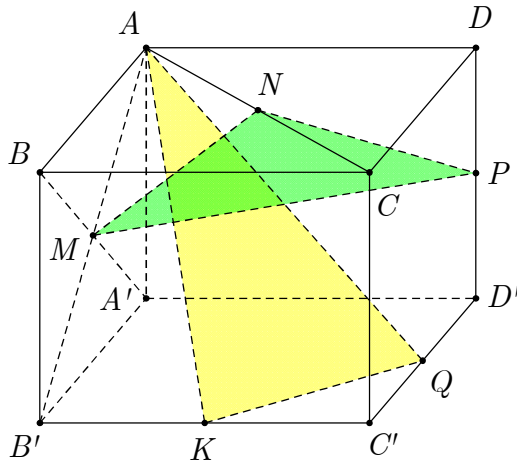
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{102}}{34}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc $A' \equiv O$ cạnh $A'B$ nằm trên Ox , cạnh $A'D'$ nằm trên Oy và cạnh $A'A$ nằm trên Oz . Từ các dữ kiện đề bài đã cho ta tìm được tọa độ các điểm

$$M(1; 0; 1), N(1; 1; 2), P(0; 2; 1), K(2; 1; 0), Q(1; 2; 0), A(0; 0; 2)$$

Ta có $\overrightarrow{MN} = (0; 1; 1), \overrightarrow{NP} = (-1; 1; -1), \overrightarrow{AK} = (2; 1; -2), \overrightarrow{AQ} = (1; 2; -2)$.

Gọi $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ lần lượt là 2 vector pháp tuyến của mặt phẳng (MNP) và (AQK) .

Như vậy ta tính được $\vec{u}_1(-2; -1; 1), \vec{u}_2(2; 2; 3)$.

Ta gọi góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và (AQK) là φ .

$$\text{Nhu vậy } \cos \varphi \text{ được tính theo công thức } \cos \varphi = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} = \frac{|-2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{102}}{34}.$$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . SA vuông góc với mặt phẳng đáy. H và K là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh BC và CD sao cho $BH = \frac{3a}{4}$, $KD = x$ ($0 < x < a$). Tìm giá trị của x để hai mặt phẳng (SAH) và (SAK) tạo với nhau một góc bằng 45° .

A. $x = \frac{a}{7}$.

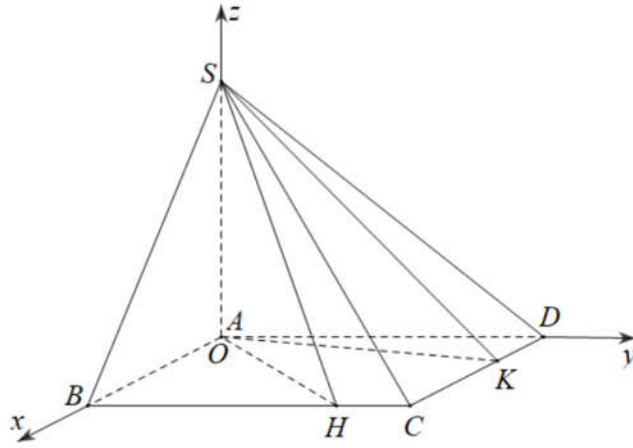
B. $x = \frac{a}{5}$.

C. $x = \frac{2a}{7}$.

D. $x = \frac{2a}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Ta chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Khi đó $A(0;0;0); B(a;0;0); D(0;a;0); S \in Oz$.

Qua đó ta có tọa độ các điểm $C(a;a;0); H\left(a; \frac{3a}{4}; 0\right); K(x;a;0)$.

Ta có: $\overrightarrow{AH} = \left(a; \frac{3a}{4}; 0\right); \overrightarrow{AK} = (x;a;0)$.

Ta có $\begin{cases} \vec{k} = (0;0;1) \\ \overrightarrow{AH} = \left(a; \frac{3a}{4}; 0\right) \end{cases} \Rightarrow [\vec{k}, \overrightarrow{AH}] = \left(-\frac{3a}{4}; a; 0\right)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAH) thì $\vec{n} = \left(\frac{-3}{4}; 1; 0\right)$.

Ta có $\begin{cases} \vec{k} = (0;0;1) \\ \overrightarrow{AK} = (x;a;0) \end{cases} \Rightarrow [\vec{k}, \overrightarrow{AK}] = (-a;x;0)$.

Gọi $\vec{n}'$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAK) thì $\vec{n}' = (-a;x;0)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAH) và (SAK) , khi đó

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} \Leftrightarrow \cos 45^\circ = \frac{\left|\frac{3a}{4} + x\right|}{\sqrt{\left(\frac{-3}{4}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{(-a)^2 + x^2}} \Leftrightarrow 2\left(\frac{3a}{4} + x\right)^2 = \frac{25}{16}(a^2 + x^2)$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 + 48ax - 7a^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{7} \text{ (do } x > 0\text{)}.$$

$$\text{Vậy } x = \frac{a}{7}.$$

Cách khác:

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AH, SA \perp AK$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAH) và (SAK) .

Suy ra $\alpha = \widehat{HAK} = 45^\circ$.

Ta có $AH = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2} = \frac{5a}{4}$; $AK = \sqrt{a^2 + x^2}$ và $HK = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + (a-x)^2}$.

Áp dụng định lí Cosin cho tam giác AHK ta có:

$$HK^2 = AH^2 + AK^2 - 2AH \cdot AK \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{16} + (a-x)^2 = \frac{25a^2}{16} + a^2 + x^2 - 2 \cdot \frac{5a}{4} \cdot \sqrt{a^2 + x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2x = \frac{3a}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{a^2 + x^2} \Leftrightarrow 5\sqrt{2} \sqrt{a^2 + x^2} = 6a + 8x$$

$$\Leftrightarrow 50(x^2 + a^2) = 64x^2 + 96ax + 36a^2$$

$$\Leftrightarrow 14x^2 + 96ax - 14a^2 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 + 48ax - 7a^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{7} \text{ (do } x > 0 \text{)}.$$

Vậy $x = \frac{a}{7}$.

Câu 11: Trong không gian, cho tam giác OAB cân ở O có $OA = OB = 5$; $\widehat{AOB} = \frac{4}{3}$. Điểm C di động trên tia Oz vuông góc (OAB) , gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Khi C di động trên tia Oz thì H luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng:

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

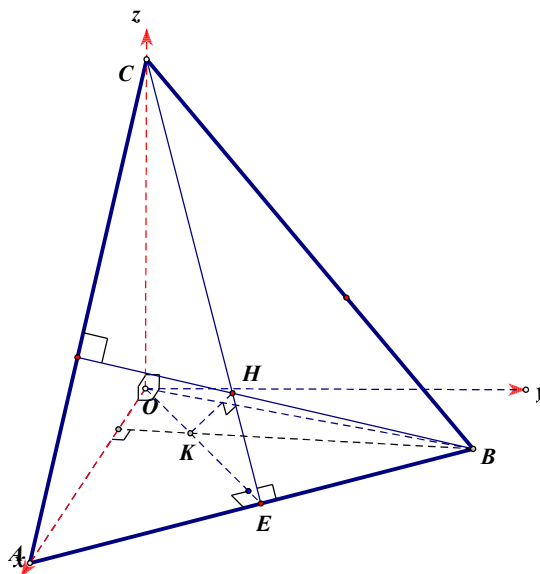
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O , tia Ox trùng tia OA , tia Oy nằm trong mặt phẳng (OAB) sao cho tia OB nằm giữa hai tia Ox, Oy như hình vẽ. Khi đó $A(5;0;0)$ và $B(3;4;0)$.

Giả sử $C(0;0;c)$. Dễ thấy tam giác ABC cân tại C . Gọi $E(4;2;0)$ là trung điểm của AB .

Ta có mặt phẳng (OCE) vuông góc với AB và là mặt phẳng cố định.

Gọi K là trực tâm tam giác OAB , do A, B và K cùng nằm trong mặt phẳng (Oxy) .

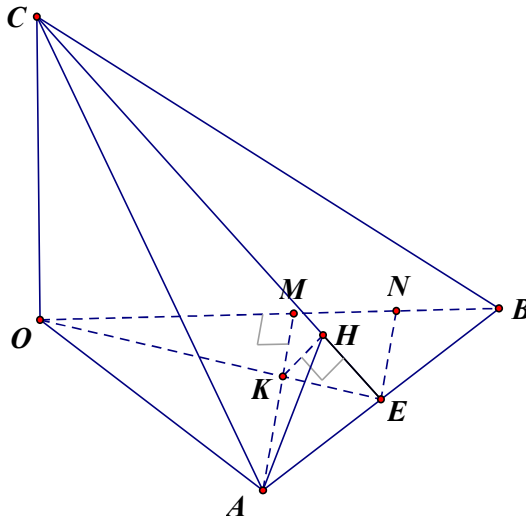
$$\text{Giả sử } K(x; y; 0), \text{ ta có } \begin{cases} \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot (-2) + y \cdot 4 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Tìm được } K = \left(3; \frac{3}{2}; 0\right)$$

$$\text{Do } \begin{cases} AB \perp (OEC) \\ CA \perp (BHK) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HK \perp AB \\ HK \perp CA \end{cases} \Rightarrow KH \perp (CAB) \Rightarrow KH \perp HE \Rightarrow \widehat{KHE} = 90^\circ.$$

Do đó H thuộc mặt cầu đường kính $KE = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ và thuộc mặt phẳng (OCE) cố định.

Vậy H luôn thuộc một đường tròn cố định có bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

Cách khác:



Gọi E là trung điểm AB . Ta có $AB \perp (OCE)$ nên $AB \perp CE$ do đó H thuộc CE nên H luôn nằm trong mặt phẳng (OCE) cố định.

Gọi K là trực tâm $\triangle OAB$, ta có:

$$\begin{cases} AK \perp OB \\ AK \perp OC \end{cases} \Rightarrow AK \perp (OBC) \Rightarrow AK \perp BC \text{ mà } AH \perp BC$$

$$\text{nên } BC \perp (AHK) \Rightarrow HK \perp BC \text{ mà } HK \perp AB \Rightarrow HK \perp (ABC)$$

$$\Rightarrow \widehat{KHE} = 90^\circ \Rightarrow H \text{ thuộc đường tròn đường kính } KE \text{ nằm trong } (OCE) \text{ cố định.}$$

$$\text{Ta có: } \cos^2 \widehat{AOB} = \frac{1}{1 + \tan^2 \widehat{AOB}} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \widehat{AOB} = \frac{3}{5} \Rightarrow OM = 3, AM = 4.$$

$$\Rightarrow MN = 1, ON = 4, NE = 2 \text{ (N là trung điểm MB)}$$

$$\Rightarrow OE = \sqrt{ON^2 + NE^2} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Lại có } \frac{KE}{OE} = \frac{NM}{ON} = \frac{1}{4} \Rightarrow KE = \frac{OE}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Vậy bán kính của đường tròn đường kính } KE \text{ là } R = \frac{KE}{2} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a , góc $\widehat{BCD} = 120^\circ$. $SA \perp (ABCD)$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Gọi M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SOD . Hãy tính khoảng cách h từ M tới mặt phẳng (SBC) theo a .

A. $h = \frac{a\sqrt{57}}{19}$.

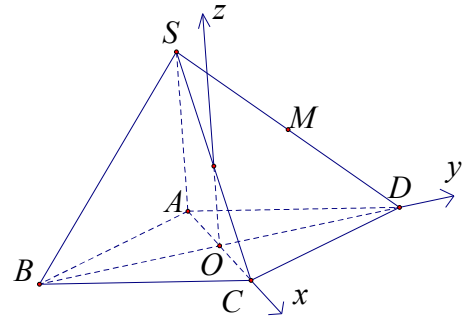
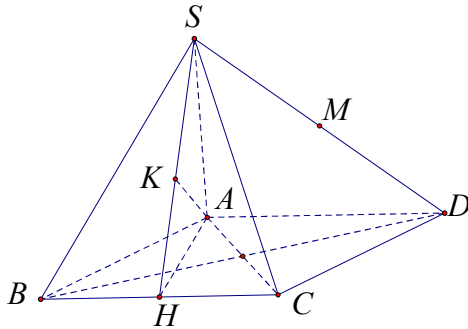
B. $h = \frac{a\sqrt{57}}{38}$.

C. $h = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

D. $h = \frac{2\sqrt{5}a}{19}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1: Phương pháp dựng hình

Tam giác SOD vuông tại O nên M là trung điểm của SD .

$$\text{Ta có } \frac{DM}{DS} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(M, (SBC)) = \frac{1}{2} d(D, (SBC)); AD \parallel BC.$$

$$\Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(D, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC)). \text{ Vậy } d(M, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC))$$

Gọi H là trung điểm của BC , do tam giác ABC đều nên $AH \perp BC$, lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAH) \Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$

$$\text{Dựng } AK \perp SH \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AK.$$

$$\text{Diện tích hình thoi } ABCD \text{ là: } S_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Từ đó suy ra } SA = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = 2a. \text{ Tính được } AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Tam giác SAH vuông tại A , đường cao AK nên:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{228}}{19}.$$

$$\text{Vậy } d(M, (SBC)) = \frac{1}{2} AK = \frac{a\sqrt{57}}{19}.$$

Cách 2: Phương pháp tọa độ

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a = 1$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, $Oz \parallel SA$. Khi đó ta có

$$O(0;0;0), A\left(\frac{-1}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{-\sqrt{3}}{2}; 0\right), C\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right).$$

$$D\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right) \Rightarrow S\left(\frac{-1}{2}; 0; 2\right), M\left(\frac{-1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1\right).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SB} = \left(\frac{1}{2}; \frac{-\sqrt{3}}{2}; -2\right), \overrightarrow{SC} = (1; 0; -2).$$

$$\text{Ta có } n_{(SBC)} = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = \left(\sqrt{3}; -1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (SBC) \text{ là: } \sqrt{3}x - y + \frac{\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

$$\text{Suy ra } d(M, (SBC)) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3+1+\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{57}}{19}.$$

$$\text{Vậy } d(M, (SBC)) = \frac{a\sqrt{57}}{19}.$$

Câu 13: Cho tam giác ABC vuông tại A và đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại điểm A . Các điểm M, N thay đổi trên đường thẳng Δ sao cho $(MBC) \perp (NBC)$. Biết $AB = b$, $AC = c$. Giá trị nhỏ nhất của thể tích tứ diện $MNBC$ theo b và c bằng

A. $\frac{3b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}.$

B. $\frac{b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}.$

C. $\frac{bc}{3\sqrt{b^2+c^2}}.$

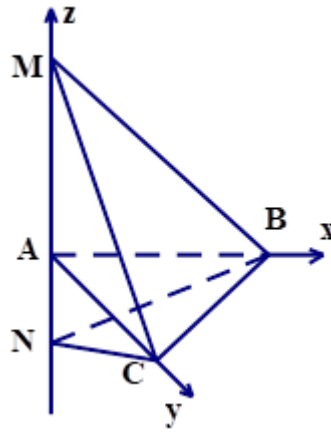
D. $\frac{b^2c^2}{3\sqrt{b^2+c^2}}.$

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A$, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AC, AM .

Đặt $AB = b$, $AC = c$, $AM = m$ (b, c không đổi).



Khi đó $A(0;0;0)$, $B(b;0;0)$, $C(0;c;0)$, $M(0;0;m)$. Giả sử $N(0;0;n)$. Ta có:

$$(MBC): \frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{m} - 1 = 0 \text{ có một vectơ pháp tuyến là } \vec{\alpha}\left(\frac{1}{b}; \frac{1}{c}; \frac{1}{m}\right).$$

$$(NBC): \frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{n} - 1 = 0 \text{ có một vectơ pháp tuyến là } \vec{\beta}\left(\frac{1}{b}; \frac{1}{c}; \frac{1}{n}\right).$$

$$\text{Vậy } (MBC) \perp (NBC) \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{mn} = 0 \Leftrightarrow m \cdot n = \frac{-b^2 \cdot c^2}{b^2 + c^2} \Rightarrow mn < 0.$$

Mặt khác $m > 0$ nên $n < 0$. Vậy M và N nằm về hai phía của A .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BC} = (-b; c; 0), \overrightarrow{BM} = (-b; 0; m), \overrightarrow{BN} = (-b; 0; n), [\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN}] = (0; b(n-m); 0).$$

$$\text{Vậy } V_{MNBC} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{BC} \cdot [\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN}]| = \frac{1}{6} |bc(n-m)| = \frac{1}{6} bc(m-n).$$

$$\text{Ta có } m \cdot n = \frac{-b^2 c^2}{b^2 + c^2} \text{ không đổi.}$$

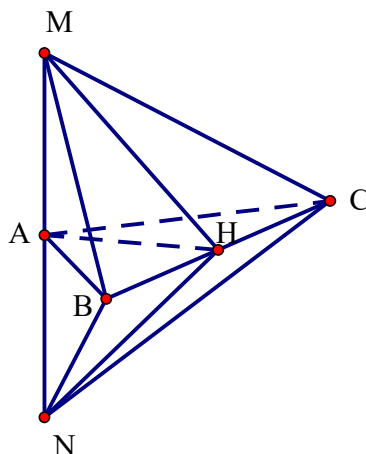
$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có } V_{MNBC} = \frac{1}{6} bc(m-n) \geq \frac{1}{6} \cdot bc \cdot 2\sqrt{m \cdot (-n)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2 c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } m = -n = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

$$\text{Vậy } V_{MNBC} \text{ nhỏ nhất khi } M, N \text{ nằm về hai phía của } A \text{ và } AM = AN = \frac{AB \cdot AC}{BC}.$$

$$\text{Khi đó giá trị nhỏ nhất của thể tích tứ diện } MNBC \text{ bằng } \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2 c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Cách khác:



Dựng $AH \perp BC$, ta có $BC \perp (MHN)$ nên ΔHMN vuông tại H.

$$\text{Do đó } AM \cdot AN = AH^2 = \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}$$

Khi đó thể tích tứ diện $MNBC$ là

$$\begin{aligned} V_{MNBC} &= V_{MABC} + V_{NABC} = \frac{1}{3} AM \cdot S_{ABC} + \frac{1}{3} AN \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} (AM + AN) \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} bc (AM + AN) \\ &\geq \frac{1}{6} bc \cdot 2\sqrt{AM \cdot AN} = \frac{b^2 c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow AM = AN = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

$$\text{Vậy } \min V_{MNBC} = \frac{b^2 c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Câu 14: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC . Biết $MN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, tính sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

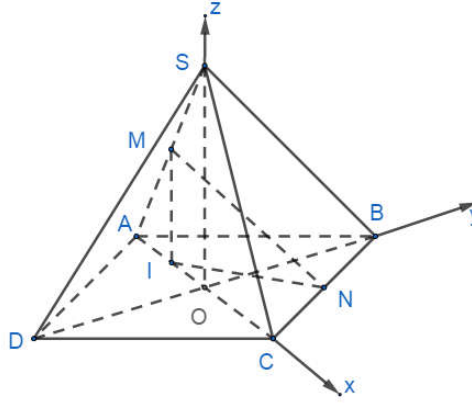
B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I hình chiếu của M lên $(ABCD)$, suy ra I là trung điểm của AO .

$$\text{Khi đó } CI = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

Áp dụng định lý cosin ta có:

$$NI = \sqrt{CN^2 + CI^2 - 2CN \cdot CI \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{8} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

$$\text{Do } \triangle MIN \text{ vuông tại } I \text{ nên } MI = \sqrt{MN^2 - NI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2} - \frac{5a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

$$\text{Mà } MI \parallel SO, MI = \frac{1}{2}SO \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$$\text{Khi đó ta có tọa độ các điểm: } O(0;0;0), B\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};0\right), D\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right), C\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right), \\ N\left(\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4};0\right), A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right), S\left(0;0;\frac{\sqrt{14}}{2}\right), M\left(-\frac{\sqrt{2}}{4};0;\frac{\sqrt{14}}{4}\right).$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{MN} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{14}}{4}\right), \overrightarrow{SB} = \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{2}\right), \overrightarrow{SD} = \left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{2}\right).$$

$$\text{Vector pháp tuyến mặt phẳng } (SBD): \vec{n} = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD}] = (-\sqrt{7}; 0; 0).$$

$$\text{Suy ra } \sin(MN, (SBD)) = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left|\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\sqrt{7})\right|}{\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AD ; H là giao điểm của CN và DM . Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a .

A. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

B. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

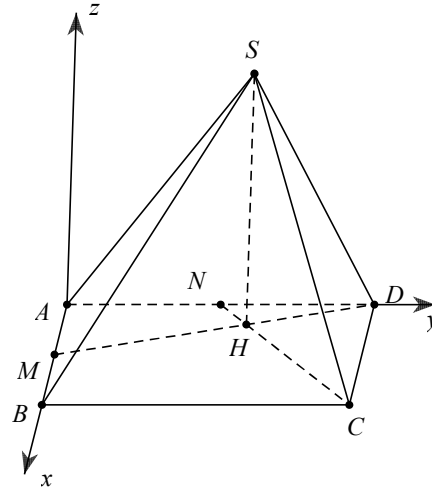
C. $\frac{2a\sqrt{13}}{19}$.

D. $\frac{a\sqrt{7}}{19}$.

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Tọa độ các đỉnh: $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), C(a;a;0), M\left(\frac{a}{2};0;0\right), N\left(0;\frac{a}{2};0\right)$

Suy ra $\overrightarrow{DM} = \left(\frac{a}{2}; -a; 0\right) \Rightarrow$ phương trình $DM : \begin{cases} x = t \\ y = a - 2t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow H(t; a - 2t; 0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CH} = (t - a; -2t; 0), \overrightarrow{CN} = \left(-a; -\frac{a}{2}; 0\right)$

Vì $H \in CN \Rightarrow \frac{t - a}{-a} = \frac{-2t}{-\frac{a}{2}} \Leftrightarrow -t + a = 4t \Rightarrow t = \frac{a}{5} \Rightarrow H\left(\frac{a}{5}; \frac{3a}{5}; 0\right) \Rightarrow S\left(\frac{a}{5}; \frac{3a}{5}; a\sqrt{3}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{SC} = \left(\frac{4a}{5}; \frac{2a}{5}; -a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{DC} = (a; 0; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{SC}] = \left(a^2\sqrt{3}; \frac{a^2\sqrt{3}}{2}; a^2\right)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{SC}] \cdot \overrightarrow{DC} = a^3\sqrt{3}.$

Vậy $d(SC, DM) = \frac{|\overrightarrow{DC} \cdot [\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{SC}]|}{\|[\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{SC}]\|} = \frac{a^3\sqrt{3}}{\frac{a^2\sqrt{19}}{2}} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$

Câu 16: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi E, M lần lượt là trung điểm các cạnh BC, SA , α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD) . Tính $\sin \alpha$.

A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

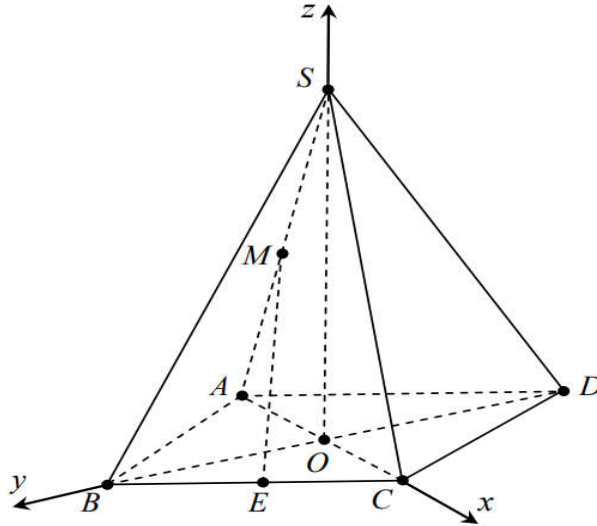
B. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$.

C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $AC \cap BD = \{O\}$. Vì hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Đặt $OA = 1$. Vậy $AC = 2$ và đáy của hình chóp $S.ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{2}$.

Do giả thiết hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau nên $SA = \sqrt{2}$.

Xét tam giác SAO vuông tại O có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = 1$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $Ox \equiv OC$, $Oy \equiv OB$, $Oz \equiv OS$.

Khi đó ta có: $C(1;0;0)$, $A(-1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $S(0;0;1)$.

Do E, M lần lượt là trung điểm các cạnh BC, SA nên $E\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$, $M\left(\frac{-1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

$AC \perp (SBD)$ nên mặt phẳng (SBD) nhận $\overrightarrow{AC}(2;0;0)$ là một vector pháp tuyến.

Đường thẳng EM nhận $\overrightarrow{ME}\left(1; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right)$ là một vector chỉ phương.

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD) .

Vậy ta có: $\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{AC}|}{ME \cdot AC} = \frac{\left| 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \left(\frac{-1}{2} \right) \cdot 0 \right|}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{-1}{2} \right)^2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$

Câu 17: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h . Gọi I là trung điểm cạnh bên SC . Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (AIB) .

A. $\frac{2ah}{\sqrt{4h^2 + 9a^2}}.$

B. $\frac{4ah}{\sqrt{4h^2 + 9a^2}}.$

C. $\frac{ah}{\sqrt{4h^2 + 9a^2}}.$

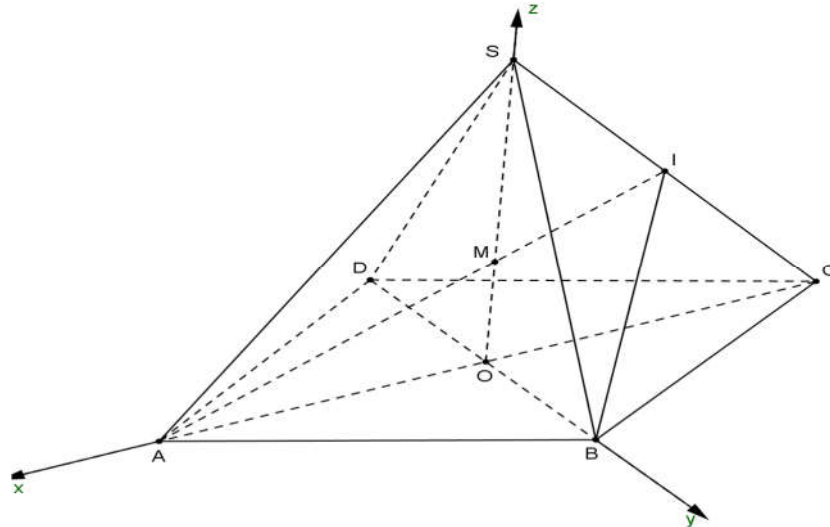
D. $\frac{2ah}{\sqrt{2h^2 + 3a^2}}.$

Lời giải

Chọn A

Gọi O là giao điểm của AC và BD . Ta có $OA = OB = OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O , tia Ox chứa A , tia Oy chứa B , tia Oz chứa S .



Khi đó: $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), C\left(\frac{-a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), S(0; 0; h).$

Gọi M là giao điểm của SO và AI . Tam giác SAC có M là giao điểm của hai đường trung tuyến nên M là trọng tâm, do đó $M\left(0; 0; \frac{h}{3}\right).$

Mặt phẳng (AIB) đi qua A, B, M nên có phương trình: $\frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \frac{y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \frac{z}{\frac{h}{3}} = 1.$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{a}x + \frac{\sqrt{2}}{a}y + \frac{3}{h}z - 1 = 0.$$

Do đó khoảng cách từ S đến mặt phẳng (AIB) là: $d = \frac{\left| \frac{3}{h} \cdot h - 1 \right|}{\sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{9}{h^2}}} = \frac{2ah}{\sqrt{4h^2 + 9a^2}}.$

Câu 18: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tâm O . Gọi E là điểm đối xứng với D qua trung điểm của SA , M là trung điểm của AE , N là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC .

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}.$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}.$

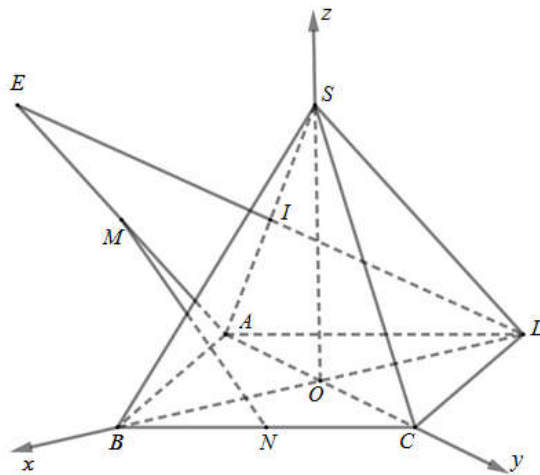
C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}.$

D. $\frac{a}{8}.$

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Đặt $SO = h$ và gọi I là trung điểm của SA .



Ta có tọa độ các đỉnh là: $A\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $D\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$

$S(0; 0; h).$

I, N lần lượt là trung điểm $SA, BC \Rightarrow I\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{h}{2}\right)$, $N\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right).$

E đối xứng với D qua $I \Rightarrow E\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; h\right).$

M là trung điểm $AE \Rightarrow M\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{h}{2}\right).$

Do đó $\overrightarrow{MN} = \left(0; \frac{3a\sqrt{2}}{4}; -\frac{h}{2}\right)$, $\overrightarrow{AC} = (0; a\sqrt{2}; 0)$, $\overrightarrow{AN} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{3a\sqrt{2}}{4}; 0\right)$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}] = \left(\frac{ah\sqrt{2}}{2}; 0; 0 \right) \Rightarrow [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{a^2h}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(MN, AC) = \frac{|\overrightarrow{[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AN}}|}{|\overrightarrow{[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}]}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 19: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB' . Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN) .

A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

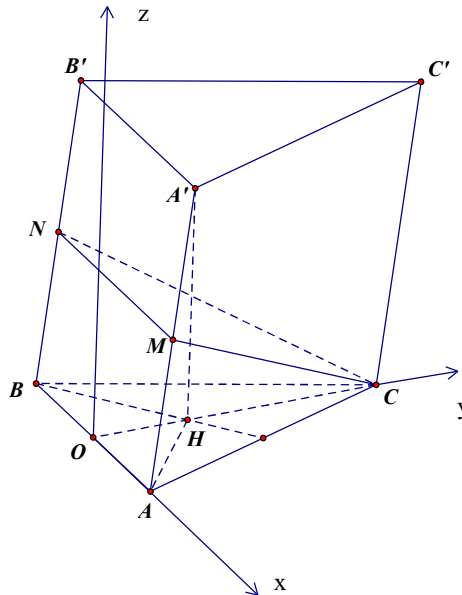
B. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

D. $\frac{4\sqrt{2}}{13}$.

Lời giải

Chọn C



Không mất tính tổng quát ta chọn $a = 1$.

Gọi O là trung điểm của AB . Gọi H là tâm của $\Delta ABC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho $O(0;0;0)$.

Khi đó: $A\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$. Dễ thấy mp (ABC) có vtpt $\vec{n}_1 = (0; 0; 1)$.

Do: $H\left(0; \frac{\sqrt{3}}{6}; 0\right)$, $A'H = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow A'\left(0; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow B'\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

M là trung điểm $AA' \Rightarrow M\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, N là trung điểm $BB' \Rightarrow N\left(-\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

$$\overrightarrow{MN} = (-1; 0; 0), \overrightarrow{CM} = \left(\frac{1}{4}; \frac{-5\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \Rightarrow (CMN) \text{ có vtpt } \vec{n}_2 = (0; 2\sqrt{2}; 5)$$

Đặt $\varphi = ((ABC), (CMN))$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|5|}{1 \cdot \sqrt{33}} = \frac{5}{\sqrt{33}} \Rightarrow \tan \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \text{ (do góc } \varphi \text{ nhọn)}.$$

Câu 20: Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A và $AB = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. $SA = SB = SC$. Gọi α là góc của hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) sao cho $\cos \alpha = \frac{5}{7}$. Khi đó

thể tích của khối chóp $SABC$ là

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

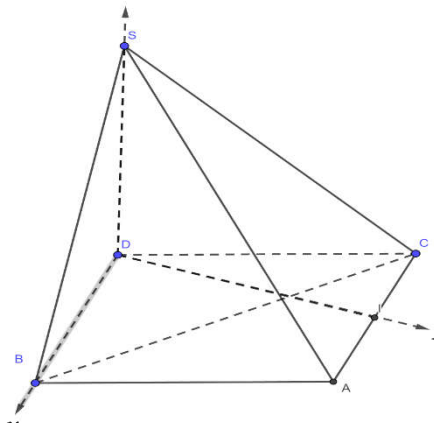
B. $2a^3$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. $\frac{2a^3}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn A



☐ Vì $SA = SB = SC \Rightarrow$ Hình chiếu của S lên (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là D (với D là đỉnh của hình thoi $ABDC$)

☐ Đặt $SD = x$ ($x > 0$).

☐ Gắn hệ tọa độ: $D(0; 0; 0), B(a; 0; 0), S(0; 0; x)$. Vì $DI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow I\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.

☐ Ta có $\overrightarrow{DB}(a; 0; 0), \overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \Rightarrow A\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), C\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

☐ $\overrightarrow{SA} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; -x\right), \overrightarrow{SB} = (a; 0; -x), \overrightarrow{SC} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; -x\right)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}] = \left(\frac{-ax\sqrt{3}}{2}; \frac{-xa}{2}; \frac{-a^2\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \vec{n}_1(x\sqrt{3}; x; a\sqrt{3})$ là một vectơ pháp tuyến của (SAB)

$$[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}] = \left(0; ax; \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow \vec{n}_2(0; 2x; a\sqrt{3}) \text{ là vectơ pháp tuyến của } (SAC)$$

$$\square \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 3a^2}{4x^2 + 3a^2} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow x = a$$

$$\square V_{SABC} = \frac{1}{3} SD \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{12} a^3.$$

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = 2a$, tam giác SAB và tam giác SCB lần lượt vuông tại A , C . Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng $2a$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) bằng:

A. $\frac{1}{2}$.

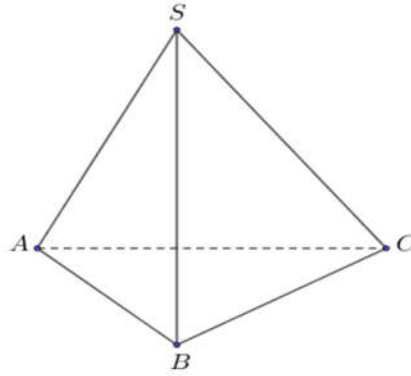
B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục tọa độ sao cho: $B(0;0;0)$, $A(a\sqrt{2};0;0)$, $C(0;a\sqrt{2};0)$, $S(x;y;z)$, $(z > 0)$.

Ta có $(ABC): z = 0$, $\overrightarrow{AB} = (-a\sqrt{2}; 0; 0)$, $\overrightarrow{CB} = (0; -a\sqrt{2}; 0)$, $\overrightarrow{AS} = (x - a\sqrt{2}; y; z)$, $\overrightarrow{CS} = (x; y - a\sqrt{2}; z)$.

$$\text{Do } \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow (x - a\sqrt{2})(-a\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow x = a\sqrt{2}.$$

$$\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow (y - a\sqrt{2})(-a\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow y = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Mà } d(S, (ABC)) = 2a \Rightarrow z = 2a. \text{ Từ đó } S(a\sqrt{2}; a\sqrt{2}; 2a).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AS} = (0; a\sqrt{2}; 2a), \overrightarrow{CS} = (a\sqrt{2}; 0; 2a), \overrightarrow{BS} = (a\sqrt{2}; a\sqrt{2}; 2a).$$

$$(SBC) \text{ có 1 vtpt } \vec{n} = (-\sqrt{2}; 0; 1), (SAB) \text{ có 1 vtpt } \vec{m} = (0; \sqrt{2}; -1).$$

$$\text{Vậy } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Câu 22: Cho hình chóp đều $SABCD$ có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng $3\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc SB, SD sao cho $SB = 3SM, SD = 3DN$. Khoảng cách giữa AM và CN bằng

A. $\frac{40}{\sqrt{857}}$.

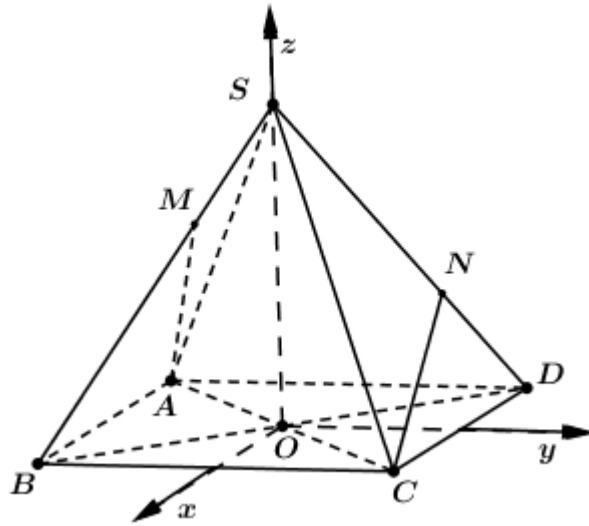
B. $\frac{72}{\sqrt{857}}$.

C. $\frac{24}{\sqrt{153}}$.

D. $\frac{40}{\sqrt{257}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là giao điểm của $AC, BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

$$\Rightarrow OA = \sqrt{2}, SO = \sqrt{18 - 2} = 4.$$

Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ. ($Ox \parallel AB, Oy \parallel AD, Oz \equiv OS$)

Tọa độ điểm $A(-1; -1; 0), B(1; -1; 0), C(1; 1; 0), D(-1; 1; 0), S(0; 0; 4)$.

$$\text{Từ giả thiết ta có } \overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1}{3}(1-0) \\ y_M = \frac{1}{3}(-1-0) \\ z_M - 4 = \frac{1}{3}(0-4) \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

$$\text{Tương tự tọa độ điểm } N\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM} = \left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right), \overrightarrow{CN} = \left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right), \overrightarrow{AC} = (2; 2; 0).$$

Chọn vector chỉ phương của đường thẳng AM là $\vec{u}_1 = (2; 1; 4)$, chọn vector chỉ phương của đường thẳng CN là $\vec{u}_2 = (5; 1; -4)$.

$$\text{Ta có } [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (-8; 28; -3).$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, CN bằng

$$d(AM; CN) = \frac{\left| \left[\begin{matrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{matrix} \right] \cdot \vec{AC} \right|}{\left\| \left[\begin{matrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{matrix} \right] \right\|} = \frac{|-16 + 56 + 0|}{\sqrt{(-8)^2 + 28^2 + (-3)^2}} = \frac{40}{\sqrt{857}}.$$

Câu 23: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = 2a$, $AB = a$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Tính khoảng cách d từ M tới mặt phẳng (SAB) .

A. $d = \frac{a\sqrt{165}}{30}$.

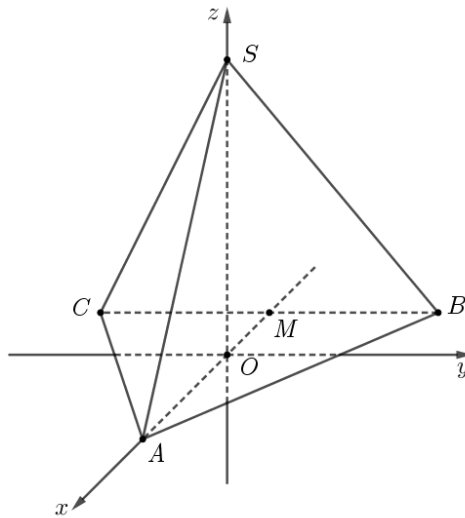
B. $d = \frac{a\sqrt{15}}{3}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{65}}{15}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{65}}{10}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC) , ta suy ra O là trọng tâm tam giác ABC .

Do M là trung điểm BC nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác SOA vuông tại O , ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$.

Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với O trùng với gốc tọa độ, khi đó ta được:

$$O(0;0;0), A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; 0\right), S\left(0; 0; \frac{a\sqrt{33}}{3}\right), M\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right).$$

$$\text{Suy ra } B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; 0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; -\frac{a}{2}; 0\right)$$

$$\text{Ta có } \vec{SA} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; -\frac{a\sqrt{33}}{3}\right), \vec{SB} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{33}}{3}\right)$$

$$\text{Suy ra } \vec{n}_{(SAB)} = [\vec{SA}, \vec{SB}] = \left(\frac{a^2\sqrt{33}}{6}; \frac{a^2\sqrt{11}}{2}; \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \right).$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (SAB) \text{ là } \frac{\sqrt{33}}{6}x + \frac{\sqrt{11}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{6}z - \frac{a\sqrt{11}}{6} = 0.$$

$$\text{Suy ra } d(M, (SAB)) = \frac{\left| \frac{\sqrt{33}}{6} \cdot \frac{-a\sqrt{3}}{6} - \frac{a\sqrt{11}}{6} \right|}{\sqrt{\frac{33}{36} + \frac{11}{4} + \frac{3}{36}}} = \frac{a\sqrt{165}}{30}.$$

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Tính cosin góc giữa MN và (SAC) , biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

B. $\frac{3\sqrt{310}}{20}$.

C. $\frac{\sqrt{310}}{20}$.

D. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

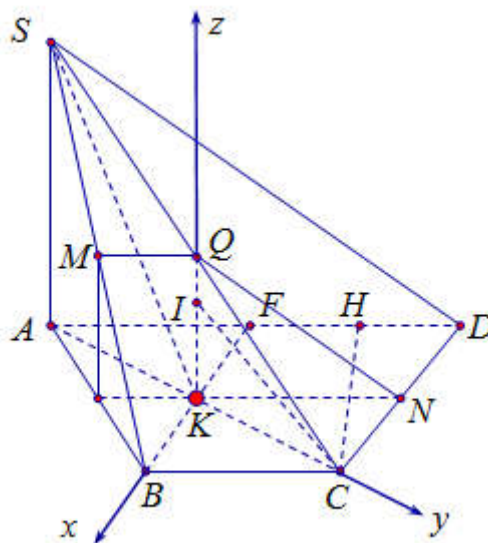
Vì $ABCD$ là hình thang cân có $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$

$$\Rightarrow AD = 2a; AB = BC = CD = a$$

$$\Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; S_{ABCD} = \frac{a+2a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$$

$$\text{nên } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SA = a$$

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ như hình vẽ



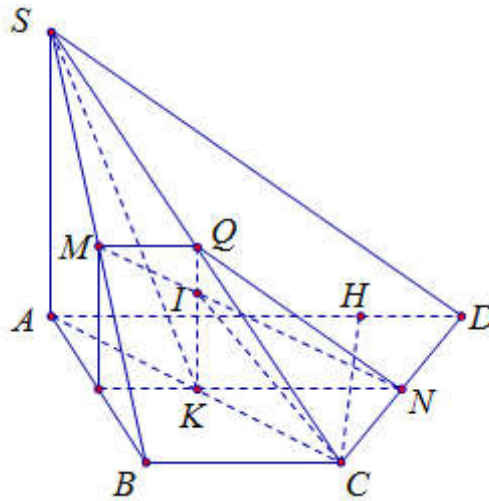
Ta có: $K(0;0;0)$, $B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $A\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $N\left(\frac{-a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$,
 $S\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};a\right)$, $M\left(\frac{a}{4};-\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{2}\right)$
 $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{-3a}{4};\frac{3a\sqrt{3}}{4};-\frac{a}{2}\right)$. Chọn $\vec{u}_1 = (-3;3\sqrt{3};-2)$ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$

Nhận xét: $\begin{cases} BK \perp SA \\ BK \perp AC \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAC)$

$\overrightarrow{BK} = \left(-\frac{a}{2};0;0\right)$ là vtpt của (SAC) . Chọn $\vec{n}_1 = (1;0;0)$ cùng phương với $\overrightarrow{BK}$

Gọi α là góc giữa MN và (SAC) . Ta có $\sin \alpha = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{u}_1| |\vec{n}_1|} = \frac{3\sqrt{10}}{20} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{310}}{20}$.

Cách 2:



Gọi (α) là mp đi qua MN và song song với mp (SAD) . Khi đó (α) cắt AB tại P , cắt SC tại Q , cắt AC tại K . Gọi I là giao điểm của MN và $QK \Rightarrow I \in (SAC)$.

Suy ra: P, Q, K lần lượt là trung điểm của AB, SC và AC .

Lại có: $ABCD$ là hình thang cân có $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$

$$\Rightarrow AD = 2a; AB = BC = CD = a$$

$$\Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; S_{ABCD} = \frac{a+2a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$$

$$\text{Nên } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SA = a \Rightarrow MP = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2} \text{ và } NP = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } MNP \text{ vuông tại } P: MN = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

MP, KQ lần lượt là đường trung bình của tam giác $\triangle SAB, \triangle SAC \Rightarrow MP \parallel KQ \parallel SA$

KN là đường trung bình của tam giác $\triangle ACD \Rightarrow KN = \frac{1}{2}AD = a$.

$$\text{Xét tam giác } AHC \text{ vuông tại } H: AC = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow KC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra: tam giác KNC vuông tại $C \Rightarrow C$ là hình chiếu vuông góc của N lên (SAC) .

$\Rightarrow$ góc giữa MN và (SAC) là góc $\widehat{NIC}$

$$\text{Khi đó: } \frac{IN}{MN} = \frac{KN}{NP} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow IN = \frac{2}{3} \cdot MN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{2} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{Xét tam giác } NIC \text{ vuông tại } C: NC = \frac{a}{2}; IN = \frac{a\sqrt{10}}{3} \Rightarrow IC = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{10}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{31}}{6}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{NIC} = \frac{IC}{IN} = \frac{a\sqrt{31}}{6} : \frac{a\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{310}}{20}.$$

Câu 25: Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 3a$, $AC = 4a$. Các mặt bên (SAB) , (SAC) , (SBC) cùng tạo với đáy (ABC) một góc 45° . Biết chân đường vuông góc hạ từ S xuống mặt phẳng (ABC) nằm ở miền trong tam giác ABC . Gọi góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) là α . Tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{10}$.

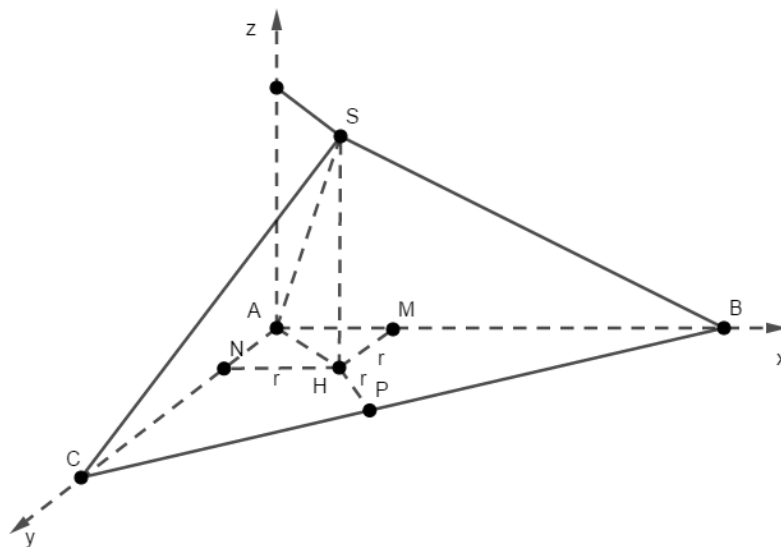
B. $\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

C. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

D. $\cos \alpha = \frac{1}{15}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của H trên AB , AC và BC . Ta có góc giữa (SAB) và (BAC) là góc $\widehat{SMH}$. Tương tự ta có $\widehat{SMH} = \widehat{SNH} = \widehat{SPH} = 45^\circ$

$$\text{Do đó } \triangle SMH = \triangle SNH = \triangle SPH \Rightarrow HM = HN = HP$$

Mà H nằm ở miền trong tam giác ABC nên H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC , khi đó

$$r = \frac{S_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{3a \cdot 4a}{3a + 4a + 5a} = a.$$

Tam giác SHM vuông cân tại H nên $SH = HM = r$.

Chọn hệ trục Đề-các vuông góc $Axyz$ như hình vẽ. Khi đó ta tìm được tọa độ các điểm như sau

$A(0;0;0)$, $B(3a;0;0)$, $C(0;4a;0)$, $H(r;r;0) = (a;a;0)$, $S(x_H; y_H; SH) = (a;a;a)$. Suy ra:

Mặt phẳng (SAC) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = \frac{1}{4a^2} [\vec{AS}, \vec{AC}] = (-1; 0; 1)$

Mặt phẳng (SBC) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = \frac{-1}{a^2} [\vec{AS}, \vec{AC}] = (4; 3; 5)$

$$\text{Do đó } \cos \alpha = \frac{-1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 5}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2}} = \frac{1}{10}$$

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

A. $\frac{a\sqrt{42}}{8}$.

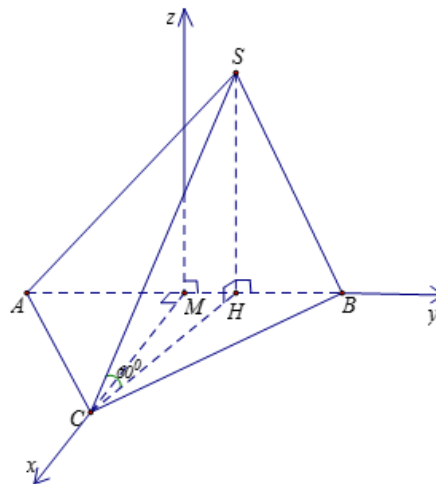
B. $\frac{a\sqrt{42}}{12}$.

C. $\frac{a\sqrt{42}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{42}}{24}$.

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại M , trục hoành là MC , trục tung là MB , trục cao là $Mz // HS$ (xem hình vẽ).

$$\text{Ta có: } MH = \frac{AB}{6} = \frac{a}{6} \Rightarrow CH = \sqrt{CM^2 + MH^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

$$\left(\widehat{SC, (ABC)}\right) = \widehat{SCH} = 60^\circ \Rightarrow SH = CH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}$$

Do đó tọa độ các điểm là $A\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right)$, $S\left(0; \frac{a}{6}; \frac{a\sqrt{21}}{3}\right)$, $B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$, $C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SA} = \left(0; -\frac{2a}{3}; -\frac{a\sqrt{21}}{3}\right), \overrightarrow{BC} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; 0\right), \overrightarrow{AB} = (0; a; 0)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}] = \left(-\frac{a^2\sqrt{21}}{6}; -\frac{a^2\sqrt{7}}{2}; \frac{a^2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\Rightarrow d(SA, BC) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}]|}{\|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}]\|} = \frac{a\sqrt{42}}{8}.$$

Câu 27: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$, góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC' . Cosin của góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\frac{1}{2}$.

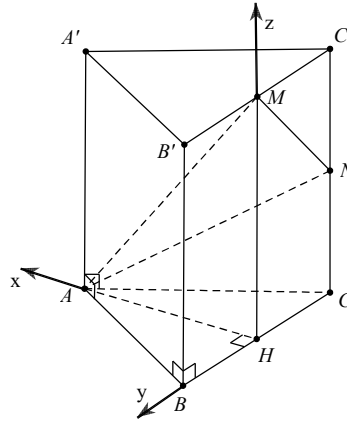
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{13}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\left(\widehat{A'B, (ABC)}\right) = \left(\widehat{A'B, AB}\right) = \widehat{ABA'} = 45^\circ$ nên $\Delta A'AB$ vuông cân tại A

$$\Rightarrow AA' = AB = a$$

Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow AH = AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$

$$BC = 2BH = 2\sqrt{AB^2 - AH^2} = a\sqrt{3}.$$

Lại có M, H lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và BC

$$\Rightarrow MH = BB' = AA' = a; MH \parallel BB' \Rightarrow MH \perp (ABC)$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ có $H \equiv O$, suy ra $H(0;0;0)$, $A\left(\frac{a}{2};0;0\right)$,

$$B\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), M(0;0;a).$$

$$\Rightarrow C\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), N\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2}\right).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}\left(-\frac{a}{2};0;a\right), \overrightarrow{AN}\left(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2}; -\frac{a^2}{4}; \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\Rightarrow (AMN) \text{ có một VTPT là } \vec{n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Ta có $\overrightarrow{HM} = (0;0;a)$, $HM \perp (ABC) \Rightarrow (ABC)$ có một VTPT $\vec{n}_1 = (0;0;1)$

Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) .

$$\text{từ đó } \cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_1|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 28: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và các mặt bên đều là các hình vuông cạnh a . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và I là trung điểm của đoạn thẳng CC' . Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và GI bằng

A. $\frac{a\sqrt{11}}{22}$.

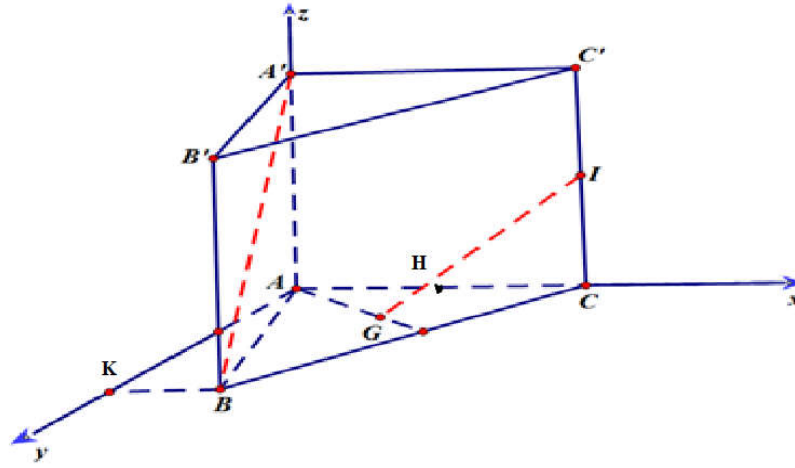
B. $\frac{3a\sqrt{11}}{7}$.

C. $\frac{a\sqrt{11}}{12}$.

D. $\frac{3a\sqrt{11}}{22}$.

Lời giải

Chọn D



Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A(0;0;0)$, $C(a;0;0)$, $A'(0;0;a)$ trục Ay nằm trong mặt phẳng (ABC) và vuông góc với trục Ax . Khi đó gọi H , K lần lượt là hình chiếu của B lên các trục

Ax , Ay khi đó góc $\angle BAy = 30^\circ$ nên $AK = AB \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AH = AB \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$ nên

$B\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$. Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có $G\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}; 0\right)$. Đồng thời I là

trung điểm của CC' nên $I\left(a; 0; \frac{a}{2}\right)$. Suy ra

$$\overrightarrow{A'B} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; -a\right); \overrightarrow{IG} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}; -\frac{a}{2}\right); \overrightarrow{A'I} = \left(a; 0; -\frac{a}{2}\right).$$

Ta có $[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{IG}] = \left(-\frac{a^2\sqrt{3}}{12}; \frac{3a^2}{4}; \frac{a^2\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{IG}] \overrightarrow{A'I} = -\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ và $||[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{IG}]|| = \frac{a^2\sqrt{33}}{6}$.

$$\text{Vậy } d(A'B, GI) = \frac{|[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{IG}] \overrightarrow{A'I}|}{||[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{IG}]||} = \frac{3a\sqrt{11}}{22}.$$

Câu 29: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$?

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

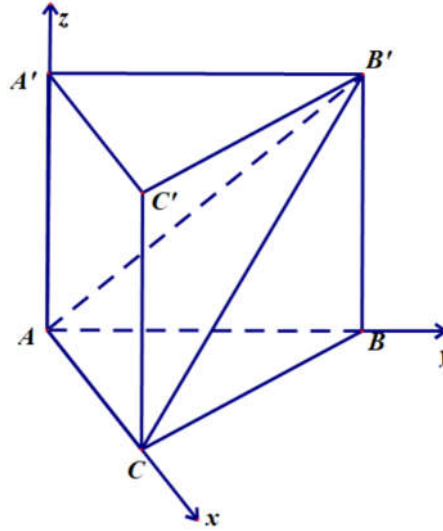
B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

D. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Vì tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{6}$ nên $AB = AC = a\sqrt{3}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;0)$, $C(a\sqrt{3};0;0)$, $B(0;a\sqrt{3};0)$, $A'(0;0;z)$ ($z > 0$).

$$\Rightarrow B'(0;a\sqrt{3};z); \overrightarrow{BC} = (a\sqrt{3}; -a\sqrt{3}; 0), \overrightarrow{BB'} = (0;0;z).$$

$$\text{VTPT của } (BCC'B') \text{ là: } \vec{n}_1 = \frac{-1}{za\sqrt{3}} [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB'}] = (1;1;0).$$

$$\overrightarrow{AC} = (a\sqrt{3};0;0), \overrightarrow{AB'} = (0;a\sqrt{3};z).$$

$$\Rightarrow \text{VTPT của mặt phẳng } (BA'C) \text{ là: } \vec{n}_2 = \frac{1}{a\sqrt{3}} [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}] = (0; -z; a\sqrt{3}).$$

Vì góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60° nên:

$$\cos 60^\circ = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| \Leftrightarrow \frac{|z|}{\sqrt{2(z^2 + 3a^2)}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy thể tích của khối lăng trụ } ABC.A'B'C' \text{ là: } V = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot AA' = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 30: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, với $AB = AC = a$ và góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh bên $AA' = a$. Gọi M là trung điểm của CC' . Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'M)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{11}}{11}$.

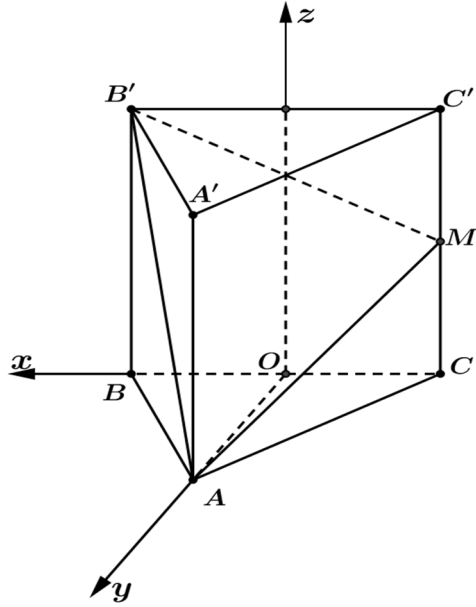
B. $\frac{\sqrt{33}}{11}$.

C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

D. $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

Lời giải

Chọn D



(trong đó gốc tọa độ O trùng với trung điểm của BC).

$$A\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), B'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; a\right), C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), C'\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; a\right), M\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; a\right) = \frac{a}{2}(\sqrt{3}; -1; 2);$$

$$\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}a(-\sqrt{3}; -1; 1).$$

$$\text{Có: } [\overrightarrow{AB'}; \overrightarrow{AM}] = \left(\frac{a^2}{4}; \frac{-3a^2\sqrt{3}}{4}; \frac{-a^2\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2}{4}(1; -3\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$$

Mặt phẳng (ABC) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = \vec{k} = (0; 0; 1)$.

Mặt phẳng $(AB'M)$ có véc tơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{AB'}; \overrightarrow{AM}] = \frac{a^2}{4}(1; -3\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$.

Chọn véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (1; -3\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$

$$\Rightarrow \cos((ABC); (AB'M)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|0 \cdot 1 + 0 \cdot (-3\sqrt{3}) + 1 \cdot (-2\sqrt{3})|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-3\sqrt{3})^2 + (-2\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Câu 31: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = AC = a$ và có cạnh bên bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BB', CC' . Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'MN)$

A. a .

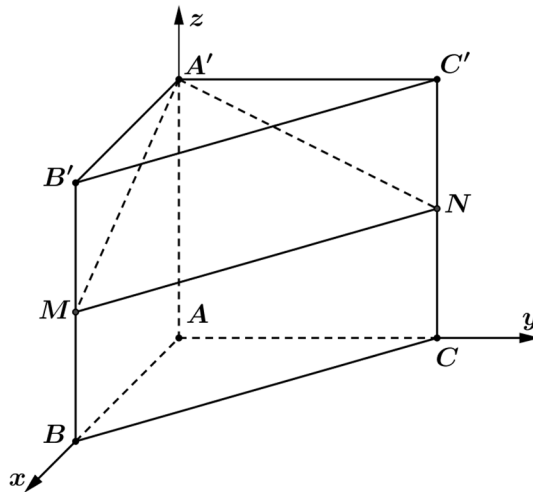
B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{3a}{2}$.

D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho điểm A trùng với gốc tọa độ, điểm B nằm trên trục Ax , điểm C

nằm trên trục Ay , điểm A' nằm trên trục Az . Ta có:

$$A(0;0;0), B(a;0;0), C(0;a;0), A'(0;0;2a), B'(a;0;2a), C'(0;a;2a)$$

Do M, N lần lượt là trung điểm $BB', CC' \Rightarrow M(a;0;a), N(0;a;a)$

$$\overrightarrow{A'M} = (a;0;-a), \overrightarrow{A'N} = (0;a;-a)$$

$$\vec{n} = [\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'N}] \Rightarrow \vec{n} = (a^2; a^2; a^2)$$

Suy ra : $\vec{n}_1 = (1;1;1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'MN)$

Phương trình mặt phẳng $(A'MN)$ là :

$$1(x-0) + 1(y-0) + 1(z-2a) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 2a = 0$$

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'MN)$ là: $d_{(A; (A'MN))} = \frac{|-2a|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Câu 32: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C , $AB = 2a$, $AA' = a$, góc giữa BC' và $(ABB'A')$ bằng 60° . Gọi N là trung điểm AA' và M là trung điểm BB' .

Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(BC'N)$.

A. $\frac{2a\sqrt{74}}{37}$.

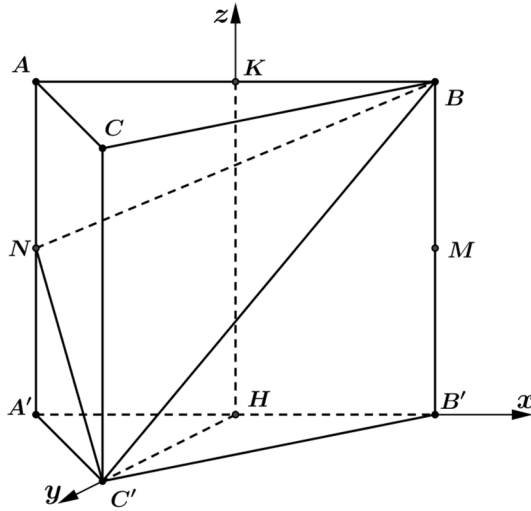
B. $\frac{a\sqrt{74}}{37}$.

C. $\frac{2a\sqrt{37}}{37}$.

D. $\frac{a\sqrt{37}}{37}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là trung điểm cạnh $A'B'$ và AB . Từ giả thiết ta có:

$$HB' = a \Rightarrow HB = a\sqrt{2} \Rightarrow HC' = HB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$$

Mặt khác: HC', HB' và HK đôi một vuông góc nhau. Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ có $H \equiv O$

Tọa độ hóa: $H(0;0;0)$, $C'(0;a\sqrt{6};0)$, $A'(-a;0;0)$, $A(-a;0;a)$, $N\left(-a;0;\frac{a}{2}\right)$, $B'(a;0;0)$, $B(a;0;a)$, $M\left(a;0;\frac{a}{2}\right)$.

$$\text{Xét mặt phẳng } (BC'N) \text{ có } \begin{cases} \overrightarrow{C'B} = (a; -a\sqrt{6}; a) \\ \overrightarrow{BN} = \left(-2a; 0; -\frac{a}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \text{vtp } \vec{n} = (\sqrt{6}; -3; -4\sqrt{6})$$

$$\text{Phương trình } (BC'N) \text{ là: } \sqrt{6}(x+a) - 3y - 4\sqrt{6}\left(z - \frac{a}{2}\right) = 0.$$

Khoảng cách từ M đến $(BC'N)$ là:

$$d(M; (BC'N)) = \frac{\left| \sqrt{6}(a+a) - 3 \cdot 0 - 4\sqrt{6}\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right) \right|}{\sqrt{6+9+96}} = \frac{2a\sqrt{6}}{\sqrt{111}} = \frac{2a\sqrt{74}}{37}.$$

Câu 33: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, góc BAC bằng 120° , $AA' = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm $B'C'$ và CC' . Khoảng cách giữa 2 đường thẳng MN và AH là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

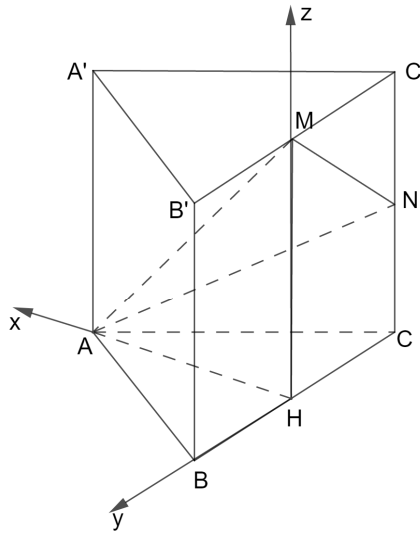
B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm BC . Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{BAC}) = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$$

$$AH^2 = \frac{2 \cdot (AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} = \frac{2 \cdot (a^2 + a^2) - 3a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$$

Vì tam giác ABC cân tại A có AH là đường trung tuyến nên $AH \perp BC$ tại H hay 3 cạnh MH , HA và HB đôi một vuông góc với nhau. Ta chọn hệ trục tọa độ $Hxyz$ sao cho điểm $A \in Hx$, điểm $B \in Hy$ và điểm $M \in Hx$. Khi đó ta có tọa độ các điểm như sau: $H(0;0;0)$,

$$A\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), C\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), M(0; 0; a), N\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MN} = \left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}\right); \overrightarrow{AH} = \left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right); \overrightarrow{AN} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$$

$$\text{Suy ra: } [\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{AH}] = \left(0; \frac{a^2}{4}; -\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

Áp dụng công thức tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, ta có:

$$d(MN, AH) = \frac{|\overrightarrow{AN} \cdot [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AH}]|}{\|[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AH}]\|} = \frac{\sqrt{\frac{3}{32}} a^6}{\sqrt{\frac{a^4}{4}}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Câu 34: Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a . $AA_1 = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi D là trung điểm của BB_1 , M di động trên cạnh AA_1 . Giá trị lớn nhất của diện tích ΔMC_1D là

A. $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

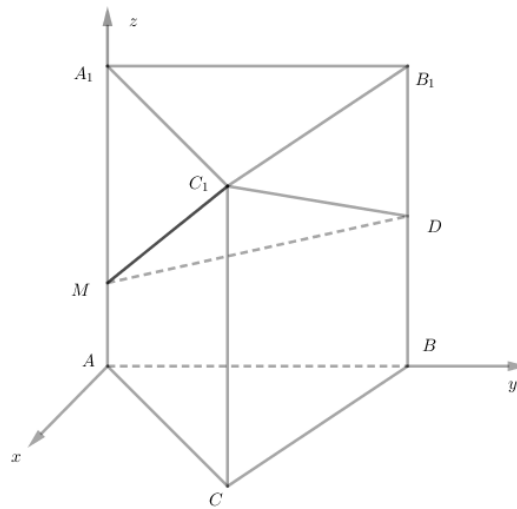
B. $\frac{a^2\sqrt{15}}{6}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



+ Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$; $B \in Oy$; $A_1 \in Oz$.

Khi đó $A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $A_1(0;0;2a)$, $C_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 2a\right)$ và $D(0;a;a)$

Do M di động trên AA_1 , tọa độ $M(0;0;t)$ với $t \in [0; 2a]$

$$\text{Ta có: } S_{\Delta DC_1M} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{DM}] \right|$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{DC_1} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; a\right) \\ \overrightarrow{DM} = (0; -a; t-a) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{DM}] =$$

$$= \frac{-a}{2} \left((t-3a)\sqrt{3}(t-a); a\sqrt{3} \right)$$

$$\Rightarrow \left| [\overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{DM}] \right| = \frac{a}{2} \sqrt{(t-3a)^2 + 3(t-a)^2 + 3a^2}$$

$$= \frac{a}{2} \sqrt{4t^2 - 12at + 15a^2}$$

$$S_{\Delta DC_1M} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{4t^2 - 12at + 15a^2}$$

$$\text{Xét } f(t) = 4t^2 - 12at + 15a^2 \quad (t \in [0; 2a])$$

$$f'(t) = 8t - 12a$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3a}{2}$$

Lập BBT giá trị lớn nhất của $S_{DC_1M} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$ khi $t = 0$ hay $M \equiv A$.

Câu 35: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a , M là điểm di chuyển trên đường thẳng $A'C'$; Tính khoảng cách lớn nhất giữa AM và BC'

A. $\frac{a\sqrt{34}}{6}$.

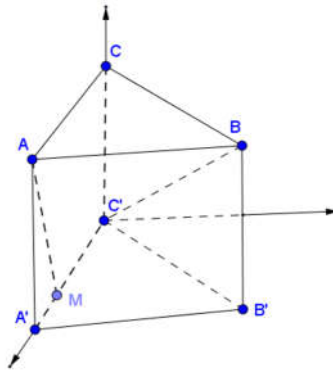
B. $\frac{a\sqrt{17}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Không mất tính tổng quát chọn $a = 1$; Chọn hệ trục tọa độ sao cho gốc tọa độ trùng C' ; Ox trùng $\overrightarrow{C'A'}$; Oz trùng với $\overrightarrow{C'C}$; Sao cho:

$$A'(1; 0; 0); \quad C'(0; 0; 0); \quad B'\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right); \quad A(1; 0; 1); \quad B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right); \quad C(0; 0; 1); \quad M(m; 0; 0)$$

$$\text{Khi đó: } d(AM; C'B) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{C'B} \right] \cdot \overrightarrow{AC'} \right|}{\left| \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{C'B} \right] \right|}$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} = (m-1; 0; -1); \quad \overrightarrow{C'B} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right); \quad \overrightarrow{AC'} = (-1; 0; -1)$$

$$d(AM; C'B) = \frac{\left| \frac{\sqrt{3}}{2}m \right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - m\right)^2 + (m-1)^2} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}|m|}{\sqrt{\frac{7}{4} - \frac{5}{2}m + \frac{7}{4}m^2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4} \cdot \frac{1}{m^2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{m} + \frac{7}{4}}}$$

($m \neq 0$ vì nếu $m = 0$ thì M trùng C' dẫn đến khoảng cách bằng 0)

Khoảng cách đó lớn nhất khi $\frac{7}{4} \cdot \frac{1}{m^2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{m} + \frac{7}{4}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow m = \frac{7}{5}$; Khi đó: khoảng cách lớn nhất là: $\frac{\sqrt{14}}{4}$; Vậy: trong trường hợp tổng quát, khoảng cách lớn nhất là $\frac{a\sqrt{14}}{4}$ khi $MC' = \frac{7a}{5}$.

Câu 36: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$.

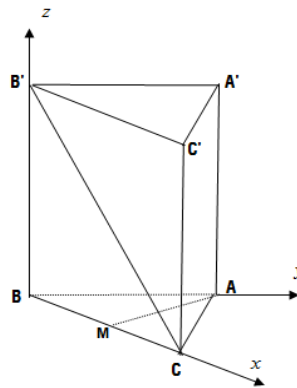
B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

C. $a\sqrt{7}$.

D. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Chọn hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau:

$$B(0;0;0); A(0;a;0); C(a;0;0); B'(0;0;a\sqrt{2}); M\left(\frac{a}{2};0;0\right)$$

$$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{a}{2}; -a; 0\right); \overrightarrow{B'C} = (a; 0; -a\sqrt{2}); \overrightarrow{AB'} = (0; -a; a\sqrt{2})$$

$$\text{Ta có: } [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}] = \left(a^2\sqrt{2}; \frac{a^2}{\sqrt{2}}; a^2\right)$$

+) Khoảng cách giữa $AM, B'C$

Vì: $[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}] \cdot \overrightarrow{AB'} = \frac{a^3}{\sqrt{2}}$ nên $AM, B'C$ chéo nhau.

$$d(AM, B'C) = \frac{[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}] \cdot \overrightarrow{AB'}}{[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}]} = \frac{\frac{a^3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2a^4 + \frac{1}{2}a^4 + a^4}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

Câu 37: Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = 1, AC = 2$. Gọi φ là góc tạo bởi đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'BC)$ có số đo lớn nhất. Biết $\sin \varphi = \frac{p}{q}$ (với p, q nguyên tố cùng nhau). Giá trị tổng $p + q$ là

A. 11.

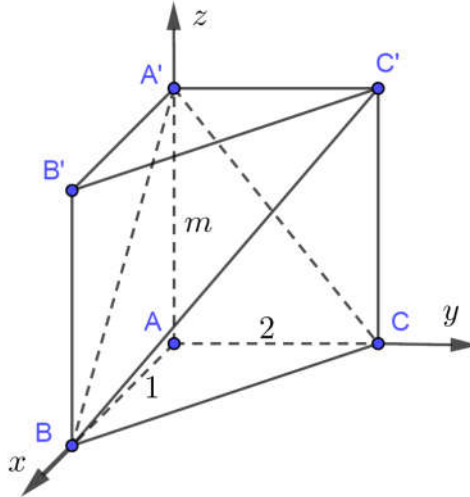
B. 7.

C. 5.

D. 9

Lời giải

Chọn D



Giả sử $AA' = m$ ($m > 0$). Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:

$$A(0;0;0), B(1;0;0), C(0;2;0), C'(0;2;m), A'(0;0;m)$$

Phương trình mặt phẳng $(A'BC)$ là: $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{m} = 1 \Leftrightarrow 2mx + my + 2z - 2m = 0$

$\Rightarrow$ véc tơ pháp tuyến mặt phẳng $(A'BC)$ là: $\vec{n}(2m; m; 2)$

$\overrightarrow{BC'}(-1; 2; m)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng BC'

$$\sin \varphi = \left| \cos(\vec{n}; \overrightarrow{BC'}) \right| = \frac{2m}{\sqrt{5m^2 + 4} \cdot \sqrt{m^2 + 5}} = \frac{2m}{\sqrt{(5m^4 + 20) + 29m^2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức cô si cho 2 số $5m^4$ và 20:

$$\sin \varphi \leq \frac{2m}{\sqrt{2 \cdot \sqrt{5m^4 \cdot 20} + 29m^2}} = \frac{2m}{\sqrt{20m^2 + 29m^2}} = \frac{2}{7}$$

Dấu “=” xảy ra khi $5m^4 = 20 \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$. Vậy $p = 2, q = 7 \Rightarrow p + q = 9$.

Câu 38: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a . Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Gọi M, N là trung điểm của BC và CC' . Tính khoảng cách giữa $A'M$ và AN .

A. $\frac{6a\sqrt{97}}{97}$.

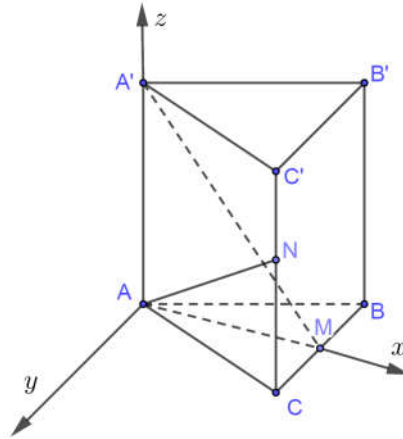
B. $\frac{3a\sqrt{97}}{97}$.

C. $\frac{6a\sqrt{65}}{65}$.

D. $\frac{3a\sqrt{65}}{65}$.

Lời giải

Chọn B



Do BC vuông góc với mặt phẳng $(A'MA)$ nên góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ là góc $A'MA$ bằng 60° ,

Trong tam giác vuông $A'AM$: $\tan 60^\circ = \frac{AA'}{AM} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}$

Trong mặt phẳng (ABC) kẻ đường thẳng Ay song song với BC , khi đó 3 đường $AM, Ay, A'A$ đôi một vuông góc với nhau.

Xét hệ tọa độ $Axyz$ sao cho: $M \in Ax, A' \in Az$

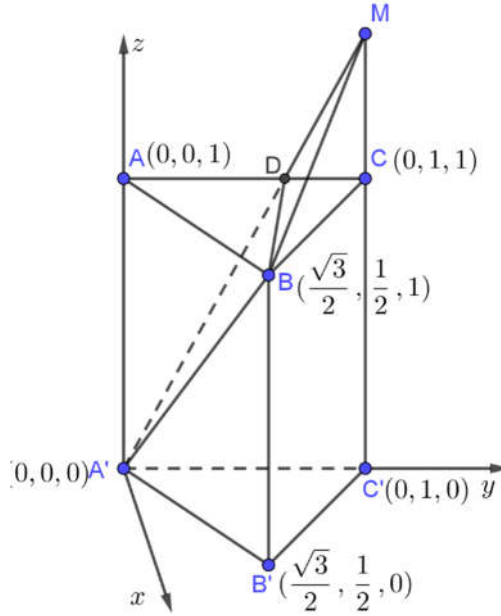
Ta có: $A(0;0;0), A'(0;0;\frac{3a}{2}), M(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0), N(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};\frac{3a}{4})$

suy ra: $\overrightarrow{A'M}(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;-\frac{3a}{2}), \overrightarrow{AN}(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};\frac{3a}{4}) \Rightarrow [\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{AN}] = (\frac{3a^2}{4}; -\frac{9a^2\sqrt{3}}{8}; \frac{a^2\sqrt{3}}{4})$

Áp dụng công thức tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau, ta có:

$$d(A'M, AN) = \frac{|[\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{AN}] \cdot \overrightarrow{AM}|}{|[\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{AN}]|} = \frac{3a^3\sqrt{3}/8}{a^2\sqrt{291}/8} = \frac{3a\sqrt{97}}{97}$$

Cách giải theo hình học cổ điển:



Gọi D là giao điểm của $A'M$ và AC .

Vì tam giác $A'B'C'$ là tam giác cân cạnh bằng a nên ta suy ra độ dài các đường trung tuyến là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra tọa độ các điểm như hình vẽ.

Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ vậy $\Rightarrow \triangle ADA' \sim \triangle CDM \Rightarrow \frac{AD}{CD} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{DC}$

Vậy tọa độ của điểm D là: $D\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$

Ta có mặt phẳng (ABC) có phương trình $z = 0 \Rightarrow \vec{n}_{(ABC)} = (0; 0; 1)$

Mặt khác mặt phẳng $(A'MB)$ là mặt phẳng đi qua ba điểm A', D và B .

Ta có: $\overrightarrow{A'D} = \left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$ và $\overrightarrow{A'B} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1\right) \Rightarrow \vec{n}_{(A'BM)} = [\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{A'B}] = \left(\frac{1}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Vậy $\Rightarrow$ cô sin góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'MB)$ và (ABC) là:

$$\cos\left(\widehat{(A'BM), (ABC)}\right) = \left|\cos\left(\vec{n}_{(A'BM)}, \vec{n}_{(ABC)}\right)\right| = \frac{\left|\frac{-\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3}} \cdot \sqrt{1}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Cách khác:

$$\overrightarrow{A'B} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1\right), \overrightarrow{A'M} = \left(0; 1; \frac{3}{2}\right), [\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'M}] = \left(-\frac{1}{4}; -\frac{3\sqrt{3}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{4}(1; 3\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$$

$\Rightarrow mp(A'MB)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(A'MB)} = (1; 3\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$.

$mp(ABC)$ là $mp(Oxy): z=0$ có vtpt $\vec{n}_{(ABC)} = (0; 0; 1)$

$$\cos(\widehat{(A'MB), (ABC)}) = \left| \cos(\widehat{\vec{n}_{(A'MB)}, \vec{n}_{(ABC)}}) \right| = \frac{|-2\sqrt{3}|}{\sqrt{1+27+12}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

Câu 40: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, A'C', BB'$. Tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.

A. $\frac{5}{48}V$.

B. $\frac{1}{8}V$.

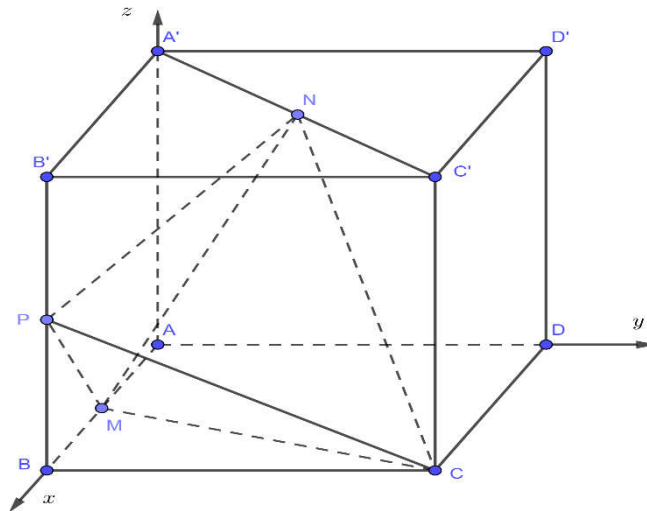
C. $\frac{7}{48}V$.

D. $\frac{1}{6}V$.

Lời giải

Chọn A

Đây là bài toán tổng quát, ta đưa về cụ thể, giả sử hình hộp đã cho là hình lập phương có cạnh bằng 1. Khi đó $V = 1$.



Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ, A là gốc toạ độ, các trục Ox, Oy, Oz nằm trên các cạnh AB, AD, AA' .

Khi đó,

$$C(1;1;0); B(1;0;0) \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right); B'(1;0;1) \Rightarrow P\left(1; 0; \frac{1}{2}\right);$$

$$A'(0;0;1), C'(1;1;1) \Rightarrow N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{CM} = \left(-\frac{1}{2}; -1; 0\right), \overrightarrow{CN} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right), \overrightarrow{CP} = \left(0; -1; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Khi đó } V_{CMNP} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}] \cdot \overrightarrow{CP}| = \frac{1}{6} \left| -\frac{5}{8} \right| = \frac{5}{48} \Rightarrow V_{CMNP} = \frac{5}{48}V$$

Câu 41: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, có đáy là hình thoi cạnh $2a$, tâm O , $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và $AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm O . Gọi M là trung điểm CD . Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'M$ và $B'D'$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

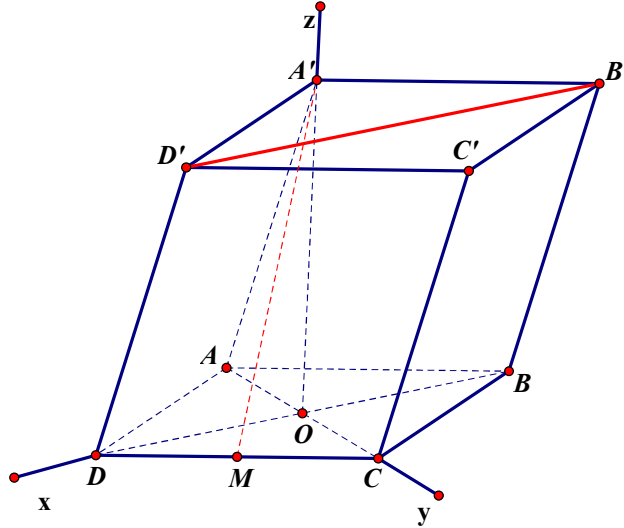
B. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

C. $\frac{3\sqrt{21}}{7}$.

D. $\frac{4\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn B



+) Đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, tâm O , $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên tam giác ABD là tam giác đều cạnh $2a \Rightarrow AO = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = \sqrt{3}a$

$$A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$$

+) Giả sử $a = 1$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ $O \equiv O(0;0;0)$, $D(1;0;0) \in Ox$, $C(0;\sqrt{3};0) \in Oy$ và $A'(0;0;1) \in Oz$. Khi đó, $B(-1;0;0)$, $A(0;-\sqrt{3};0)$

Ta có: $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AA'} = (0;\sqrt{3};1)$ nên tìm được $B'(-1;\sqrt{3};1)$ và $D'(1;\sqrt{3};1)$

$$M \text{ là trung điểm } CD \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$+) \text{ Ta có: } d(A'M; B'D') = \frac{|\overrightarrow{[A'M; B'D']} \cdot \overrightarrow{A'B'}|}{|\overrightarrow{[A'M; B'D']}|}$$

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{A'M} &= \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -1\right) \\ \overrightarrow{B'D'} &= (2; 0; 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{[A'M; B'D']} = (0; -2; -\sqrt{3})$$

Mà $\overrightarrow{A'B'} = (-1; \sqrt{3}; 0)$ nên $d(A'M; B'D') = \frac{|0 - 2\sqrt{3} + 0|}{\sqrt{0 + 4 + 3}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$.

Câu 42: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có $AB = a, AD = a\sqrt{2}$, góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $A'B$ và K là hình chiếu vuông góc của A trên $A'D$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và $(ABB'A')$.

A. 60° .

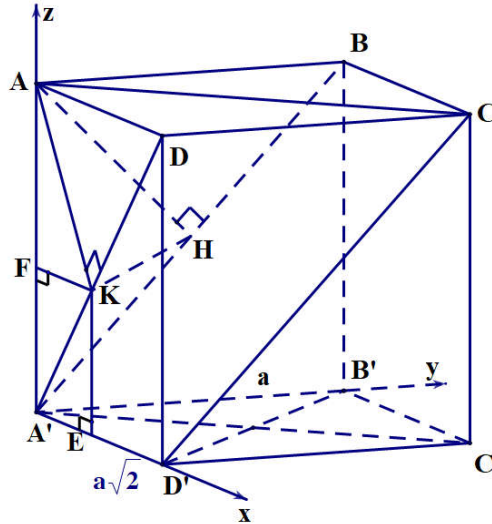
B. 45° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn B



Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $A'C'$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ trên $(ABCD) \Rightarrow (A'C, (ABCD)) = (A'C, A'C') = \widehat{CA'C'} = 30^\circ$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{3}$; $\tan \widehat{CA'C'} = \frac{CC'}{A'C'} \Rightarrow CC' = a$.

Kết hợp với giả thiết ta được $ABB'A'$ là hình vuông và có H là tâm.

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K trên $A'D'$ & $A'A$.

Ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$; $A'K = \sqrt{A'A^2 - AK^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$;

$\frac{1}{KF^2} = \frac{1}{KA^2} + \frac{1}{A'K^2} \Rightarrow KF = \frac{a\sqrt{2}}{3}$; $KE = \sqrt{A'K^2 - KF^2} \Rightarrow KE = \frac{a}{3}$.

Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thỏa mãn $O \equiv A'$ còn D', B', A theo thứ tự thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Khi đó ta có tọa độ các điểm lần lượt là:

$A(0;0;a), B'(0;a;0), H(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}), K(\frac{a\sqrt{2}}{3};0;\frac{a}{3}), E(\frac{a\sqrt{2}}{3};0;0), F(0;0;\frac{a\sqrt{2}}{3})$.

Mặt phẳng $(ABB'A')$ là mặt phẳng (yOz) nên có VTPT là $\vec{n}_1 = (1;0;0)$;

Ta có $\left[\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AH}\right] = \frac{a^2}{6} \vec{n}_2, \vec{n}_2(2; \sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Mặt phẳng (AKH) có VTPT là $\vec{n}_2 = (2; \sqrt{2}; \sqrt{2})$;

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và $(ABB'A')$.

Ta có $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

Câu 43: Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A_1 lên $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD . Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) .

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

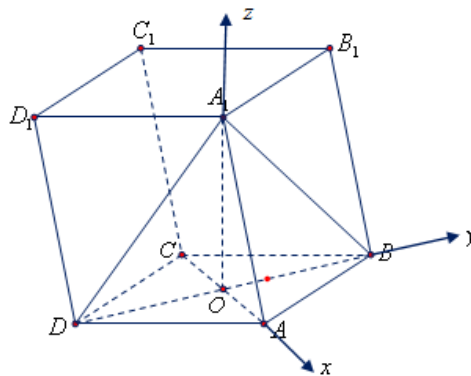
B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{21}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục tọa độ sao cho tâm O của hình vuông $ABCD$ là gốc tọa độ, OA là trục Ox , OB là trục Oy , OA_1 là trục Oz như hình vẽ

$$\Rightarrow A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$$

Vì $mp(A_1BD) \equiv mp(Oyz)$ nên $mp(A_1BD)$ có phương trình: $x = 0$

AB_1 cắt $mp(A_1BD)$ tại trung điểm AB_1

$$\Rightarrow d(B_1; (A_1BD)) = d(A; (A_1BD)) = \left| \frac{a\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Câu 44: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi K là trung điểm của DD' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

A. $\frac{a}{3}$.

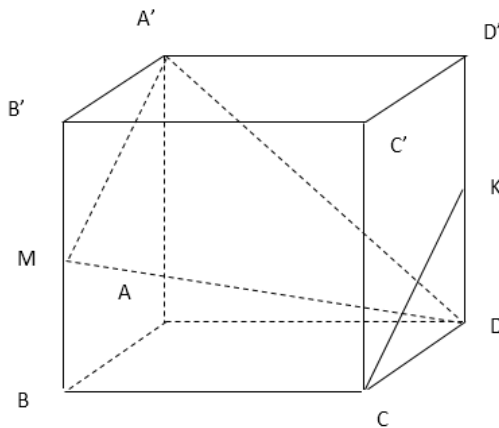
B. $\frac{a}{4}$.

C. $\frac{a}{5}$.

D. $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O trùng với điểm A , các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AA' . Khi đó $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;a), B'(a;0;a), C(a;a;0)$

Gọi M là trung điểm của $BB' \Rightarrow M\left(a; 0; \frac{a}{2}\right)$

$$\overrightarrow{A'M} = \left(a; 0; -\frac{a}{2}\right), \quad \overrightarrow{A'D} = (0; a; -a) \Rightarrow [\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'D}] = \left(\frac{a^2}{2}; a^2; a^2\right) = \frac{a^2}{2}(1; 2; 2)$$

Suy ra $(A'DM)$ nhận $\vec{n} = (1; 2; 2)$ làm vec tơ pháp tuyến và đi qua điểm $A'(0; 0; a)$

$$(A'DM): x + 2y + 2z - 2a = 0$$

Do M là trung điểm của BB' nên $A'M \parallel CK$

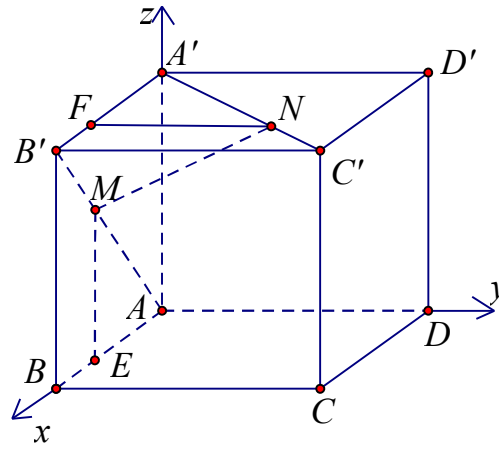
$$d(CK, A'D) = d(CK, (A'DM)) = d(C, (A'DM)) = \frac{|a + 2a - 2a|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{a}{3}.$$

Câu 45: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3a, AD = AA' = a$. Lấy điểm M thuộc đoạn AB' , điểm N thuộc đoạn $A'C'$ sao cho $AM = A'N = x, (0 \leq x \leq \sqrt{10}a)$. Tìm x theo a để đoạn MN nhỏ nhất.

- A. 0. B. $\frac{\sqrt{30}a}{3}$. C. $\frac{\sqrt{10}a}{2}$. D. $\frac{\sqrt{10}a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = \sqrt{9a^2 + a^2} = \sqrt{10}a$.

Gọi E là hình chiếu của M lên AB .

$$\text{Ta có } \frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AB'} \Rightarrow AE = \frac{AB \cdot AM}{AB'} = \frac{3ax}{\sqrt{10}a} = \frac{3x}{\sqrt{10}}.$$

$$\frac{ME}{BB'} = \frac{AM}{AB'} \Rightarrow ME = \frac{BB' \cdot AM}{AB'} = \frac{ax}{\sqrt{10}a} = \frac{x}{\sqrt{10}}.$$

Gọi F là hình chiếu của N lên $A'B'$.

$$\text{Tương tự ta tính được } A'C' = \sqrt{10}a, A'F = \frac{3x}{\sqrt{10}}, NF = \frac{x}{\sqrt{10}}.$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A$, các điểm B, D, A' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz . Khi đó ta có tọa các điểm lần lượt là: $A(0;0;0), B(3a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;a), M\left(\frac{3x}{\sqrt{10}};0;\frac{x}{\sqrt{10}}\right), N\left(\frac{3x}{\sqrt{10}};\frac{x}{\sqrt{10}};a\right)$.

$$\text{Ta có } MN = \sqrt{\frac{x^2}{10} + \left(\frac{x}{\sqrt{10}} - a\right)^2} = \sqrt{\frac{2x^2}{10} - \frac{2ax}{\sqrt{10}} + a^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{10}} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{a^2}{2}} \geq \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{GTNN của } MN \text{ là } \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ khi } \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{10}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{10}a}{2}.$$

Câu 46: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a, AA' = 3a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $BC, C'D'$ và DD' . Tính khoảng cách từ A đến mp(MNP).

A. $\frac{15}{22}a$.

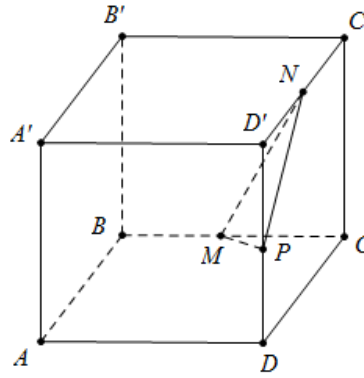
B. $\frac{9}{11}a$.

C. $\frac{3}{4}a$.

D. $\frac{15}{11}a$.

Lời giải

Chọn D



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O trùng với điểm B , tia $Ox; Oy; Oz$ lần lượt trùng với tia $BA; BC; BB'$. Khi đó $B(0;0;0); A(a;0;0); C(0;2a;0); D(a;2a;0); C'(0;2a;3a); D'(a;2a;3a)$.

Suy ra $M(0;a;0); P(a;2a;\frac{3a}{2})$ và $N(\frac{a}{2};2a;3a)$.

Ta có $\overrightarrow{MP}(a;a;\frac{3a}{2}); \overrightarrow{MN}(\frac{a}{2};a;3a)$, vector pháp tuyến của (MNP) là:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{MP}; \overrightarrow{MN}] = a^2 \left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{4}; \frac{1}{2} \right) = \frac{a^2}{4} (6; -9; 2)$$

Suy ra $(MNP): 6x - 9y + 2z + 9a = 0; A(a;0;0)$. Vậy $d(A; (MNP)) = \frac{|6a + 9a|}{\sqrt{6^2 + 9^2 + 2^2}} = \frac{15a}{11}$.

Câu 47: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân, $AA' = 2a$, $AB = AC = a$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$, I là tâm của hình chữ nhật $ABB'A'$. Thể tích của khối $AIGCG'$.

A. $\frac{a^3}{2}$.

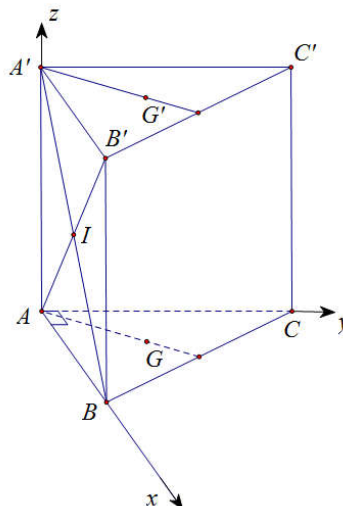
B. $\frac{a^3}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{5}}{30}$.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thỏa mãn O trùng với điểm A , các tia Ox , Oy , Oz trùng với các tia AB , AC và AA' .

Suy ra $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;a;0)$, $A'(0;0;2a)$, $B'(a;0;2a)$, $C'(0;a;2a)$, $G\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3};0\right)$, $G'\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3};2a\right)$, $I\left(\frac{a}{2};0;a\right)$ (vì I là trung điểm của AB' và $A'B$).

Ta có $\overrightarrow{IG} = \left(-\frac{a}{6}; \frac{a}{3}; -a\right)$ và $\overrightarrow{G'C} = \left(-\frac{a}{3}; \frac{2a}{3}; -2a\right)$. Suy ra $\overrightarrow{IG}$ và $\overrightarrow{G'C}$ cùng phương.

Do đó bốn điểm I , G , C , G' đồng phẳng.

Mặt khác $\overrightarrow{GC} = \left(-\frac{a}{3}; \frac{2a}{3}; 0\right)$

Vì $[\overrightarrow{G'C}, \overrightarrow{GC}] = \left(\frac{4a^2}{3}; \frac{2a^2}{3}; 0\right)$ nên mặt phẳng $(IGCG')$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; 0)$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(IGCG')$: $2x + y - a = 0$.

Suy ra $h = d(A, (IGCG')) = \frac{|-a|}{\sqrt{4+1}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Diện tích tứ giác $IGCG'$ bằng $S_{IGCG'} = \frac{1}{2}(IG + G'C) \cdot d(IG, G'C)$.

Trong đó $IG = \frac{a\sqrt{41}}{6}$, $G'C = \frac{a\sqrt{41}}{3}$, $d(IG, G'C) = d(G, G'C) = \frac{[\overrightarrow{G'C}, \overrightarrow{GC}]}{|\overrightarrow{G'C}|}$

Vì $[\overrightarrow{G'C}, \overrightarrow{GC}] = \left(\frac{4a^2}{3}; \frac{2a^2}{3}; 0\right)$ nên $d(IG, G'C) = 2a\sqrt{\frac{5}{41}}$.

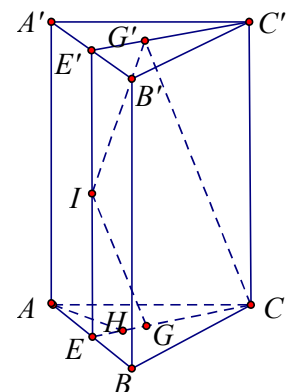
Suy ra $S_{IGCG'} = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{41}}{6} + \frac{a\sqrt{41}}{3}\right) \cdot 2a\sqrt{\frac{5}{41}} = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$.

Thể tích cần tìm bằng

$V_{A.IGCG'} = \frac{1}{3} \cdot S_{IGCG'} \cdot d(A, (IGCG')) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{a^3}{6}$.

Cách khác:

Gọi E, E' là trung điểm $AB, A'B'$, kẻ AH vuông góc CE tại $H \Rightarrow CEE'C'$ là hình chữ nhật,



$$EE' = CC' = 2a, CE = C'E' = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, CG = C'G' = \frac{a\sqrt{5}}{3}, GE = G'E' = \frac{a\sqrt{5}}{6},$$

$$AH = \frac{AE \cdot AC}{CE} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$S_{IGCG'} = S_{CEE'C'} - S_{IEG} - S_{IE'G'} - S_{CG'C'} = 2a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} - 2 \left(\frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{6} \right) - \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{3} = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$$

$$V_{A.IGCG'} = \frac{1}{3} \cdot S_{IGCG'} \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{5}}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{a^3}{6}$$

Câu 48: Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a . Mặt phẳng $(ABB'A')$ vuông góc với đáy, tam giác $A'AB$ vuông tại A' , góc giữa BA' và đáy bằng 60° . Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng IA' và DB' .

A. $\frac{a}{2\sqrt{55}}$.

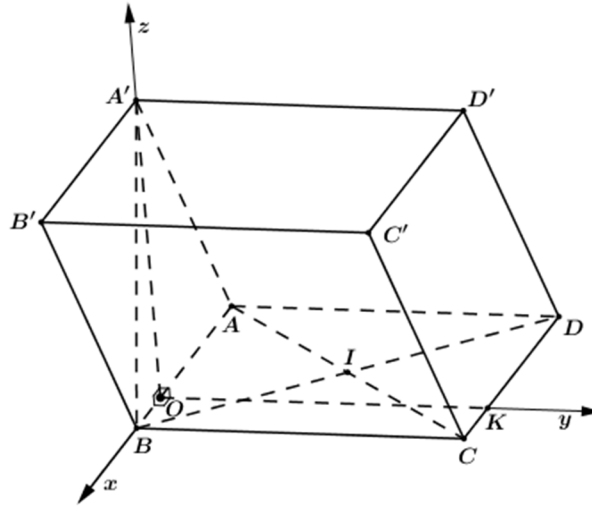
B. $\frac{a}{\sqrt{55}}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{55}}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là hình chiếu vuông góc của A' lên cạnh AB . Vì mặt phẳng $(ABB'A')$ vuông góc với $(ABCD)$ nên $A'O \perp (ABCD)$.

Ta có góc giữa BA' và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{A'BO}$

$$\text{Ta có } BA' = AB \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}, BO = A'B \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{4}, OA' = A'B \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

$$O(0;0;0), A'(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{4}), B(\frac{a}{4};0;0), I(\frac{-a}{4};\frac{a}{2};0), D(\frac{-3a}{4};a;0), B'(a;0;\frac{a\sqrt{3}}{4})$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IA'} = \left(\frac{a}{4}; -\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4} \right), \overrightarrow{DB'} = \left(\frac{7a}{4}; -a; \frac{a\sqrt{3}}{4} \right); \overrightarrow{A'B'} = (a;0;0).$$

Khi đó: $[\overrightarrow{IA'}; \overrightarrow{DB'}] = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{8}; \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}; \frac{5a^2}{8} \right)$.

Ta có: $d(A'I; DB') = \frac{|\overrightarrow{IA'}; \overrightarrow{DB'}| \cdot |\overrightarrow{A'B'}|}{|\overrightarrow{IA'}; \overrightarrow{DB'}|} = \frac{\left| \frac{a^3\sqrt{3}}{8} \right|}{\sqrt{a^4 \left(\frac{3}{64} + \frac{27}{64} + \frac{25}{64} \right)}} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{8}{a^2\sqrt{55}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{55}}.$

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}.$

D. $\frac{\sqrt{5}}{5}.$

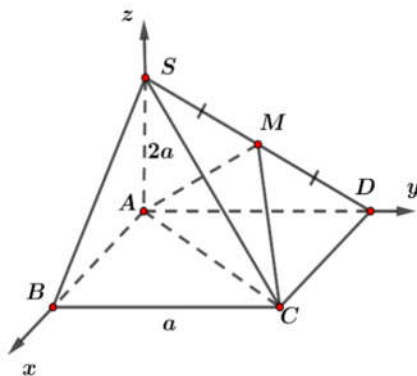
Lời giải

Chọn B

Để thuận tiện trong việc tính toán ta chọn $a = 1$.

Trong không gian, gán hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho gốc O trùng với điểm A , tia Ox chứa đoạn thẳng AB , tia Oy chứa đoạn thẳng AD , tia Oz chứa đoạn thẳng AS . Khi đó: $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $S(0;0;2)$, $D(0;1;0)$.

Vì M là trung điểm SD nên tọa độ M là $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$.



Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{SB} = (1;0;-2) \\ \overrightarrow{BC} = (0;1;0) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(SBC)} = [\overrightarrow{SB}; \overrightarrow{BC}] = (2;0;1).$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) .

Suy ra $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_{(SBC)}; \vec{n}_{(AMC)}) \right| = \frac{|\vec{n}_{(SBC)} \cdot \vec{n}_{(AMC)}|}{|\vec{n}_{(SBC)}| \cdot |\vec{n}_{(AMC)}|} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$

Mặt khác, $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1}.$

Vậy $\tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} - 1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$

Câu 50: Hai quả bóng hình cầu có kích thước khác nhau được đặt ở hai góc của một căn nhà hình hộp chữ nhật sao cho mỗi quả bóng đều tiếp xúc với hai bức tường và nền của nhà đó. Biết rằng

trên bề mặt của hai quả bóng đều tồn tại một điểm có khoảng cách đến hai bức tường và nền nhà mà nó tiếp xúc bằng 1; 2; 4. Tổng độ dài đường kính của hai quả bóng đó là?

A. 7.

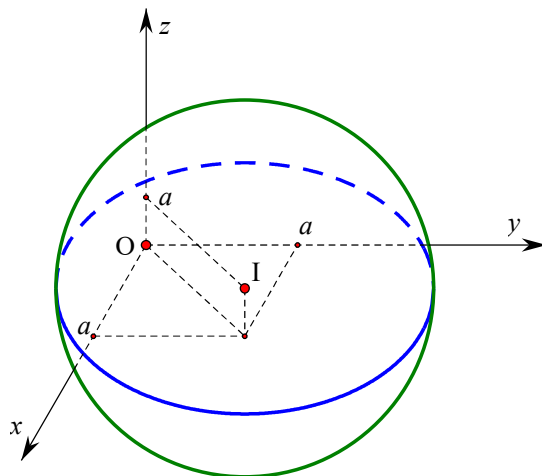
B. 12.

C. 14.

D. 16.

Lời giải:

Chọn C



- ☐ Xét 1 quả bóng tại góc nhà
- ☐ Chọn hệ trục như hình vẽ, ở đó các trục Ox, Oy, Oz là ba mép tường nhà; O là góc nhà.
- ☐ Tâm của quả bóng là $I(a; b; c)$.
- ☐ Vì mỗi quả bóng đều tiếp xúc với hai bức tường và nền của nhà nên chúng tiếp xúc với ba mặt

phẳng tọa độ, do đó $d(I; (Oxy)) = d(I; (Oyz)) = d(I; (Oxz)) = R \Rightarrow a = b = c = R > 0$.

- ☐ Gọi $M(x; y; z)$ là điểm nằm trên quả bóng có khoảng cách đến hai bức tường và nền nhà mà nó

tiếp xúc bằng 1; 2; 4, ta suy ra $M(1; 2; 4)$.

- ☐ Điểm M nằm trên quả bóng khi:

$$IM = R = a \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (a-2)^2 + (a-4)^2} = a$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 14a + 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7-\sqrt{7}}{2} \\ a = \frac{7+\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

- ☐ Vì hai quả bóng có vai trò và tính chất như nhau nên chúng lần lượt có bán kính là:

$$R_1 = \frac{7-\sqrt{7}}{2}; R_2 = \frac{7+\sqrt{7}}{2}$$

- ☐ Vậy tổng đường kính của hai quả bóng là $d = 2(R_1 + R_2) = 14$.

----- **HẾT** -----