



ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (4,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(xf(x) + f(y)) = f(f(x^2)) + y \text{ với mọi số thực } x, y.$$

Câu 2 (4,0 điểm). Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n và mọi số thực dương a ta có

$$a^n + \frac{1}{a^n} - 2 \geq n^2 \left(a + \frac{1}{a} - 2 \right).$$

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O) có $AB < AC$. Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$). Gọi O_1 là điểm đối xứng với O qua BC . Đường thẳng AO_1 cắt cạnh BC tại L , các đường thẳng DE và HC cắt nhau tại M , các đường thẳng DF và HB cắt nhau tại N . Chứng minh rằng:

a) $MN \perp AO_1$.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN tiếp xúc với đường tròn đường kính AL .

Câu 4 (4,0 điểm). Cho dãy số $(a_n)_{n \geq 1}$ xác định bởi công thức truy hồi sau:

$$a_1 = 16, a_{n+1} = 16 + a_n^7 \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng:

a) a_k chia hết cho a_n với mọi số nguyên dương k, n .

b) Với mọi số nguyên tố p , tồn tại các số nguyên dương N và T sao cho $a_n \equiv a_{n+T} \pmod{p}$ với mọi $n \geq N$.

c) Tồn tại vô hạn số nguyên tố p thỏa mãn: Trong dãy (a_n) có vô hạn số hạng chia hết cho p .

Câu 5 (4,0 điểm). An và Bình cùng chơi một trò chơi trên bảng ô vuông kích thước $(2n+1) \times (2n+1)$ và An là người đi trước. Ban đầu, tất cả các ô trên bảng đều có màu trắng. Ở mỗi lượt chơi, An tô một ô màu trắng thành màu xanh còn Bình tô một ô màu trắng thành màu đỏ. Trò chơi kết thúc khi hai bạn tô hết tất cả các ô trên bảng. An thắng nếu với hai ô màu xanh bất kì tồn tại ít nhất một chuỗi các ô xanh lân cận kết nối chúng với nhau (hai ô gọi là lân cận nếu chúng có chung ít nhất một đỉnh). Nếu không thì Bình là người thắng.

a) Khi $n = 1$, xác định người chơi có chiến lược thắng.

b) Khi $n \geq 2$, chứng minh Bình có chiến lược thắng.

HẾT

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Lưu ý: - Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.