



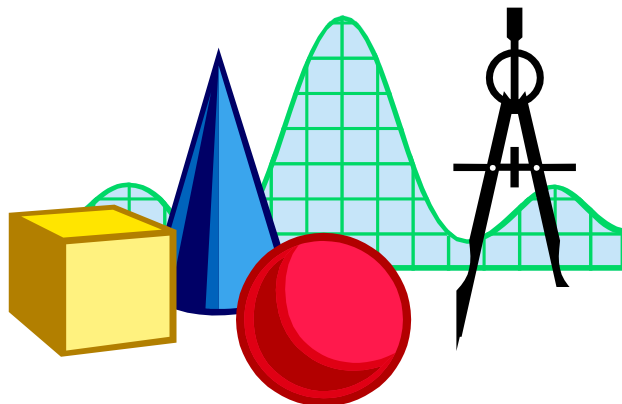
Giáo viên: **LÊ BÁ BẢO**_ Trường THPT Đặng Huy Trứ, Huế

SĐT: 0935.785.115

Đăng kí học theo địa chỉ: **116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế**
Hoặc Trung tâm Km 10 Hương Trà

KHẢO SÁT HÀM SỐ

TIẾP TUYẾN VÀ SỰ TIẾP XÚC



Phiên bản 2020

Lê Bá Bảo!

Cố lên các em nhé!

Huế, tháng 9/2020



Chuyên đề: KHẢO SÁT HÀM SỐ

Chủ đề 7: TIẾP TUYẾN - SỰ TIẾP XÚC

Môn: TOÁN 12 _ GIẢI TÍCH

I- LÝ THUYẾT

Cho hàm số $y = f(x)$, có đồ thị (C).

1. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad (*)$$

Lưu ý: + Điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ được gọi là tiếp điểm.

+ Đường thẳng bất kỳ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ có hệ số góc k ,

có phương trình: $y - y_0 = k(x - x_0)$

+ Như vậy, **hệ số góc của tiếp tuyến** của (C) tại $M_0(x_0; y_0) \in (C)$

có hệ số góc $k = f'(x_0)$. Hay hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình: $k = f'(x)$. Rõ ràng, tiếp tuyến của (C) hoàn toàn xác định nếu biết **hệ số góc** của tiếp tuyến **hoặc** hoành độ tiếp điểm.

Nhắc: Cho hai đường thẳng $\Delta_1: y = k_1x + m_1$ và $\Delta_2: y = k_2x + m_2$.

Lúc đó: $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$ và $m_1 \neq m_2$ $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$

2. **Điều kiện tiếp xúc:** Cho hai hàm số $y = f(x)$, (C) và $y = g(x)$, (C').

(C) và (C') tiếp xúc nhau khí chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

Đặc biệt: Đường thẳng $y = kx + m$ là tiếp tuyến với (C): $y = f(x)$ khi chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = kx + m \\ f'(x) = k \end{cases}$$

II- MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN TẠI TIẾP ĐIỂM

Câu 1: (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Gọi d là tiếp tuyến tại điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x - 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. d có hệ số góc âm. B. d có hệ số góc dương.
C. d song song với đường thẳng $y = -4$. D. d song song với trục Ox .

Lời giải:

Ta có đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x - 2$ nhận điểm $A(-1; 0)$ làm điểm cực đại. Mà $y'(-1) = 0$.

Suy ra phương trình đường thẳng $d: y = 0$. Do đó d song song với đường thẳng $y = -4$.

Câu 2: (THPT Tây Thụy Anh - Thái Bình - Lần 2 - 2018 - BTN) Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

- A. Có hệ số góc dương. B. Song song với trục hoành.
C. Có hệ số góc bằng -1 . D. Song song với đường thẳng $x = 1$.

Lời giải:

Ta có $y' = x^2 - 4x + 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $A(3; -5)$.

Suy ra tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm cực tiểu có phương trình là $y = -5$.

Câu 3: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Hệ số góc của tiếp tuyến tại $A(1; 0)$ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là

- A. 1. B. -1 . C. -3 . D. 0.

Lời giải:

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $A(1; 0)$ của đồ thị hàm số đã cho là: $f'(1) = 3.1^2 - 6.1 = -3$.

Câu 4: (CỤM 8 TRƯỜNG CHUYÊN LẦN 1) Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$ có đồ thị (C) . Tính hệ số góc k của tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 1.

- A. $k = 25$. B. $k = -5$. C. $k = 10$. D. $k = 1$.

Lời giải:

Ta có: $y' = 3x^2 - 2$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 1 là $k = y'(1) = 1$.

Câu 5: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = x^4 - 1$ có đồ thị là (C) . Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm với hoành độ bằng 0 có hệ số góc là

- A. 0. B. -1 . C. 4. D. 1.

Lời giải:

+) Ta có $y = x^4 - 1 \Rightarrow y' = 4x^3$

+) Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm với hoành độ bằng 0 có hệ số góc là $k = y'(0) = 0$

Câu 6: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2018-2019 LẦN 1) Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3-4x}{x-2}$ tại điểm có tung độ $y = -\frac{7}{3}$.

- A. $\frac{9}{5}$. B. $-\frac{5}{9}$. C. $\frac{5}{9}$. D. -10 .

Lời giải:

$y = -\frac{7}{3} \Rightarrow \frac{3-4x}{x-2} = -\frac{7}{3} \Leftrightarrow x = -1$. Ta có: $y' = \frac{5}{(x-2)^2}$. Vậy hệ số góc cần tìm là $y'(-1) = \frac{5}{9}$.

Câu 7: (TRƯỜNG THPT NGUYỄN ĐỨC CẢNH LẦN 03) Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 0$ là

- A. $y = 4x + 3$. B. $y = \frac{1}{2}x + 2$. C. $y = -\frac{1}{2}x + 2$. D. $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

Lời giải:

Ta có $y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}$; $y'(0) = -\frac{1}{2}$; $y(0) = 2$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 0$ là

$$y = y'(0)(x-0) + 2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Câu 8: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ LẦN 3 2018-2019) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại điểm $M(1;0)$.

A. $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$. B. $y = \frac{1}{3}x + 1$. C. $y = x - 1$. D. $y = \frac{1}{9}x - \frac{1}{9}$.

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Ta có $f'(1) = \frac{1}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $M(1;0)$ là: $y = \frac{1}{3}(x-1) + 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

Câu 9: (GKI CS2 LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là

A. $y = 3x - 2$. B. $y = -3x + 2$. C. $y = x - \frac{2}{3}$. D. $y = -x + \frac{2}{3}$.

Lời giải:

Ta có: $y' = x^2 + 2x - 2$; $y'(1) = 1$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là: $y = y'(1)(x-1) + \frac{1}{3} = x-1 + \frac{1}{3} = x - \frac{2}{3}$

Câu 10: (THPT THIỆU HÓA – THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = x^3 + 3x$ có đồ thị (C) . Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là

A. $k = 0$. B. $k = -2$. C. $k = 6$. D. $k = 9$.

Lời giải:

Ta có hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến là nghiệm của phương trình $x^3 + 3x = 4 \Leftrightarrow x = 1$

Ta có $y' = 3x^2 + 3 \Rightarrow$ Hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(1) = 6$.

Câu 11: (THPT NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho đồ thị $(H): y = \frac{2x-4}{x-3}$.

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (H) tại giao điểm của (H) và Ox .

A. $y = 2x$. B. $y = -2x + 4$. C. $y = -2x - 4$. D. $y = 2x - 4$.

Lời giải:

$y = \frac{2x-4}{x-3} \Rightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow M(2;0)$ nên giao điểm của (H) và Ox là $M(2;0)$.

$y' = \frac{2}{(x-3)^2} \forall x \neq 3$ nên hệ số góc tiếp tuyến là $y'(2) = 2$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị (H) tại giao điểm của (H) và Ox là

$$y = 2(x-2) + 0 = 2x - 4.$$

- Câu 12:** (THPT NGUYỄN HUỆ - HÀ NỘI 18-19) Cho hàm số $y = x^3 - x - 1$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là
- A. $y = 2x - 1$. B. $y = -x - 1$. C. $y = 2x + 2$. D. $y = -x + 1$.

Lời giải:

Gọi M là giao điểm của (C) và trục tung. Khi đó $M(0; -1)$.

Ta có $y' = 3x^2 - 1$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

$$y = y'(x_M) \cdot (x - x_M) + y_M = y'(0) \cdot (x - 0) - 1 = -x - 1.$$

- Câu 13:** (THPT HÙNG VƯƠNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 3x^2 - 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là
- A. $y = 9x + 7$. B. $y = -9x - 7$. C. $y = -9x + 7$. D. $y = 9x - 7$.

Lời giải:

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f'(1) = 9$.

Ta có $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow M_0(1; 2)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(1; 2)$ có dạng:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - 2 = 9(x - 1) \Leftrightarrow y = 9x - 7.$$

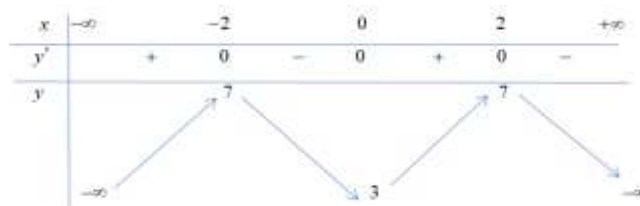
- Câu 14:** (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 3$ tại điểm cực tiểu của đồ thị cắt đồ thị ở A, B khác tiếp điểm. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

- A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{2}$. D. $4\sqrt{2}$.

Lời giải:

Ta có: $y' = -x^3 + 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$.

BBT:



Từ BBT suy ra điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $M(0; 3)$.

Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm cực tiểu là đường thẳng $y = 3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và tiếp tuyến là:

$$-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 3 = 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow A(-2\sqrt{2}; 3); B(2\sqrt{2}; 3) \Rightarrow AB = 4\sqrt{2}.$$

- Câu 15:** (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm m để mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m - 3)x - 1$ đều có hệ số góc dương.
- A. $m \neq 0$. B. $m > 1$. C. $m \neq 1$. D. $m \in \emptyset$.

Lời giải:

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m - 3)x - 1$ là $y' = 3x^2 - 2mx + 2m - 3$

Vì hệ số góc dương với mọi x nên ta có

$$y' = 3x^2 - 2mx + 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 < 0 \Leftrightarrow (m - 3)^2 < 0 \Rightarrow m \in \emptyset.$$

- Câu 16:** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $M(2;5)$ cắt hai đường tiệm cận tại E và F . Khi đó độ dài EF bằng
- A. $\sqrt{10}$. B. $2\sqrt{10}$. C. $\sqrt{13}$. D. $2\sqrt{13}$.

Lời giải:

Tiệm cận đứng của đồ thị (C) là: $x = 1$.

Tiệm cận ngang của đồ thị (C) là: $y = 1$.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$.

Tiếp tuyến với (C) tại $M(2;5)$ là: $y = y'(2)(x-2) + 5 \Leftrightarrow y = \frac{-3}{(2-1)^2}(x-2) + 5 \Leftrightarrow y = -3x + 11$.

Gọi E là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận đứng suy ra $E(1;8)$.

Gọi F là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận ngang suy ra $F(3;2)$.

Vậy $EF = \sqrt{(3-1)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

- Câu 17:** (THPT QUANG TRUNG ĐỒNG ĐA HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = 4x + 2\cos 2x$ có đồ thị là (C) . Hoành độ của các điểm trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với trục hoành là

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. C. $x = \pi + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải:

Ta có $y' = 4 - 4\sin 2x$.

Khi đó, hoành độ của các điểm trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với trục hoành là nghiệm của phương trình:

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4 - 4\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

- Câu 18:** (THPT Lương Thế Vinh Đồng Nai lần 2 – 2019) Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$?

A. $y = 9x - 12$. B. $y = 9x - 14$. C. $y = 9x - 13$. D. $y = 9x - 11$.

Lời giải:

$y = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3$.

Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; y_0)$.

Hệ số góc tiếp tuyến bằng 9 $\Rightarrow f'(x_0) = 3x_0^2 - 3 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow d_1: y = 9x + 18 \\ x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow d_2: y = 9x - 14 \end{cases}$.

Vậy đường thẳng $y = 9x - 14$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

Câu 19: (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Trên đồ thị $(C): y = \frac{x-1}{x-2}$ có bao nhiêu điểm

M mà tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng $d: x - y = 1$

A. 4. B. 1. C. 2. D. 0.

Lời giải:

Xét hàm số $(C): y = \frac{x-1}{x-2}$. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $y' = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0$.

Để tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng $d: y = x - 1$ suy ra

$$y' = \frac{-1}{(x-2)^2} = 1(VN). \text{ Vậy không có tiếp tuyến thỏa mãn.}$$

Câu 20: (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

A. $M(-2; -4)$. B. $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$. C. $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$. D. $M(-2; 0)$.

Lời giải:

Giả sử $M\left(a; \frac{1}{3}a^3 - a + \frac{2}{3}\right)$, $(a < 0)$; $y' = x^2 - 1 \Rightarrow y'(a) = a^2 - 1$

Tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ nên ta có:

$$y'(a) = 3 \Rightarrow a^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}.$$

Vì M có hoành độ âm nên ta chọn $a = -2$. Suy ra $M(-2; 0)$.

Câu 21: (THPT MAI ANH TUẤN-THANH HÓA-2019) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến với đồ thị (C) là

A. 1. B. 6. C. 12. D. 9.

Lời giải:

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 9$; $y' = -3(x-1)^2 + 12 \leq 12$

Vậy hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến với đồ thị (C) là 12.

Câu 22: Cho hàm số $y = -\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x - 2$, gọi đồ thị của hàm số là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc lớn nhất.

A. $y = \frac{9}{2}x - \frac{25}{12}$. B. $y = 5x - \frac{25}{12}$. C. $y = \frac{9}{4}x - \frac{25}{12}$. D. $y = \frac{7}{2}x + \frac{5}{12}$.

Lời giải:

Gọi (d) là tiếp tuyến cần tìm phương trình và x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) với (C) thì

$$\text{hệ số góc của } (d): k = y'(x_0) = -2x_0^2 + 2x_0 + 4 = \frac{9}{2} - \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{2}; k = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\max k = \frac{9}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $x_0 = \frac{1}{2}$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến (d): $y = \frac{9}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}x - \frac{25}{12}$.

- Câu 23:** (THPT Lương Thế Vinh - Hà Nội - Lần 1 - 2017 - 2018) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 5$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số có hệ số góc nhỏ nhất có phương trình là
A. $y = 3x + 9$. B. $y = 3x + 3$. C. $y = 3x + 12$. D. $y = 3x + 6$.

Lời giải:

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x-1)^2 + 3 \geq 3$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1 \Rightarrow y = 9$.

Do đó, tiếp tuyến của đồ thị có hệ số góc nhỏ nhất bằng 3 và là tiếp tuyến tại điểm $M(1; 9)$.

Phương trình tiếp tuyến là: $y = 3(x-1) + 9 \Leftrightarrow y = 3x + 6$.

- Câu 24:** (THPT Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - Lần 1 - 2018) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4x-3}{2x+1}$ cùng với 2 tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích bằng:
A. 6. B. 7. C. 5. D. 4.

Lời giải:

Ta có: $y' = \frac{10}{(2x+1)^2}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm nằm trên đồ thị hàm số, $x_0 \neq -\frac{1}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại M : $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = \frac{10}{(2x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{4x_0-3}{2x_0+1}$

Tiệm cận đứng: $x = -\frac{1}{2}$, tiệm cận ngang: $y = 2$

Gọi A là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận đứng

$\Rightarrow x_A = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_A = \frac{10}{(2x_0+1)^2}\left(-\frac{1}{2} - x_0\right) + \frac{4x_0-3}{2x_0+1} = \frac{4x_0-8}{2x_0+1}$. Vậy $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{4x_0-8}{2x_0+1}\right)$

Gọi B là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận

ngang $\Rightarrow y_B = 2 \Rightarrow 2 = \frac{10}{(2x_0+1)^2}(x_B - x_0) + \frac{4x_0-3}{2x_0+1} \Rightarrow x_B = 2x_0 + \frac{1}{2}$. Vậy $B\left(\frac{4x_0+1}{2}; 2\right)$

Giao điểm 2 tiệm cận là $I\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$

Ta có: $\vec{IA} = \left(0; -\frac{10}{2x_0+1}\right) \Rightarrow IA = \left|\frac{10}{2x_0+1}\right|$; $\vec{IB} = (2x_0+1; 0) \Rightarrow IB = |2x_0+1|$

Tam giác IAB vuông tại I nên $S_{IAB} = \frac{1}{2}IA \cdot IB = \frac{1}{2}\left|\frac{10}{2x_0+1}\right| \cdot |2x_0+1| = 5$.

- Câu 25: (SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+2}$, có đồ thị (C) và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ (với $x_0 \neq 0$). Biết rằng khoảng cách từ $I(-2; 2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất, mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $2x_0 + y_0 = 0$. B. $2x_0 + y_0 = -4$. C. $2x_0 + y_0 = 2$. D. $2x_0 + y_0 = -2$.

Lời giải:

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}. \quad y' = \frac{4}{(x+2)^2}, \quad M(x_0; \frac{2x_0}{x_0+2})$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại M là } y = \frac{4}{(x_0+2)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0}{x_0+2} \Leftrightarrow 4x - (x_0+2)^2 y + 2x_0^2 = 0$$

$$\text{Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến là } d = \frac{|4(-2) - (x_0+2)^2 \cdot 2 + 2x_0^2|}{\sqrt{4^2 + (x_0+2)^4}} = \frac{|-8x_0 - 16|}{\sqrt{4^2 + (x_0+2)^4}}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức cosi ta có } \frac{|-8x_0 - 16|}{\sqrt{4^2 + (x_0+2)^4}} \leq \frac{8|x_0+2|}{\sqrt{8(x_0+2)^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } (x_0+2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -4 \end{cases}. \text{ Vì } x_0 \neq 0 \text{ nên } x_0 = -4 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow 2x_0 + y_0 = -4.$$

- Câu 26: (THPT Lương Thế Vinh - Hà Nội - Lần 1 - 2018)** Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2x-3}$. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của đồ thị hàm số. Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $d = 1$. C. $d = \sqrt{2}$. D. $d = \sqrt{5}$.

Lời giải:

$$\text{Tọa độ giao điểm } I = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Gọi tọa độ tiếp điểm là } \left(x_0; \frac{x_0-1}{2x_0-3}\right). \text{ Khi đó phương trình tiếp tuyến } \Delta \text{ với đồ thị hàm số tại}$$

$$\text{điểm } \left(x_0; \frac{x_0-1}{2x_0-3}\right) \text{ là:}$$

$$y = -\frac{1}{(2x_0-3)^2}(x-x_0) + \frac{x_0-1}{2x_0-3} \Leftrightarrow x + (2x_0-3)^2 y - 2x_0^2 + 4x_0 - 3 = 0.$$

$$\text{Khi đó: } d(I, \Delta) = \frac{\left|\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(2x_0-3)^2 - 2x_0^2 + 4x_0 - 3\right|}{\sqrt{1 + (2x_0-3)^4}} = \frac{|-2x_0+3|}{\sqrt{1 + (2x_0-3)^4}} \leq \frac{|2x_0-3|}{\sqrt{2(2x_0-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } (2x_0-3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0-3=1 \\ 2x_0-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2 \\ x_0=1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \max d(I, \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 27: [THPT TRẦN QUỐC TUẤN - Lần 1- 2018] Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) . Đường thẳng $d: y = x + 2$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm $A, B, C(0; 2)$. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại A và B . Tính $k_1.k_2$.

A. 9.

B. -27.

C. -81.

D. 81.

Lời giải:

Ta có: $y = 3x^2 - 3$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (C) là :

$$x^3 - 3x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt: $A(-2; 2)$, $B(2; 4)$ và $C(0; 2)$.

Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại A và B , ta có:

$k_1 = y'(-2) = 9$, $k_2 = y'(2) = 9$. Vậy $k_1.k_2 = 81$.

Câu 28: (SGD Bà Rịa - Vũng Tàu - Lần 1 - 2018) Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi $M(x_0; y_0)$

(với $x_0 > 1$) là điểm thuộc (C) , biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B sao cho $S_{\Delta OIB} = 8S_{\Delta OIA}$ (trong đó O là gốc tọa độ, I là giao điểm hai tiệm cận). Tính giá trị của $S = x_0 + 4y_0$.

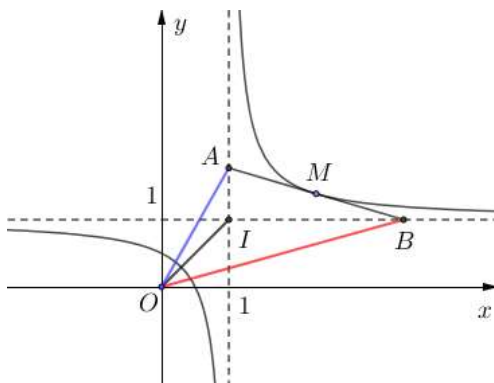
A. $S = 8$.

B. $S = \frac{17}{4}$.

C. $S = \frac{23}{4}$.

D. $S = 2$.

Lời giải:



Ta có $y' = \frac{-2}{(2x-2)^2}$, TCD: $x=1$ (d_1), TCN: $y=1$ (d_2), $I(1;1)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng $y = \frac{-2}{(2x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-1}{2x_0-2}$

$$A = \Delta \cap d_1 \Rightarrow A \left(1; \frac{x_0}{x_0 - 1} \right), B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow B(2x_0 - 1; 1). \vec{IB} = (2x_0 - 2; 0), \vec{IA} = \left(0; \frac{1}{x_0 - 1} \right).$$

$$S_{\Delta OIB} = 8S_{\Delta OIA} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot IB = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot IA \Leftrightarrow IB = 8IA \Leftrightarrow |2x_0 - 2| = 8 \left| \frac{1}{x_0 - 1} \right| \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 3$$

$$(\text{do } x_0 > 1) \Rightarrow y_0 = \frac{5}{4} \Rightarrow S = x_0 + 4y_0 = 3 + 4 \cdot \frac{5}{4} = 8.$$

Câu 29: (THI THỬ THPTQG VTV7 NĂM 2018-2019) Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ có bao nhiêu cặp tiếp tuyến vuông góc với nhau?

- A. 1. B. Vô số. C. 0. D. 2.

Lời giải:

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}. \text{ Ta có: } y = \frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow y' = \frac{5}{(x+2)^2}.$$

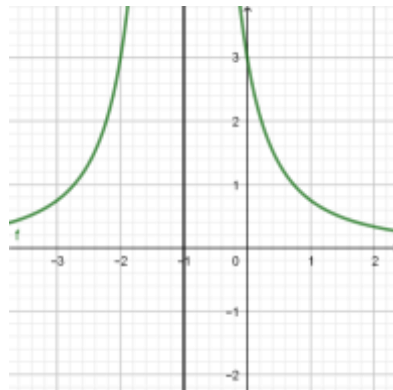
Tiếp tuyến (d_1) của đồ thị hàm số tại $M(x_1; y_1)$ có dạng: $y = y'(x_1)(x - x_1) + y_1$.

Tiếp tuyến (d_2) của đồ thị hàm số tại $N(x_2; y_2)$ có dạng: $y = y'(x_2)(x - x_2) + y_2$.

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow \frac{5}{(x_1+2)^2} \cdot \frac{5}{(x_2+2)^2} = -1 \Leftrightarrow (x_1+2)^2 \cdot (x_2+2)^2 = -25 \text{ (vô lý)}.$$

Vậy không có cặp tiếp tuyến nào của đồ thị vuông góc với nhau.

Câu 30: (CỤM LIÊN TRƯỜNG HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, (a, b, c, d \in \mathbb{R}; c \neq 0, d \neq 0)$ có đồ thị (C) . Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.



- A. $x - 3y + 2 = 0$. B. $x + 3y - 2 = 0$. C. $x + 3y + 2 = 0$. D. $x - 3y - 2 = 0$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua $(0; -2)$ suy ra $b = -2d$.

Ta có $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. Đồ thị hàm số y' có tiệm cận đứng $x = -1$ nên $c = d$, đi qua $(0;3)$ nên

$$3 = \frac{ad-bc}{d^2} \text{ hay } a = d. \text{ Do đó } y = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{3}{(x+1)^2}.$$

Phương trình tiếp tuyến tại $(2;0)$ là $y = \frac{1}{3}(x-2) \Leftrightarrow 3x - y - 2 = 0$.

Câu 31: (THPT Can Lộc - Hà Tĩnh - Lần 1 - 2017 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(2x+1)]^2 + [f(1-x)]^3 = x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. B. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$. C. $y = \frac{1}{7}x - \frac{5}{7}$. D. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$.

Lời giải:

Từ $[f(2x+1)]^2 + [f(1-x)]^3 = x$ (*), cho $x = 0$ ta có $[f(1)]^2 + [f(1)]^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases}$

Đạo hàm hai vế của (*) ta được $4f(2x+1).f'(2x+1) - 3[f(1-x)]^2.f'(1-x) = 1$.

Cho $x = 0$ ta được $4f(1).f'(1) - 3[f(1)]^2.f'(1) = 1 \Leftrightarrow f(1).f'(1).[4 - 3f(1)] = 1$ (**).

Nếu $f(1) = 0$ thì (**) vô lý, do đó $f(1) = -1$, khi đó (**) trở thành

$$-f'(1).[4 + 3] = 1 \Leftrightarrow f'(1) = -\frac{1}{7}$$

Phương trình tiếp tuyến $y = -\frac{1}{7}(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$.

Câu 32: (THPT Chuyên Hà Tĩnh - Lần 1 - 2018 - BTN) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là:

A. $y = 2x + 2$ B. $y = 4x - 6$ C. $y = 2x - 6$ D. $y = 4x - 2$

Lời giải:

Từ $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2$ (*), cho $x = 0$ và $x = \frac{1}{2}$ ta được $\begin{cases} 2f(0) + f(1) = 0 \\ f(0) + 2f(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(1) = 2$

Lấy đạo hàm hai vế của (*) ta được $4f'(2x) - 2f'(1-2x) = 24x$, cho $x = 0$ và $x = \frac{1}{2}$ ta được

$$\begin{cases} 4f'(0) - 2f'(1) = 0 \\ 4f'(1) - 2f'(0) = 12 \end{cases} \Rightarrow f'(1) = 4.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = 1$ là

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = 4(x-1) + 2 \Leftrightarrow y = 4x - 2.$$

Câu 33: (HSG BẮC NINH NĂM 2018-2019) Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số

$y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

A. 5.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải:

$$y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m} = x - 3m + \frac{3m^2 + m}{x + m} \Rightarrow y' = 1 - \frac{3m^2 + m}{(x + m)^2}.$$

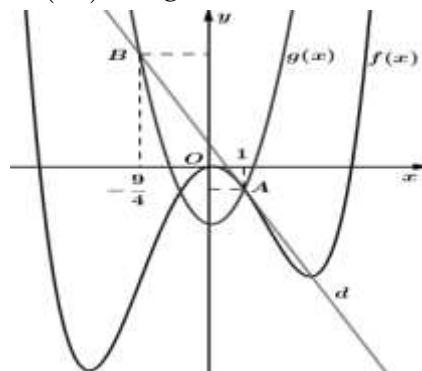
Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục Ox .

$$\frac{x^2 - 2mx + m}{x + m} = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2mx + m = 0 \quad (*) \quad (x \neq -m).$$

Để đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến tại hai điểm đó vuông góc với nhau thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác $-m$ và $y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m > 0 \\ f(-m) = 3m^2 + m \neq 0 \\ y'(x_1) \cdot y'(x_2) = \left(1 - \frac{3m^2 + m}{(x_1 + m)^2}\right) \left(1 - \frac{3m^2 + m}{(x_2 + m)^2}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \\ m \neq 0 \\ m \neq -\frac{1}{3} \\ m = 0 \\ m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Câu 34: (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ - LẦN 5 - 2019) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $g(x) = 2x^2 - 3$ và đường thẳng d có đồ thị như hình vẽ. Biết A là điểm chung của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$, $x_A = 1$. Điểm B thuộc đồ thị $g(x)$, $x_B = -\frac{9}{4}$ và d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Giá trị $f'(x_A)$ bằng



A. -1.

B. $-\frac{3}{2}$.

C. $-\frac{5}{2}$.

D. -2.

Lời giải:

Vì các điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $g(x)$ nên ta có $A(1; -1)$, $B\left(-\frac{9}{4}; \frac{57}{8}\right)$
 $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{13}{4}; \frac{65}{8}\right)$. Do d đi qua hai điểm A và B nên ta chọn vector pháp tuyến là
 $\overrightarrow{n_d} = (65; 26)$.

Phương trình đường thẳng d là: $65(x-1)+26(y+1)=0 \Leftrightarrow 65x+26y-39=0 \Leftrightarrow y=-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$

Mà d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nên $f'(x_A) = -\frac{5}{2}$.

Câu 35: (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + x + 2m+1$ có đồ thị (C) (m là tham số thực). Gọi m_1, m_2 là các giá trị của m để đường thẳng $d: y = x + m + 1$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A, B, C bằng 19. Khi đó $m_1 + m_2$ bằng

A. -4. B. 2 C. 0. D. -2.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) :

$$y = x^3 - (m+1)x^2 + x + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - mx - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - mx - m = 0 (*) \end{cases}$$

Để d và (C) cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1, tức

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 1-2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -4) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right). \text{ Khi đó } d \text{ và } (C) \text{ cắt nhau tại ba điểm phân biệt}$$

$A(1; m+2), B(x_1; x_1+m+1), C(x_2; x_2+m+1)$ với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*)

Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại A là: $y'(1) = 2 - 2m$. Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại B là:

$$y'(x_1) = 3x_1^2 - 2(m+1)x_1 + 1.$$

Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại C là: $y'(x_2) = 3x_2^2 - 2(m+1)x_2 + 1$.

Theo giả thiết, ta có: $3x_1^2 + x_2^2 - 2(m+1)x_1 + x_2 + 4 - 2m = 19$.

$$\Leftrightarrow 3x_1^2 + 3x_2^2 - 6x_1x_2 - 2(m+1)x_1 + 4 - 2m = 19^{**}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -m \end{cases} \text{ thay vào (**), ta được } 3m^2 + 6m - 2 \quad m + 1 \quad m + 4 - 2m = 19 .$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow m_1 + m_2 = -2$$

Câu 36: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ đồ thị (C) . Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C) . Giá trị lớn nhất của d có thể đạt được là

A. $3\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải:

Tiêm cân đứng $d_1: x+1=0$, tiêm cân ngang $d_2: y-1=0 \Rightarrow$ tâm đối xứng là $I(-1;1)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(a; \frac{a+2}{a+1}\right) \in (C)$ là: $y = \frac{-1}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{a+2}{a+1} \quad (d)$.

$$\text{Khi đó } d(I, d) = \frac{\left| \frac{-1}{(a+1)^2}(-1-a) + \frac{a+2}{a+1} \right|}{\sqrt{\frac{1}{(a+1)^4} + 1}} = \frac{\left| \frac{2}{a+1} \right|}{\sqrt{\frac{1}{(a+1)^4} + 1}} = \frac{2}{\sqrt{(a+1)^2 + \frac{1}{(a+1)^2}}} \leq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

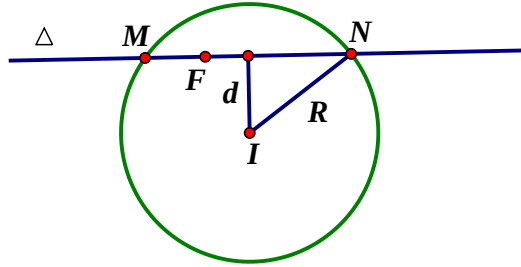
- Câu 37: (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ NĂM 2018 - 2019 LẦN 01)** Gọi A là điểm có hoành độ bằng 1 thuộc đồ thị C của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ (m là tham số thực). Ta luôn tìm được $m = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản để tiếp tuyến Δ với đồ thị C tại A cắt đường tròn $\gamma: x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ tạo thành một dây cung có độ dài nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a + b$ bằng:
- A. 12. B. 3. C. 29. D. 10.

Lời giải:

Đường tròn $\gamma: x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ có tâm $I(0; 1)$, $R = 2$.

Ta có $A(1; 1-m)$; $y' = 4x^3 - 4mx \Rightarrow y'(1) = 4 - 4m$ suy ra $\Delta: y = 4 - 4m(x-1) + 1 - m$.

Dễ thấy Δ luôn đi qua điểm cố định $F\left(\frac{3}{4}; 0\right)$ và điểm F nằm trong đường tròn γ .



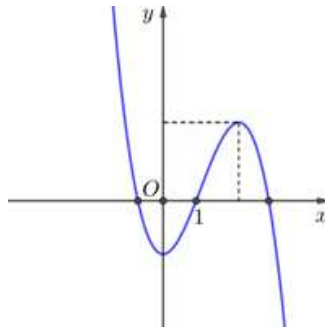
Giả sử Δ cắt γ tại M, N , ta có: $MN = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{4 - d^2}$.

Do đó MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow d$ lớn nhất $\Leftrightarrow d = IF \Rightarrow \Delta \perp IF$.

Khi đó đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} \perp \vec{IF} = \left(\frac{3}{4}; -1\right)$; $\vec{u} = (4; 3)$ nên:

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{3}{4} - 4 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{13}{16}$ suy ra $a = 13, b = 16$. Vậy $a + b = 13 + 16 = 29$.

- Câu 38: (THPT NGÔ QUYỀN HÀ NỘI NĂM 2018 - 2019 LẦN 01)** Cho hàm đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C) . Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1. Hỏi Δ và (C) có bao nhiêu điểm chung?



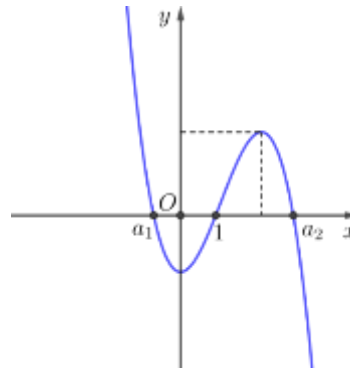
A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải:



Ta có tiếp tuyến Δ của (C) tại $x=1$ là $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có $f'(1) = 0$.

Vậy $\Delta: y = f(1)$.

Gọi a_1, a_2 là hai nghiệm còn lại của $f'(x)$. Dựa vào đồ thị hàm số ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	a_1		1		a_2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$			$f(a_1)$		$f(1)$		$f(a_2)$	
	$-\infty$							$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\Delta: y = f(1)$ và (C) có ba điểm chung.

Câu 39: (THPT KINH MÔN II HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (C).

Điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn 1, tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận của (C) lần lượt tại A, B . Diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng

A. $4 + 2\sqrt{2}$.

B. 4.

C. $4\sqrt{2}$.

D. $4 + \sqrt{2}$.

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có: $y' = -\frac{2}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$ và đường tiệm cận đứng $x=1$.

Giả sử $M(m; y_M) \in (C) \ (m > 1) \Rightarrow y_M = \frac{m+1}{m-1} = 1 + \frac{2}{m-1}; y'(m) = -\frac{2}{(m-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến Δ là: $y = -\frac{2}{(m-1)^2}(x-m) + 1 + \frac{2}{m-1}$

$$\Leftrightarrow 2x + (m-1)^2 y - m^2 - 2m + 1 = 0.$$

Gọi A là giao điểm của Δ và đường tiệm cận ngang. Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\text{phương trình: } \begin{cases} y = 1 \\ y = -\frac{2}{(m-1)^2}(x-m) + 1 + \frac{2}{m-1} \end{cases} \Rightarrow x = 2m-1 \Rightarrow A(2m-1; 1).$$

Gọi B là giao điểm của Δ và đường tiệm cận đứng. Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương

$$\text{trình: } \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{2}{(m-1)^2}(x-m) + 1 + \frac{2}{m-1} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{m+3}{m-1} = 1 + \frac{4}{m-1} \Rightarrow B\left(1; 1 + \frac{4}{m-1}\right).$$

$$\text{Suy ra: } AB = \sqrt{(2-2m)^2 + \left(\frac{4}{m-1}\right)^2} = \sqrt{4(m-1)^2 + \frac{16}{(m-1)^2}} = \frac{2}{|m-1|} \sqrt{(m-1)^4 + 4}.$$

$$\begin{aligned} d(O; \Delta) &= \frac{|-m^2 - 2m + 1|}{\sqrt{4 + (m-1)^4}} \Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} d(O; \Delta) \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{|-m^2 - 2m + 1|}{\sqrt{4 + (m-1)^4}} \cdot \frac{2}{|m-1|} \sqrt{(m-1)^4 + 4} \\ &= \frac{|-m^2 - 2m + 1|}{|m-1|} = \frac{m^2 + 2m - 1}{m-1} \quad (\text{vì } m > 1) = m + 3 + \frac{2}{m-1} = 4 + m - 1 + \frac{2}{m-1}. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số $m-1$ và $\frac{2}{m-1}$: $(m-1) + \frac{2}{m-1} \geq 2\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 4 + (m-1) + \frac{2}{m-1} \geq 4 + 2\sqrt{2}.$$

Vậy diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng $4 + 2\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} m-1 = \frac{2}{m-1} \Leftrightarrow m = 1 + \sqrt{2} \\ m > 1 \end{cases}$.

Câu 40: (THPT QUỲNH LƯU- 2018-2019- LẦN 1) Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ (C), $y = x+m$ (d). Với mọi m đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B . Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B . Giá trị nhỏ nhất của $T = k_1^{2020} + k_2^{2020}$ bằng

- A. 1. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải:

$$+ \text{ Phương trình hoành độ giao điểm: } \frac{-x+1}{2x-1} = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (*)$$

+ Phương trình (*) có: $\Delta' = m^2 + 2(m+1) > 0, \forall m$ nên (d) luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B.

Gọi a, b là các hoành độ giao điểm $\left(a \neq b \neq \frac{1}{2}\right)$. Khi đó ta có:
$$\begin{cases} a+b = -m \\ ab = -\frac{m+1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} + \text{ Khi đó: } T &= k_1^{2020} + k_2^{2020} = \frac{1}{(2a-1)^{4040}} + \frac{1}{(2b-1)^{4040}} \geq \frac{2}{[(2a-1)(2b-1)]^{2020}} \\ &= \frac{2}{[4ab - 2(a+b) + 1]^{2020}} = \frac{2}{[-2(m+1) + 2m+1]^{2020}} = 2 \end{aligned}$$

+ Nhận xét: Giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi:
$$\begin{cases} (2a-1)^{2020} = (2b-1)^{2020} \\ a \neq b \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a+b=1=-m \Leftrightarrow m=-1.$$

Câu 41: (SỞ GD&ĐT KIÊN GIANG NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ có đồ thị (C).

Tìm tất cả những giá trị nguyên của $k \in [-2019; 2019]$ để trên đồ thị (C) có ít nhất một điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng (d): $y = (k-3)x$.

A. 2021 .

B. 2017 .

C. 2022 .

D. 2016 .

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + 3$.

TH1: $k = 3$. Khi đó (d): $y = 0 \Rightarrow$ không tồn tại tiếp tuyến vuông góc với (d).

TH2: $k \neq 3$.

$$\text{Ta có: } (k-3)(3x_0^2 + 6x_0 + 3) = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 6x_0 + 3 + \frac{1}{k-3} = 0(*)$$

Theo yêu cầu bài toán, phương trình (*) có nghiệm $\Rightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{k-3} \geq 0 \Leftrightarrow k < 3$

Vậy $k \in \{-2019; -2018; \dots; 0; 1; 2\} \Rightarrow$ Có 2022 giá trị nguyên của k thỏa đề bài.

Câu 42: (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Gọi M, N là hai điểm di động trên đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - x + 4$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M và N luôn song song với nhau. Hỏi khi M, N thay đổi, đường thẳng MN luôn đi qua nào trong các điểm dưới đây?

A. Điểm $N(-1; -5)$

B. Điểm $M(1; -5)$

C. Điểm $Q(1; 5)$

D. Điểm $P(-1; 5)$

Lời giải:

Vì tiếp tuyến của đồ thị hàm bậc ba tại 2 điểm M, N thuộc đồ thị hàm số song song với nhau nên đường thẳng MN phải đi qua điểm uốn của (C).

$$\text{Ta có } y' = -3x^2 + 6x - 1; y'' = -6x + 6$$

$$\text{Cho } y'' = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Điểm uốn } Q(1; 5).$$

Câu 43: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ đồ thị (C). Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C). Giá trị lớn nhất của d có thể đạt được là

A. $3\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải:

Tiệm cận đứng $d_1: x+1=0$, tiệm cận ngang $d_2: y-1=0 \Rightarrow$ tâm đối xứng là $I(-1;1)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(a; \frac{a+2}{a+1}\right) \in (C)$ là: $y = \frac{-1}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{a+2}{a+1} \quad (d)$.

$$\text{Khi đó } d(I, d) = \frac{\left| \frac{-1}{(a+1)^2}(-1-a) + \frac{a+2}{a+1} \right|}{\sqrt{\frac{1}{(a+1)^4} + 1}} = \frac{\left| \frac{2}{a+1} \right|}{\sqrt{\frac{1}{(a+1)^4} + 1}} = \frac{2}{\sqrt{(a+1)^2 + \frac{1}{(a+1)^2}}} \leq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Câu 44: (MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ khác A thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$.

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải:

Ta có $A \in (C) \Rightarrow A\left(t; \frac{1}{4}t^4 - \frac{7}{2}t^2\right); y' = x^3 - 7x \Rightarrow y'(t) = t^3 - 7t$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là

$$y = (t^3 - 7t)(x - t) + \frac{1}{4}t^4 - \frac{7}{2}t^2 \Leftrightarrow y = (t^3 - 7t)x - \frac{3}{4}t^4 + \frac{7}{2}t^2$$

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2 = (t^3 - 7t)x - \frac{3}{4}t^4 + \frac{7}{2}t^2 \Leftrightarrow x^4 - 14x^2 - 4(t^3 - 7t)x + 3t^4 - 14t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - t)^2(x^2 + 2tx + 3t^2 - 14) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ x^2 + 2tx + 3t^2 - 14 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Tiếp tuyến cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ khác A khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác t

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - (3t^2 - 14) > 0 \\ t^2 + 2t^2 + 3t^2 - 14 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{7} < t < \sqrt{7} \\ t \neq \pm \frac{\sqrt{21}}{3} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2t \\ x_1 x_2 = 3t^2 - 14 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} y_1 = (t^3 - 7t)x_1 - \frac{3}{4}t^4 + \frac{7}{2}t^2 \\ y_2 = (t^3 - 7t)x_2 - \frac{3}{4}t^4 + \frac{7}{2}t^2 \end{cases} \Rightarrow y_1 - y_2 = (t^3 - 7t)(x_1 - x_2)$$

$$\text{Ta có } y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2) \Leftrightarrow (t^3 - 7t)(x_1 - x_2) = 6(x_1 - x_2)$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 7t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2 - t - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t+1=0 \\ t^2 - t - 6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \quad (n) \\ t=-2 \quad (n) \text{ (do (2))} \\ t=3 \quad (l) \end{cases}$$

⊙ Với $t = -1$ ta có $A\left(-1; -\frac{13}{4}\right)$

⊙ Với $t = -2$ ta có $A(-2; -10)$

$\Rightarrow$ có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán.

- Câu 45:** Cho hàm số $y = x^3 - 2018x$ có đồ thị là (C) . M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1 = 2$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1 , tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác $M_2, \dots$, tiếp tuyến của (C) tại M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} ($n = 4; 5; \dots$), gọi $(x_n; y_n)$ là tọa độ của điểm M_n . Tìm n để $2018x_n + y_n - 2^{2019} = 0$.
- A. $n = 685$. B. $n = 679$. C. $n = 675$. D. $n = 673$.

Lời giải:

Ta có: $y = x^3 - 2018x \Rightarrow y' = 3x^2 - 2018$

Giả sử: $M_k \in (C)$, với $k = 1, 2, \dots \Rightarrow M_k(x_k; x_k^3 - 2018x_k)$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M_k là $\Delta_k: y = (3x_k^2 - 2018)(x - x_k) + x_k^3 - 2018x_k$

Gọi M_{k+1} là giao điểm của Δ_k với (C)

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ_k với (C) :

$$x^3 - 2018x = (3x_k^2 - 2018)(x - x_k) + x_k^3 - 2018x_k \Leftrightarrow x^3 - x_k^3 - 2018(x - x_k) - (x - x_k)(3x_k^2 - 2018) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_k)(x^2 + x_kx - 2x_k^2) = 0 \Leftrightarrow (x - x_k)^2(x + 2x_k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_k \\ x = -2x_k \end{cases}$$

Suy ra $M_{k+1}(-2x_k; -8x_k^3 + 2018.2x_k)$, $k = 1, 2, \dots$

Hay $x_{k+1} = -2x_k$, với $k = 1, 2, \dots$

$\Rightarrow x_{n+1} = -2x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_n)$ là một cấp số nhân với $x_1 = 2$ và công bội $q = -2$.

$\Rightarrow x_n = 2 \cdot (-2)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow y_n = 8 \cdot (-2)^{3n-3} - 2018 \cdot 2 \cdot (-2)^{n-1}$

Mà $2018x_n + y_n - 2^{2019} = 0$ nên $2018 \cdot 2 \cdot (-2)^{n-1} + 8 \cdot (-2)^{3n-3} - 2018 \cdot 2 \cdot (-2)^{n-1} - 2^{2019} = 0$

$$\Leftrightarrow (-1)^{3n-3} \cdot 2^{3n} = 2^{2019} \Leftrightarrow \begin{cases} (3n-3):2 \\ 3n = 2019 \end{cases} \Leftrightarrow n = 673.$$

- Câu 46:** (THPT Kinh Môn – Hải Dương 2019) Xét đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 + 3ax + b$ với a, b là các số thực. Gọi M, N là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại hai điểm đó có hệ số góc bằng 3. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng MN bằng 1. Khi đó giá trị lớn nhất của $a^2 - b^2$ bằng

A. 0. B. $\frac{3}{2}$. C. -2. D. $-\frac{2}{3}$.

Lời giải:

Giả sử $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$. Ta có $y' = 3x^2 + 3a$. Từ giả thiết ta có $\begin{cases} y'(x_1) = 3 \\ y'(x_2) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + a = 1 \\ x_2^2 + a = 1 \end{cases}$.

Mặt khác $y_1 = x_1^3 + 3ax_1 + b = x_1(x_1^2 + a) + 2ax_1 + b$ nên $y_1 = (2a + 1)x_1 + b$.

Tương tự $y_2 = (2a+1)x_2 + b$.

Suy ra phương trình đường thẳng MN là $(2a+1)x - y + b = 0$.

Giả thiết có $d(O, MN) = 1 \Leftrightarrow \frac{|b|}{\sqrt{(2a+1)^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 4a^2 + 4a + 2$.

Vậy $a^2 - b^2 = -3a^2 - 4a - 2 = -3\left(a + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} \leq -\frac{2}{3}$.

Giá trị lớn nhất của $a^2 - b^2$ bằng $-\frac{2}{3}$ đạt được khi và chỉ khi $a = -\frac{2}{3}, b = \pm \frac{\sqrt{10}}{3}$. Vậy: $n = 673$.

Câu 47: (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x$ có đồ thị (C) . Gọi A, B, C, D là bốn điểm trên đồ thị (C) với hoành độ lần lượt là a, b, c, d sao cho tứ giác $ABCD$ là một hình thoi đồng thời hai tiếp tuyến tại A và C song song với nhau và đường thẳng AC tạo với hai trục tọa độ tam giác cân. Tính tích $abcd$.

A. 60. B. 120. C. 144. D. 180.

Lời giải:

Đặt $A(a; y(a)), B(b; y(b)), C(c; y(c)), D(d; y(d))$.

Theo giả thiết $y'(a) = y'(c) \Leftrightarrow -3a^2 + 6a + 9 = -3c^2 + 6c + 9 \Leftrightarrow a + c = 2$ (vì $a \neq c$).

Do đường thẳng AC cắt hai trục tọa độ tạo thành tam giác cân nên hệ số góc của đường thẳng AC : $k = \pm 1$.

TH1: $k = 1 \Rightarrow \frac{y(c) - y(a)}{c - a} = 1 \Leftrightarrow \frac{-c^3 + 3c^2 + 9c + a^3 - 3a^2 - 9a}{c - a} = 1 \Leftrightarrow ac = -10$.

Do $ABCD$ là hình thoi nên ta có $\begin{cases} \overline{AB} = \overline{DC} \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b - a = c - d \\ y'_{BD} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + d = a + c = 2 \\ \frac{y(d) - y(b)}{d - b} = -1 \end{cases} \Rightarrow bd = -12$.

Do đó $abcd = 120$.

TH2: $k = -1$. Lập luận tương tự ta thu được $abcd = 120$.

Dạng 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN ĐI QUA MỘT ĐIỂM CHO TRƯỚC

Câu 48: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị $y = \frac{2x-3}{x+2}$ đi qua giao điểm của hai đường tiệm cận?

A. 1. B. Không có. C. Vô số. D. 2.

Lời giải:

Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -\frac{d}{c} = -2$ làm tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = \frac{a}{c} = 2$ làm tiệm cận ngang.

Vậy $I(-2; 2)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. $y' = \frac{7}{(x+2)^2}$

Gọi tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x+2}$ có dạng:

$$\Delta: y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0 \text{ hay } \Delta: y = \frac{7}{(x_0+2)^2} \cdot (x - x_0) + \frac{2x_0-3}{x_0+2}$$

$$\text{Vì } \Delta \text{ đi qua } I(-2; 2) \Rightarrow 2 = \frac{7}{(x_0+2)^2} \cdot (-2 - x_0) + \frac{2x_0-3}{x_0+2}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{-7}{(x_0+2)^2} \cdot (x_0+2) + \frac{2x_0-3}{x_0+2} \Leftrightarrow 2 = \frac{-7}{x_0+2} + \frac{2x_0-3}{x_0+2}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{2x_0-10}{x_0+2} \Leftrightarrow 4 = -10, \text{ phương trình vô nghiệm.}$$

Vậy không tồn tại tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x+2}$ mà đi qua giao điểm của hai tiệm cận.

Câu 49: [SGD SOC TRANG_2018] Từ điểm $M(-1; -9)$ có thể vẽ được bao nhiêu tiếp tuyến tới đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải:

Lấy điểm $A(x_0; 4x_0^3 - 6x_0^2 + 1)$ thuộc đồ thị hàm số, tiếp tuyến tại A có phương trình

$$y = (12x_0^2 - 12x_0)(x - x_0) + 4x_0^3 - 6x_0^2 + 1.$$

Để tiếp tuyến qua M thì

$$-9 = (12x_0^2 - 12x_0)(-1 - x_0) + 4x_0^3 - 6x_0^2 + 1 \Leftrightarrow -8x_0^3 - 6x_0^2 + 12x_0 + 10 = 0$$

Phương trình có hai nghiệm $x_0 = -1$ và $x_0 = \frac{5}{4}$. Nên qua M có thể kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ thị hàm số.

Câu 50: Cho hàm số $y = -\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x - 2$, gọi đồ thị của hàm số là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(2; 9)$.

A. $y = -x + 2$.

B. $y = -8x + 5$.

C. $y = x + 25$.

D. $y = -8x + 25$.

Lời giải:

Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2; 9)$ có hệ số góc k là $y = k(x - 2) + 9$.

$$(d) \text{ tiếp xúc với } (C) \text{ tại điểm có hoành độ } x_0 \text{ khi hệ } \begin{cases} -\frac{2x_0^3}{3} + x_0^2 + 4x_0 - 2 = k(x_0 - 2) + 9 & (1) \\ -2x_0^2 + 2x_0 + 4 = k & (2) \end{cases} \text{ có}$$

nghiệm x_0 .

$$\text{Thay (2) vào (1) ta được: } -\frac{2x_0^3}{3} + x_0^2 + 4x_0 - 2 = (-2x_0^2 + 2x_0 + 4)(x_0 - 2) + 9$$

$$\Leftrightarrow 4x_0^3 - 15x_0^2 + 12x_0 - 9 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3.$$

Thay $x_0 = 3$ vào (2) ta được $k = -8$.

Vậy phương trình tiếp tuyến (d) là $y = -8x + 25$.

Câu 51: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) xuất phát từ $M(-1; 3)$.

A. $y = 3x - 1; y = -3x$. B. $y = 13; y = -3x$. C. $y = 3; y = -3x + 1$. D. $y = 3; y = -3x$.

Lời giải:

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến d với (C)

$$d: y = \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1}$$

$$\text{Cách 1: } M \in d \Leftrightarrow 3 = \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0 - 1)^2}(-1 - x_0) + \frac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1}$$

$$\Leftrightarrow 3(x_0 - 1)^2 = (x_0^2 - 2x_0)(-x_0 - 1) + (x_0 - 1)(x_0^2 - x_0 + 1) \Leftrightarrow 2x_0^2 - 5x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2, x_0 = \frac{1}{2}$$

• Với $x_0 = 2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = 3$.

• Với $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = -3x$.

Cách 2: Gọi d là đường thẳng đi qua $M(-1; 3)$, có hệ số góc k , khi đó phương trình d có dạng:

$$y = k(x + 1) + 3.$$

d tiếp xúc đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ phương trình sau có nghiệm x_0 :

$$\begin{cases} \frac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1} = k(x_0 + 1) + 3 & (1) \\ \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0 - 1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

$$\text{Thế (2) vào (1) ta được: } \frac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1} = \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0 - 1)^2}(x_0 + 1) + 3 \Leftrightarrow 2x_0^2 - 5x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2, x_0 = \frac{1}{2}.$$

• Với $x_0 = 2 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = 3$.

• Với $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = -3 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = -3x$.

Câu 52: (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m; -2)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để qua M kẻ đúng hai tiếp tuyến đến (C) . Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. $\frac{8}{3}$. B. 3. C. $\frac{2}{3}$. D. 2.

Lời giải:

$$y' = 3x^2 - 6x$$

Phương trình tiếp tuyến tại $A(x_0; y_0)$ có dạng $y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2$

Tiếp tuyến qua $M(m; -2)$, ta có:

$$\begin{aligned}
 -2 &= (3x_0^2 - 6x_0)(m - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2 \Leftrightarrow -2x_0^3 + 3x_0^2(1+m) - 6x_0m + 4 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x_0 - 2)(-2x_0^2 + (3m-1)x_0 - 2) = 0 \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ -2x_0^2 + (3m-1)x_0 - 2 = 0 \end{cases} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Qua M kẻ đúng hai tiếp tuyến đến (C) khi phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm kép khác 2 hoặc phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 2.

Trường hợp 1. Phương trình (2) có nghiệm kép khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \frac{3m-1}{4} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{3} \\ m = -1 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{3} \\ m = -1 \end{cases}$$

Trường hợp 2. Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ -2.4 - 2(3m-1) - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \text{ hoặc } m > \frac{5}{3} \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2. \text{ Vậy } S = \left\{ \frac{5}{3}; 2; -1 \right\}.$$

Câu 53: Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Biết $a = \frac{m}{n}$ (với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ và $\frac{m}{n}$ tối giản) là giá trị để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A . Khi đó giá trị $m+n$ là
A. 2. B. 7. C. 5. D. 3.

Lời giải:

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}. \quad y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

Tiếp tuyến tại tiếp điểm có hoành độ x_0 ($x_0 \neq 1$) của (C) có phương trình.

$$y = -\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{-x_0+2}{x_0-1} \quad (\Delta)$$

$$\text{Đường thẳng } (\Delta) \text{ đi qua } A(a;1) \Rightarrow 1 = -\frac{1}{(x_0-1)^2}(a-x_0) - \frac{x_0-2}{x_0-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 - 6x_0 + a + 3 = 0 \quad (*) \\ x_0 \neq 1 \end{cases}$$

Có duy nhất 1 tiếp tuyến qua $A \Leftrightarrow pt(*)$ có duy nhất 1 nghiệm khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ 2.1^2 - 6.1 + a + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2a = 0 \\ a - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow m+n = 5.$$

Câu 54: (THPT NGÔ QUYỀN HÀ NỘI NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C) , điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d: y = 1 - 2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B . Biết rằng đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định là H . Độ dài đoạn OH là
A. $\sqrt{34}$. B. $\sqrt{10}$. C. $\sqrt{29}$. D. $\sqrt{58}$.

Lời giải:

Gọi $M(m; 1-2m) \in d$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M có hệ số góc là k , khi đó phương trình đường thẳng $\Delta: y = k(x-m) + 1-2m$.

Để Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) thì hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x+3}{x-1} = k(x-m) + 1-2m \\ -\frac{4}{(x-1)^2} = k \end{cases} \quad \text{có nghiệm.}$$

Thay $k = -\frac{4}{(x-1)^2}$ vào phương trình $\frac{x+3}{x-1} = k(x-m) + 1-2m$ ta được $mx^2 + 2(2-m)x - m - 2 = 0 \quad (*)$.

Qua M kẻ được hai tiếp tuyến với (C) khi và chỉ khi phương trình $g(x) = mx^2 + 2(2-m)x - m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m \neq 0 \\ \Delta' = (2-m)^2 + m(m+2) > 0 \\ g(1) = m + 4 - 2m - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Gọi $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ là hai tiếp điểm, với x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Theo định lý Vi-et ta có
$$\begin{cases} x_A + x_B = \frac{2(m-2)}{m} \\ x_A x_B = -\frac{m+2}{m} \end{cases}.$$

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $I\left(\frac{m-2}{m}; \frac{m+3}{m-1}\right)$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A; \frac{2m(x_B - x_A)}{m-1}\right) \Rightarrow$ một vector pháp tuyến của đường thẳng AB là $\vec{n} = (2m; 1-m)$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm AB có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (2m; 1-m)$ và đi qua điểm $I\left(\frac{m-2}{m}; \frac{m+3}{m-1}\right)$ là $2mx + (1-m)y + 7 - m = 0$.

Gọi $H(x_H; y_H)$ là điểm cố định mà đường thẳng AB đi qua.

Khi đó, $2mx_H + (1-m)y_H - m + 7 = 0 \Leftrightarrow m(2x_H - y_H - 1) + y_H + 7 = 0$ với mọi $m \neq 0$ và $m \neq 1$.

Suy ra
$$\begin{cases} 2x_H - y_H - 1 = 0 \\ y_H + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -3 \\ y_H = -7 \end{cases} \Rightarrow H(-3; -7). \text{ Vậy } OH = \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{58}.$$

- Câu 55:** Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C) , điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d: y = 1-2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B . Khoảng cách từ O đến đường thẳng AB lớn nhất bằng
- A. $\sqrt{34}$. B. $\sqrt{10}$. C. $\sqrt{58}$. D. $\sqrt{29}$.

Lời giải:

Kế thừa lời giải trên, ta có đường thẳng $AB: 2mx + (1-m)y - m + 7 = 0$ luôn đi qua điểm cố định $H(-3; -7)$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên AB . Ta có $OK \leq OH = \sqrt{58}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $K \equiv H$, tức là $OH \perp AB$ hay $7.2m - 3(1-m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{17}$ (thỏa điều kiện $m \neq 0$ và $m \neq 1$). Vậy khoảng cách từ O đến đường thẳng AB lớn nhất bằng $\sqrt{58}$.

Câu 56: (THPT SƠN TÂY HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = x^3 + 1$ có đồ thị (C) . Trên đường thẳng $d: y = x + 1$ tìm được hai điểm $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ mà từ mỗi điểm đó kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (C) . Tính giá trị biểu thức $S = \frac{3}{5}(y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2) + \frac{1}{3}$

- A. $\frac{113}{15}$. B. $\frac{41}{15}$. C. $\frac{14}{15}$. D. $\frac{59}{15}$.

Lời giải:

Giả sử $M \in d: y = x + 1$, ta gọi $M(a; a + 1)$. Đường thẳng Δ đi qua $M(a; a + 1)$ có hệ số góc k có phương trình là: $y = k(x - a) + a + 1$.

Đường thẳng Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 + 1 = k(x - a) + a + 1 \\ 3x^2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 2x^3 - 3ax^2 + a = 0 \\ 3x^2 = k \end{cases} \quad (*)$$

Từ M kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (C) khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ hàm số $y = g(x) = 2x^3 - 3ax^2 + a$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $g(x_1) = 0$ hoặc $g(x_2) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 6x^2 - 6ax = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $g(x_1) = 0$ hoặc $g(x_2) = 0$.

$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a \neq 0 \\ \begin{cases} g(0) = 0 \\ g(a) = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \begin{cases} -a = 0 \\ -a^3 + a = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases}. \text{ Suy ra: } M_1(-1; 0) \text{ và } M_2(1; 2).$$

$$\text{Vậy: } S = \frac{3}{5}(y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2) + \frac{1}{3} = \frac{3}{5}(0 + 2^2 + 0.2) + \frac{1}{3} = \frac{41}{15}.$$

Câu 57: (THPT NINH BÌNH BẠC LIÊU NĂM 2018-2019 LẦN 04) Cho đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $b \in (-10; 10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0; b)$?

- A. 2. B. 9. C. 17. D. 16.

Lời giải:

Gọi $M_0(x_0; x_0^3 - 3x_0^2)$ là tiếp điểm.

Tiếp tuyến Δ của (C) tại M_0 có dạng $y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2$

$$\Delta \text{ qua } B(0; b) \Leftrightarrow b = (3x_0^2 - 6x_0)(0 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 \Leftrightarrow -b = 2x_0^3 - 3x_0^2 \quad (*).$$

Có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b) \Leftrightarrow (*)$ có đúng 1 nghiệm x_0 .

$$\text{Đặt } g(x) = 2x^3 - 3x^2; g'(x) = 6x^2 - 6x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗		0	↘		$+\infty$
					-1		

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình (*) có đúng 1 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} -b > 0 \\ -b < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \\ b > 1 \end{cases}$.

Vì b nguyên và $b \in (-10; 10)$, suy ra $b \in \{-9; -8; \dots; -1; 2; 3; \dots; 9\}$, có 17 giá trị của b .

Câu 58: Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A . Tổng tất cả các giá trị các phần tử của S là

- A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

$$\text{ĐK: } x \neq 1; y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Đường thẳng d qua A có hệ số góc k là $y = k(x-a)+1$

$$d \text{ tiếp xúc với (C)} \Leftrightarrow \begin{cases} k(x-a)+1 = \frac{-x+2}{x-1} (1) \\ k = \frac{-1}{(x-1)^2} (2) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

$$\text{Thế (2) vào (1) ta có: } \frac{-1}{(x-1)^2}(x-a)+1 = \frac{-x+2}{x-1} \Leftrightarrow -x+a+x^2-2x+1 = -x^2+3x-2, x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + a + 3 = 0 (3)$$

Để đồ thị hàm số có một tiếp tuyến qua A thì hệ là số nghiệm của hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm duy nhất khác 1

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + a + 3 = 0 (3) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - 2a - 6 = 0 \\ 1 - 6 + a + 3 \neq 0 \\ \Delta' = 9 - 2a - 6 > 0 \\ 2 - 6 + a + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\text{Cách 2: TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}; y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Giả sử tiếp tuyến đi qua $A(a;1)$ là tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = x_0$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{-x_0+2}{x_0-1}(d)$

Vì $A \in d$ nên thay tọa độ điểm A vào phương trình đường thẳng d ta có:

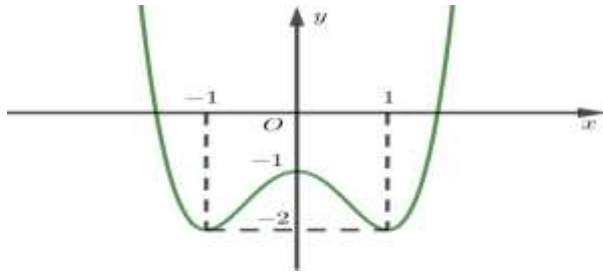
$$1 = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(a-x_0) + \frac{-x_0+2}{x_0-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 - 6x_0 + 3 + a = 0(1) \\ x_0 \neq 1 \end{cases}$$

Để chỉ có một tiếp tuyến duy nhất đi qua A thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - 2a - 6 = 0 \\ 1 - 6 + a + 3 \neq 0 \\ \Delta' = 9 - 2a - 6 > 0 \\ 2 - 6 + a + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

Dạng 3: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN KHI BIẾT HỆ SỐ GÓC CỦA TIẾP TUYẾN

Câu 59: (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu tiếp tuyến vuông góc với trục Oy?

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải:

Từ đồ thị ta có hai tiếp tuyến vuông góc với trục Oy là $y = -1$; $y = -2$.

Câu 60: (THPT Thăng Long – Hà Nội – Lần 1 – 2018) Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị hàm số

$y = \frac{2x-1}{x-1}$ thỏa mãn tiếp tuyến với đồ thị có hệ số góc bằng 2018?

- A. 1. B. 0. C. Vô số. D. 2.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1.$$

Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm x_0 trên đồ thị bằng $y'(x_0) = 2018 \Leftrightarrow \frac{-1}{(x-1)^2} = 2018$ vô nghiệm.

Vậy không có tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số có hệ số góc bằng 2018.

Câu 61: (THPT LƯƠNG TÀI - BẮC NINH - LẦN 2 - 2017 - 2018 - BTN) Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + 2$ tại điểm $A(-1; 1)$ vuông góc với đường thẳng $x - 2y + 3 = 0$. Tính $a^2 - b^2$.

- A. $a^2 - b^2 = 10$. B. $a^2 - b^2 = 13$. C. $a^2 - b^2 = -2$. D. $a^2 - b^2 = -5$.

Lời giải:

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

Đường thẳng $x - 2y + 3 = 0$ có hệ số góc $k = \frac{1}{2}$.

Suy ra $f'(-1) = -2 \Leftrightarrow -2(2a + b) = -2 \Leftrightarrow 2a + b = 1$.

$A(-1; 1)$ thuộc đồ thị hàm số nên $a + b + 2 = 1 \Leftrightarrow a + b = -1$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = -5$.

- Câu 62: (GKI NHÂN CHÍNH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$
 A. $y + 16 = -9(x + 3)$. B. $y = -9(x + 3)$. C. $y - 16 = -9(x - 3)$. D. $y - 16 = -9(x + 3)$.

Lời giải:

Ta có: $y' = x^2 + 6x$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với (C).

Ta có hệ số góc của tiếp tuyến là: $y'(x_0) = -9 \Leftrightarrow x_0^2 + 6x_0 = -9 \Leftrightarrow x_0^2 + 6x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -3$.

Với $x_0 = -3 \Rightarrow M(-3; 16)$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $M(-3; 16)$ có dạng: $y - 16 = -9(x + 3)$.

- Câu 63: (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \frac{1-x}{x+1}$ tại điểm có tung độ bằng 1 song song với đường thẳng
 A. (d): $y = 2x - 1$. B. (d): $y = -x + 1$. C. (d): $y = x - 1$. D. (d): $y = -2x + 2$.

Lời giải:

Ta có: $y' = \frac{-2}{(x+1)^2}$. Gọi $A(x_0; 1) \in (C)$ thì $\frac{1-x_0}{x_0+1} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Tiếp tuyến của (C) tại điểm A có phương trình: $y = y'(0)(x - 0) + y(0) = -2x + 1$.

Suy ra tiếp tuyến song song với (d): $y = -2x + 2$.

- Câu 64: (THPT Hồng Bàng - Hải Phòng - Lần 1 - 2018)** Cho đường cong (C): $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ và đường thẳng $d: 3x - y + 4 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng tiếp xúc với (C) và song song với d?

- A. $y = 3x + \frac{268}{27}$. B. $y = 3x + 4$. C. $81x - 27y + 32 = 0$. D. $81x - 27y + 140 = 0$.

Lời giải:

Tiếp tuyến song song với d nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 3$, mà $k = y'(x_0)$.

Suy ra $3x_0^2 + 4x_0 + 3 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -\frac{4}{3} \end{cases}$. Do đó ta có hai điểm $M(0; 4)$, $N\left(-\frac{4}{3}; \frac{32}{27}\right)$.

Tại $M(0;4)$, ta có tiếp tuyến là: $y = 3x + 4$ trùng với d nên không thỏa.

Tại $N\left(-\frac{4}{3}; \frac{32}{27}\right)$ ta có tiếp tuyến là $y = 3\left(x + \frac{4}{3}\right) + \frac{32}{27} \Leftrightarrow 81x - 27y + 140 = 0$.

- Câu 65: (THPT Phan Đăng Lưu - Huế - Lần I - 2018)** Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{3}x - 5$ và tiếp điểm có hoành độ dương.
- A. $y = -3x + 10$. B. $y = -3x + 2$. C. $y = -3x + 6$. D. $y = -3x - 2$.

Lời giải:

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm ($x_0 > 0$).

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{3}x - 5$ nên ta có: $y'(x_0) = -3$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{(x_0 - 1)^2} = -3 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \text{ (loại)} \\ x_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -3(x - 2) + 4 = -3x + 10$.

- Câu 66: (THPT Hải An - Hải Phòng - Lần 1 - 2017 - 2018)** Tìm số tiếp tuyến song song với trục hoành của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 10$.
- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải:

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Hàm số đã cho là hàm bậc 4 trùng phương có hệ số $a > 0$ nên có 3 điểm cực trị (1 cực đại, 2 cực tiểu) tuy nhiên, tiếp tuyến song song với trục hoành tại 2 điểm cực tiểu là trùng nhau nên có 2 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Câu 67: (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ song song với đường thẳng $9x - y - 14 = 0$?
- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải:

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 3$. Gọi $d: 9x - y - 14 = 0 \Rightarrow d: y = 9x - 14$.

Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm.

$\Delta // d: y = 9x - 14 \Rightarrow$ Phương trình Δ có dạng $y = 9x + m, (m \neq -14)$.

$$\Delta \text{ tiếp xúc } (C) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 2 = 9x + m \\ 3x^2 - 3 = 0 \end{cases} (*) \text{ có nghiệm}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 2 = 9x + m \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow m = -14(l) \\ x = -2 \Rightarrow m = 18(n) \end{cases}$$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\Delta: y = 9x + 18$.

Câu 68: (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2}$, ($ab \neq -2$). Biết rằng

a, b là các giá trị thỏa mãn tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(1; -2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Khi đó giá trị của $a - 3b$ bằng

- A. -2. B. 4. C. -1. D. 5.

Lời giải:

Ta có: $y' = \frac{-ab-2}{(ax-2)^2}$.

Do $A(1; -2)$ thuộc đồ thị hàm số nên $\frac{1+b}{a-2} = -2 \Leftrightarrow b = 3-2a$.

Do tiếp tuyến tại $A(1; -2)$ song song với $d: 3x + y - 4 = 0$ nên $y'(1) = -3 \Leftrightarrow \frac{-ab-2}{(a-2)^2} = -3$

Thay $b = 3-2a$ ta được: $-a(3-2a)-2 = -3(a-2)^2 \Leftrightarrow 5a^2 - 15a + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=2 \end{cases}$.

+ Với $a = 2 \Rightarrow b = -1$ (loại, do $ab \neq -2$)

+ Với $a = 1 \Rightarrow b = 1$. Phương trình tiếp tuyến tại $A(-1; 2)$ là $y = -3(x+1) + 2$ song song với d .

Vậy $a = 1, b = 1$, suy ra $a - 3b = -2$.

Câu 69: (CHUYÊN VINH LẦN 3-2018) Cho đồ thị $(C): y = \frac{x-1}{2x}$ và d_1, d_2 là hai tiếp tuyến của (C)

song song với nhau. Khoảng cách lớn nhất giữa d_1 và d_2 là

- A. 3. B. $2\sqrt{3}$. C. 2. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải:

Do $(C): y = \frac{x-1}{2x}, y'(x) = \frac{1}{2x^2} \quad \forall x \neq 0$.

d_1, d_2 là hai tiếp tuyến của (C) song song với nhau lần lượt có các hoành độ tiếp điểm là

x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$), nên ta có $y'(x_1) = y'(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{2x_1^2} = \frac{1}{2x_2^2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2$.

Gọi $M\left(x_1; \frac{x_1-1}{2x_1}\right); N\left(-x_1; \frac{x_1+1}{2x_1}\right)$.

PTTT d_1 tại $M\left(x_1; \frac{x_1-1}{2x_1}\right): y = \frac{1}{2x_1^2}(x-x_1) + \frac{x_1-1}{2x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{2x_1^2}(x-x_1) - y + \frac{x_1-1}{2x_1} = 0$.

Khi đó $d_{(d_1, d_2)} = d_{(N; d_1)} = \frac{\left| \frac{2}{x_1} \right|}{\sqrt{\frac{1}{4x_1^4} + 1}} = \frac{4}{\sqrt{4x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}}}$.

$$\text{Áp dụng BĐT Cô-Si ta có } 4x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} \geq 2\sqrt{4x_1^2 \cdot \frac{1}{x_1^2}} = 4 \Rightarrow d_{(d_1; d_2)} = \frac{4}{\sqrt{4x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}}} \leq \frac{4}{2} = 2.$$

Dạng 4:

HAI ĐỒ THỊ TIẾP XÚC

Câu 70: [Sở GD&ĐT Bình Phước-2017] Đồ thị của hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiếp xúc với trục hoành tại gốc tọa độ và cắt đường thẳng $x = 1$ tại điểm có tung độ bằng 3 khi.
A. $a = 2, b = c = 0$. B. $a = 2, b = 2, c = 0$. C. $a = b = 0, c = 2$. D. $a = c = 0, b = 2$.

Lời giải:

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị là (C).

Vì (C) tiếp xúc với Ox tại gốc tọa độ nên ta có: $\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2$.

Theo giả thiết (C) cắt đường thẳng $x = 1$ tại điểm có tung độ bằng 3 suy ra.

$$f(1) = 3 \Leftrightarrow 1 + a = 3 \Leftrightarrow a = 2.$$

Câu 71: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{mx - 2}{x - m + 1}$ tiếp xúc với parabol $y = x^2 + 7$.

A. $m = 7$.

B. $m = \sqrt{7}$.

C. $m = 4$.

D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải:

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi $m(1 - m) + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Khi đó đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = m(\Delta)$.

(Δ) tiếp xúc với parabol $y = x^2 + 7 \Leftrightarrow m = 7$.

Câu 72: (Chuyên Thái Bình-Thái Bình-L4-2018) Họ parabol $(P_m): y = mx^2 - 2(m - 3)x + m - 2$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với đường thẳng d cố định khi m thay đổi. Đường thẳng d đó đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(0; -2)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(1; 8)$.

D. $(1; -8)$.

Lời giải:

Gọi $H(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua.

Khi đó ta có: $y_0 = mx_0^2 - 2(m - 3)x_0 + m - 2 \Leftrightarrow m(x_0^2 - 2x_0 + 1) + 6x_0 - y_0 - 2 = 0, \forall m \neq 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \\ 6x_0 - y_0 - 2 = 0 \end{cases}$$

Do $x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0$ có nghiệm kép nên (P_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $d: y = 6x - 2$.

Ta thấy $(0; -2) \in d$.

III- BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Câu 73: Viết tất cả các phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = x^3 - 2x^2 + 1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -x + 1$.

- A. $y = x - 1; y = -x + 1$. B. $y = -x + \frac{31}{27}; y = -x + 1$. C. $y = -x + \frac{31}{27}$. D. $y = -x + 3; y = -x + 1$.
- Câu 74:** Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y = x^3 - 2x$ tại điểm $M(1; -1)$.
A. $y = 2x - 3$. B. $y = x - 2$. C. $y = x - 1$. D. $y = -x$.
- Câu 75:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^3 - 2x^2 + 1$ tại điểm $A(1; 0)$.
A. $y = x - 1$. B. $y = -x + 1$. C. $y = -x$. D. $y = 2x - 2$.
- Câu 76:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^3 - 2x^2 + 1$ tại giao điểm của (C) và Oy .
A. $y = -1$. B. $y = 2$. C. $y = 1$. D. $y = 2x + 1$.
- Câu 77:** Viết tất cả các phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^3 - 2x^2 + 1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -x + 2$.
A. $y = x - 1; y = -x + 1$. B. $y = -x + \frac{31}{27}; y = -x + 1$.
C. $y = -x - \frac{11}{27}; y = -x + 1$. D. $y = -x + 3; y = -x + 1$.
- Câu 78:** Viết tất cả các phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^3 - 2x^2 + 1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -x + 1$.
A. $y = x - 1; y = -x + 1$. B. $y = -x + \frac{31}{27}; y = -x + 1$. C. $y = -x + \frac{31}{27}$. D. $y = -x + 3; y = -x + 1$.
- Câu 79:** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^3 - 2x^2 + 1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -x + 1$?
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 80:** Viết tất cả các phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^3 - 2x^2 + 1$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 7y = 0$.
A. $y = 7x + 5; y = 7x + \frac{365}{27}$. B. $y = 7x + 5; y = 7x - \frac{14}{27}$.
C. $y = 7x + 5; y = 7x - \frac{365}{27}$. D. $y = 7x - 5; y = 7x - \frac{365}{27}$.
- Câu 81:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm $A(-1; -2)$.
A. $y = x - 1$. B. $y = 9x + 7$. C. $y = 9x$. D. $y = 2x$.
- Câu 82:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại giao điểm của (C) và Oy .
A. $y = -1$. B. $y = 2$. C. $y = 4$. D. $y = 2x + 1$.
- Câu 83:** Viết tất cả các phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 2$.
A. $y = 9x + 7; y = 9x + 25$. B. $y = 9x + 7; y = 9x - 25$.
C. $y = 9x - 7; y = 9x - 25$. D. $y = 9x; y = 9x + 25$.
- Câu 84:** Viết tất cả các phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.
A. $y = 9x - 25$. B. $y = 9x + 7; y = 9x - 25$.

C. $y = 9x - 7; y = 9x - 25$.

D. $y = 9x; y = 9x + 25$.

Câu 85: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 86: Viết tất cả các phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x - 3y = 0$.

A. $y = -3x - 3$.

B. $y = -3x + 1$.

C. $y = -3x + 3$.

D. $y = -3x + 2$.

Câu 87: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \frac{2x+1}{x+2}$ song song với đường thẳng $\Delta: 3x - y + 2 = 0$.

A. $y = 3x - 4$.

B. $y = 3x + 2$.

C. $y = 3x + 14$.

D. $y = 3x + 4$.

Câu 88: Viết tất cả các phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = x^3 - 3x + 2$ có hệ số góc bằng 9.

A. $y = 9x - 18; y = 9x + 22$.

B. $y = 9x - 14; y = 9x + 18$.

C. $y = 9x + 18; y = 9x + 22$.

D. $y = 9x - 14; y = 9x - 18$.

Câu 89: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \frac{x-2}{x-1}$ tại điểm $A\left(3; \frac{1}{2}\right)$.

A. $y = \frac{1}{2}x - 1$.

B. $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.

C. $y = \frac{1}{6}x$.

D. $y = x$.

Câu 90: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \frac{x-2}{x-1}$ tại giao điểm của (C) và Ox .

A. $y = x + 1$.

B. $y = x + 2$.

C. $y = x - 1$.

D. $y = x - 2$.

Câu 91: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \frac{x-2}{x-1}$ tại giao điểm của (C) và Oy .

A. $y = x + 1$.

B. $y = x + 2$.

C. $y = x - 1$.

D. $y = x - 2$.

Câu 92: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \frac{x-2}{x-1}$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $x - y = 0$.

A. $y = x + 2; y = x$.

B. $y = x + 2; y = x - 2$.

C. $y = x + 1; y = x - 2$.

D. $y = x + 2; y = x - 4$.

Câu 93: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \frac{x-2}{x-1}$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $x - y - 2 = 0$.

A. $y = x + 2; y = x$.

B. $y = x + 2; y = x - 2$.

C. $y = x + 1; y = x - 2$.

D. $y = x + 2$.

Câu 94: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \frac{x-2}{x-1}$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $x - y - 2 = 0$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 95: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$ tại điểm có hoành độ x_0 thỏa mãn $y''(x_0) = 3$.

A. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

B. $y = -\frac{5}{4}x - 1$.

C. $y = -2x + 1$.

D. $y = -\frac{5}{4}x + 1$.

- Câu 96:** Biết tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{3}{2}$ cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B , tính diện tích S của tam giác OAB .
 A. $S = \frac{1}{5}$. B. $S = \frac{2}{5}$. C. $S = 4$. D. $S = \frac{4}{5}$.
- Câu 97:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = x^4 + 2x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ x_0 thỏa mãn $y''(x_0) - 16 = 0$.
 A. $y = 8x - 4$. B. $y = 8x - 4; y = 8x + 4$.
 C. $y = 8x - 4; y = -8x - 4$. D. $y = 8x - 4; y = 8x$.
- Câu 98:** Tìm hệ số góc nhỏ nhất $k_{\min}$ của tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}$.
 A. $k_{\min} = -4$. B. $k_{\min} = 4$. C. $k_{\min} = 0$. D. $k_{\min} = -2$.
- Câu 99:** Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}$, biết tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.
 A. $y = -4x - 3$ B. $y = -4x + 3$. C. $y = 2x + 3$. D. $y = -2x + 3$.
- Câu 100:** Tìm hệ số góc lớn nhất $k_{\max}$ của tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{2}{3}$.
 A. $k_{\max} = -4$. B. $k_{\max} = 4$. C. $k_{\max} = 6$. D. $k_{\max} = -2$.
- Câu 101:** Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{2}{3}$, biết tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất.
 A. $y = -4x - 3$. B. $y = -4x + 3$. C. $y = 4x - 2$. D. $y = -2x + 3$.
- Câu 102:** Trong các đường thẳng có phương trình được cho dưới đây, đường thẳng nào là tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = x^3 - 3x + 1$?
 A. $y = -3x - 3$. B. $y = -3x + 1$. C. $y = -3x$. D. $y = -3x + 3$.
- Câu 103:** Trong các đường thẳng có phương trình được cho dưới đây, đường thẳng nào là tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = x^3 + 2x^2 + 1$?
 A. $y = -x - 3$. B. $y = -x + 1$. C. $y = -x + 2$. D. $y = -x$.
- Câu 104:** Biết các tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1 của đồ thị (C): $y = x^3 + 2x^2 + 1$ tiếp xúc với (C) tại các điểm A, B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .
 A. $\frac{\sqrt{1447}}{24}$. B. $\frac{\sqrt{1447}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{1447}}{27}$. D. $\frac{\sqrt{1447}}{9}$.
- Câu 105:** Tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = -4x^3 + 3x + 1$ đi qua điểm $A(-1; 2)$ có phương trình là
 A. $y = -9x + 7; y = -x + 2$. B. $y = -9x - 11; y = -x + 2$.
 C. $y = -9x + 11; y = 2$. D. $y = -9x - 7; y = 2$.
- Câu 106:** Tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \frac{2x-1}{x+1}$ qua điểm $A(-1; 4)$ có phương trình là
 A. $y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$. B. $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$. C. $y = \frac{1}{3}x + 4$. D. $y = x + 5$.

- Câu 107:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - x + 1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ dương và là nghiệm của phương trình $y' + x.y'' - 11 = 0$ có phương trình là
 A. $y = -x - 3$. B. $y = -4x + 2$. C. $y = -x + 2$. D. $y = -4x - 3$.
- Câu 108:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C). Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Với giá trị nào của tham số m thì tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $d: y = (m^2 - 4)x + 2m - 1$?
 A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 2$. D. $m = -2$.
- Câu 109:** Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m + 2$ có đồ thị (C). Gọi A là điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ bằng 1. Với giá trị nào của tham số m thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại A vuông góc với đường thẳng $\Delta: x - 4y + 1 = 0$?
 A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 2$. D. $m = -2$.
- Câu 110:** Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$ có đồ thị (C). Gọi $d: y = kx + m$ là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hệ số góc tiếp tuyến nhỏ nhất. Tỉ số $T = 2m:k$ có giá trị bằng
 A. $T = -7$. B. $T = -5$. C. $T = 5$. D. $T = 7$.
- Câu 111:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ thuộc (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M_0 là:
 A. $y = f'(x_0)(x - x_0)$. B. $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$. C. $y - y_0 = f'(x_0)x$. D. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.
- Câu 112:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong khoảng $(a; b)$, đồ thị là đường cong (C). Để đường thẳng $\Delta: y = ax + b$ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$, điều kiện cần và đủ là
 A. $a = f'(x_0)$. B. $ax_0 + b = f'(x_0)$. C. $\begin{cases} a = f'(x_0) \\ ax_0 + b = f(x_0) \end{cases}$. D. $\begin{cases} a = f'(x_0) \\ ax_0 + b = f'(x_0) \end{cases}$.
- Câu 113:** Phương trình tiếp tuyến của đường cong (C): $y = x^3 - 2x + 3$ tại điểm $M(1; 2)$ là
 A. $y = 2x + 2$. B. $y = 3x - 1$. C. $y = x + 1$. D. $y = 2 - x$.
- Câu 114:** Tiếp tuyến của đường cong (C): $y = x\sqrt{x}$ tại điểm $M(1; 1)$ có phương trình
 A. $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. B. $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. C. $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. D. $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$.
- Câu 115:** Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm với hoành độ $x = -1$ có phương trình
 A. $y = -x - 3$. B. $y = -x + 2$. C. $y = x - 1$. D. $y = x + 2$.
- Câu 116:** Cho hàm số $y = -x^2 + 5$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M có tung độ $y_0 = -1$, với hoành độ $x_0 < 0$ là kết quả nào sau đây?
 A. $y = 2\sqrt{6}(x + 6) - 1$. B. $y = -2\sqrt{6}(x + 6) - 1$. C. $y = 2\sqrt{6}(x - 6) + 1$. D. $y = 2\sqrt{6}(x - 6) - 1$.
- Câu 117:** Cho hàm số $y = x^2 + 5x + 4$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với trục Ox, có phương trình:
 A. $y = 3x - 3$ hoặc $y = -3x + 12$. B. $y = 3x + 3$ hoặc $y = -3x - 12$.
 C. $y = 2x - 3$ hoặc $y = -2x + 3$. D. $y = 2x + 3$ hoặc $y = -2x - 3$.

- Câu 118:** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ bằng 2, có hệ số góc bằng
 A. -1. B. -3. C. 3. D. 5.
- Câu 119:** Cho đường cong (C): $y = x^3$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = 12$, có phương trình:
 A. $y = 12x \pm 16$. B. $y = 12x \pm 8$. C. $y = 12x \pm 2$. D. $y = 12x \pm 4$.
- Câu 120:** Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ có đồ thị (C). Tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$, tiếp tuyến có hệ số góc bằng 2 thì $x_0 + y_0$ bằng
 A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.
- Câu 121:** Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x + 1$. Có hai tiếp tuyến của (C) cùng có hệ số góc bằng $\frac{3}{4}$. Đó là các tiếp tuyến
 A. $y = \frac{3}{4}x + \frac{29}{24}$ hoặc $y = \frac{3}{4}x + 3$. B. $y = \frac{3}{4}x - \frac{37}{12}$ hoặc $y = \frac{3}{4}x - 3$.
 C. $y = \frac{3}{4}x + \frac{37}{12}$ hoặc $y = \frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$. D. $y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{24}$ hoặc $y = \frac{3}{4}x + 3$.
- Câu 122:** Cho hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ có đồ thị là (C). Trong số các tiếp tuyến của (C), có một tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất. Hệ số góc của tiếp tuyến này bằng
 A. -3,5. B. -5,5. C. -7,5. D. -9,5.
- Câu 123:** Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: y = 9x$ có phương trình
 A. $y = 9x + 40$. B. $y = 9x - 40$. C. $y = 9x + 32$. D. $y = 9x - 32$.
- Câu 124:** Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^4 + x$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: x + 5y = 0$ có phương trình là
 A. $y = 5x - 3$. B. $y = 3x - 5$. C. $y = 2x - 3$. D. $y = x + 4$.
- Câu 125:** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(1;5)$ và B là giao điểm thứ hai của Δ với (C). Diện tích tam giác OAB bằng
 A. 5. B. 6. C. 12. D. $6\sqrt{82}$.
- Câu 126:** Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $M(-1;-9)$ có phương trình
 A. $y = 24x + 15$. B. $y = \frac{15}{4}x + \frac{21}{4}$.
 C. $y = 24x + 15$ hoặc $y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$. D. $y = 24x + 33$.
- Câu 127:** Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2$ có đồ thị là (C). Các tiếp tuyến không song song với trục hoành kẻ từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến (C) là
 A. $y = 2x$ hoặc $y = -2x$. B. $y = x$ hoặc $y = -x$.
 C. $y = \frac{4}{3}x$ hoặc $y = -\frac{4}{3}x$. D. $y = 3x$ hoặc $y = -3x$.

- Câu 128:** Cho hàm số $y = \frac{x^2}{4} - x + 1$ có đồ thị (C). Từ điểm $M(2; -1)$ có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến phân biệt. Hai tiếp tuyến này có phương trình
 A. $y = -x + 1$ hoặc $y = x - 3$. B. $y = -x + 3$ hoặc $y = x + 1$.
 C. $y = -x - 3$ hoặc $y = x - 1$. D. $y = -x - 1$ hoặc $y = x + 3$.
- Câu 129:** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi d là tiếp tuyến của (C), biết d đi qua điểm $A(4; -1)$. Gọi M là tiếp điểm của d và (C), tọa độ điểm M là
 A. $M(2; 5), M(0; -1)$. B. $M(2; 5), M(-2; 1)$. C. $M(0; -1), M(-2; 1)$. D. $M(-1; \frac{3}{2}), M(-2; 1)$.
- Câu 130:** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến thỏa mãn khoảng cách từ giao điểm của hai tiệm cận đến nó là lớn nhất, có phương trình
 A. $y = -x + 2$ hoặc $y = -x - 2$. B. $y = -x + 2$ hoặc $y = -x - 1$.
 C. $y = x + 2$ hoặc $y = x - 2$. D. $y = -x + 1$ hoặc $y = -x - 1$.
- Câu 131:** Từ điểm $A(\frac{2}{3}; 0)$ kẻ đến đồ thị hàm số $y = \frac{5}{6}x^3 + mx - \frac{2m}{3}$ hai tiếp tuyến vuông góc nhau thì tập tất cả các giá trị của m bằng
 A. $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$. B. $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = -2$.
 C. $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = -2$. D. $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$.
- Câu 132:** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 đi qua $M(0; a)$ thì a bằng
 A. $a = 10$. B. $a = 9$. C. $a = 3$. D. $a = 1$.
- Câu 133:** Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m + 1$ có đồ thị (C). Tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d: x = 1$ song song với đường thẳng $\Delta: y = -12x + 4$ là
 A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = \pm 2$. D. $m = 3$.
- Câu 134:** Cho hàm số $y = x^3 + x + 2$ có đồ thị (C). Để đường thẳng $d: y = 4x + m$ tiếp xúc với (C) thì tập tất cả các giá trị của m là
 A. $m = 0$ và $m = 4$. B. $m = 1$ và $m = 2$.
 C. $m = 3$. D. Không có giá trị của m .
- Câu 135:** Cho hàm số $y = x^4 - (3m+5)x^2 + 4$ có đồ thị là (C_m) . Để (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $y = -6x - 3$ tại điểm có hoành độ bằng -1 thì giá trị thích hợp của m là
 A. $m = -1$. B. $m = -2$. C. $m = 2$. D. Không có giá trị m .
- Câu 136:** Cho hàm số $y = \frac{ax+2}{bx+3}$ có đồ thị là (C). Tại điểm $M(-2; -4)$ thuộc (C), tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: 7x - y + 5 = 0$. Khi đó biểu thức liên hệ giữa a và b là
 A. $b - 2a = 0$. B. $a - 2b = 0$. C. $b - 3a = 0$. D. $a - 3b = 0$.

- Câu 137:** Cho hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2}$ có đồ thị là (C). Biết rằng a và b là các giá trị thỏa mãn tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;-2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Khi đó giá trị của $a+b$ bằng
 A. 2. B. 1. C. -1. D. 0.
- Câu 138:** Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{2x+3}$ có đồ thị là (C). Nếu (C) đi qua $A(1;1)$ và tại điểm B trên (C) có hoành độ bằng -2 , tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k=5$ thì các giá trị của a và b là
 A. $a=2; b=3$. B. $a=3; b=2$. C. $a=2; b=-3$. D. $a=3; b=-2$.
- Câu 139:** Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ có đồ thị là (C). Nếu (C) đi qua $A(3;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: y = 2x - 4$, thì các cặp số $(a;b)$ theo thứ tự là
 A. $(2;4)$ hoặc $(10;28)$. B. $(2;-4)$ hoặc $(10;-28)$.
 C. $(-2;4)$ hoặc $(-10;28)$. D. $(-2;-4)$ hoặc $(-10;-28)$.
- Câu 140:** Cho hàm số $y = \frac{ax^2-bx}{x-2}$ có đồ thị là (C). Để (C) qua điểm $A\left(-1; \frac{5}{2}\right)$ và tiếp tuyến của (C) tại gốc tọa độ có hệ số góc bằng -3 thì mối liên hệ giữa a và b là
 A. $4a-b=1$. B. $a-4b=1$. C. $4a-b=0$. D. $a-4b=0$.
- Câu 141:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^4 - \frac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) sao cho $y_2 - y_1 = 8(x_2 - x_1)$.
 A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.
- Câu 142:** Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng một tiếp tuyến từ (C) đi qua A . Tổng tất cả giá trị của phần tử S bằng
 A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

IV – ĐỀ TỔNG ÔN TẬP

ĐỀ SỐ 1

- Câu 1:** Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(1;0)$ là
 A. $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$. B. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. C. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. D. $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.
- Câu 2:** Cho hàm số $y = x^3 + 3x$ có đồ thị (C). Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là
 A. $k=0$. B. $k=-2$. C. $k=6$. D. $k=9$.
- Câu 3:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là

A. $y = 3x - 2$.

B. $y = -3x + 2$.

C. $y = x - \frac{2}{3}$.

D. $y = -x + \frac{2}{3}$.

Câu 4: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (H): $y = \frac{2x-4}{x-3}$ tại giao điểm của (H) và Ox là

A. $y = 2x$.

B. $y = -2x + 4$.

C. $y = -2x - 4$.

D. $y = 2x - 4$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 0$ là

A. $y = 4x + 3$.

B. $y = \frac{1}{2}x + 2$.

C. $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

D. $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

Câu 6: Cho hàm số $y = x^3 - x - 1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là

A. $y = 2x - 1$.

B. $y = -x - 1$.

C. $y = 2x + 2$.

D. $y = -x + 1$.

Câu 7: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ song song với đường thẳng $9x - y - 14 = 0$?

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 8: Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$?

A. $y = 9x - 12$.

B. $y = 9x - 14$.

C. $y = 9x - 13$.

D. $y = 9x - 11$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$ là

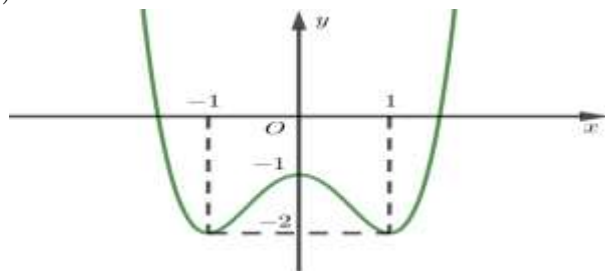
A. $y + 16 = -9(x + 3)$.

B. $y = -9(x + 3)$.

C. $y - 16 = -9(x - 3)$.

D. $y - 16 = -9(x + 3)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu tiếp tuyến vuông góc với trục Oy?

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Câu 11: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị (C). Hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến với đồ thị (C) bằng

A. 1

B. 6

C. 12

D. 9

Câu 12: Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 3$ tại điểm cực tiểu của đồ thị cắt đồ thị ở A, B khác tiếp điểm. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. 2.

B. $\sqrt{2}$.

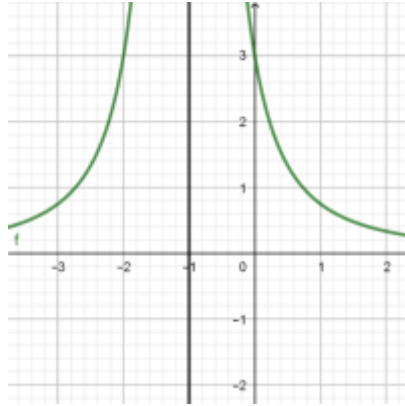
C. $2\sqrt{2}$.

D. $4\sqrt{2}$.

Câu 13: Cho hàm số $y = 4x + 2\cos 2x$ có đồ thị là (C). Hoành độ của các điểm trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với trục hoành là

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. C. $x = \pi + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}; c \neq 0, d \neq 0$) có đồ thị (C). Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 .



Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành là

A. $x - 3y + 2 = 0$. B. $x + 3y - 2 = 0$. C. $x + 3y + 2 = 0$. D. $x - 3y - 2 = 0$.

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (C). Điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn 1, tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận của (C) lần lượt tại A, B. Diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng

A. $4 + 2\sqrt{2}$. B. 4. C. $4\sqrt{2}$. D. $4 + \sqrt{2}$.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ (C), $y = x + m$ (d). Với mọi m đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Giá trị nhỏ nhất của $T = k_1^{2020} + k_2^{2020}$ bằng

A. 1. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ đồ thị (C). Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C). Giá trị lớn nhất của d có thể đạt được là

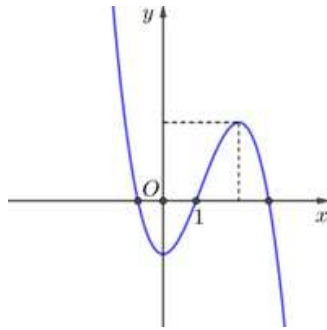
A. $3\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 18: Cho hàm số $y = x^3 + 1$ có đồ thị (C). Trên đường thẳng $d: y = x + 1$ tìm được hai điểm $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ mà từ mỗi điểm đó kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (C). Giá trị biểu

thức $S = \frac{3}{5}(y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2) + \frac{1}{3}$ bằng

A. $\frac{113}{15}$. B. $\frac{41}{15}$. C. $\frac{14}{15}$. D. $\frac{59}{15}$.

Câu 19: Cho hàm đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1. Hỏi Δ và (C) có bao nhiêu điểm chung?



- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 20: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f^2(1+2x) = x - f^3(1-x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

- A. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. B. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$. C. $y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. D. $y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$.

HẾT

ĐỀ SỐ 2

Câu 1: Tọa độ điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ là

- A. $M(-2; -4)$. B. $M(-1; \frac{4}{3})$. C. $M(2; \frac{4}{3})$. D. $M(-2; 0)$.

Câu 2: Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3-4x}{x-2}$ tại điểm có tung độ $y = -\frac{7}{3}$, bằng

- A. $\frac{9}{5}$. B. $-\frac{5}{9}$. C. $\frac{5}{9}$. D. -10 .

Câu 3: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 1$ đều có hệ số góc dương là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $(1; +\infty)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. D. $\emptyset$.

Câu 4: Hỏi trên đồ thị $(C): y = \frac{x-1}{x-2}$ có bao nhiêu điểm M mà tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng $d: x - y = 1$?

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 5: Gọi d là tiếp tuyến tại điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x - 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. d có hệ số góc âm. B. d có hệ số góc dương.
C. d song song với đường thẳng $y = -4$. D. d song song với trục Ox .

Câu 6: Gọi M, N là hai điểm di động trên đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - x + 4$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M và N luôn song song với nhau. Hỏi khi M, N thay đổi, đường thẳng MN luôn đi qua nào trong các điểm có tọa độ dưới đây?

- A. $(-1; -5)$. B. $(1; -5)$. C. $Q(1; 5)$. D. $P(-1; 5)$.

- Câu 7:** Hỏi trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ có bao nhiêu cặp tiếp tuyến vuông góc với nhau?
 A. 1. B. Vô số. **C. 0.** D. 2.
- Câu 8:** Cho hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2}$, ($ab \neq -2$). Biết rằng a, b là các giá trị thỏa mãn tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(1;-2)$ song song với đường thẳng $d: 3x+y-4=0$. Khi đó, giá trị $a-3b$ bằng
A. -2. B. 4. C. -1. D. 5.
- Câu 9:** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$ (C) và $d: y = -2x+m-1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Giá trị $k_1.k_2$ bằng
 A. $\frac{1}{4}$. B. 2. C. 3. **D. 4.**
- Câu 10:** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên của k trên $[-2019; 2019]$ để trên đồ thị (C) có ít nhất một điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng (d): $y = (k-3)x$?
 A. 2021. B. 2017. **C. 2022.** D. 2016.
- Câu 11:** Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x+m}$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc với nhau?
 A. 5 B. 2 C. 0 **D. 1**
- Câu 12:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m;-2)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để qua M kẻ đúng hai tiếp tuyến đến (C). Tổng tất cả các phần tử của S bằng
A. $\frac{8}{3}$. B. 3. C. $\frac{2}{3}$. D. 2.
- Câu 13:** Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+2}$, có đồ thị (C) và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ (với $x_0 \neq 0$). Biết rằng khoảng cách từ $I(-2; 2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất, đẳng thức nào sau đây đúng?
 A. $2x_0 + y_0 = 0$. **B. $2x_0 + y_0 = -4$.** C. $2x_0 + y_0 = 2$. D. $2x_0 + y_0 = -2$.
- Câu 14:** Gọi $d: y = ax + b$, ($a, b \in \mathbb{R}$) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$. Biết d cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $\triangle OAB$ cân tại O . Khi đó, $a+b$ bằng
 A. -1. B. 0. C. 2. **D. -3.**
- Câu 15:** Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ (C). Xét hai điểm $A(a; y_A)$ và $B(b; y_B)$ phân biệt của đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại A và B song song. Biết rằng đường thẳng AB đi qua $D(5; 3)$. Phương trình của đường thẳng AB là
 A. $x - y - 2 = 0$. B. $x + y - 8 = 0$. C. $x - 3y + 4 = 0$. **D. $x - 2y + 1 = 0$.**

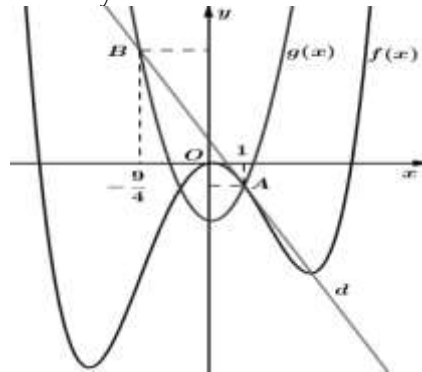
Câu 16: Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + x + 2m + 1$ có đồ thị (C) (m là tham số thực). Gọi m_1, m_2 là các giá trị của m để đường thẳng $d: y = x + m + 1$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A, B, C bằng 19. Khi đó $m_1 + m_2$ bằng

- A. -4. B. 2. C. 0. **D. -2.**

Câu 17: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3mx + m^2 - 2m^3$ tiếp xúc với trục hoành. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 0. B. 1. **C. $\frac{2}{3}$.** D. $\frac{4}{3}$.

Câu 18: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $g(x) = 2x^2 - 3$ và đường thẳng d có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Biết A là điểm chung của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$, $x_A = 1$. Điểm B thuộc đồ thị $g(x)$, $x_B = -\frac{9}{4}$ và d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Giá trị $f'(x_A)$ bằng

- A. -1. B. $-\frac{3}{2}$. **C. $-\frac{5}{2}$.** D. -2.

Câu 19: Gọi A là điểm có hoành độ bằng 1 thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ (m là tham số thực). Ta luôn tìm được $m = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản để tiếp tuyến Δ với đồ thị (C) tại A cắt đường tròn $(\gamma): x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ tạo thành một dây cung có độ dài nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a + b$ bằng

- A. 12. B. 3. **C. 29.** D. 10.

Câu 20: Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 5(x_1 - x_2)$

- A. 1. **B. 2.** C. 0. D. 3.

HẾT

ĐỀ SỐ 1

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM ĐỀ 1

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Đáp án	B	C	C	B	C	B	B	B	D	C
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	C	D	A	D	A	B	C	B	B	A

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(1;0)$ là

A. $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

B. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

C. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

D. $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

Lời giải:

Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(1) = \frac{1}{2}$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(1;0)$ là $y = \frac{1}{2}(x-1) + 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 + 3x$ có đồ thị (C). Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là

A. $k = 0$

B. $k = -2$

C. $k = 6$

D. $k = 9$

Lời giải:

Ta có hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến là nghiệm của phương trình $x^3 + 3x = 4 \Leftrightarrow x = 1$

Ta có $y' = 3x^2 + 3$. Hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(1) = 6$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm

$M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là

A. $y = 3x - 2$.

B. $y = -3x + 2$.

C. $y = x - \frac{2}{3}$.

D. $y = -x + \frac{2}{3}$

Lời giải:

Ta có: $y' = x^2 + 2x - 2 \Rightarrow y'(1) = 1 + 2 - 2 = 1$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là: $y - \frac{1}{3} = y'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = x - \frac{2}{3}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 4: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (H): $y = \frac{2x-4}{x-3}$ tại giao điểm của (H) và Ox là

A. $y = 2x$.

B. $y = -2x + 4$.

C. $y = -2x - 4$.

D. $y = 2x - 4$.

Lời giải:

$y = \frac{2x-4}{x-3} \Rightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow M(2;0)$ nên giao điểm của (H) và Ox là $M(2;0)$.

$y' = \frac{-2}{(x-3)^2} \forall x \neq 3$ nên hệ số góc tiếp tuyến là $y'(2) = -2$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị (H) tại giao điểm của (H) và Ox là
 $y = -2(x - 2) + 0 = -2x + 4$.

⇒ **Chọn đáp án B.**

Câu 5: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 0$ là

- A. $y = 4x + 3$. B. $y = \frac{1}{2}x + 2$. C. $y = -\frac{1}{2}x + 2$. D. $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

Lời giải:

Ta có $y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}$; $y'(0) = -\frac{1}{2}$; $y(0) = 2$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 0$ là $y = y'(0)(x - 0) + 2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$.

⇒ **Chọn đáp án C.**

Câu 6: Cho hàm số $y = x^3 - x - 1$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là

- A. $y = 2x - 1$. B. $y = -x - 1$. C. $y = 2x + 2$. D. $y = -x + 1$.

Lời giải:

Gọi M là giao điểm của (C) và trục tung. Khi đó $M(0; -1)$.

Ta có $y' = 3x^2 - 1$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là: $y = y'(x_M) \cdot (x - x_M) + y_M = y'(0) \cdot (x - 0) - 1 = -x - 1$.

⇒ **Chọn đáp án B.**

Câu 7: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ song song với đường thẳng $9x - y - 14 = 0$?

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải:

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 3$. Gọi $d: 9x - y - 14 = 0 \Rightarrow d: y = 9x - 14$. Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm.

$\Delta // d: y = 9x - 14 \Rightarrow$ Phương trình Δ có dạng $y = 9x + m, (m \neq -14)$.

Δ tiếp xúc $(C) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 2 = 9x + m \\ 3x^2 - 3 = 9 \end{cases} (*)$ có nghiệm

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 2 = 9x + m \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow m = -14 (l) \\ x = -2 \Rightarrow m = 18 (n) \end{cases}$$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\Delta: y = 9x + 18$.

Vậy có 1 tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán.

⇒ **Chọn đáp án B.**

Câu 8: Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$?

- A. $y = 9x - 12$. B. $y = 9x - 14$. C. $y = 9x - 13$. D. $y = 9x - 11$.

Lời giải:

$$y = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3.$$

Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; y_0)$.

$$\text{Hệ số góc tiếp tuyến bằng } 9 \Rightarrow f'(x_0) = 3x_0^2 - 3 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow d_1: y = 9x + 18 \\ x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow d_2: y = 9x - 14 \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng $y = 9x - 14$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$ là

A. $y + 16 = -9(x + 3)$. B. $y = -9(x + 3)$. C. $y - 16 = -9(x - 3)$. **D. $y - 16 = -9(x + 3)$.**

Lời giải:

Ta có: $y' = x^2 + 6x$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với (C) .

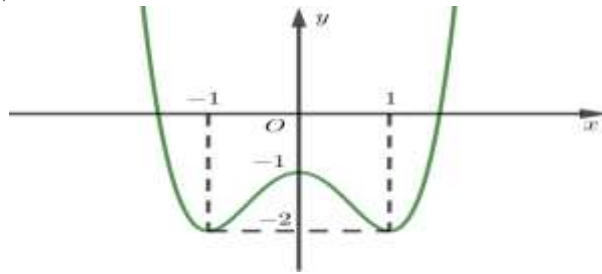
Ta có hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0) = -9 \Leftrightarrow x_0^2 + 6x_0 = -9 \Leftrightarrow x_0^2 + 6x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -3$.

Với $x_0 = -3 \Rightarrow M(-3; 16)$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $M(-3; 16)$ có dạng: $y - 16 = -9(x + 3)$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu tiếp tuyến vuông góc với trục Oy ?

A. 3. B. 0. **C. 2.** D. 1.

Lời giải:

Từ đồ thị ta có hai tiếp tuyến vuông góc với trục Oy là $y = -1; y = -2$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 11: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến với đồ thị (C) bằng

A. 1 B. 6 **C. 12** D. 9

Lời giải:

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 9$; $y' = -3(x - 1)^2 + 12 \leq 12$

Vậy hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến với đồ thị (C) là 12.

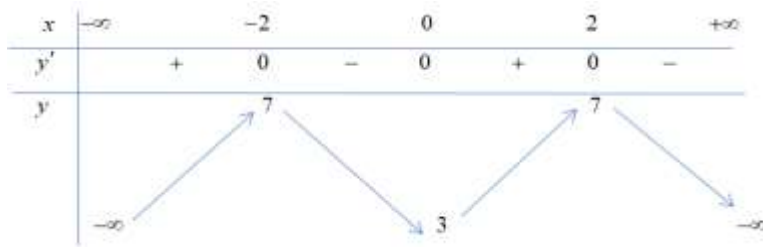
$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

- Câu 12:** Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 3$ tại điểm cực tiểu của đồ thị cắt đồ thị ở A, B khác tiếp điểm. Độ dài đoạn thẳng AB bằng
- A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{2}$. **D. $4\sqrt{2}$.**

Lời giải:

Ta có: $y' = -x^3 + 4x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$.

BBT:



Từ BBT suy ra điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $M(0;3)$.

Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm cực tiểu là đường thẳng $y = 3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và tiếp tuyến là:

$$-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 3 = 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow A(-2\sqrt{2}; 3); B(2\sqrt{2}; 3) \Rightarrow AB = 4\sqrt{2}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

- Câu 13:** Cho hàm số $y = 4x + 2\cos 2x$ có đồ thị là (C) . Hoành độ của các điểm trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với trục hoành là

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. C. $x = \pi + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải:

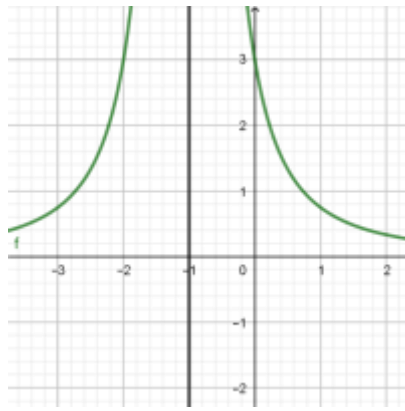
Ta có $y' = 4 - 4\sin 2x$.

Khi đó, hoành độ của các điểm trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với trục hoành là nghiệm của phương trình:

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4 - 4\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

- Câu 14:** Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, (a, b, c, d \in \mathbb{R}; c \neq 0, d \neq 0)$ có đồ thị (C) . Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 .



Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành là

- A. $x - 3y + 2 = 0$. B. $x + 3y - 2 = 0$. C. $x + 3y + 2 = 0$. **D. $x - 3y - 2 = 0$.**

Lời giải:

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua $(0; -2)$ suy ra $b = -2d$.

Ta có $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$. Đồ thị hàm số y' có tiệm cận đứng $x = -1$ nên $c = d$, đi qua $(0; 3)$ nên

$$3 = \frac{ad - bc}{d^2} \text{ hay } a = d. \text{ Do đó } y = \frac{x - 2}{x + 1} \Rightarrow y' = \frac{3}{(x + 1)^2}.$$

Phương trình tiếp tuyến tại $(2; 0)$ là $y = \frac{1}{3}(x - 2) \Leftrightarrow 3x - y - 2 = 0$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (C). Điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn 1, tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận của (C) lần lượt tại A, B. Diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng

- A. $4 + 2\sqrt{2}$.** B. 4. C. $4\sqrt{2}$. D. $4 + \sqrt{2}$.

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = -\frac{2}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 1$ và đường tiệm cận đứng $x = 1$.

Giả sử $M(m; y_M) \in (C) (m > 1) \Rightarrow y_M = \frac{m+1}{m-1} = 1 + \frac{2}{m-1}; y'(m) = -\frac{2}{(m-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến Δ là: $y = -\frac{2}{(m-1)^2}(x - m) + 1 + \frac{2}{m-1}$

$$\Leftrightarrow 2x + (m-1)^2 y - m^2 - 2m + 1 = 0.$$

Gọi A là giao điểm của Δ và đường tiệm cận ngang. Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\text{phương trình: } \begin{cases} y = 1 \\ y = -\frac{2}{(m-1)^2}(x - m) + 1 + \frac{2}{m-1} \end{cases} \Rightarrow x = 2m - 1 \Rightarrow A(2m - 1; 1).$$

Gọi B là giao điểm của Δ và đường tiệm cận đứng. Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương

$$\text{trình: } \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{2}{(m-1)^2}(x-m) + 1 + \frac{2}{m-1} \Rightarrow y = \frac{m+3}{m-1} = 1 + \frac{4}{m-1} \Rightarrow B\left(1; 1 + \frac{4}{m-1}\right). \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } AB = \sqrt{(2-2m)^2 + \left(\frac{4}{m-1}\right)^2} = \sqrt{4(m-1)^2 + \frac{16}{(m-1)^2}} = \frac{2}{|m-1|} \sqrt{(m-1)^4 + 4}.$$

$$d(O; \Delta) = \frac{|-m^2 - 2m + 1|}{\sqrt{4 + (m-1)^4}} \Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} d(O; \Delta) \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{|-m^2 - 2m + 1|}{\sqrt{4 + (m-1)^4}} \cdot \frac{2}{|m-1|} \sqrt{(m-1)^4 + 4}$$

$$= \frac{|-m^2 - 2m + 1|}{|m-1|} = \frac{m^2 + 2m - 1}{m-1} \quad (\text{vì } m > 1)$$

$$= m + 3 + \frac{2}{m-1} = 4 + m - 1 + \frac{2}{m-1}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số $m-1$ và $\frac{2}{m-1}$: $(m-1) + \frac{2}{m-1} \geq 2\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 4 + (m-1) + \frac{2}{m-1} \geq 4 + 2\sqrt{2}.$$

Vậy diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng $4 + 2\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} m-1 = \frac{2}{m-1} \Leftrightarrow m = 1 + \sqrt{2} \\ m > 1 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ (C), $y = x+m$ (d). Với mọi m đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Giá trị nhỏ nhất của $T = k_1^{2020} + k_2^{2020}$ bằng

- A. 1. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải:

$$+ \text{Phương trình hoành độ giao điểm: } \frac{-x+1}{2x-1} = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (*)$$

+ Phương trình (*) có: $\Delta' = m^2 + 2(m+1) > 0, \forall m$ nên (d) luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B.

$$\text{Gọi } a, b \text{ là các hoành độ giao điểm } \left(a \neq b \neq \frac{1}{2}\right). \text{ Khi đó ta có: } \begin{cases} a+b = -m \\ ab = -\frac{m+1}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ Khi đó: } T = k_1^{2020} + k_2^{2020} = \frac{1}{(2a-1)^{4040}} + \frac{1}{(2b-1)^{4040}} \geq \frac{2}{[(2a-1)(2b-1)]^{2020}} \\ = \frac{2}{[4ab - 2(a+b) + 1]^{2020}} = \frac{2}{[-2(m+1) + 2m + 1]^{2020}} = 2$$

+ Nhận xét: Giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi:
$$\begin{cases} (2a-1)^{2020} = (2b-1)^{2020} \\ a \neq b \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a+b=1=-m \Leftrightarrow m=-1.$$

⇒ **Chọn đáp án B.**

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ đồ thị (C). Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C). Giá trị lớn nhất của d có thể đạt được là
A. $3\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải:

Tiệm cận đứng $d_1: x+1=0$, tiệm cận ngang $d_2: y-1=0 \Rightarrow$ tâm đối xứng là $I(-1;1)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(a; \frac{a+2}{a+1}\right) \in (C)$ là: $y = \frac{-1}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{a+2}{a+1}$ (d).

$$\text{Khi đó } d(I, d) = \frac{\left| \frac{-1}{(a+1)^2}(-1-a) + \frac{a+2}{a+1} \right|}{\sqrt{\frac{1}{(a+1)^4} + 1}} = \frac{\left| \frac{2}{a+1} \right|}{\sqrt{\frac{1}{(a+1)^4} + 1}} = \frac{2}{\sqrt{(a+1)^2 + \frac{1}{(a+1)^2}}} \leq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

⇒ **Chọn đáp án C.**

Câu 18: Cho hàm số $y = x^3 + 1$ có đồ thị (C). Trên đường thẳng $d: y = x + 1$ tìm được hai điểm $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ mà từ mỗi điểm đó kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (C). Giá trị biểu thức $S = \frac{3}{5}(y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2) + \frac{1}{3}$ bằng
A. $\frac{113}{15}$. B. $\frac{41}{15}$. C. $\frac{14}{15}$. D. $\frac{59}{15}$.

Lời giải:

Giả sử $M \in d: y = x + 1$, ta gọi $M(a; a+1)$. Đường thẳng Δ đi qua $M(a; a+1)$ có hệ số góc k có phương trình là: $y = k(x-a) + a+1$.

Đường thẳng Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 + 1 = k(x-a) + a+1 \\ 3x^2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 2x^3 - 3ax^2 + a = 0 \\ 3x^2 = k \end{cases} \quad (*)$$

Từ M kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (C) khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ hàm số $y = g(x) = 2x^3 - 3ax^2 + a$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $g(x_1) = 0$ hoặc $g(x_2) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 6x^2 - 6ax = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $g(x_1) = 0$ hoặc $g(x_2) = 0$.

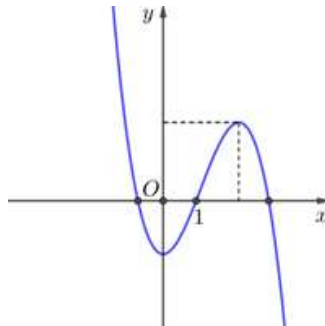
$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a \neq 0 \\ g(0) = 0 \\ g(a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ -a = 0 \\ -a^3 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases}.$$

Suy ra: $M_1(-1;0)$ và $M_2(1;2)$. Vậy: $S = \frac{3}{5}(y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2) + \frac{1}{3} = \frac{3}{5}(0 + 2^2 + 0.2) + \frac{1}{3} = \frac{41}{15}$.

⇒ **Chọn đáp án B.**

Câu 19: Cho hàm đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1. Hỏi Δ và (C) có bao nhiêu điểm chung?



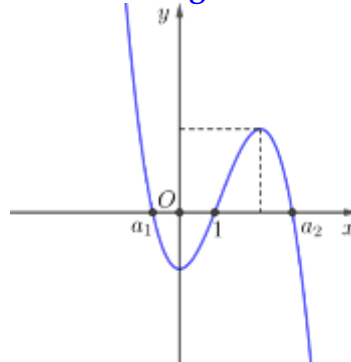
A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải



Ta có tiếp tuyến Δ của (C) tại $x=1$ là $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có $f'(1)=0$. Vậy $\Delta: y = f(1)$.

Gọi a_1, a_2 là hai nghiệm còn lại của $f'(x)$. Dựa vào đồ thị hàm số ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	a_1		1		a_2	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$			$f(a_1)$		$f(1)$		$f(a_2)$	
	$-\infty$							$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\Delta: y = f(1)$ và (C) có ba điểm chung.

⇒ **Chọn đáp án B.**

Câu 20: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f^2(1+2x) = x - f^3(1-x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

A. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$.

B. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$.

C. $y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$.

D. $y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$.

Lời giải:

Ta có: $f^2(1+2x) = x - f^3(1-x)$ (*).

Đạo hàm hai vế (*) ta được: $4.f(1+2x).f'(1+2x) = 1 + 3f^2(1-x)f'(1-x)$ (**)

$$\text{Khi } x=0 \text{ từ (*) và (**) ta có hệ } \begin{cases} f^2(1) = -f^3(1) \\ 4f(1).f'(1) = 1 + 3f^2(1).f'(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0(l) \\ f(1) = -1(tm) \\ f'(1) = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là:

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \text{ hay } y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

ĐỀ SỐ 02

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM ĐỀ 02

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	D	C	D	D	C	C	C	A	D	C
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	D	A	B	D	D	D	C	C	C	B

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Tọa độ điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ là

- A. $M(-2; -4)$. B. $M(-1; \frac{4}{3})$. C. $M(2; \frac{4}{3})$. **D. $M(-2; 0)$.**

Lời giải:

Ta có: $y' = x^2 - 1 \Rightarrow y'(a) = a^2 - 1$. Giả sử $M(a; \frac{1}{3}a^3 - a + \frac{2}{3})$, $(a < 0)$

Tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ nên ta có:

$$y'(a) = 3 \Rightarrow a^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}.$$

Vì M có hoành độ âm nên ta chọn $a = -2$. Suy ra $M(-2; 0)$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 2: Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3-4x}{x-2}$ tại điểm có tung độ $y = -\frac{7}{3}$, bằng

- A. $\frac{9}{5}$. B. $-\frac{5}{9}$. **C. $\frac{5}{9}$.** D. -10 .

Lời giải:

Ta có: $y = -\frac{7}{3} \Rightarrow \frac{3-4x}{x-2} = -\frac{7}{3} \Leftrightarrow x = -1$.

Ta có: $y' = \frac{5}{(x-2)^2}$. Vậy hệ số góc cần tìm là $k = y'(-1) = \frac{5}{9}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 3: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 1$ đều có hệ số góc dương là

A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

D. $\emptyset$.

Lời giải:

Vì hệ số góc dương với mọi x nên ta xét:

$$y' = 3x^2 - 2mx + 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 < 0 \Leftrightarrow (m-3)^2 < 0 \Rightarrow m \in \emptyset.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 4: Hỏi trên đồ thị (C): $y = \frac{x-1}{x-2}$ có bao nhiêu điểm M mà tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng $d: x - y = 1$?

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $y' = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0$.

Để tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng $d: y = x - 1$ suy ra

$$y' = \frac{-1}{(x-2)^2} = 1(VN).$$

Vậy không có tiếp tuyến thỏa mãn.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 5: Gọi d là tiếp tuyến tại điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x - 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. d có hệ số góc âm.

B. d có hệ số góc dương.

C. d song song với đường thẳng $y = -4$.

D. d song song với trục Ox .

Lời giải:

Ta có đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x - 2$ nhận điểm $A(-1; 0)$ làm điểm cực đại.

Mà $y'(-1) = 0$.

Suy ra phương trình đường thẳng $d: y = 0$.

Do đó d song song với đường thẳng $y = -4$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 6: Gọi M, N là hai điểm di động trên đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - x + 4$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M và N luôn song song với nhau. Hỏi khi M, N thay đổi, đường thẳng MN luôn đi qua nào trong các điểm có tọa độ dưới đây?

A. $(-1; -5)$.

B. $(1; -5)$.

C. $Q(1; 5)$.

D. $P(-1; 5)$.

Lời giải:

Vì tiếp tuyến của đồ thị hàm bậc ba tại 2 điểm M, N thuộc đồ thị hàm số song song với nhau nên đường thẳng MN phải đi qua điểm uốn của (C) .

Ta có $y' = -3x^2 + 6x - 1$; $y'' = -6x + 6$

Cho $y'' = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Điểm uốn $Q(1; 5)$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 7: Hỏi trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ có bao nhiêu cặp tiếp tuyến vuông góc với nhau?

A. 1.

B. Vô số.

C. 0.

D. 2.

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Ta có: $y = \frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow y' = \frac{5}{(x+2)^2}$.

Tiếp tuyến (d_1) của đồ thị hàm số tại $M(x_1; y_1)$ có dạng: $y = y'(x_1)(x - x_1) + y_1$.

Tiếp tuyến (d_2) của đồ thị hàm số tại $N(x_2; y_2)$ có dạng: $y = y'(x_2)(x - x_2) + y_2$.

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow \frac{5}{(x_1+2)^2} \cdot \frac{5}{(x_2+2)^2} = -1 \Leftrightarrow (x_1+2)^2 \cdot (x_2+2)^2 = -25 \text{ (vô lý)}.$$

Vậy không có cặp tiếp tuyến nào của đồ thị vuông góc với nhau.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2}$, ($ab \neq -2$). Biết rằng a, b là các giá trị thỏa mãn tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(1; -2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Khi đó, giá trị $a - 3b$ bằng

A. -2.

B. 4.

C. -1.

D. 5.

Lời giải:

Có $y' = \frac{-ab-2}{(ax-2)^2}$. Do $A(1; -2)$ thuộc đồ thị hàm số nên $\frac{1+b}{a-2} = -2 \Leftrightarrow b = 3 - 2a$.

Do tiếp tuyến tại $A(1; -2)$ song song với $d: 3x + y - 4 = 0$ nên $y'(1) = -3 \Leftrightarrow \frac{-ab-2}{(a-2)^2} = -3$

$$\text{Thay } b = 3 - 2a \text{ ta được phương trình } -a(3-2a) - 2 = -3(a-2)^2 \Leftrightarrow 5a^2 - 15a + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}.$$

+) Với $a = 2 \Rightarrow b = -1$ (loại, do $ab \neq -2$)

+) Với $a = 1 \Rightarrow b = 1$. Phương trình tiếp tuyến tại $A(-1; 2)$ là $y = -3(x+1) + 2$ song song với d .

Vậy $a = 1, b = 1$, suy ra $a - 3b = -2$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$ (C) và $d: y = -2x + m - 1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Giá trị $k_1 \cdot k_2$ bằng

A. $\frac{1}{4}$.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm $-2x + m - 1 = \frac{x+1}{x+2}$ (1).

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2x^2 - (m-6)x - 2m + 3 = 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$ có hai nghiệm

phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} f(-2) \neq 0 \\ \Delta = m^2 + 4m + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), khi đó $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-6}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3-2m}{2} \end{cases}.$

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C) là $\begin{cases} k_1 = \frac{1}{(x_1+2)^2} \\ k_2 = \frac{1}{(x_2+2)^2} \end{cases}.$

Ta có $k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{(x_1+2)^2} \cdot \frac{1}{(x_2+2)^2} = \frac{1}{[x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4]^2} = \frac{1}{\left[\frac{3-2m}{2} + 2 \cdot \frac{m-6}{2} + 4\right]^2} = 4.$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 10: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên của k trên $[-2019; 2019]$ để trên đồ thị (C) có ít nhất một điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng (d): $y = (k-3)x$?

A. 2021 .

B. 2017 .

C. 2022 .

D. 2016 .

Lời giải:

Ta có : $y' = 3x^2 + 6x + 3$.

TH1 : $k = 3$. Khi đó (d): $y = 0 \Rightarrow$ không tồn tại tiếp tuyến vuông góc với (d) .

TH2 : $k \neq 3$.

Ta có : $(k-3)(3x_0^2 + 6x_0 + 3) = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 6x_0 + 3 + \frac{1}{k-3} = 0(*)$

Theo yêu cầu bài toán , phương trình (*) có nghiệm $\Rightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{k-3} \geq 0 \Leftrightarrow k < 3$

Vậy $k \in \{-2019; -2018; \dots; 0; 1; 2\} \Rightarrow$ Có 2022 giá trị nguyên của k thỏa đề bài.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc với nhau?

A. 5

B. 2

C. 0

D. 1

Lời giải:

$y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m} = x - 3m + \frac{3m^2 + m}{x + m} \Rightarrow y' = 1 - \frac{3m^2 + m}{(x + m)^2}.$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục Ox .

$$\frac{x^2 - 2mx + m}{x + m} = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2mx + m = 0 (*) \quad (x \neq -m).$$

Để đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến tại hai điểm đó vuông góc với nhau thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khác $-m$ và $y'(x_1).y'(x_2) = -1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m > 0 \\ f(-m) = 3m^2 + m \neq 0 \\ y'(x_1).y'(x_2) = \left(1 - \frac{3m^2 + m}{(x_1 + m)^2}\right) \left(1 - \frac{3m^2 + m}{(x_2 + m)^2}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \\ m \neq 0 \\ m \neq -\frac{1}{3} \\ m = 0 \\ m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 12: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m; -2)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để qua M kẻ đúng hai tiếp tuyến đến (C). Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. $\frac{8}{3}$.

B. 3.

C. $\frac{2}{3}$.

D. 2.

Lời giải:

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$

Phương trình tiếp tuyến tại $A(x_0; y_0)$ có dạng $y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2$

Tiếp tuyến qua $M(m; -2)$, ta có: $-2 = (3x_0^2 - 6x_0)(m - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2$

$$\Leftrightarrow -2x_0^3 + 3x_0^2(1 + m) - 6x_0m + 4 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)(-2x_0^2 + (3m - 1)x_0 - 2) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ -2x_0^2 + (3m - 1)x_0 - 2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Qua M kẻ đúng hai tiếp tuyến đến (C) khi phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm kép khác 2 hoặc phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 2.

Trường hợp 1: Phương trình (2) có nghiệm kép khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \frac{3m - 1}{4} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{3} \\ m = -1 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{3} \\ m = -1 \end{cases}.$$

Trường hợp 2: Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ -2.4 - 2(3m - 1) - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \text{ hoặc } m > \frac{5}{3} \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{5}{3}; 2; -1 \right\}.$$

⇒ **Chọn đáp án A.**

Câu 13: Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+2}$, có đồ thị (C) và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ (với $x_0 \neq 0$). Biết rằng khoảng cách từ $I(-2; 2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất, đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $2x_0 + y_0 = 0$. B. $2x_0 + y_0 = -4$. C. $2x_0 + y_0 = 2$. D. $2x_0 + y_0 = -2$.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$y' = \frac{4}{(x+2)^2}, \quad M\left(x_0; \frac{2x_0}{x_0+2}\right)$$

Phương trình tiếp tuyến tại M là $y = \frac{4}{(x_0+2)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0}{x_0+2} \Leftrightarrow 4x - (x_0+2)^2 y + 2x_0^2 = 0$

Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến là

$$d = \frac{|4(-2) - (x_0+2)^2 \cdot 2 + 2x_0^2|}{\sqrt{4^2 + (x_0+2)^4}} = \frac{|-8x_0 - 16|}{\sqrt{4^2 + (x_0+2)^4}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $\frac{|-8x_0 - 16|}{\sqrt{4^2 + (x_0+2)^4}} \leq \frac{8|x_0+2|}{\sqrt{8(x_0+2)^2}} = 2\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $(x_0+2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -4 \end{cases}$. Vì $x_0 \neq 0$ nên $x_0 = -4 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow 2x_0 + y_0 = -4$.

⇒ **Chọn đáp án B.**

Câu 14: Gọi $d: y = ax + b, (a, b \in \mathbb{R})$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$. Biết d cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho ΔOAB cân tại O. Khi đó, $a+b$ bằng

- A. -1. B. 0. C. 2. D. -3.

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$. Ta có: $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2} < 0, \forall x \in D$.

Mặt khác, ΔOAB cân tại O $\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là -1.

Gọi tọa độ tiếp điểm $(x_0; y_0)$, với $x_0 \neq -\frac{3}{2}$. Ta có: $y' = \frac{-1}{(2x_0+3)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -2 \vee x_0 = -1$.

+) Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -x$ loại vì $A \equiv B \equiv O$.

+) Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -x - 2$ thỏa mãn.

Vậy $d: y = -x - 2 \Rightarrow a = -1; b = -2 \Rightarrow a + b = -3$.

⇒ **Chọn đáp án D.**

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ (C). Xét hai điểm $A(a; y_A)$ và $B(b; y_B)$ phân biệt của đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại A và B song song. Biết rằng đường thẳng AB đi qua $D(5; 3)$. Phương trình của đường thẳng AB là

- A. $x - y - 2 = 0$. B. $x + y - 8 = 0$. C. $x - 3y + 4 = 0$. D. $x - 2y + 1 = 0$.

Lời giải:

Gọi $A\left(a; \frac{1}{2}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + 2\right)$ và $B\left(b; \frac{1}{2}b^3 - \frac{3}{2}b^2 + 2\right)$ với $a \neq b$ là hai điểm phân biệt thuộc đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại A và B song song với nhau.

Ta có $f'(a) = f'(b) \Leftrightarrow \frac{3}{2}a^2 - 3a = \frac{3}{2}b^2 - 3b \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 2(a - b) \Leftrightarrow a + b = 2$.

Gọi $I\left(\frac{a+b}{2}; \frac{1}{4}(a^3 + b^3) - \frac{3}{4}(a^2 + b^2) + 2\right)$ là trung điểm của đoạn AB.

Với $a + b = 2$ ta có $I\left(1; \frac{8-6ab}{4} - \frac{3(4-2ab)}{4} + 2\right)$ hay $I(1; 1)$.

Lại có $\overrightarrow{AB}\left(b-a; \frac{1}{2}(b^3 - a^3) - \frac{3}{2}(b^2 - a^2)\right)$ cùng phương với $\vec{u}\left(2; (a^2 + b^2 + ab) - 3(a + b)\right)$.

Hay $\vec{u}(2; -2 - ab)$. Nên đường thẳng AB có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}(2 + ab; 2)$.

Suy ra phương trình đường thẳng AB là $(2 + ab)(x - 1) + 2(y - 1) = 0$.

Do đường thẳng AB đi qua $D(5; 3)$ nên $4(2 + ab) + 4 = 0 \Leftrightarrow 4ab + 12 = 0 \Leftrightarrow ab = -3$.

Thay $ab = -3$ vào phương trình AB ta được: $x - 2y + 1 = 0$.

Cách khác: Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ (C) có điểm uốn là $I(1; 1)$.

Do đó đường thẳng AB đi qua $D(5; 3)$ và $I(1; 1)$ có phương trình là $x - 2y + 1 = 0$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 16: Cho hàm số $y = x^3 - (m + 1)x^2 + x + 2m + 1$ có đồ thị (C) (m là tham số thực). Gọi m_1, m_2 là các giá trị của m để đường thẳng $d: y = x + m + 1$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A, B, C bằng 19. Khi đó $m_1 + m_2$ bằng

A. -4.

B. 2.

C. 0.

D. -2.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$y = x^3 - (m + 1)x^2 + x + m = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - mx - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - mx - m = 0(*) \end{cases}$$

Để d và (C) cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1, tức

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 1 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -4) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right). \text{ Khi đó } d \text{ và } (C) \text{ cắt nhau tại ba điểm phân biệt}$$

$A(1; m + 2), B(x_1; x_1 + m + 1), C(x_2; x_2 + m + 1)$ với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*)

Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại A là: $y'(1) = 2 - 2m$. Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại B là:

$$y'(x_1) = 3x_1^2 - 2(m + 1)x_1 + 1.$$

Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại C là: $y'(x_2) = 3x_2^2 - 2(m + 1)x_2 + 1$.

Theo giả thiết, ta có: $3(x_1^2 + x_2^2) - 2(m + 1)(x_1 + x_2) + 4 - 2m = 19$.

$$\Leftrightarrow 3(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 - 2(m + 1)(x_1 + x_2) + 4 - 2m = 19(**)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -m \end{cases} \text{ thay vào } (**), \text{ ta được } 3m^2 + 6m - 2(m+1)m + 4 - 2m = 19.$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow m_1 + m_2 = -2.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 17: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3mx + m^2 - 2m^3$ tiếp xúc với trục hoành. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 0.

- B. 1.

- C. $\frac{2}{3}$.

- D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải:

Ta có : $y' = 3x^2 - 6mx + 3m$; $y'' = 6x - 6m$

Cách 1:

TH1 : y' có nghiệm kép và tâm đối xứng của đồ thị hàm số thuộc trục hoành.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m = 0 \\ y(m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ -4m^3 + 4m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}.$$

TH2 : Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị và $y_{\text{cđ}} : y_{\text{ct}} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ 2(m - m^2)(2m - \sqrt{m^2 - m})2(m - m^2)(2m + \sqrt{m^2 - m}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ \begin{cases} \sqrt{m^2 - m} = 2m \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3} \\ \sqrt{m^2 - m} = -2m \end{cases} \end{cases}$$

Vậy $m \in \left\{0; 1; -\frac{1}{3}\right\}$, nên $S = 0 + 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Cách 2:

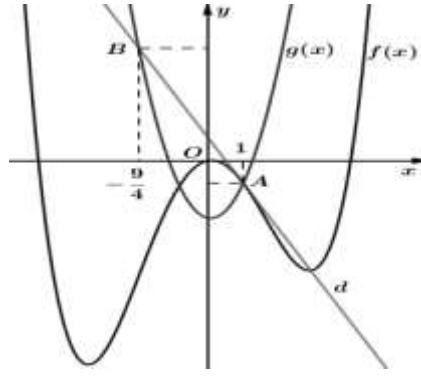
$$\text{Đồ thị hàm số } y = f(x) \text{ tiếp xúc trục hoành} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3mx^2 + 3mx + m^2 - 2m^3 = 0 & (1) \\ 3x^2 - 6mx + 3m = 0 & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

$$(2) \Leftrightarrow m = \frac{x^2}{2x-1}. \text{Thế vào (1): } x^3 - \frac{3x^4}{2x-1} + \frac{3x^3}{2x-1} + \frac{x^4}{(2x-1)^2} - \frac{2x^6}{(2x-1)^3} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ x^3(-6x^3 + 14x^2 - 10x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} . \text{Thay vào (1), ta được } m \in \left\{ 0; 1; -\frac{1}{3} \right\} .$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 18: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $g(x) = 2x^2 - 3$ và đường thẳng d có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Biết A là điểm chung của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$, $x_A = 1$. Điểm B thuộc đồ thị $g(x)$, $x_B = -\frac{9}{4}$ và d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Giá trị $f'(x_A)$ bằng

- A. -1. B. $-\frac{3}{2}$. C. $-\frac{5}{2}$. D. -2.

Lời giải:

Vì các điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $g(x)$ nên ta có $A(1; -1)$, $B(-\frac{9}{4}; \frac{57}{8}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-\frac{13}{4}; \frac{65}{8})$.

Do d đi qua hai điểm A và B nên ta chọn vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_d = (65; 26)$.

Phương trình đường thẳng d là: $65(x-1) + 26(y+1) = 0 \Leftrightarrow 65x + 26y - 39 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

Mà d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nên $f'(x_A) = -\frac{5}{2}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 19: Gọi A là điểm có hoành độ bằng 1 thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ (m là tham số thực). Ta luôn tìm được $m = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản để tiếp tuyến Δ với đồ thị (C) tại A cắt đường tròn $(\gamma): x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ tạo thành một dây cung có độ dài nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a+b$ bằng

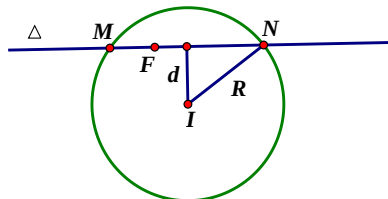
- A. 12. B. 3. C. 29. D. 10.

Lời giải:

Đường tròn $(\gamma): x^2 + (y-1)^2 = 4$ có tâm $I(0;1)$, $R=2$.

Ta có $A(1; 1-m)$; $y' = 4x^3 - 4mx \Rightarrow y'(1) = 4-4m$ suy ra $\Delta: y = (4-4m)(x-1) + 1-m$.

Dễ thấy Δ luôn đi qua điểm cố định $F(\frac{3}{4}; 0)$ và điểm F nằm trong đường tròn (γ) .



Giả sử Δ cắt (γ) tại M, N , ta có: $MN = 2\sqrt{R^2 - d^2(I; \Delta)} = 2\sqrt{4 - d^2(I; \Delta)}$.

Do đó MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I; \Delta)$ lớn nhất $\Leftrightarrow d(I; \Delta) = IF \Rightarrow \Delta \perp IF$.

Khi đó đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} \perp \vec{IF} = \left(\frac{3}{4}; -1\right)$; $\vec{u} = (1; 4-4m)$ nên:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{3}{4} - (4-4m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{13}{16} \text{ suy ra } a = 13, b = 16. \text{ Vậy } a + b = 13 + 16 = 29.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 20: Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 5(x_1 - x_2)$

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải:

Ta có: $y' = x^3 - 6x$. Gọi $A\left(x_0; \frac{1}{4}x_0^4 - 3x_0^2\right)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến tại A. Phương trình

tiếp tuyến tại A là đường thẳng (d) có phương trình: $y = (x_0^3 - 6x_0)(x - x_0) + \frac{1}{4}x_0^4 - 3x_0^2$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) là:

$$(x_0^3 - 6x_0)(x - x_0) + \frac{1}{4}x_0^4 - 3x_0^2 = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 \Leftrightarrow (x - x_0)^2(x^2 + 2x_0x + 3x_0^2 - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = 0 \\ x^2 + 2x_0x + 3x_0^2 - 12 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác A khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân

$$\text{biệt khác } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq \pm\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} < x_0 < \sqrt{6} \end{cases} \quad (3)$$

Khi đó, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ trong đó:

$$\begin{cases} y_1 = (x_0^3 - 6x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{4}x_0^4 - 3x_0^2 \\ y_2 = (x_0^3 - 6x_0)(x_2 - x_0) + \frac{1}{4}x_0^4 - 3x_0^2 \end{cases} \Rightarrow y_1 - y_2 = (x_0^3 - 6x_0)(x_1 - x_2)$$

Từ giả thiết ta suy ra: $(x_0^3 - 6x_0)(x_1 - x_2) = 5(x_1 - x_2) \Leftrightarrow x_0^3 - 6x_0 = 5$ (Vì $x_1 \neq x_2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \\ x_0 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện (3) có hai giá trị x_0 thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x = -1$; $x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

HẾT

Huế, ngày 07 tháng 9 năm 2020