



TỔ TOÁN
TRƯỜNG THPT TÂY NINH



TÀI LIỆU

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI, OLYMPIC **CHUYÊN ĐỀ: Dãy Số**

Biên soạn: **NGUYỄN THANH TÂM**

Email: thanhtamstn@gmail.com

Tel: 0986318518

9-9-2020

NỘI DUNG CHUYÊN ĐỀ



- Phương pháp tìm số hạng của dãy số cho bởi một hệ thức truy hồi tuyến tính.
- Liên phân số.
- Sai phân.
- Các phương pháp tìm số hạng của dãy số.
- Các khái niệm dãy con, dãy tuần hoàn và chu kì.
- Mối liên hệ giữa tính hội tụ của dãy số và dãy con.
- Tìm giới hạn của dãy số.
- Các bài toán thường gặp về dãy số.

PHẦN I

XÁC ĐỊNH DÃY SỐ

A. XÁC ĐỊNH DÃY SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP QUY nạp, PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN.

1. Xác định dãy số bằng phương pháp quy nạp.

Để chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n (bằng phương pháp quy nạp), ta thực hiện theo các bước như sau:

Bước 1 (bước cơ sở hay bước khởi đầu): Kiểm tra $A(n)$ đúng với $n = 1$.

Bước 2 (bước quy nạp): Giả sử $A(n)$ đúng với $n=k$ ($k \geq 1, k \in \mathbb{N}$)

ta chứng minh $A(n)$ đúng với $n = k+1$.

Bước 3: Kết luận: $A(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n .

Bài 1: Cho dãy số (x_n) như sau:
$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \forall n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

a) Tính x_1, x_2, x_3 .

b) Tìm số hạng tổng quát (số hạng thứ n).

Giải

a) Ta có $x_1 = \sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{2^2}$; $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = \sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{4} \right)} = 2 \cos \frac{\pi}{2^3}$

$$x_3 = \sqrt{2 + x_2} = \sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{2^3} \right)} = 2 \cos \frac{\pi}{2^4}.$$

b) Ta suy ra : $x_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n = 1, 2, \dots$

Với $n=1$ $x_1 = 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$. $n=1$ công thức đúng.

Giả sử công thức đúng với $n=k$ ($k \geq 1, k \in \mathbb{N}$) nghĩa là $x_k = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}, \forall k \geq 1$

Ta chứng minh công thức đúng với $n=k+1$ ($k \geq 1, k \in \mathbb{N}$) nghĩa là $x_{k+1} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+2}}, \forall k \geq 1$.

$$\text{Thật vậy: } x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} = \sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{2^{k+1}} \right)} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+2}}$$

Vậy công thức tổng quát của dãy số trên là: $x_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n = 1, 2, \dots$

Bài 2: Cho dãy số (x_n) như sau:
$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{2} - 1}{1 + (1 - \sqrt{2})x_n}, \forall n = 1, 2, \dots \end{cases}$$
 . Tính x_{2003}

Giải

$$\text{Từ công thức } \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}.$$

$$\text{Ta có: } 1 = \tan \frac{\pi}{4} = \tan 2 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} \Leftrightarrow \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 \\ \tan \frac{\pi}{8} = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Vì } \tan \frac{\pi}{8} > 0 \text{ nên } \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1,$$

$$x_1 = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{\pi}{8}} = \tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \right), x_3 = \frac{\tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \right) + \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \right) \cdot \tan \frac{\pi}{8}} = \tan \left(\frac{\pi}{3} + 2 \frac{\pi}{8} \right)$$

$$\text{Suy ra công thức tổng quát } x_n = \tan \left(\frac{\pi}{3} + (n-1) \frac{\pi}{8} \right), \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Với } n=1 \quad x_1 = \tan \left(\frac{\pi}{3} - 0 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = \sqrt{3}, \text{ đúng}$$

$$\text{Giả sử công thức đúng với } n = k \text{ (} k \geq 1, k \in \mathbb{N} \text{) nghĩa là } x_k = \tan \left(\frac{\pi}{3} + (k-1) \frac{\pi}{8} \right), \forall k \geq 1$$

$$\text{Ta chứng minh công thức đúng với } n = k+1 \text{ (} k \geq 1, k \in \mathbb{N} \text{) nghĩa là } x_{k+1} = \tan \left(\frac{\pi}{3} + k \frac{\pi}{8} \right), \forall k \geq 1.$$

$$\text{Thật vậy: } x_{k+1} = \frac{\tan \left(\frac{\pi}{3} + (k-1) \frac{\pi}{8} \right) + \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan \left(\frac{\pi}{3} + (k-1) \frac{\pi}{8} \right) \cdot \tan \frac{\pi}{8}} = \tan \left(\frac{\pi}{3} + (k-1) \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{3} + k \frac{\pi}{8} \right), \forall k \geq 1$$

$$\text{Vậy công thức tổng quát của dãy số trên là: } x_n = \tan \left(\frac{\pi}{3} + (n-1) \frac{\pi}{8} \right), \forall n = 1, 2, \dots$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

$$\text{Bài 1: Cho dãy số } (x_n) \text{ như sau: } \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_{n+1} = \frac{x_n + 2 - \sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3} - 2)x_n}, \forall n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad . \text{ Tính } x_{2010}$$

$$\text{Hướng dẫn: ta có: } \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{Công thức tổng quát của dãy số trên là: } x_n = \tan \left(\frac{\pi}{6} + (n-1) \frac{\pi}{12} \right), \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Bài 2: Tìm số hạng tổng quát của dãy số } (x_n) \text{ như sau: } \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \cdot x_n}, \forall n = 1, 2, \dots \end{cases} .$$

2. Xác định dãy số bằng phương pháp đổi biến (đặt ẩn phụ)

Chú ý:

- 1) Hàm số bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $A\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ thì đặt $X = x + \frac{b}{2a}$.
- 2) Hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có điểm uốn $A\left(-\frac{b}{3a}; f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ thì đặt $X = x + \frac{b}{3a}$.
- 3) Hàm số bậc bốn $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có điểm uốn $A\left(-\frac{b}{4a}; f\left(-\frac{b}{4a}\right)\right)$ thì đặt $X = x + \frac{b}{4a}$.

CÁC VÍ DỤ

Bài 1: Tìm dãy số (x_n) biết $x_1 = \alpha; x_{n+1} = ax^2 + bx + c, \forall n = 1, 2, \dots$ trong đó $a \neq 0, c = \frac{b^2 - 2b}{4a}$.

Hướng dẫn: đặt $y_n = x_n + \frac{b}{2a}$

Ta được: $y_{n+1} - \frac{b}{2a} = a\left(y_n - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(y_n - \frac{b}{2a}\right) + c, \forall n = 1, 2, \dots$

$$\Leftrightarrow y_{n+1} - \frac{b}{2a} = a\left(y_n^2 - \frac{by_n}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + b\left(y_n - \frac{b}{2a}\right) + c.$$

$$\Leftrightarrow y_{n+1} - \frac{b}{2a} = ay_n^2 - by_n + \frac{b^2}{4a} + by_n - \frac{b^2}{2a} + \frac{b^2 - 2b}{4a} \Leftrightarrow y_{n+1} = ay_n^2, \forall n = 1, 2, \dots$$

Suy ra: $y_n = ay_{n-1}^2 = a\left(ay_{n-2}^2\right)^2 = \dots = a^{2^{n-1}-1}y_1^{2^{n-1}}, \forall n = 1, 2, \dots$

$$\text{Vậy } x_n = a^{2^{n-1}-1}y_1^{2^{n-1}} - \frac{b}{2a} = a^{2^{n-1}-1}\left(\alpha + \frac{b}{2a}\right)^{2^{n-1}} - \frac{b}{2a}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Thử lại bằng quy nạp.

Bài 2 (HSG QG 2000 – 2001): Cho dãy số (x_n) như sau: $x_1 = \frac{2}{3}, x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}, \forall n = 1, 2, \dots$

Hãy tính tổng của 2001 số hạng đầu của dãy số (x_n)

Giải.

Ta thấy $x_n > 0, \forall n = 1, 2, \dots$

$$\text{Do đó } x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{x_{n+1}} = 2(2n+1) + \frac{1}{x_n}, \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Đặt } u_n = \frac{2}{x_n} \text{ Khi đó } u_1 = 3 \text{ và } u_{n+1} = 4(2n+1) + u_n \Rightarrow u_n = (2n+1)(2n-1), \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Vậy } x_n = \frac{2}{u_n} = \frac{2}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}, \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Do đó } x_1 + x_2 + \dots + x_{2001} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4001} - \frac{1}{4003}\right) = 1 - \frac{1}{4003} = \frac{4002}{4003}.$$

3. Một số phép biến đổi bởi công thức lượng giác.

Bài 3: Xác định dãy số (y_n) thỏa điều kiện $y_1 \in \mathbb{R}; y_{n+1} = 2y_n^2 - 1, \forall n = 1, 2, \dots$

Giải.

* Nếu $|y_1| \leq 1$ thì tồn tại ϕ sao cho $\cos \phi = y_1$.

Khi đó $y_2 = 2\cos^2 \phi - 1 = \cos 2\phi, y_3 = \cos 2^2 \phi, \dots, y_n = \cos 2^{n-1} \phi$.

* Nếu $|y_1| > 1$ xét số thực β sao cho

$$y_1 = \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \Leftrightarrow \beta^2 - 2y_1\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = y_1 + \sqrt{y_1^2 - 1} \\ \beta = y_1 - \sqrt{y_1^2 - 1} \end{cases}$$

Vậy: nếu đặt $\beta = y_1 + \sqrt{y_1^2 - 1}$ thì $y_1 = \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right); \frac{1}{\beta} = y_1 - \sqrt{y_1^2 - 1}$

Ta có:

$$y_1 = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \right]^2 - 1 = \frac{1}{2} \left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} \right), y_2 = 2y_1^2 - 1 = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \right]^2 - 1 = \frac{1}{2} \left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} \right).$$

$$\text{Giả sử: } y_n = \frac{1}{2} \left(\beta^{2^{n-1}} + \frac{1}{\beta^{2^{n-1}}} \right), \text{ khi đó } y_{n+1} = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\beta^{2^{n-1}} + \frac{1}{\beta^{2^{n-1}}} \right) \right]^2 - 1 = \frac{1}{2} \left(\beta^{2^n} + \frac{1}{\beta^{2^n}} \right)$$

$$\text{Vậy } y_n = \frac{1}{2} \left(\beta^{2^{n-1}} + \frac{1}{\beta^{2^{n-1}}} \right), \forall n = 1, 2, \dots$$

Bài 4: Xác định dãy số (y_n) thỏa điều kiện $y_1 \in \mathbb{R}; y_{n+1} = 4y_n^3 - 3y_n, \forall n = 1, 2, \dots$

Giải.

* Nếu $|y_1| \leq 1$ thì tồn tại ϕ sao cho $\cos \phi = y_1$.

Khi đó: $y_2 = 4\cos^3 \phi - 3\cos \phi = \cos 3\phi, y_3 = \cos 3^2 \phi, \dots, y_n = \cos 3^{n-1} \phi$.

* Nếu $|y_1| > 1$, xét số thực β sao cho $y_1 = \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \Leftrightarrow \beta^2 - 2y_1\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = y_1 + \sqrt{y_1^2 - 1} \\ \beta = y_1 - \sqrt{y_1^2 - 1} \end{cases}$

Vậy: nếu đặt $\beta = y_1 + \sqrt{y_1^2 - 1}$ thì $y_1 = \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right); \frac{1}{\beta} = y_1 - \sqrt{y_1^2 - 1}$

$$\text{Ta có: } y_1 = 4 \left[\frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \right]^3 - 3 \left[\frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\beta^3 + \frac{1}{\beta^3} \right),$$

$$y_2 = 4y_1^3 - 3y_1 = 4 \left[\frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \right]^3 - 3 \left[\frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\beta^3 + \frac{1}{\beta^3} \right).$$

$$\text{Giả sử: } y_n = \frac{1}{2} \left(\beta^{3^{n-1}} + \frac{1}{\beta^{3^{n-1}}} \right).$$

$$\text{Khi đó: } y_{n+1} = 4 \left[\frac{1}{2} \left(\beta^{3^{n-1}} + \frac{1}{\beta^{3^{n-1}}} \right) \right]^3 - 3 \left[\frac{1}{2} \left(\beta^{3^{n-1}} + \frac{1}{\beta^{3^{n-1}}} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\beta^{3^n} + \frac{1}{\beta^{3^n}} \right).$$

$$\text{Vậy: } y_n = \frac{1}{2} \left(\beta^{3^{n-1}} + \frac{1}{\beta^{3^{n-1}}} \right), \forall n = 1, 2, \dots$$

Bài 5: Xác định dãy số (u_n) như sau: $x_1 = \alpha; x_{n+1} = \alpha x_n^3 + 3x_n (a > 0), \forall n \in N^*$

Giải

Đặt $x_n = \frac{2}{\sqrt{a}} y_n$ khi đó $y_1 = \frac{\alpha\sqrt{a}}{2}; y_{n+1} = 4y_n^3 + 3y_n, \forall n \in N^*$.

Xét số thực β sao cho $y_1 = \frac{1}{2} \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) \Leftrightarrow \beta^2 - 2y_1\beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = y_1 + \sqrt{y_1^2 + 1} \\ \beta = y_1 - \sqrt{y_1^2 + 1} \end{cases}$

Vậy: nếu đặt $\beta = y_1 + \sqrt{y_1^2 + 1}$ thì $y_1 = \frac{1}{2} \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right); \frac{1}{\beta} = -(y_1 - \sqrt{y_1^2 + 1})$

Ta có: $y_1 = 4 \left[\frac{1}{2} \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) \right]^3 + 3 \left[\frac{1}{2} \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\beta^3 - \frac{1}{\beta^3} \right)$

$y_2 = 4y_1^3 + 3y_1 = 4 \left[\frac{1}{2} \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) \right]^3 + 3 \left[\frac{1}{2} \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\beta^3 - \frac{1}{\beta^3} \right).$

Giả sử: $y_n = \frac{1}{2} \left(\beta^{3^{n-1}} - \frac{1}{\beta^{3^{n-1}}} \right).$

Khi đó: $y_{n+1} = 4 \left[\frac{1}{2} \left(\beta^{3^{n-1}} - \frac{1}{\beta^{3^{n-1}}} \right) \right]^3 + 3 \left[\frac{1}{2} \left(\beta^{3^{n-1}} - \frac{1}{\beta^{3^{n-1}}} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\beta^{3^n} - \frac{1}{\beta^{3^n}} \right).$

Vậy: $x_n = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[\left(\frac{\alpha\sqrt{a}}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2 a}{4} + 1} \right)^{3^{n-1}} + \left(\frac{\alpha\sqrt{a}}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2 a}{4} + 1} \right)^{3^{n-1}} \right], \forall n = 1, 2, \dots$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 3: Cho dãy số (x_n) xác định như sau: $x_1 < -\frac{1}{2}; x_{n+1} = 4x_n^2 - \frac{1}{2}, \forall n \in N^*$

Đặt $u_n = \frac{4^{1-n} x_{n+1}}{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$ Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n)

Giải.

Đặt $x_n = \frac{1}{2} y_n$ ta được dãy số (y_n) thỏa điều kiện $y_1 = 2x_1; \frac{1}{2} y_{n+1} = y_n^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y_{n+1} = 2y_n^2 - 1, \forall n = 1, 2, \dots$

Theo kết quả bài 3 trên, ta được: $y_n = \frac{1}{2} \left(\beta^{2^{n-1}} + \frac{1}{\beta^{2^{n-1}}} \right).$

Với: $\beta = y_1 + \sqrt{y_1^2 - 1} = 2x_1 + \sqrt{4x_1^2 - 1}$. Đặt: $z_n = 2y_n = \left(\beta^{2^{n-1}} + \frac{1}{\beta^{2^{n-1}}} \right).$

Khi đó:
$$\frac{z_{n+1}}{z_1 z_2 z_3 \dots z_n} = \frac{\beta^{2^n} + \frac{1}{\beta^{2^n}}}{\left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} \right) \left(\beta^{2^2} + \frac{1}{\beta^{2^2}} \right) \dots \left(\beta^{2^{n-1}} + \frac{1}{\beta^{2^{n-1}}} \right)}$$

$$= \frac{\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta^{2^n} + \frac{1}{\beta^{2^n}}\right)}{\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right)\left(\beta^{2^2} + \frac{1}{\beta^{2^2}}\right) \dots \left(\beta^{2^{n-1}} + \frac{1}{\beta^{2^{n-1}}}\right)} = \dots = \frac{\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta^{2^n} + \frac{1}{\beta^{2^n}}\right)}{\left(\beta^{2^n} - \frac{1}{\beta^{2^n}}\right)} = \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) \frac{\beta^{2^{n+1}} + 1}{\beta^{2^{n+1}} - 1}$$

Vì: $z_n = 2y_n = 4x_n$ nên $\frac{z_{n+1}}{z_1 z_2 z_3 \dots z_n} = \frac{4x_{n+1}}{4^n x_1 x_2 x_3 \dots x_n} = \frac{4^{1-n} x_{n+1}}{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$.

Vậy: Số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) \frac{\beta^{2^{n+1}} + 1}{\beta^{2^{n+1}} - 1}, \forall n \in N^*$.

Bài 4 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/1999): Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) như sau:

$$u_1 = 2; u_{n+1} = 9u_n^3 + 3u_n, \forall n \in N^*$$

Giải.

Đặt $u_n = \frac{2}{3}x_n$ khi đó $x_1 = 3; x_{n+1} = 4x_n^3 + 3x_n, \forall n \in N^*$

Theo kết quả bài 5 trên, ta có:

$$x_n = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3.2}{2} + \sqrt{\frac{3^2 4}{4} + 1} \right)^{3^{n-1}} + \left(\frac{3.2}{2} - \sqrt{\frac{3^2 4}{4} + 1} \right)^{3^{n-1}} \right] = \frac{1}{2} \left[(3 + \sqrt{10})^{3^{n-1}} + (3 - \sqrt{10})^{3^{n-1}} \right], \forall n = 1, 2, \dots$$

Bài 5 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2004): Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) như sau:

$$u_1 = \frac{3}{\sqrt{6}}; u_{n+1} = 24u_n^3 - 12\sqrt{6}u_n^2 + 15u_n - \sqrt{6}, \forall n \in N^*$$

Giải

Đặt $u_n = \sqrt{6}x_n - 1$ khi đó $x_1 = 2; x_{n+1} = 4x_n^3 + 3x_n, \forall n \in N^*$

Theo kết quả bài 5 trên ta $x_n = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left[(2 + \sqrt{5})^{3^{n-1}} + (2 - \sqrt{5})^{3^{n-1}} + 2 \right], \forall n = 1, 2, \dots$

Cách 2: Đặt $u_n = \sqrt{6}x_n - 1$

Khi đó $x_1 = 2; x_{n+1} = 4x_n^3 + 3x_n, \forall n \in N^*$

Xét phương trình $x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{5}; x = 2 - \sqrt{5}$

Phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$.

Ta chứng minh: $u_n = \frac{1}{2} (x_1^{3^{n-1}} + x_2^{3^{n-1}})$

Suy ra: $u_n = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left[(2 + \sqrt{5})^{3^{n-1}} + (2 - \sqrt{5})^{3^{n-1}} + 2 \right], \forall n = 1, 2, \dots$

B. Phương pháp lập.

Để tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) bằng phương pháp lập ta thường tìm các hàm số $f(x)$ và $h(x)$ sao cho $f(u_n) = h(f(u_{n-1}))$ (*). Sử dụng (*) liên tiếp ta thu được:

$$f(u_n) = h(f(u_{n-1})) = h(h(f(u_{n-2}))) = h_2(f(u_{n-2})) = \dots = h_n(f(u_0))(**)$$

Từ (**) ta tìm được u_0 . Hàm số f được gọi là hàm số phụ, còn hàm số h được gọi là hàm số lập.

CÁC VÍ DỤ

Bài 1: Tìm số hạng tổng quát của dãy số (x_n) cho như sau: $x_1 = 3; x_{n+1} = 7x_n - 1, \forall n = 1, 2, \dots$

Giải:

Gọi c là nghiệm của phương trình $f(x) = x$ trong đó $f(x) = 7x - 1$.

$$\text{Ta có : } 7c - 1 = c \Leftrightarrow c = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Xét: } x_{n+1} = 7x_n - 1 \Leftrightarrow x_{n+1} - \frac{1}{6} = 7x_n - 1 - \frac{1}{6}, \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Ta được: } x_{n+1} - \frac{1}{6} = 7x_n - \frac{7}{6} = 7\left(x_n - \frac{1}{6}\right), \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Vậy: } x_n - \frac{1}{6} = 7\left(x_{n-1} - \frac{1}{6}\right) = 7^2\left(x_{n-2} - \frac{1}{6}\right) = \dots = 7^{n-1}\left(x_1 - \frac{1}{6}\right) = 7^{n-1} \cdot \frac{17}{6}$$

$$\text{Suy ra: } x_n = \frac{17}{6} \cdot 7^{n-1} + \frac{1}{6}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Bài 2. Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $x_1 = 5; x_{n+1} = \frac{5x_n + 4}{x_n + 2}, \forall n \in N^*$.

Chứng minh rằng: $x_n \neq 4, \forall n \in N^*$. Tính x_{2013}

Giải

Gọi c là nghiệm của phương trình $f(x) = x$, trong đó $f(x) = \frac{5x + 4}{x + 2}$

$$\text{Xét: } \frac{5c + 4}{c + 2} = c \Leftrightarrow c^2 - 3c - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ c = 4 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } x_1 = 5 \neq 4.$$

$$\text{Giả sử: } x_n \neq 4, \forall n \in N^*.$$

$$\text{Ta chứng minh: } x_{n+1} \neq 4, \forall n \in N^*$$

$$\text{Nếu } x_{n+1} = 4 \text{ thì } \frac{5x_n + 4}{x_n + 2} = 4 \Leftrightarrow 5x_n + 4 = 4x_n + 8 \Leftrightarrow x_n = 4 \text{ (mâu thuẫn).}$$

$$\text{Vậy: } x_n \neq 4, \forall n \in N^*.$$

$$\text{Ta có: } x_n - 4 = \frac{5x_{n-1} + 4}{x_{n-1} + 2} - 4 = \frac{x_{n-1} - 4}{x_{n-1} + 2}; x_n + 1 = \frac{5x_{n-1} + 4}{x_{n-1} + 2} + 1 = 6 \frac{x_{n-1} + 1}{x_{n-1} + 2}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{x_n + 1}{x_n - 4} = 6 \frac{x_{n-1} + 1}{x_{n-1} - 4} = 6^2 \frac{x_{n-2} + 1}{x_{n-2} - 4} = \dots = 6^{n-1} \frac{x_1 + 1}{x_1 - 4} = 6^n$$

$$\text{Do đó: } x_n + 1 = 6^n (x_n - 4) \Leftrightarrow x_n = \frac{4 \cdot 6^n + 1}{6^n - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Vậy: } x_{2013} = \frac{4 \cdot 6^{2013} + 1}{6^{2013} - 1}.$$

Bài 3: Tìm số hạng tổng quát của dãy số (x_n) cho như sau:

$$x_1 = \alpha \in \mathbb{R}; x_{n+1} = x_n^2 - 14x_n + 56, \forall n = 1, 2, \dots$$

Giải

Gọi c là nghiệm của phương trình $f(x) = x$, trong đó $f(x) = x^2 - 14x + 56$.

$$c = c^2 - 14c + 56 \Leftrightarrow c^2 - 15c + 56 = 0 \Leftrightarrow c = 7; c = 8$$

$$\text{Xét: } x_n - 7 = x_{n-1}^2 - 14x_{n-1} + 49 = (x_{n-1} - 7)^2 = \dots = (x_1 - 7)^{2^{n-1}} = (\alpha - 7)^{2^{n-1}}, \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Vậy: Số hạng tổng quát của dãy số } (x_n) \text{ là } x_n = 7 + (\alpha - 7)^{2^{n-1}}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Bài 4: Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) cho như sau:

$$u_1 = \alpha \in \mathbb{R}; u_{n+1} = 3u_n^2 + 4u_n + \frac{2}{3}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Giải.

$$\text{Ta biến đổi: } u_{n+1} = 3u_n^2 + 4u_n + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3u_{n+1} = 9u_n^2 + 12u_n + 2.$$

$$\text{Đặt } u_n = \frac{x_n}{3}.$$

$$\text{Ta được: } x_1 = 3\alpha \in \mathbb{R}; x_{n+1} = x_n^2 + 4x_n + 2, \forall n = 1, 2, \dots$$

$$x_{n+1} + 2 = x_n^2 + 4x_n + 4 = (x_n + 2)^2, \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Suy ra: } x_n + 2 = (x_{n-1} + 2)^2 = (x_{n-2} + 2)^{2^2} = \dots = (x_1 + 2)^{2^{n-1}}$$

$$\text{Vậy: } x_n = (3\alpha + 2)^{2^{n-1}} - 2 \Rightarrow u_n = \frac{(3\alpha + 2)^{2^{n-1}} - 2}{3}.$$

$$\text{Lóp hàm } g(x) = \frac{ax}{b + c^2 x^2}$$

$$\text{Ta có: } d - g(x) = d - \frac{ax}{b + c^2 x^2} = \frac{bd - ax + dc^2 x^2}{b + c^2 x^2}$$

$$\text{Ta cần chọn } a, b, c, d \text{ sao cho } bd - ax + dc^2 x^2 = (d - x)^2 = d^2 - 2dx + x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} bd = d^2 \\ a = 2d \\ dc^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = d \\ a = 2d \\ c^2 = \frac{1}{d} \end{cases}.$$

Bài 5: Tìm số hạng tổng quát của dãy số (x_n) cho như sau: $x_1 = \alpha \in \mathbb{R}; x_{n+1} = \frac{8x_n}{4+x_n^2}, \forall n=1,2,\dots$

Giải.

Nếu $\alpha = -2$ thì $x_n = -2, \forall n=1,2,\dots$

Xét $\alpha \neq -2$. Ta có: $2 - x_n = 2 - \frac{8x_{n-1}}{4+x_{n-1}^2} = \frac{2x_{n-1}^2 - 8x_{n-1} + 8}{4+x_{n-1}^2} = \frac{2(2-x_{n-1})^2}{4+x_{n-1}^2} \quad (1)$

$$2 + x_n = 2 + \frac{8x_{n-1}}{4+x_{n-1}^2} = \frac{2x_{n-1}^2 + 8x_{n-1} + 8}{4+x_{n-1}^2} = \frac{2(2+x_{n-1})^2}{4+x_{n-1}^2} \quad (2)$$

Xét hàm số: $f(x) = \frac{2-x}{2+x}$.

Ta thấy:

$$f(x_n) = \frac{2-x_n}{2+x_n} = \left(\frac{2-x_{n-1}}{2+x_{n-1}} \right)^2 = [f(x_{n-1})]^2 = [f(x_{n-2})]^{2^2} = \dots = [f(x_1)]^{2^{n-1}} = [f(\alpha)]^{2^{n-1}} \quad (3)$$

Đặt: $\beta = [f(\alpha)]^{2^{n-1}}$ nên $\frac{2-x_n}{2+x_n} = \beta \Leftrightarrow x_n = \frac{2-2\beta}{1+\beta}$

Vậy: Số hạng tổng quát của dãy số (x_n) là $x_n = \frac{2 \left[1 - \left(\frac{2-\alpha}{1+\alpha} \right)^{2^{n-1}} \right]}{1 + \left(\frac{2-\alpha}{1+\alpha} \right)^{2^{n-1}}}, \forall n=1,2,\dots$

Lớp hàm $g(x) = \frac{x^3 + ax}{bx^2 + c}$

Ta có : $g(x) - d = \frac{x^3 + ax}{bx^2 + c} - d = \frac{x^3 - bdx^2 + ax - cd}{bx^2 + c}$

Ta cần chọn a, b, c, d sao cho $x^3 - bdx^2 + ax - cd = (x-d)^3 = x^3 - 3dx^2 + 3d^2x - d^3$

$$\Rightarrow \begin{cases} bd = 3d \\ a = 3d^2 \\ dc = d^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 3d^2 \\ c = d^2 \end{cases}.$$

Bài 6. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (x_n) xác định như sau:

$$x_1 = \alpha > 0; x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 6x_n}{3x_n^2 + 2}, \forall n=1,2,\dots$$

Giải.

Chọn $c = 2$ nên $b = 3, a = 6, d = \pm\sqrt{2}$

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{x_n^3 + 6x_n}{3x_n^2 + 2} - \sqrt{2} = \frac{x_n^3 - 3\sqrt{2}x_n^2 + 6x_n - 2\sqrt{2}}{3x_n^2 + 2} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^3}{3x_n^2 + 2} \quad (1)$$

$$x_{n+1} + \sqrt{2} = \frac{x_n^3 + 6x_n}{3x_n^2 + 2} + \sqrt{2} = \frac{x_n^3 + 3\sqrt{2}x_n^2 + 6x_n + 2\sqrt{2}}{3x_n^2 + 2} = \frac{(x_n + \sqrt{2})^3}{3x_n^2 + 2} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}$ ta thấy

$$f(x_n) = \frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} = \left(\frac{x_{n-1} - \sqrt{2}}{x_{n-1} + \sqrt{2}} \right)^3 = [f(x_{n-1})]^3 = [f(x_{n-2})]^{3^2} = \dots = [f(x_1)]^{3^{n-1}} = [f(\alpha)]^{3^{n-1}} \quad (3)$$

Đặt $\beta = [f(\alpha)]^{3^{n-1}}$ nên $\frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} = \beta \Leftrightarrow x_n = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}\beta}{1 - \beta}$

Vậy: Số hạng tổng quát của dãy số (x_n) là $x_n = \frac{\sqrt{2} \left[1 + \left(\frac{\alpha - \sqrt{2}}{\alpha + \sqrt{2}} \right)^{3^{n-1}} \right]}{1 - \left(\frac{\alpha - \sqrt{2}}{\alpha + \sqrt{2}} \right)^{3^{n-1}}}, \forall n = 1, 2, \dots$

Lớp hàm $g(x) = \frac{x^4 + ax^2 + b}{cx^3 + dx}$

Ta có : $g(x) - e = \frac{x^4 + ax^2 + b}{cx^3 + dx} - e = \frac{x^4 - cex^3 + ax^2 - dex + b}{cx^3 + dx}$

Ta cần chọn a, b, c, d, e sao cho $x^4 - cex^3 + ax^2 - dex + b = (x - e)^4 = x^4 - 4ex^3 + 6e^2x^2 - 4e^3x + e^4$

$$\Rightarrow \begin{cases} ce = 4e \\ a = 6e^2 \\ de = 4e^3 \\ b = e^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 4 \\ a = 6e^2 \\ d = 4e^2 \\ b = e^4 \end{cases}.$$

Bài 7. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (x_n) xác định như sau:

$$x_1 = \alpha > 0; x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 12x_n^2 + 4}{4x_n^3 + 8x_n}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Giải.

Chọn: $e = \sqrt{2}$ khi đó $a = 12, b = 4, c = 4, d = 8$.

Ta thấy: $x_n > 0, \forall n = 1, 2, \dots$

Do đó:

$$x_{n+1} + \sqrt{2} = \frac{x_n^4 + 12x_n^2 + 4}{4x_n^3 + 8x_n} + \sqrt{2} = \frac{x_n^4 + 4\sqrt{2}x_n^3 + 12x_n^2 + 8\sqrt{2}x_n + 4}{4x_n^3 + 8x_n} = \frac{(x_n + \sqrt{2})^4}{4x_n^3 + 8x_n} \quad (1)$$

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{x_n^4 + 12x_n^2 + 4}{4x_n^3 + 8x_n} - \sqrt{2} = \frac{x_n^4 - 4\sqrt{2}x_n^3 + 12x_n^2 - 8\sqrt{2}x_n + 4}{4x_n^3 + 8x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^4}{4x_n^3 + 8x_n} \quad (2).$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}, \forall x > 0$.

Ta suy ra:

$$f(x_n) = \frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} = \left(\frac{x_{n-1} - \sqrt{2}}{x_{n-1} + \sqrt{2}} \right)^4 = [f(x_{n-1})]^4 = [f(x_{n-2})]^{4^2} = \dots = [f(x_1)]^{4^{n-1}} = [f(\alpha)]^{4^{n-1}} \quad (3)$$

Đặt: $\beta = [f(\alpha)]^{4^{n-1}}$.

$$\text{Nên: } \frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} = \beta \Leftrightarrow x_n = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}\beta}{1 - \beta}$$

Vậy: Số hạng tổng quát của dãy số (x_n) là $x_n = \frac{\sqrt{2} \left[1 + \left(\frac{\alpha - \sqrt{2}}{\alpha + \sqrt{2}} \right)^{4^{n-1}} \right]}{1 - \left(\frac{\alpha - \sqrt{2}}{\alpha + \sqrt{2}} \right)^{4^{n-1}}}, \forall n = 1, 2, \dots$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Bài 1: Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) cho như sau:

$$u_1 = \alpha \in R; u_{n+1} = -5u_n^2 - 4u_n - \frac{6}{5}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Giải.

$$\text{Đặt } u_n = -\frac{x_n}{5} \text{ Khi đó. } -\frac{1}{5}x_{n+1} = -\frac{1}{5}x_n^2 + \frac{4}{5}x_n - \frac{6}{5} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n^2 - 4x_n + 6, \forall n = 1, 2, \dots$$

$$x_{n+1} - 2 = x_n^2 - 4x_n + 4 = (x_n - 2)^2, \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Suy ra: } x_n - 2 = (x_{n-1} - 2)^2 = (x_{n-2} - 2)^{2^2} = \dots = (x_1 - 2)^{2^{n-1}}$$

$$\text{Vậy: } x_n = (3\alpha + 2)^{2^{n-1}} + 2 \Rightarrow u_n = -\frac{1}{5} \left((5\alpha + 2)^{2^{n-1}} + 2 \right).$$

Bài 2: Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) cho như sau:

$$u_1 = \alpha \in R; u_{n+1} = 25u_n^3 - 15u_n^2 + 3u_n, \forall n = 1, 2, \dots$$

Giải.

$$\text{Đặt } u_n = \frac{x_n}{5} \text{ ta được } x_1 = 5\alpha \in R; x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n^2 + 3x_n, \forall n = 1, 2, \dots$$

$$x_{n+1} - 1 = x_n^3 - 3x_n^2 + 3x_n - 1 = (x_n - 1)^3, \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Suy ra: } x_n - 1 = (x_{n-1} - 1)^3 = (x_{n-2} - 1)^{3^2} = \dots = (x_1 - 1)^{3^{n-1}}$$

$$\text{Vậy: } x_n = (5\alpha - 1)^{3^{n-1}} + 1 \Rightarrow u_n = \frac{(5\alpha - 1)^{3^{n-1}} + 1}{5}.$$

Bài 3: Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) cho như sau:

$$u_1 = \alpha \in R; u_{n+1} = \frac{3u_n^2 + 6u_n - 1}{9u_n^2 - 6u_n + 5}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Hướng dẫn: Đặt $x_n = 3u_n - 1$. Biến đổi đưa về dạng $x_{n+1} = \frac{8x_n}{4 + x_n^2}, \forall n = 1, 2, \dots$

Bài 4: Tìm số hạng tổng quát của dãy số (x_n) cho như sau:

$$x_1 = \alpha > 0; x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 12x_n}{3x_n^2 + 4}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Giải.

Chọn $c = 4$ nên $b = 3, a = 12, d = \pm 2$

$$x_{n+1} - 2 = \frac{x_n^3 + 12x_n}{3x_n^2 + 4} - 2 = \frac{x_n^3 - 6x_n^2 + 12x_n - 8}{3x_n^2 + 4} = \frac{(x_n - 2)^3}{3x_n^2 + 4} \quad (1)$$

$$x_{n+1} + 2 = \frac{x_n^3 + 12x_n}{3x_n^2 + 4} + 2 = \frac{x_n^3 + 6x_n^2 + 12x_n + 8}{3x_n^2 + 4} = \frac{(x_n + 2)^3}{3x_n^2 + 4} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$.

Ta thấy:

$$f(x_n) = \frac{x_n - 2}{x_n + 2} = \left(\frac{x_{n-1} - 2}{x_{n-1} + 2} \right)^3 = [f(x_{n-1})]^3 = [f(x_{n-2})]^3 = \dots = [f(x_1)]^{3^{n-1}} = [f(\alpha)]^{3^{n-1}} \quad (3)$$

$$\text{Đặt } \beta = [f(\alpha)]^{3^{n-1}} \text{ nên } \frac{x_n - 2}{x_n + 2} = \beta \Leftrightarrow x_n = \frac{2 + 2\beta}{1 - \beta}$$

$$\text{Vậy: Số hạng tổng quát của dãy số } (x_n) \text{ là } x_n = \frac{2 \left[1 + \left(\frac{\alpha - 2}{\alpha + 2} \right)^{3^{n-1}} \right]}{1 - \left(\frac{\alpha - 2}{\alpha + 2} \right)^{3^{n-1}}}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Bài 5: Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) xác định như sau:

$$u_1 = \alpha; u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 9u_n - 6}{3u_n^2 - 6u_n + 7}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Hướng dẫn: Đặt $x_n = u_n - 1$. Biến đổi đưa về dạng: $x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 12x_n}{3x_n^2 + 4}, \forall n = 1, 2, \dots$

Bài 6: Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) xác định như sau:

$$u_1 = \alpha \in R; u_{n+1} = \frac{4u_n(4u_n^2 + 1)}{16u_n^4 + 24u_n^2 + 1}, \forall n \in N^*.$$

Giải.

Ta thấy $\forall n \in N^*$ tồn tại u_n . Nếu $\alpha = -\frac{1}{2}$ thì $u_n = -\frac{1}{2}$

Ta xét $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ ta có :

$$2u_{n+1} + 1 = \frac{32u_n^3 + 8u_n}{16u_n^4 + 24u_n^2 + 1} + 1 = \frac{16u_n^4 + 32u_n^3 + 24u_n^2 + 8u_n + 1}{16u_n^4 + 24u_n^2 + 1} = \frac{(2u_n + 1)^4}{16u_n^4 + 24u_n^2 + 1} \quad (1)$$

$$2u_{n+1} - 1 = \frac{32u_n^3 + 8u_n}{16u_n^4 + 24u_n^2 + 1} - 1 = \frac{-16u_n^4 + 32u_n^3 - 24u_n^2 + 8u_n - 1}{16u_n^4 + 24u_n^2 + 1} = \frac{-(2u_n - 1)^4}{16u_n^4 + 24u_n^2 + 1} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$.

Ta thấy:

$$f(u_n) = \frac{2u_n - 1}{2u_n + 1} = -\left(\frac{2u_{n-1} - 1}{2u_{n-1} + 1}\right)^4 = -[f(u_{n-1})]^4 = -[f(u_{n-2})]^{4^2} = \dots = -[f(u_1)]^{4^{n-1}} = -[f(\alpha)]^{4^{n-1}} \quad (3)$$

Đặt $\beta = [f(\alpha)]^{4^{n-1}}$ nên $\frac{2u_n - 1}{2u_n + 1} = -\beta \Leftrightarrow u_n = \frac{1 - \beta}{2 + 2\beta}$

Vậy: Số hạng tổng quát của dãy số (x_n) là:

$$\text{Nếu } \alpha = -\frac{1}{2} \text{ thì } u_n = -\frac{1}{2} \quad \text{Nếu } \alpha \neq -\frac{1}{2} \text{ thì } u_n = \frac{1 - \left(\frac{2\alpha - 1}{\alpha + 2}\right)^{4^{n-1}}}{2 \left[1 + \left(\frac{2\alpha - 1}{2\alpha + 1}\right)^{4^{n-1}}\right]}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Bài 7. (HSG QG 2010)

Cho dãy số (u_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt[n]{u_{n-1}^{n-1} + 2^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1}}, \forall n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

b) Chứng minh rằng (u_n) là dãy số giảm .

Giải

a) Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} u_n^n &= u_{n-1}^{n-1} + 2^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} = (u_{n-2}^{n-2} + 2^{n-2} + 2 \cdot 3^{n-2}) + 2^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} = u_{n-2}^{n-2} + (2^{n-2} + 2^{n-1}) + 2(3^{n-2} + 3^{n-1}) = \dots \\ &= u_1 + (2 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1}) + 2(3 + \dots + 3^{n-2} + 3^{n-1}) = 5 + \frac{2(1 - 2^{n-1})}{1 - 2} + 2 \frac{3(1 - 3^{n-1})}{1 - 3} = 2^n + 3^n \end{aligned}$$

$$\text{vậy } u_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}, \forall n = 2, 3, \dots$$

$$\text{b) Ta có } u_n^{n+1} = \sqrt[n+1]{2^n + 3^n} (2^n + 3^n) > \sqrt[n+1]{3^n} (2^n + 3^n) = 3(2^n + 3^n) = 3 \cdot 2^n + 3^{n+1} > 2^{n+1} + 3^{n+1}, \forall n = 2, 3, \dots$$

vậy $u_n > u_{n+1}, \forall n = 2, 3, \dots$ Hay (u_n) là dãy số giảm.

C. XÁC ĐỊNH DÃY SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN.

- Cho dãy số (x_n) . Xét phương trình $a_0x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + \dots + a_kx_n = g(n)$ (1) Trong đó $g(n)$ là hàm số theo n , và $a_0, a_1, \dots, a_k$ là các hằng số. khi đó phương trình $a_0x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + \dots + a_kx_n = 0$ (2) được gọi là Phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất tương ứng với phương trình (1)
- phương trình $a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0$ (3) được gọi là Phương trình đặc trưng của (2).
- Nghiệm tổng quát của phương trình (1) sẽ có dạng $x_n = x_n + x_n^*, \forall n = 1, 2, \dots$ Trong đó x_n là nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất (2), còn x_n^* là nghiệm riêng của phương trình (1).

I./PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH BẬC NHẤT.

1/ phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất bậc nhất .

Định nghĩa: Phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất bậc nhất với hệ số hằng là phương trình có dạng: $ax_{n+1} + bx_n = 0, n=0,1,2,3\dots(1.1)$. Trong đó $a \neq 0, b \neq 0$ là những số cho trước.

Phương trình đặc trưng của (1,1) $a\lambda + b = 0$, phương trình này có nghiệm là $\lambda = -\frac{b}{a}$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình sai phân (1.1) có dạng: $x_n = C.\lambda^n, n = 1, 2, 3, \dots$

Ví dụ: $x_{n+1} = 2x_n$ và $x_1 = -3, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ có công thức tổng quát $x_n = (-3).2^n$

2/ phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất bậc nhất .

Định nghĩa : Phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất bậc nhất là phương trình có dạng: $ax_{n+1} + bx_n = d_n, n=0,1,2,3\dots(1.3)$. Trong đó $a \neq 0, b$ là những hằng số, d_n là các số nào đó.

Ta thường viết dưới dạng : $x_{n+1} = qx_n + d_n, n = 0, 1, 2, 3, \dots (1.4)$.

Ví dụ : Tìm nghiệm của phương trình $x_0 = 1; 5x_{n+1} + 3x_n = 2^n, n = 1, 2, 3, \dots$

Giải

Phương trình đặc trưng $5\lambda + 3 = 0$ có nghiệm $\lambda = -\frac{3}{5}$.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $x_n = C\left(-\frac{3}{5}\right)^n$.

Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $x_n^* = a.2^n$.

Thay vào phương trình ta được $5.a.2^{n+1} + 3.a.2^n = 2^n \Leftrightarrow a = \frac{1}{13}$. Do đó $x_n^* = \frac{1}{13}.2^n$

Nghiệm tổng quát của phương trình là $x_n = C\left(-\frac{3}{5}\right)^n + \frac{1}{13}.2^n$. Vì $x_0 = 1$ nên $C + \frac{1}{13} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{12}{13}$

Vậy $x_n = \frac{12}{13}\left(-\frac{3}{5}\right)^n + \frac{1}{13}.2^n$.

Dưới đây ta sẽ tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân.

DẠNG 1. Dãy số $\begin{cases} u_1 = x_0 \\ u_n = qu_{n-1} + b \end{cases} \quad \forall n \geq 2 .$

Nếu $q = 1$ thì (u_n) là cấp số cộng có công sai $d = b$ nên $u_n = u_1 + (n-1)b$.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $u_{n+1} = u_n$ là $u_n = C$.

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $u_n^* = cn$.

Thay vào phương trình ta được $u_{n+1} = u_n + d$ ta được $c(n+1) = cn + d \Rightarrow c = d$

Nghiệm tổng quát của phương trình là $u_n = C + nd$.

Vì $u_0 = x_0$ cho trước thì $u_n = x_0 + nd$ hay $u_n = u_1 + (n-1)b$

Đây chính là công thức tổng quát của cấp số cộng.

Nếu $q \neq 1$ Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $u_{n+1} = qu_n$ là $u_n = C.q^n$

$d = b$ là đa thức bậc 0 với mọi n nên phương trình có nghiệm riêng $u_n^* = c$

Thay vào phương trình ta được $u_{n+1} = qu_n + b$ ta được $c = qc + b \Rightarrow c = \frac{b}{1-q}$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $u_n = C.q^n + \frac{b}{1-q}$

BÀI TẬP ÁP DỤNG.

Bài 1 Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi :

a) $u_1 = 1, u_n = u_{n-1} - 2 \quad \forall n \geq 2$.

b) $u_1 = 3, u_n = 2u_{n-1} \quad \forall n \geq 2$.

c) $u_1 = 2, u_n = 3u_{n-1} + 2 \quad \forall n \geq 2$

d) $u_1 = -2, u_n = 3u_{n-1} - 1 \quad \forall n \geq 2$.

e) $u_1 = \frac{1}{2}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 3} \quad \forall n \geq 2$.

Giải

a) $u_1 = 1, u_n = u_{n-1} - 2 \quad \forall n \geq 2$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $u_{n+1} = u_n$ là $u_n = C$.

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $u_n^* = an$.

Nghiệm tổng quát của phương trình là $u_n = C + an$.

Vì $u_1 = 1 \Rightarrow u_2 = -1$ thì hệ phương trình $\begin{cases} C + a = 1 \\ C + 2a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 3 \\ a = -2 \end{cases}$

Vậy công thức tổng quát $u_n = 3 - 2n, \quad \forall n \geq 2$.

b) $u_1 = 3, u_n = 2u_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $u_{n+1} = 2u_n$ là $u_n = C.2^n$.

$u_1 = 3 \Rightarrow 3 = c.2 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$. Nghiệm tổng quát của phương trình là $u_n = 3.2^{n-1}$.

c) $u_1 = 2, u_n = 3u_{n-1} + 2 \quad \forall n \geq 2$.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $u_{n+1} = 3u_n$ là $u_n = C.3^n$.

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $u_n^* = a$.

Nghiệm tổng quát của phương trình là $u_n = C.3^n + a$.

$$\text{Vì } u_1 = 2 \Rightarrow u_2 = 8 \text{ thì hệ phương trình } \begin{cases} 3C + a = 2 \\ 9C + a = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

Vậy công thức tổng quát $u_n = 3^n - 1, \forall n \geq 1$.

d) $u_1 = -2, u_n = 3u_{n-1} - 1 \forall n \geq 2$.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $u_{n+1} = 3u_n$ là $u_n = C.3^n$.

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $u_n^* = a$.

Nghiệm tổng quát của phương trình là $u_n = C.3^n + a$.

$$\text{Vì } u_1 = -2 \Rightarrow u_2 = -7 \text{ thì hệ phương trình } \begin{cases} 3C + a = -2 \\ 9C + a = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -\frac{5}{6} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy công thức tổng quát $u_n = -\frac{5}{6}.3^n + \frac{1}{2}$.

e) $u_1 = \frac{1}{2}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 3} \forall n \geq 2$.

Ta có: $u_1 > 0$ bằng quy nạp ta được $u_n > 0$.

Từ giả thiết suy ra $\frac{1}{u_{n+1}} = 2 + \frac{3}{u_n}$. Đặt $v_n = \frac{1}{u_n}$ khi đó $v_n = 3v_{n-1} + 2 \forall n \geq 2$ với $v_1 = 2$

Áp dụng kết quả câu c ta được $u_n = \frac{1}{3^n - 1} \forall n \geq 1$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Bài 1: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi :

a/ $u_1 = 4, u_n = u_{n-1} + 2 \forall n \geq 2$. ĐS: $u_n = 2n + 2$.

b/ $u_1 = 2, u_n = 3u_{n-1} \forall n \geq 2$. ĐS: $u_n = 2.3^{n-1}$.

c/ $u_1 = 1, u_n = 3u_{n-1} + 6 \forall n \geq 2$. ĐS: $u_n = 4.3^{n-1} - 3 \forall n \geq 2$.

d/ $u_1 = -1, u_n = 4u_{n-1} + 2 \forall n \geq 2$. ĐS: $u_n = -\frac{4^{n-1}}{3} - \frac{2}{3} \forall n \geq 2$.

Bài 2: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi :

$$\text{a/ } \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{-u_n}{u_n - 1} \end{cases} \quad n \geq 1 \quad \text{b/ } \begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1} \end{cases} \quad n \geq 1$$

Bài 3 (Lạng Sơn 2009 – 2010): Cho của dãy số (x_n) được xác định bởi: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{3x_n}{x_n + 2} \end{cases} \quad n \geq 1$.

Tìm công thức tổng quát của dãy số (x_n) theo n

DẠNG 2. Dãy số $\begin{cases} u_1 = x_0 \\ u_{n+1} = qu_n + f(n) \end{cases}$ trong đó $f(n)$ là đa thức bậc k theo n , q là hằng số.

Nếu $q = 1$ ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $u_n^* = n.g(n)$.
với $n.g(n)$ là đa thức bậc $k+1$ của n có hệ số tự do bằng 0.

Nếu $q \neq 1$ ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $u_n^* = g(n)$.
với $g(n)$ là đa thức bậc k .

BÀI TẬP ÁP DỤNG.

Bài 2: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi :

$$a/ u_1 = 2, u_n = u_{n-1} + 2n + 1 \quad \forall n \geq 2. \quad b/ u_1 = 2, u_{n+1} = 2u_n + 3n - 1 \quad \forall n \geq 1.$$

Giải

a/ $u_1 = 2, u_n = u_{n-1} + 2n + 1 \quad \forall n \geq 2$

Phương trình đặc trưng $\lambda - 1 = 0$ có nghiệm $\lambda = 1$.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $u_n = C$.

Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $u_n^* = n(an + b)$.

Ta phân tích $2n + 1 = g(n) - g(n-1) = an^2 + bn - a(n-1)^2 - b(n-1)$

$$\begin{matrix} n=1 \\ n=2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 3a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow u_n^* = g(n) = n^2 + 2n.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là $u_n = C + n^2 + 2n$

Vì $u_0 = 2$ thì $2 = C + 1^2 + 2.1 \Rightarrow C = -1$. Vậy: $u_n = n^2 + 2n - 1$.

b/ $u_1 = 2, u_{n+1} = 2u_n + 3n - 1 \quad \forall n \geq 1$.

Phương trình đặc trưng $\lambda - 2 = 0$ có nghiệm $\lambda = 2$.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $u_n = C.2^n$.

Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $u_n^* = g(n) = (an + b)$.

Ta phân tích $3n - 1 = an + b - 2[an - 1 + b]$

$$\begin{matrix} n=1 \\ n=2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ -b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-5 \end{cases} \Rightarrow g(n) = -3n - 5$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là $u_n = C.2^n - 3n - 5$

Vì $u_1 = 2$ thì $2 = C.2 - 3.1 - 5 \Rightarrow C = 5$. Vậy công thức tổng quát $u_n = 5.2^n - 3n - 5 \quad \forall n \geq 1$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Bài 3: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi:

a/ $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 5n + 2 \end{cases}$ ĐS: $u_n = \frac{5}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2$.

b/ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n^2 \end{cases} \quad n \geq 1$. ĐS: $u_n = \frac{2}{3}n^3 - n^2 + \frac{1}{3}n + 1$.

$$c/ \begin{cases} u_1 = 1 \\ 3u_{n+1} = 2u_n + n + 1 \end{cases} \quad \text{ĐS: } u_n = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + n - 2.$$

$$d/ \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2n^3 - 9n^2 + 9n - 3 \end{cases} \quad \text{ĐS: } u_n = 2 \cdot 3^n - n^3$$

DẠNG 3. Dãy số $\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = qu_n + P_k(n) \cdot \alpha^n \end{cases} \quad \alpha \neq 0$

Nếu $q = \alpha$ ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $u_n^* = n \cdot Q_k(n) \cdot \alpha^n$.

với $n \cdot Q_k(n)$ là đa thức bậc $k+1$ của n có hệ số tự do bằng 0.

Nếu $q \neq \alpha$ ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $u_n^* = Q_k(n) \cdot \alpha^n$.

với $Q_k(n)$ là đa thức bậc k .

BÀI TẬP ÁP DỤNG.

Bài 3: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi :

a./ $u_1 = 1, u_n = 3u_{n-1} + 2^n \quad \forall n \geq 2$

b) $u_1 = 3, u_n = u_{n-1} + 3 \cdot 4^n \quad \forall n \geq 2$

Giải

a./ $u_1 = 1, u_n = 3u_{n-1} + 2^n \quad \forall n \geq 2$

Phương trình đặc trưng $\lambda - 3 = 0$ có nghiệm $\lambda = 3$.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $u_n = C \cdot 3^n$.

Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $u_n^* = g(n) = a \cdot 2^n$.

Thay vào phương trình ta được $a \cdot 2^{n+1} = 3 \cdot a \cdot 2^n + 2^{n+1} \Rightarrow a = -2$ ta được $u_n^* = g(n) = -2^{n+1}$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $u_n = C \cdot 3^n - 2^{n+1}$

Vì $u_1 = 1$ thì $1 = C \cdot 3 - 2^2 \Rightarrow C = \frac{5}{3}$

Vậy công thức tổng quát $u_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 2^{n+1} \quad \forall n \geq 1$

b) $u_1 = 3, u_n = u_{n-1} + 3 \cdot 4^n \quad \forall n \geq 2$

Phương trình đặc trưng $\lambda - 1 = 0$ có nghiệm $\lambda = 1$.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $u_n = C$.

Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $u_n^* = g(n) = a \cdot 4^n$.

Thay vào phương trình ta được $a \cdot 4^{n+1} = a \cdot 4^n + 3 \cdot 2^{n+1} \Rightarrow a = 4$ ta được $u_n^* = g(n) = 4^{n+1}$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $u_n = C + 4^{n+1}$

Vì $u_1 = 3$ thì $3 = C + 4 \Rightarrow C = -1$

Vậy : $u_n = 4^n - 1$.

b) $u_1 = 6, u_{n+1} = 3u_n + 5 \cdot 3^n \quad \forall n \geq 1$

Phương trình đặc trưng $\lambda - 3 = 0$ có nghiệm $\lambda = 3$.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $u_n = C \cdot 3^n$.

Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $u_n^* = n \cdot g(n) = a \cdot 3^n$.

Thay vào phương trình ta được $a.(n+1)3^{n+1} = a.n3^n + 5.3^n \Rightarrow a = \frac{5}{3}$

ta được $u_n^* = \frac{5}{3}n.3^n = 5.n.3^{n-1}$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $u_n = C.3^n + 5.n3^{n-1}$

Vì $u_1 = 6$ thì $6 = C.3 + 5.1 \Rightarrow C = \frac{1}{3}$

Vậy : $u_n = 3^{n-1} + 5.n3^{n-1}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Bài 4 Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi :

a./ $u_1 = 4, u_{n+1} = 2u_n + 7.5^n \quad \forall n \geq 1$ ĐS: $u_n = \frac{5}{3}.2^n + \frac{7}{3}.3^n$

b) $u_1 = 4, u_{n+1} = 2u_n + 3.2^n \quad \forall n \geq 1$ ĐS: $u_n = 4.2^n + 3n.2^{n-1}$

c) $\begin{cases} u_1 = \frac{17}{5} \\ u_{n+1} = -3u_n + 2^n \end{cases} \quad n \geq 1$ ĐS: $u_n = 3^n + \frac{1}{5}.2^n$.

DẠNG 4. Dãy số $\begin{cases} u_1 = x_0 \\ u_n = au_{n-1} + b.\alpha^n + f \quad n \geq 2 \end{cases}$

Giả sử $d_n = f(n) + b.\alpha^n$ khi đó nghiệm riêng của phương trình $x_n^* = x_n^1 + x_n^2$

BÀI TẬP ÁP DỤNG.

Bài 3: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 5, u_{n+1} = 2u_n + 3.2^n + n^2$.

Giải

$$u_{n+1} = 2u_n + 3.2^n + n^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = 2x_n + 3.2^n & 1 \\ y_n = 2y_n + n^2 & 2 \end{cases}$$

Từ $x_n = x_1 - 3.2^{n-1} + 3n.2^{n-1}$; $y_n = y_1 + 6.2^{n-1} - n^2 + 2n + 3$.

$u_n = x_1 + y_1 + 3.2^{n-1} + 3n.2^{n-1} - n^2 + 2n + 3$

Vậy $u_n = 2^{n+2} + 3.2^{n-1} - \frac{1}{2}n^2 + 2n + 3$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Bài 1: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi :

a) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_n + 3^n - n \end{cases} \quad n \geq 1$ ĐS: $u_n = -11.2^{n-1} + 3^{n+1} + n + 2$

b) $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_n = 2u_n + 7.5^n + 3.2^n \end{cases} \quad n \geq 1$ ĐS: $u_n = \left(\frac{10}{3} + 3n\right).2^{n-1} + \frac{7}{3}.5^n$

Bài 2: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$u_1 = 1, u_{n+1} = 2u_n + 2.2^n + n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{ĐS: } u_n = 5.2^{n-1} + n.2^2 - n^2 - 2n - 3, \forall n = 1, 2, \dots$$

Bài 3: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi :

$$u_1 = -2, u_n = 5u_{n-1} + 2.3^n - 6.7^n + 12 \quad \forall n \geq 2$$

$$\text{ĐS: } u_n = 157.5^{n-1} - 3^{n-1} - 3.7^{n-1} - 3$$

II./ PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN BẬC HAI.

I. Phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất bậc hai .

Định nghĩa: Phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất bậc hai với hệ số hằng là phương trình có dạng: $ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0, n=0,1,2,3,\dots$ (1.1). Trong đó $a \neq 0, b, c$ là những số cho trước.

Nếu $c = 0$ Phương trình này là phương trình tuyến tính bậc nhất.

Trường hợp 1: Phương trình đặc trưng $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ có 2 nghiệm là λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$).

Thì nghiệm tổng quát của phương trình sai phân (1.1) có dạng: $x_n = C_1.\lambda_1^n + C_2.\lambda_2^n$.

Ví dụ : Tìm nghiệm của phương trình sai phân
$$\begin{cases} x_0 = 7; x_1 = -6 \\ x_{n+2} = 3x_{n+1} + 28x_n \end{cases}$$

Giải

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 3\lambda - 28 = 0$ có 2 nghiệm $\lambda_1 = -4; \lambda_2 = 7$.

Nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng $x_n = C_1(-4)^n + C_2.7^n$.

Với điều kiện ban đầu

$$n = 0, x_0 = 7, \text{ ta có } x_0 = C_1 + C_2 = 7; n = 1, x_1 = -6$$

$$\text{ta có } x_1 = -4C_1 + 7C_2 = -6. \text{ suy ra } C_1 = 5; C_2 = 2$$

Vậy nghiệm tổng quát phương trình với điều kiện ban đầu là $x_n = 5(-4)^n + 2.7^n$

LƯU Ý: Với điều kiện ban đầu $x_0 = 5; x_1 = -9$ thì $x_n = -(-4)^n + 7^{n-1}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân:

$$\text{a) } \begin{cases} x_0 = 8; x_1 = 3 \\ x_{n+2} = 12x_n - x_{n+1} \end{cases} \quad \text{ĐS: } x_n = 5.3^n + 3.(-4)^n$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_0 = 2; x_1 = -8 \\ x_{n+2} + 8x_{n+1} - 9x_n = 0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } x_n = 1 + (-9)^n$$

Trường hợp 2: Phương trình đặc trưng $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ có nghiệm kép là $\lambda_1 = \lambda_2$.

Thì nghiệm tổng quát của phương trình sai phân (1.1) có dạng: $x_n = C_1.\lambda_1^n + C_2.n\lambda_1^n$.

Ví dụ : Tìm nghiệm của phương trình sai phân
$$\begin{cases} x_0 = -1; x_1 = 2 \\ x_{n+2} = 10x_{n+1} - 25x_n \end{cases}$$

Giải

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$ có nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$.

Nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng $x_n = (C_1 + nC_2).5^n$.

Với điều kiện ban đầu $n = 0, x_0 = -1$ ta có $x_0 = C_1 = -1$;

$$n = 1, x_1 = 2, \text{ ta có } x_1 = (C_1 + C_2) \cdot 5 = 2 \text{ suy ra } C_1 = -1; C_2 = \frac{7}{5}$$

$$\text{Vậy nghiệm tổng quát phương trình với điều kiện ban đầu là } x_n = \left(-1 + \frac{7}{5}n\right) \cdot 5^n$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân:

$$\text{a) } \begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 16 \\ x_{n+2} = 8x_{n+1} - 16x_n \end{cases} \quad \text{ĐS: } x_n = 1 + 3n \cdot 4^n$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_0 = 33; x_1 = 162 \\ x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n \end{cases} \quad \text{ĐS: } x_n = 4 + 7n \cdot 3^n$$

$$\text{c) } \begin{cases} x_1 = 1; x_2 = 3 \\ x_{n+2} = 2x_{n+1} - 1x_n \end{cases} \quad \text{ĐS: } x_n = 1 + 2n$$

Trường hợp 3: Phương trình đặc trưng $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ vô nghiệm .

Thì nghiệm tổng quát của phương trình sai phân (1.1) có dạng: $x_n = r^n (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi)$.

$$\text{Trong đó } r = \sqrt{A^2 + B^2}; \varphi = \arctan \frac{B}{A}; A = \frac{-b}{2a}; B = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}; \Delta = b^2 - 4ac.$$

Ví dụ : Tìm nghiệm của phương trình sai phân $\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = \frac{1}{2} \\ x_{n+2} = x_{n+1} - x_n \end{cases}$

Giải

$$\text{Phương trình đặc trưng } \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \text{ có nghiệm } \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta có } A = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}; B = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}; r = \sqrt{A^2 + B^2} = 1; \varphi = \arctan \frac{B}{A} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

$$(\text{Shift - mode } 2 - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} - \text{Shift } 2(\text{cmplx}) - 3 = \text{máy hiện } 1 \left\langle \frac{1}{3} \pi \text{ Thì } r = 1; \varphi = \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{Nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng } x_n = C_1 \cos \frac{n\pi}{3} + C_2 \sin \frac{n\pi}{3}.$$

$$\text{Với điều kiện ban đầu } x_0 = 1 \text{ ta có } x_0 = C_1 = 1;$$

$$n = 1, x_1 = \frac{1}{2} \text{ ta có } x_1 = C_1 \cos \frac{\pi}{3} + C_2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{suy ra } C_1 = 1; C_2 = 0$$

$$\text{Vậy nghiệm tổng quát phương trình với điều kiện ban đầu là } x_n = \cos \frac{n\pi}{3}$$

II. Phương trình sai phân tuyến tính bậc hai .

Định nghĩa : Phương trình sai phân tuyến tính bậc hai không thuần nhất là phương trình có dạng: $ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = d_n$, $n=0,1,2,3...(1.2)$. Trong đó a,b,c là những hằng số, d_n là hàm số của biến số tự nhiên n . $n = 0,1,2,3... (1.4)$.

DẠNG 5. Dãy số
$$\begin{cases} u_1 = x_0; u_2 = y_0 \\ a.u_{n+2} + bu_{n+1} + c.u_n = d.\alpha^n \end{cases} \forall n \in N$$

- Nếu phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác α . Thì $u_n^* = \frac{d.\alpha^n}{a\alpha^2 + b\alpha + c}$
- Nếu phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt có 1 nghiệm $u = \alpha$. Thì $u_n^* = \frac{n.d.\alpha^{n-1}}{2a\alpha + b}$.
- Nếu phương trình (*) có nghiệm kép $u = \alpha$. Thì $u_n^* = \frac{n. n-1 d.\alpha^{n-2}}{2a}$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi:

a/
$$\begin{cases} u_0 = -1; u_1 = 3 \\ u_{n+2} - 4u_{n+1} + 3u_n = 5.2^n \end{cases} \forall n \in N$$

Giải

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ có 2 nghiệm $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3$.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng $u_n = C_1.3^n + C_2$.

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng $u_n^* = \frac{5.2^n}{4-8+3} = -5.2^n$.

Nên nghiệm tổng quát của phương trình có dạng $u_n = C_1.3^n + C_2 - 5.2^n$.

Với $u_0 = -1$ ta được $C_1 + C_2 - 5 = -1$; Với $u_1 = 3$ ta được $3C_1 + C_2 - 5.2 = 3$

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ 3C_1 + C_2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{9}{2} \\ C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $u_n = \frac{1}{2} 3^{n+2} - 1 - 5.2^n$.

b/
$$\begin{cases} u_0 = -1; u_1 = 3 \\ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 5.2^n \end{cases} \forall n \in N$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ có 2 nghiệm $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 3$.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $u_n = C_1.2^n + C_2.3^n$

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất: $u_n^* = \frac{5n.2^{n-1}}{4-5} = -5n.2^{n-1}$

Nên nghiệm tổng quát của phương trình có dạng $u_n = C_1.2^n + C_2.3^n - \frac{5}{2}n.2^n$.

Với $u_0 = -1$ ta được $C_1 + C_2 = -1$; Với $u_1 = 3$ ta được $2C_1 + 3C_2 - 5 = 3$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} C_1 + C_2 = -1 \\ 2C_1 + 3C_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -11 \\ C_2 = 10 \end{cases}$

Vậy $u_n = -11.2^n + 10.3^n - 5n.2^{n-1} = 10.3^n - 5n + 22.2^{n-1}$.

c/ $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 3 \\ u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 3.2^n \end{cases} \forall n \geq 2$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ có 2 nghiệm $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng $u_n = (C_1 + C_2n).2^n$.

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất $u_n^* = \frac{3n.(n-1)2^{n-2}}{2} = 3n.(n-1)2^{n-3}$

Nghiệm tổng quát của phương trình có dạng $u_n = (C_1 + C_2n).2^n + 3n(n-1)2^{n-3}$.

Ta có $\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_1 + C_2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = 1; C_2 = \frac{1}{2}$. Vậy $u_n = 3n^2 + n + 8.2^{n-3}$

d/ $\begin{cases} u_0 = 3; u_1 = 0 \\ u_n - 3u_{n-1} - 28u_{n-2} = 60 \end{cases} \forall n \geq 2$

Phương trình $x^2 - 3x - 28 = 0$ có 2 nghiệm $x = -4; x = 7$

Công thức tổng quát $u_n = a.(-4)^n + b.7^n + \frac{60}{1-3-28} = a.(-4)^n + b.7^n - 2$

Với $u_0 = 3; u_1 = 0$ $\begin{cases} a + b - 2 = 3 \\ -4a + 7b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3; b = 2$. Vậy $u_n = 3.(-4)^n + 2.7^n - 2$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Bài 1: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi :

a/ $\begin{cases} u_0 = -9; u_1 = 45 \\ u_n + 2u_{n-1} - 8u_{n-2} = 27.5^n \end{cases} \forall n \geq 2$

b/ $\begin{cases} u_0 = -9; u_1 = 45 \\ u_n - 8u_{n-1} + 15u_{n-2} = 2.5^{n+1} \end{cases} \forall n \geq 2$

c/ $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 496 \\ u_n - 16u_{n-1} + 64u_{n-2} = 128.8^n \end{cases} \forall n \geq 2$

d/ $\begin{cases} u_0 = 5; u_1 = 8 \\ u_n - 6u_{n-1} + 9u_{n-2} = 2.3^n - 4^n \end{cases} \forall n \geq 2$

e/ $\begin{cases} u_0 = 6; u_1 = 0 \\ u_n - 3u_{n-1} + 2u_{n-2} = 5 \end{cases} \forall n \geq 2$

f/ $\begin{cases} u_2 = -5; u_4 = -17 \\ u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2} = -1 \end{cases} \forall n \geq 2$.

Bài 2 (HSG Tỉnh LS 2008-2009): Dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau: $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2u_{n-1}}{3} \end{cases} \quad (1)$ (với $n = 1, 2, 3, \dots$). Tìm u_n (2)

DẠNG 6: Dãy số $\begin{cases} u_1 = x_0; u_2 = y_0 \\ a.u_{n+2} + b.u_{n+1} + c.u_n = f(n) \end{cases} \quad \forall n \geq 1$ trong đó $f(n)$ là đa thức theo n bậc k .

* Nếu $a + b + c \neq 0$ thì nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $u_n^* = g_k(n)$ là đa thức bậc k của n .

* Nếu $a + b + c = 0$ và $2a + b \neq 0$ thì nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $u_n^* = n.g_k(n)$

* Nếu $a + b + c = 0$ và $2a + b = 0$ thì nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $u_n^* = n^2.g_k(n)$

BÀI TẬP ÁP DỤNG.

Bài 1: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi :

$$a/ \begin{cases} u_0 = -1; u_1 = 3 \\ u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = 2n^2 + 2n + 1 \end{cases} \quad \forall n \geq 2$$

Giải

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ có 2 nghiệm $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 3$.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $u_n = C_1.2^n + C_2.3^n$.

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng $u_n^* = kn^2 + ln + t$.

Thay vào phương trình ta được:

$$2n^2 + 2n + 1 = kn^2 + ln + t - 5[k(n-1)^2 + l(n-1) + t] + 6[k(n-2)^2 + l(n-2) + t]$$

Cho lần lượt $n=0, n=1, n=2$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 19k - 7l + 2t = 1 \\ 7k - 5l + 2t = 5 \\ -k - 3l + 2t = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ l = 8 \\ t = 19 \end{cases} \quad \text{ta được } u_n^* = n^2 + 8n + 19$$

Nên Nghiệm tổng quát của phương trình có dạng $u_n = C_1.2^n + C_2.3^n + n^2 + 8n + 19$.

Với $u_0 = -1$ ta được $C_1 + C_2 + 19 = -1$; Với $u_1 = 3$ ta được $2C_1 + 3C_2 + 1 + 8 + 19 = 3$

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} C_1 + C_2 = -20 \\ 2C_1 + 3C_2 = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -35 \\ C_2 = 15 \end{cases}$$

Vậy $u_n = 15.3^n - 35.2^n + n^2 + 8n + 19$.

$$b/ \begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 4 \\ u_n - 3u_{n-1} + 2u_{n-2} = 2n + 1 \end{cases} \quad \forall n \geq 2$$

Giải

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ có 2 nghiệm $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2$. ($a+b+c=0$)

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $u_n = C_1.2^n + C_2$.

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng $u_n^* = n(kn + l)$.

Thay vào phương trình ta được :

$$2n + 1 = n(kn + l) - 5(n-1)[k(n-1) + l] + 6(n-2)[k(n-2) + l]$$

Cho lần lượt $n=0, n=1$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 5k - l = 1 \\ 3k - l = 3 \end{cases} \Leftrightarrow k = -1; l = -6 \text{ suy ra } u_n^* = -n^2 - 6n$$

Nên nghiệm tổng quát của phương trình có dạng $u_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 - n^2 - 6n$.

Với $u_0 = 1$ ta được $C_1 + C_2 = 1$; Với $u_1 = 4$ ta được $2C_1 + C_2 - 1 - 6 = 4$

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 10 \\ C_2 = -9 \end{cases}$$

Vậy $u_n = 5 \cdot 2^{n+1} - n^2 - 6n - 9$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Bài 1: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi :

$$\text{a./ } \begin{cases} u_0 = 8; u_1 = 3 \\ u_n + u_{n-1} - 12u_{n-2} = 3n + 2 \end{cases} \forall n \geq 2 \quad \text{b./ } \begin{cases} u_0 = 3; u_1 = -2 \\ u_n + 4u_{n-1} - 5u_{n-2} = 12n + 8 \end{cases} \forall n \geq 2$$

III. Phương trình sai phân tuyến tính bậc ba

DẠNG 8. Dãy số $\begin{cases} u_0 = x_0; u_1 = y_0; u_2 = z_0 \\ u_n + au_{n-1} + bu_{n-2} + cu_{n-3} = 0 \end{cases} \forall n \geq 3$

Để tìm công thức tổng quát của dãy số u_n ta làm như sau:

Xét phương trình đặc trưng $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. (*)

* Nếu phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 . Thì $u_n = p \cdot x_1^n + q \cdot x_2^n + k \cdot x_3^n$.

* Nếu phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = x_2 \neq x_3$. Thì $u_n = p + qn \cdot x_1^n + k \cdot x_3^n$.

* Nếu phương trình (*) có nghiệm bội 3 $x_1 = x_2 = x_3$. Thì $u_n = p + nq + k \cdot n^2 \cdot x_1^n$

Bài 4: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 = 0; u_1 = 1; u_2 = 3 \\ u_n - 7u_{n-1} + 11u_{n-2} - 5u_{n-3} = 0 \end{cases} \forall n \geq 3$$

Phương trình $x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = 0$ có 2 nghiệm $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 5$

Công thức tổng quát $u_n = p + qn + k \cdot 5^n$

Cho $n=0, n=1, n=2$ và giải hệ phương trình ta được $p = -\frac{1}{16}, q = \frac{3}{4}, k = \frac{1}{16}$.

Vậy $u_n = -\frac{1}{16} + \frac{3}{4}n + \frac{1}{16}5^n$.

DẠNG 9. Dãy số $\begin{cases} u_0 = x_0; u_1 = y_0; u_2 = z_0 \\ u_n + au_{n-1} + bu_{n-2} + cu_{n-3} = d_n \end{cases} \forall n \geq 3$

Trường hợp đặc biệt $d_n = f(n)$ là đa thức bậc k của n. Tìm $g(n)$ là đa thức cùng bậc f(n)

* Nếu phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 . Thì $x_n^* = g(n)$

* Nếu phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = x_2 \neq x_3$. Thì $x_n^* = ng(n)$.

* Nếu phương trình (*) có nghiệm bội 3 $x_1 = x_2 = x_3$. Thì $x_n^* = n^2 g$

Bài 5: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi :

$$\begin{cases} u_0 = 4; u_1 = 26; u_2 = 74 \\ u_n - 6u_{n-1} + 11u_{n-2} - 6u_{n-3} = 6n^2 - 4n - 8 \end{cases} \quad \forall n \geq 3$$

Phương trình $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ có 3 nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3$

Nghiệm riêng $x_n^* = g n = n an^2 + bn + c$ thay vào phương trình ta được

$$g n = n an^2 + bn + c - 6 n - 1 \left[a n - 1^2 + b n - 1 + c \right] + 11 n - 2$$

$$\left[a n - 2^2 + b n - 2 + c \right] = -6 n - 3 \left[a n - 3^2 + b n - 3 + c \right]$$

$$\text{lần lượt cho } n=0, n=1, n=2 \text{ ta được hệ phương trình } \begin{cases} 5a + 2b - c = 4 \\ 8a - c = 3 \\ 5a - 2b - c = -4 \end{cases} \Rightarrow a = 1; b = 2; c = 5$$

$$\text{nên } x_n^* = g n = n^3 + 2n^2 + 5n$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho có dạng $x_n = p + q.2^n + k.3^n + n^3 + 2n^2 + 5n$

Thay vào điều kiện ban đầu $x_0 = 4; x_1 = 26; x_2 = 74$ suy ra $p = -5; q = -1; k = 1$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = n^3 + 2n^2 + 5n - 5 - 2^n + 3^n$

Trường hợp đặc biệt $d_n = p n . \alpha^n$

* Nếu phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 khác α . Thì $x_n^* = p n . \alpha^n$

* Nếu phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt có $x_1 = \alpha$. Thì $x_n^* = p n n . \alpha^n$.

* Nếu phương trình (*) có nghiệm bội 3 $x_1 = x_2 = x_3 = \alpha$. Thì $x_n^* = n^2 p n . \alpha^n$

Bài 6: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi :

$$\begin{cases} u_1 = 3; u_2 = 20; u_3 = 89 \\ u_n - 6u_{n-1} + 11u_{n-2} - 6u_{n-3} = -2^{n-2} + 2.3^{n-2} \end{cases} \quad \forall n \geq 3$$

Phương trình $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ có 3 nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3$

Phương trình đặc trưng có nghiệm $x=2$ nên Nghiệm riêng $x_n^2 = cn.2^n$ thay vào phương trình $u_n - 6u_{n-1} + 11u_{n-2} - 6u_{n-3} = -2^n$ ta được $3c.2^3 - 12c.2^2 + 11c.2 = -1 \Rightarrow c = 1$

$$\text{Do đó } x_n^2 = n.2^n.$$

Phương trình đặc trưng có nghiệm $x=3$ nên Nghiệm riêng $x_n^3 = dn.3^n$ thay vào phương trình $u_n - 6u_{n-1} + 11u_{n-2} - 6u_{n-3} = 2.3^n$ ta được $3c.3^3 - 12c.3^2 + 11c.3 = 6 \Rightarrow c = 1$

$$\text{Do đó } x_n^2 = n.3^n.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho có dạng $x_n = p + q.2^n + k.3^n + n.2^n + n.3^n$

Thay vào điều kiện ban đầu $u_1 = 3; u_2 = 20; u_3 = 89$ suy ra $p = 1; q = -1; k = -\frac{1}{3}$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = 1 + n - 1.2^n + 3n - 1.3^{n-1}$

IV. HỆ PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH VỚI HỆ SỐ HẲNG.

DẠNG 10: Dãy số x_n, y_n :
$$\begin{cases} x_1 = \alpha; x_n = ax_{n-1} + by_{n-1} \\ y_1 = \beta; y_n = cx_{n-1} + dy_{n-1} \end{cases}$$

Một trong các cách giải hệ này là đưa về phương trình sai phân tuyến tính bậc hai

Từ $x_{n+1} = ax_n + by_n \Rightarrow x_{n+2} = ax_{n+1} + by_{n+1}$ và $by_n = x_{n+1} - ax_n$.

Từ $y_{n+1} = cx_n + dy_n \Rightarrow by_{n+1} = bcx_n + bdy_n$ ($b \neq 0$).

Vậy $x_{n+2} = ax_{n+1} + bcx_n + bdy_n = ax_{n+1} + bcx_n + d(x_{n+1} - x_n) = (a+d)x_{n+1} + (bc-ad)x_n$.

Phương trình : $x_{n+2} - (a+d)x_{n+1} + (ad-bc)x_n = 0$ chính là phương trình sai phân tuyến tính bậc hai với điều kiện $x_0 = \alpha; x_1 = a.x_0 + b.y_0$ từ đó ta xác định được x_n thay vào hệ đã cho ta được y_n .

Bài 1: Tìm công thức tổng quát của 2 dãy số x_n, y_n :
$$\begin{cases} x_0 = 0; x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_0 = 6; y_{n+1} = 5x_n - y_n \end{cases}$$

Giải

Ta có $x_{n+2} = 3x_{n+1} + 5x_n - y_n = 3x_{n+1} + 5x_n - (x_{n+1} - 3x_n) = 2x_{n+1} + 8x_n$.

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2; \lambda = 4$

Do đó công thức tổng quát $x_n = a(-2)^n + b.4^n$ vì $x_0 = 0; y_0 = 6 \Rightarrow x_1 = 6$

nên ta có:
$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -2a + 4b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

từ đó suy ra: $\Rightarrow y_n = u_{n+1} - 3u_n = 2(-2)^n + 4.4^n - 3(4^n - (-2)^n) = 4^n + 5(-2)^n$

Vậy số hạng tổng quát
$$\begin{cases} x_n = -(-2)^n + 4^n \\ y_n = 5(-2)^n + 4^n \end{cases}$$

Bài 2: Tìm công thức tổng quát của 2 dãy số x_n, y_n :
$$\begin{cases} x_1 = 2; x_n = 2x_{n-1} + y_{n-1} \\ y_1 = 1; y_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} \end{cases}$$

Giải

$x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} + 2y_{n-2} = 2x_{n-1} + x_{n-2} + 2(x_{n-1} - 2x_{n-2}) \Rightarrow x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2}$ và $x_1 = 5$

từ đó ta xác định được $x_n = \frac{1}{2} 1 + 3^{n+1} \Rightarrow y_n = x_{n+1} - 2x_n = \frac{1}{2} 3^{n+1} - 1$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Bài 1: Tìm công thức tổng quát của 2 dãy số x_n, y_n :
$$\begin{cases} x_0 = 1; x_{n+1} = 4x_n - 2y_n \\ y_0 = 1; y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$$

ĐS: số hạng tổng quát $x_n = 2^{n-1}; y_n = 2^{n-1}, \forall n = 1, 2, \dots$

Bài 2: Tìm công thức tổng quát của 2 dãy số x_n, y_n :
$$\begin{cases} x_1 = 3; x_n = 4x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_1 = 1; y_n = x_{n-1} + 3y_{n-1} \end{cases}$$

DẠNG 11. Dãy số phân tuyến tính
$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_n = \frac{au_{n-1} + b}{cu_{n-1} + d} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Để tìm công thức tổng quát của dãy số u_n ta làm như sau:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 = \alpha; x_n = ax_{n-1} + by_{n-1} \\ y_1 = \beta; y_n = cx_{n-1} + dy_{n-1} \end{cases}$ khi đó $u_n = \frac{x_n}{y_n}$ là nghiệm của phương

trình đã cho. Thật vậy ta có
$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{ax_{n-1} + by_{n-1}}{cx_{n-1} + dy_{n-1}} = \frac{a \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + b}{c \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + d} = \frac{au_{n-1} + b}{cu_{n-1} + d} = u_n$$

Bài 3: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = \frac{2u_{n-1} + 1}{u_{n-1} + 2} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Giải

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_0 = 2; x_n = 2x_{n-1} + y_{n-1} \\ y_0 = 1; y_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} \end{cases}$

theo bài 2 dạng 10 hệ có nghiệm là:

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2} 3^{n+1} + 1 \\ y_n = \frac{1}{2} 3^{n+1} + 1 \end{cases} \Rightarrow u_n = \frac{x_n}{y_n} = \frac{3^{n+1} + 1}{3^{n+1} - 1}$$

vậy $u_n = \frac{3^{n+1} + 1}{3^{n+1} - 1}$

Bài 4: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 3} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Giải

Xét hai dãy số (x_n) và (y_n) như sau:
$$\begin{cases} x_1 = 1; x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_1 = 1; y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases} \quad n \geq 1$$

$\forall n = 1, 2, \dots$

Ta có:
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n+1} + 2y_{n+1} = x_{n+1} + 2(2x_n + 3y_n) = x_{n+1} + 4x_n + 3(2y_n) \\ &= x_{n+1} + 4x_n + 3(x_{n+1} - x_n) = 4x_{n+1} + x_n. \end{aligned}$$

Vậy dãy số (x_n) thỏa điều kiện $x_1 = 1; x_2 = 3; x_{n+1} - 4x_n - x_n = 0, n \geq 1$.

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 - \sqrt{5}; \lambda = 2 + \sqrt{5}$

Do đó công thức tổng quát $x_n = a(2 - \sqrt{5})^n + b(2 + \sqrt{5})^n$

vì $x_1 = 1; x_2 = 3$

$$\text{nên ta có: } \begin{cases} a+b=1 \\ (2-\sqrt{5})a+(2+\sqrt{5})b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}} \\ b=\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\text{nên } x_n = \frac{-3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}(2-\sqrt{5})^n + \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}(2+\sqrt{5})^n, \forall n \geq 1.$$

$$\text{từ đó suy ra } y_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(2-\sqrt{5})^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(2+\sqrt{5})^n, \forall n \geq 1.$$

$$\text{Vậy } u_n = \frac{\frac{-3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}(2-\sqrt{5})^n + \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}(2+\sqrt{5})^n}{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(2-\sqrt{5})^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(2+\sqrt{5})^n}, \forall n \geq 1$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 3: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{aligned} \text{a/ } \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{2u_{n-1}}{5u_{n-1} + 4} \quad \forall n \geq 1 \end{cases} & \quad \text{ĐS: } u_n = \frac{2}{5 \cdot 2^{n-1} - 3} \\ \text{b/ } \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = \frac{5u_{n-1} - 1}{u_{n-1} + 3} \quad \forall n \geq 1 \end{cases} & \quad \text{ĐS: } u_n = \frac{n+7}{n+3}. \end{aligned}$$

V. PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH HÓA.

1) Phương pháp biểu diễn nghiệm dưới dạng tuyến tính .

$$\text{Bài 1: Cho dãy số } \begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_n = \frac{x_{n-1}^2 + 2}{x_{n-2}} \quad \forall n \geq 3. \end{cases} \text{ Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số đều là số nguyên.}$$

Giải

Tìm số hạng tổng quát của dãy số dưới dạng $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} + c$ (*)

Cho $n = 3, 4, 5$ ta được $x_3 = 3; x_4 = 11; x_5 = 41$

thay vào (*) ta được

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ 3a+b+c=11 \\ 11a+3b+c=41 \end{cases} \Rightarrow a=4; b=-1; c=0 \text{ suy ra } x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}$ là dạng tuyến tính của dãy số đã cho.

Do $x_1 = x_2 = 1$ nguyên nên $x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}$ của dãy số đã cho đều là số nguyên.

Bài 2: Cho dãy số $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2 - 2} \end{cases} \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số đều là số nguyên.

Giải

Tìm số hạng tổng quát của dãy số dưới dạng $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} + c$ (*)

Cho $n=3,4,5$ ta được $x_2 = 3; x_3 = 11; x_4 = 41; x_5 = 153$ thay vào (*) ta được

$$\begin{cases} 3a + b + c = 11 \\ 11a + 3b + c = 41 \\ 41a + 11b + c = 153 \end{cases} \Rightarrow a = 4; b = -1; c = 0$$

suy ra $x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}$ là dạng tuyến tính của dãy số đã cho.

Do $x_1 = 1; x_2 = 3$ nguyên nên $x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}$ của dãy số đã cho đều là số nguyên.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Tuyến tính hóa phương trình $x_0 = 0; x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$.

ta được $x_2 = 1; x_3 = 10; x_4 = 99; x_5 = 980$ nên $x_n = 10x_{n-1} - x_{n-2}$

$$\text{ĐS: Số hạng tổng quát của dãy số } x_n = \frac{\sqrt{6}}{24} \left[5 + 2\sqrt{6}^n - 5 - 2\sqrt{6}^n \right]$$

Bài 2: Tuyến tính hóa phương trình $x_0 = 1, x_1 = 2; x_{n+2} = x_{n+1}^2 x_n^3$.

Hướng dẫn: lấy lôgarit cơ số e 2 vế $x_{n+2} = x_{n+1}^2 x_n^3 \Leftrightarrow \ln x_{n+2} = 2 \ln x_{n+1} + 3 \ln x_n$

Đặt $v_n = \ln u_n$ khi đó phương trình trở thành $v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n$

Bài 3: Tìm số hạng tổng quát của dãy số $x_1 = 1; x_{n+1} = \frac{x_n}{2 + \sqrt{3 + x_n^2}}$

$$\text{Hướng dẫn } x_{n+1} = \frac{x_n}{2 + \sqrt{3 + x_n^2}} \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{2 + \sqrt{3 + x_n^2}}{x_n} = \frac{2}{x_n} + \sqrt{\frac{3}{x_n^2} + 1}.$$

$$\text{Đặt } v_n = \frac{1}{x_n} \text{ khi đó phương trình trở thành } v_{n+1} = 2v_n + \sqrt{3v_n^2 + 1}$$

2) Phương pháp đặt ẩn phụ.

$$\text{Xác định công thức tổng quát của dãy số } \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{1}{3} \\ u_n = \frac{u_{n-1} \cdot u_{n-2}}{3u_{n-2} - 2u_{n-1}} \end{cases}$$

Ta thấy $u_n \neq 0 \forall n$ vì nếu $u_n = 0$ nào đó thì $u_{n-1} = 0; u_{n-2} = 0$ suy ra $u_1 = 0; u_2 = 0$.

Đặt $v_n = \frac{1}{u_n}$ khi đó $v_n = 3v_{n-1} - 2v_{n-2}$. Công thức tổng quát $v_n = 1 + 2^{n-1}$

$$\text{Vậy } u_n = \frac{1}{2^{n-1} + 1}.$$

3) Phương pháp biến đổi tương đương.

Tìm nghiệm của phương trình $u_0 = 2; u_1 = 6 + \sqrt{33}; u_{n+1} = 3u_n + \sqrt{8u_n^2 + 1}$.

Giải

Chuyển vế và bình phương 2 vế ta được.

$$u_{n+1}^2 - 6u_{n+1}u_n + 9u_n^2 = 8u_n^2 + 1 \text{ hay } u_{n+1}^2 - 6u_{n+1}u_n + u_n^2 = 1$$

Thay $n + 1$ bởi n ta được $u_n^2 - 6u_nu_{n-1} + u_{n-1}^2 = 1$.

Cộng theo từng vế ta được $u_{n+1} - u_n \quad u_{n+1} - 6u_n + u_{n-1} = 0$.

Vì $u_{n+1} - 3u_n = \sqrt{8u_n^2 + 1} > 0$ nên $u_{n+1} > 3u_n > 9u_{n-1} > u_{n-1} > 0 \quad u_n = 0$.

Suy ra $u_{n+1} - 6u_n + u_{n-1} = 0$. Phương trình đặc trưng $x^2 - 6x + 1 = 0$ có nghiệm $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$

Số hạng tổng quát của dãy số dưới dạng $u_n = k \cdot 3 + 2\sqrt{2}^n + l \cdot 3 - 2\sqrt{2}^n$.

Từ các giá trị ban đầu $u_0 = 2; u_1 = 6 + \sqrt{33}$ suy ra $k = \frac{8 + \sqrt{66}}{8}; l = \frac{8 - \sqrt{66}}{8}$

Vậy Số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = \frac{8 + \sqrt{66}}{8} \cdot 3 + 2\sqrt{2}^n + \frac{8 - \sqrt{66}}{8} \cdot 3 - 2\sqrt{2}^n$.

Nhận xét: Phương trình đã cho là bậc nhất nhưng phi tuyến (có chứa căn) nên khi biến đổi tương đương, nó trở thành phương trình tuyến tính bậc hai.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Tìm số hạng tổng quát ; $u_n : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n + \sqrt{24u_n^2 - 8} \end{cases}$

$$\text{ĐS: } u_n = \frac{\sqrt{6} - 2}{2\sqrt{6}} \cdot 5 - 2\sqrt{6}^{n-1} - \frac{\sqrt{6} + 2}{2\sqrt{6}} \cdot 5 + 2\sqrt{6}^{n-1}.$$

Bài 2: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi :

$$a/ \quad u_0 = 1; u_1 = 2; u_{n+2} = u_{n+1}^2 u_n^3$$

$$\text{hd: đặt } v_n = \ln u_n \text{ ta có } v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n.$$

PHẦN 2

XÁC ĐỊNH GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ.

I. Sử dụng định nghĩa giới hạn dãy Số.

1. Định nghĩa giới hạn dãy Số.

Định nghĩa 1: Ta nói dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn là a (ký hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$) nếu với mọi số dương ε cho trước (nhỏ bao nhiêu tùy ý) tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho :
 $|x_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$.

Định nghĩa 2: Dãy số (x_n) được gọi là hội tụ nếu tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$. Khi đó ta còn nói dãy số (x_n) hội tụ về a . Một dãy số không hội tụ gọi là dãy số phân kỳ.

Định nghĩa 3: Ta nói dãy số (x_n) dần tới dương vô cực (ký hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$) nếu với mỗi số dương M (lớn bao nhiêu cũng được) tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho: $x_n > M, \forall n \geq n_0$.

Định nghĩa 4: Ta nói dãy số (x_n) dần tới âm vô cực (ký hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$) nếu với mỗi số âm m (nhỏ bao nhiêu cũng được) tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho : $x_n < m, \forall n \geq n_0$

2. Giới hạn riêng, dãy con.

Định nghĩa 5: Cho tập hợp $A \neq \emptyset$ và $A \subset \mathbb{R}$.

Số x được gọi là cận trên của tập A nếu với mọi $a \in A$ ta có $a \leq x$. Lúc này ta nói tập A bị chặn trên.

Số x được gọi là cận dưới của tập A nếu với mọi $a \in A$ ta có $a \geq x$. Lúc này ta nói tập A bị chặn dưới,

Cận trên bé nhất (nếu có) của tập A được gọi là cận trên đúng của tập hợp A , ký hiệu: $\sup A$.
Cận dưới bé nhất (nếu có) của tập A được gọi là cận dưới đúng của tập hợp A , ký hiệu $\inf A$.

Lưu ý: $\sup A$ có thể không thuộc A . Nếu $\sup A$ thuộc A thì đó chính là giá trị lớn nhất của A , ký hiệu $\max A$.

Tương tự: $\inf A$ có thể không thuộc A . Nếu $\inf A$ thuộc A thì đó chính là giá trị nhỏ nhất của A , ký hiệu $\min A$.

Định lý 1: Tập con khác rỗng A của $\mathbb{R}$ nếu bị chặn trên thì có $\sup A$, nếu bị chặn dưới thì có $\inf A$

Định lý 2: (Đặc trưng của cận trên đúng, cận dưới đúng)

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq x, \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a > M - \varepsilon. \end{cases}$$
$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq x, \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Trong thực hành ta thường áp dụng định lý sau:

Định lý 3: Cho tập hợp $A \neq \emptyset$ và $A \subset \mathbb{R}$.

Nếu tập hợp A bị chặn trên thì tồn tại dãy số (x_n) trong A sao cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sup A$.

Nếu tập hợp A bị chặn dưới thì tồn tại dãy số (x_n) trong A sao cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \inf A$.

Định nghĩa 6: Dãy con (x_{n_k}) của dãy số (x_n) là dãy mà các phần tử của nó được trích từ dãy số (x_n) ra, trong đó các chỉ số n_k thỏa mãn điều kiện $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_k = +\infty, n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$

Ví dụ : Xét dãy số (x_n)

Dãy số (x_{2n}) (tức là dãy số $x_2, x_4, x_6, \dots$) là dãy con của dãy số (x_n) .

Dãy số (x_{2n-1}) (tức là dãy số $x_1, x_3, x_5, \dots$) là dãy con của dãy số (x_n) .

Hai dãy (x_{2n}) và (x_{2n-1}) được gọi là 2 dãy con kề nhau của dãy số (x_n) .

Định nghĩa 7: Dãy con (x_{n_k}) của dãy số (x_n) là hội tụ thì giới hạn của nó được gọi là giới hạn riêng của dãy số (x_n) .

Ví dụ : Xét dãy số (x_n) với $x_n = (-1)^n, \forall n = 1, 2, 3, \dots$ khi đó dãy số này không có giới hạn, tuy nhiên 1 và -1 là các giới hạn riêng của dãy số (x_n) vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = 1$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n-1} = -1$.

Định nghĩa 8: Giới hạn riêng lớn nhất của dãy số (x_n) được gọi là giới hạn trên của nó và ký hiệu là $\overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n}$ (hay $\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n$).

Giới hạn riêng bé nhất của dãy số (x_n) được gọi là giới hạn dưới của nó và ký hiệu là $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ (hay $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n$).

Quy ước:

Nếu $\sup \{x_n, x_{n+1}, \dots\} = +\infty$ với mọi n thì $\overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n} = +\infty$.

Nếu $\inf \{x_n, x_{n+1}, \dots\} = -\infty$ với mọi n thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$.

Định lý 4: (Cantor) Cho $[a_1; b_1], [a_2; b_2], \dots, [a_n; b_n], \dots$ là dãy đoạn thắt dần (tức là $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n], \forall n = 1; 2; 3, \dots$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$). Khi đó tồn tại một điểm a thuộc mọi đoạn $[a_n; b_n]$.

Định lý 5 : (Bolzano – Weierstrass) Từ một dãy số bị chặn bất kỳ (x_n) đều có thể trích ra một dãy con (x_{n_k}) hội tụ.

Định lý 6 : Mọi dãy số thực (x_n) đều có giới hạn trên và giới hạn dưới.

Hệ quả 1: Mọi dãy bị chặn (x_n) , Nếu x là giới hạn trên của dãy thì

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : x_n < x + \varepsilon, \forall n > n_0.$$

Hệ quả 2: Mọi dãy bị chặn (x_n) ,

Nếu x là giới hạn trên của dãy thì $\forall \varepsilon > 0$ và $\forall k \in \mathbb{N}$, tồn tại $\exists n_k > k : x_{n_k} > x - \varepsilon$.

Nếu x là giới hạn dưới của dãy thì $\forall \varepsilon > 0$ và $\forall k \in \mathbb{N}$, tồn tại $\exists n_k > k : x_{n_k} < x + \varepsilon$.

Định lý 7 : dãy số (x_n) hội tụ khi và chỉ khi nó bị chặn và $\overline{\lim} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

Định lý 8 : dãy số (x_n) có giới hạn (hữu hạn hoặc $\pm\infty$) khi và chỉ khi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf x_n. \text{ Khi đó } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf x_n.$$

3. Tiêu chuẩn Cauchy.

Định nghĩa 9: Ta nói dãy số (x_n) là dãy Cauchy hoặc dãy cơ bản nếu với mọi số dương ε cho trước tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $|x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_0$.

Chú ý: 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - a) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - a| = 0$

2) Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = |a|$.

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty$ nghĩa là $|x_n|$ có thể lớn bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn.

Định lý 9 (Tiêu chuẩn Cauchy): dãy số (x_n) hội tụ khi và chỉ khi dãy số (x_n) là dãy Cauchy.

4. Một số bài toán áp dụng.

Bài 1. Cho dãy số (x_n) là dãy số bị chặn trên và thỏa mãn điều kiện

$x_{n+2} \geq \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n, \forall n = 1, 2, \dots (1)$. Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi n tăng lên vô hạn.

Giải

$$\text{Đặt } y_n = x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n \quad \forall n = 1, 2, \dots \text{ Do đó } y_{n+1} = x_{n+2} + \frac{3}{4}x_{n+1} \geq x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n = y_n \quad \forall n = 1, 2, \dots (2)$$

suy ra dãy số (y_n) là dãy số tăng.

Vì dãy số (x_n) bị chặn trên nên tồn tại số M sao cho $x_n \leq M, \forall n = 1, 2, \dots$

$$\text{do đó } y_n = x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n \leq M + \frac{3}{4}M = \frac{7M}{4} \quad \forall n = 1, 2, \dots (3) \text{ dãy số } (y_n) \text{ là bị chặn trên}$$

Từ (2) và (3) dãy số (y_n) là dãy số hội tụ.

$$\text{Đặt } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b \text{ và } \frac{4b}{7} = a \text{ Ta chứng minh } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a. \forall \varepsilon > 0$$

vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b$ nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N} : |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{8}, \forall n \geq n_0$ Do đó với mọi $n \geq n_0$ ta có

$$\frac{\varepsilon}{8} > |y_n - b| = \left| x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n - \frac{7a}{4} \right| = \left| (x_{n+1} - a) + \frac{3}{4}(x_n - a) \right| \geq |x_{n+1} - a| - \frac{3}{4}|x_n - a|$$

$$\text{Suy ra } |x_{n+1} - a| < \frac{3}{4}|x_n - a| + \frac{\varepsilon}{8}, \forall n \geq n_0. (4)$$

Trong (4) lần lượt lấy $n = n_0, n = n_0 + 1, n = n_0 + 2, \dots$

$$|x_{n_0+1} - a| < \frac{3}{4}|x_{n_0} - a| + \frac{\varepsilon}{8},$$

$$|x_{n_0+2} - a| < \frac{3}{4}|x_{n_0+1} - a| + \frac{\varepsilon}{8} < \left(\frac{3}{4}\right)^2 |x_{n_0} - a| + \frac{3}{4} \cdot \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8}.$$

$$|x_{n_0+3} - a| < \frac{3}{4}|x_{n_0+2} - a| + \frac{\varepsilon}{8} < \left(\frac{3}{4}\right)^2 |x_{n_0+1} - a| + \frac{3}{4} \cdot \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} < \left(\frac{3}{4}\right)^3 |x_{n_0} - a| + \frac{\varepsilon}{8} \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{3}{4} + 1\right).$$

....

$$|x_{n_0+k} - a| < \dots < \left(\frac{3}{4}\right)^k |x_{n_0} - a| + \frac{\varepsilon}{8} \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-2} + \dots + \frac{3}{4} + 1\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^k |x_{n_0} - a| + \frac{\varepsilon}{8} \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k}{1 - \frac{3}{4}}\right)$$

$$|x_{n_0+k} - a| < \left(\frac{3}{4}\right)^k |x_{n_0} - a| + \frac{\varepsilon}{8} \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k\right) < \left(\frac{3}{4}\right)^k |x_{n_0} - a| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ với } k \text{ đủ lớn.}$$

Điều này có nghĩa là $|x_n - a| < \varepsilon$, với n đủ lớn, tức là $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$.

Vậy dãy số (x_n) là dãy số hội tụ.

Bài 2. (Đề thi vô địch Matxcova). Chứng minh rằng dãy số (x_n) với $x_n = \sin(n^2)$, không tiến tới 0 khi $n \rightarrow +\infty$

Giải

Ta có $|\sin(x - y)| = |\sin x \cos y - \cos x \sin y| \leq |\sin x| |\cos y| + |\sin y| |\cos x|$

Do đó: $|\sin(x - y)| \leq |\sin x| + |\sin y|$ Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n^2) = 0$.

Khi đó với $\varepsilon = \frac{1}{16} \sin 2, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : |\sin(n^2)| < \varepsilon, \forall n > n_0$

Với $n > n_0$ ta có: $|\sin(2n+1)| = |\sin[(n+1)^2 - n^2]| \leq |\sin(n+1)| + |\sin n^2| < 2\varepsilon$

$$|\sin 2| = |\sin[(2n+3) - (2n+1)]| \leq |\sin(2n+3)| + |\sin(2n+1)| < 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon$$

Do đó: $|\sin 2| < 4\varepsilon = 4 \cdot \frac{1}{16} \sin 2 = \frac{1}{4} |\sin 2|$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ dãy số đã cho không tiến tới 0 khi $n \rightarrow +\infty$.

Bài 3. (Đề thi vô địch toàn Liên Xô). Cho dãy số (a_n) , Biết $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a_{n+1} - \frac{a_n}{2}\right) = 0$. Chứng minh rằng: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Giải

$\forall \varepsilon > 0$, vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a_{n+1} - \frac{a_n}{2}\right) = 0$ nên $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \left|a_n - \frac{a_{n-1}}{2}\right| < \varepsilon, \forall n > n_0$.

Với $\varepsilon > 0$ tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\frac{|a_{n_0}|}{2^k} < \varepsilon$. Khi đó với mọi số tự nhiên $m > n_0 + k$ ta có:

$$\begin{aligned}
 |a_m| &= \left| \left(a_m - \frac{a_{m-1}}{2} \right) + \frac{a_{m-1}}{2} \right| \leq \left| a_m - \frac{a_{m-1}}{2} \right| + \frac{1}{2} |a_{m-1}| < \varepsilon + \frac{1}{2} |a_{m-1}| \\
 &< \varepsilon + \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{1}{2} |a_{m-2}| \right) = \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^2} |a_{m-2}| < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^2} \left(\varepsilon + \frac{1}{2} |a_{m-3}| \right) = \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^3} |a_{m-3}| \\
 &\dots < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^{m-n_0-1}} + \frac{1}{2^{m-n_0}} |a_{n_0}| < \varepsilon \frac{1 - \frac{1}{2^{m-n_0}}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{|a_{n_0}|}{2^k} = \varepsilon \left(2 - \frac{1}{2^{m-n_0-1}} \right) + \frac{|a_{n_0}|}{2^k} < 2\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon
 \end{aligned}$$

Như vậy ta chứng minh được: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 = (n_0 + k) \in N^* : \forall n > n_1$ ta có $|a_n| < 3\varepsilon$ có nghĩa là $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Mở rộng Bài 3 được thể hiện qua bài 4 sau đây.

Bài 4. Tìm tất cả các số thực t sao cho với mọi dãy số (x_n) thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow +\infty} (tx_n - x_{n+1}) = 0$, ta suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

Giải Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} (tx_n - x_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - tx_n) = 0$ (1)

Xét dãy số (x_n) với $x_n = t^n, \forall n \in N$. Khi đó dãy số (x_n) thỏa mãn (1).

Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} t^n = 0$ thì $|t| < 1$. Ngược lại, giả sử $|t| \geq 1$. Ta chứng minh rằng với mọi dãy số (x_n) sao cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - tx_n) = 0$ ta luôn có $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$. Vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - tx_n) = 0$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in N^*$ sao cho $|x_{n+1} - tx_n| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$.

Do đó $\forall n \geq n_0$ ta có: $|x_{n+1} - tx_n| < \varepsilon$

$$|tx_n - t^2 x_{n-1}| < |t| \varepsilon.$$

....

$$|t^{n-n_0} x_{n_0+1} - t^{n-n_0+1} x_{n_0}| < |t|^{n-n_0} \varepsilon.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Suy ra } |x_{n+1} - t^{n-n_0+1} x_{n_0}| &= |(x_{n+1} - tx_n) + (tx_n - t^2 x_{n-1}) + \dots + (t^{n-n_0} x_{n_0+1} - t^{n-n_0+1} x_{n_0})| \\
 &\leq |x_{n+1} - tx_n| + |tx_n - t^2 x_{n-1}| + \dots + |t^{n-n_0} x_{n_0+1} - t^{n-n_0+1} x_{n_0}| \\
 &\leq (1 + |t| + |t|^2 + \dots + |t|^{n-n_0}) \varepsilon = \frac{1 - |t|^{n-n_0+1}}{1 - |t|} \varepsilon < \frac{1}{1 - |t|} \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Vì $|t| < 1$ nên tồn tại $n_0 \in N^*$ sao cho $|t|^{n-n_0+1} x_{n_0} < \varepsilon, \forall n \geq n_1$.

Từ (2) và (3) suy ra $\forall n \geq n_0 + n_1$ ta có:

$$|x_{n+1}| = |(x_{n+1} - t^{n-n_0+1} x_{n_0}) + t^{n-n_0+1} x_{n_0}| \leq |x_{n+1} - t^{n-n_0+1} x_{n_0}| + |t^{n-n_0+1} x_{n_0}| < \frac{1}{1 - |t|} \varepsilon + \varepsilon$$

Vậy với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_2 \in N^* : n_2 = n_0 + n_1$ sao cho $|x_{n+1}| < \left(\frac{1}{1 - |t|} + 1 \right) \varepsilon, \forall n > n_2$

nghĩa là $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$. Vậy tất cả các số t cần tìm là $|t| < 1$.

Bài 5. (Đề nghị Olympic 30/4/2000) Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $0 \leq x_{n+m} \leq x_n + x_m, \forall n, m = 1, 2, \dots$,

Chứng minh rằng dãy số $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ có giới hạn hữu hạn.

Giải

Gọi $A = \left\{ \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \frac{x_{n+1}}{n+1}, \dots \right\}$ Khi đó tập A bị chặn dưới bởi số 0 nên tồn tại $\inf A$ Ta

chứng minh $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = \inf A$ với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, theo tính chất của cận dưới đúng, tồn tại m

sao cho $\inf A \leq \frac{x_m}{m} < \inf A + \frac{\varepsilon}{2}$ (1).

Với n là số tự nhiên bất kỳ, khi đó tồn tại hai số nguyên dương q và r sao cho $n = mq + r, 0 \leq r \leq m-1$ Khi đó $x_n = x_{mq+r} \leq x_m + x_m + \dots + x_m + x_r = qx_m + x_r$ (xem $x_0 = 0$)

$$\text{Do đó: } \inf A \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{qx_m + x_r}{mq + r} = \frac{x_m}{m} \cdot \frac{qm}{mq + r} + \frac{x_r}{r} \leq \inf A + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{x_r}{n} \quad (2)$$

Đặt $\max\{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\} = \alpha$ với $0 \leq r \leq m-1$ thì $x_r \leq \alpha$ do đó với $n > \frac{2\alpha}{\varepsilon}$

$$\text{ta có } 0 \leq \frac{x_r}{n} < \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Bởi vậy từ (2) ta suy ra } \inf A \leq \frac{x_m}{m} < \inf A + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \inf A + \varepsilon, \forall n > \frac{2\alpha}{\varepsilon} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \inf A \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} < \inf A + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = \inf A.$$

Bài 6: Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $0 \leq x_{n+m} \leq x_n \cdot x_m, \forall n, m \in \mathbb{N}^*$, Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n}$ tồn tại và hữu hạn.

Giải

Với mọi $n = 1, 2, 3 \dots$ ta có $0 \leq x_n \leq (x_1)^n \Rightarrow 0 \leq \sqrt[n]{x_n} \leq x_1$. vậy dãy số $\left(\sqrt[n]{x_n}\right)$ bị chặn.

Gọi $L = \overline{\lim_{m \rightarrow +\infty} \sqrt[m]{x_m}}$. khi đó tồn tại dãy con $\left(\sqrt[m_k]{x_{m_k}}\right)$ của dãy số $\left(\sqrt[m]{x_m}\right)$ sao cho

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sqrt[m_k]{x_{m_k}} = L$$

Với mỗi n cố định tùy ý ta có thể viết $m_k = nl_k + r_k$ trong đó $r_k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ do đó theo giả thiết ta có $x_{m_k} = x_{nl_k + r_k} \leq x_{nl_k} \cdot x_{r_k} \leq (x_n)^{k_l} x_{r_k}$.

$$\text{Bởi vậy với mọi } k=1, 2, \dots, \text{ ta có } \sqrt[m_k]{x_{m_k}} \leq (x_n)^{\frac{k_l}{m_k}} (x_{r_k})^{\frac{1}{m_k}} = (x_n)^{\frac{k_l}{n \cdot l_k + r_k}} (x_{r_k})^{\frac{1}{m_k}} = (x_n)^{\frac{1}{n + \frac{r_k}{l_k}}} (x_{r_k})^{\frac{1}{m_k}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[m_k]{x_{m_k}} \leq (x_n)^{\frac{1}{n}} (x_{r_k})^{\frac{1}{m_k}}, \forall k = 1, 2, \dots \text{ cho } k \rightarrow +\infty \text{ ta được } L \leq (x_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_n}, \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Suy ra } \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \sqrt[m]{x_m} \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \sqrt[m]{x_m} \Rightarrow \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \sqrt[m]{x_m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sqrt[m]{x_m}.$$

Vậy dãy số $(\sqrt[n]{x_n})$ hội tụ.

Tương tự cách giải bài này ta chứng minh được dãy số $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ bài 5 hội tụ.

Bài tập tương tự

Bài 1: Cho dãy số (x_n) là dãy số bị chặn trên và thỏa mãn điều kiện

$x_{n+2} \geq \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{2}{3}x_n, \forall n = 1, 2, \dots (1)$. Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi n tăng lên vô hạn.

Bài 2: (Đề thi HSG QG 1988) Cho dãy số (u_n) là dãy số bị chặn, thỏa mãn điều kiện

$$2u_{n+2} \leq u_{n+1} + u_n; |u_n| \leq M, \forall n = 1, 2, \dots \text{ có nhất thiết hội tụ không?}$$

Bài 3: Giả sử các số hạng của dãy số (x_n) thỏa mãn:

$$|x_n| \leq 1, x_n + x_m - 1 \leq x_{n+m} \leq x_n + x_m + 1, \forall n, m \in \mathbb{N}^*,$$

a) Chứng minh rằng dãy số $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ có giới hạn hữu hạn.

b) Chứng minh rằng nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = a \in \mathbb{R}$ thì $na - 1 \leq x_n \leq na + 1, \forall n = 1, 2, \dots$

Giải.

a) Gọi $y_n = 1 + x_n$ và $Z_n = 1 - x_n$, khi đó $y_{n+m} = 1 + x_{n+m}; z_{n+m} = 1 - x_{n+m}$ và

$$0 \leq y_{n+m} = 1 + x_{n+m} \leq 2 + x_n + x_m = y_n + y_m, \forall n, m = 1, 2, \dots$$

$$0 \leq z_{n+m} = 1 - x_{n+m} \leq 1 + (1 - x_n - x_m) = z_n + z_m, \forall n, m = 1, 2, \dots$$

Theo bài 5, suy ra dãy số $\left(\frac{y_n}{n}\right)$ hội tụ và dãy số $\left(\frac{z_n}{n}\right)$ hội tụ.

Mà ta có $\frac{x_n}{n} = \frac{1 + x_n - (1 - x_n)}{2n} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_n}{n} - \frac{z_n}{n} \right)$ nên dãy số $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ hội tụ.

b) nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{n} = a \in \mathbb{R}$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n + 1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = a$

Do đó theo lời giải bài 5 ta có $a \leq \frac{y_n}{n} \Rightarrow a \leq \frac{1 + x_n}{n} \Rightarrow x_n \geq na - 1, \forall n = 1, 2, \dots (1)$.

Mặt khác: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = -a$ nên

$$-a \leq \frac{z_n}{n} \Rightarrow a \geq \frac{x_n - 1}{n} \Rightarrow x_n \leq na + 1, \forall n = 1, 2, \dots (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $na - 1 \leq x_n \leq na + 1, \forall n = 1, 2, \dots$

II. XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG TỔNG QUÁT RỒI TÍNH GIỚI HẠN.

1) **Phương pháp.** Để tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ ta thực hiện như sau:

Bước 1: tìm số hạng tổng quát của dãy số x_n .

Bước 2: Sử dụng các công thức sau tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

2) Các kết quả thường dùng .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a .$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e .$$

$$\bullet \text{ Nếu } |q| < 1 \text{ thì } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 .$$

• Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục trên K thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) \forall x_n \in K$ và dãy số x_n hội tụ đến $a \in K$

3. Các bài toán.

Bài 1: (Đề HSG Hà nội năm học 2011 – 2012) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases} . \text{ Tìm } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

Giải

$$\text{Công thức tổng quát } u_n = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$$

$$\text{Nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n + 2}{n^2 + n + 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = 1 .$$

Bài 2: (Đề Olympic Toán SV – 2013) Cho dãy số (x_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = a \in R \\ (n+1)^2 x_{n+1} = n^2 x_n + 2n + 1, \forall n = 1, 2, \dots \end{cases} . \text{ Tìm } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

Giải

$$\text{Ta phân tích } 2n + 1 = (n+1)^2 - n^2$$

$$\text{Ta có : } (n+1)^2 x_{n+1} = n^2 x_n + 2n + 1 \Leftrightarrow (n+1)^2 x_{n+1} = n^2 x_n + (n+1)^2 - n^2$$

$$\Leftrightarrow (n+1)^2 x_{n+1} - (n+1)^2 = n^2 x_n - n^2$$

$$\text{Do đó : } n^2 x_n - n^2 = (n-1)^2 x_{n-1} - (n-1)^2 = \dots = 1^2 x_1 - 1^2 = a - 1$$

$$\text{Suy ra công thức tổng quát } x_n = \frac{a - 1 + n^2}{n^2}$$

$$\text{nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a-1+n^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a-1}{n^2}\right) = 1$$

Bài 3: (Đề Olympic 30/40/ 2013) Tìm dãy số (x_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 > 0 \\ 3(n+2)x_{n+1}^2 = 2(n+1)x_n^2 + (n+4), n \geq 1 \end{cases}$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 3(n+2)x_{n+1}^2 &= 2(n+1)x_n^2 + (n+4) \Leftrightarrow 3(n+2)x_{n+1}^2 = 2(n+1)x_n^2 + 3(n+2) - 2(n+1) \\ &\Leftrightarrow 3(n+2)x_{n+1}^2 - 3(n+2) = 2(n+1)x_n^2 - 2(n+1) \Leftrightarrow 3(n+2)(x_{n+1}^2 - 1) = 2(n+1)(x_n^2 - 1) (*) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } y_n = x_n^2 - 1 \text{ thay vào } (*) \text{ ta được } y_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3(n+2)} y_n$$

$$\text{Do đó } y_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3(n+2)} \cdot \frac{2n}{3(n+1)} \cdots \frac{2}{3} y_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \frac{1}{n+2} y_1 \text{ suy ra } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1 (x_1 > 0).$$

Bài 4: (Đề Olympic 30/40/ 2013) Cho dãy số (x_n) được xác định bởi :

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{-14x_n - 51}{5x_n + 18}, \forall n = 1, 2, \dots \end{cases} \text{ Tìm } x_{2013} \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Giải.

$$\text{Công thức tổng quát } x_n = \frac{34 - 33 \cdot 3^{n-1}}{(11 \cdot 3^{n-1} - 10)} \text{ nên } x_{2013} = \frac{34 - 33 \cdot 3^{2012}}{(11 \cdot 3^{2012} - 10)}$$

$$\text{Nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{34 - 33 \cdot 3^{n-1}}{(11 \cdot 3^{n-1} - 10)} = -3$$

Bài 5: (Đề đề nghị Olympic 30/4 năm 2015 Chuyên An Giang) Cho dãy số (u_n) được xác định

$$\text{bởi : } \begin{cases} u_1 = 2010 \\ u_n = 7u_{n-1} + 7^n, \forall n \geq 2. \end{cases} \text{ Tính } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n7^n}$$

Hướng dẫn: Công thức tổng quát $u_n = 2003 \cdot 7^{n-1} + n \cdot 7^n, \forall n \geq 1$ nên

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n \cdot 7^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2003 \cdot 7^{n-1} + n \cdot 7^n}{n \cdot 7^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2003}{7n} + 1 \right) = 1$$

Bài 6: (Đề Olympic Toán SV 2012) Cho dãy số (a_n) được xác định bởi :

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n - \frac{2}{n}, \forall n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Tìm α để dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn.

Giải

Dãy số (x_n) như sau : $x_n = \frac{a_n}{n}, \forall n = 1, 2, \dots$ Ta có $x_{n+1} = x_n - \frac{2}{n(n+1)}, \forall n = 1, 2, \dots (2)$

$x_2 = x_1 - \frac{2}{1.2}; x_3 = x_2 - \frac{2}{2.3}; \dots; x_{n+1} = x_n - \frac{2}{n(n+1)}$ cộng theo từng vế ta được

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 - 2 \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} \right) = x_1 - 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= x_1 - 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) = x_1 - \frac{2(n-1)}{n} \text{ Như vậy } a_n = nx_n = nx_1 - 2(n-1) = (\alpha - 2)n + 2, \forall n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Do đó dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn $\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

Bài 7 : (Đề HSG Gia lai 2012 - 2013) Cho dãy số (a_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = \frac{(n+1)a_n + 2013}{n}, \forall n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (a_n)

b) Tìm α để dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn trong trường hợp đó.

Giải

a) Ta có $a_{n+1} = \frac{(n+1)a_n + 2013}{n}, \forall n = 1, 2, \dots \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{a_n}{n(n+1)} + \frac{2013}{n(n+1)(n+2)}$

Xét dãy số (x_n) như sau: $x_n = \frac{a_n}{n(n+1)}, \forall n = 1, 2, \dots$ khi đó $x_1 = \frac{\alpha}{2}$

Làm tương tự bài 6

Như vậy

$$a_n = n(n+1)x_n = n(n+1)x_1 + \frac{2013}{4}(n^2 + n - 2) = (n^2 + n) \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2013}{4} \right) - \frac{2013}{2}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Do đó dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn $\frac{\alpha}{2} + \frac{2013}{4} = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{2013}{2}$

b) Lúc này $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2013}{2} \right) = -\frac{2013}{2}$.

Bài 8: (Đề HSG Bungari 2000) Cho dãy số (x_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_1 = 1; x_2 = a \\ x_{n+2} = \sqrt[3]{x_{n+1}^2 x_n}, \forall n = 1, 2, \dots \end{cases} \text{ a là hằng số dương.}$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) hội tụ và tính giới hạn của dãy số này.

Giải

Ta thấy $x_n > 0, \forall n = 1, 2, \dots$ nên từ $x_{n+2} = (x_{n+1}^2 x_n)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \ln x_{n+2} = \frac{2}{3} \ln x_{n+1} + \frac{1}{3} \ln x_n, \forall n = 1, 2, \dots$

Đặt $u_n = \ln x_n$ ta được dãy số (u_n) như sau :
$$\begin{cases} u_1 = 0; u_2 = \ln a \\ u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n, \forall n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Xét phương trình đặc trưng : $3\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1; \lambda = -\frac{1}{3}$

Do đó $u_n = A + B\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ vì $u_1 = 0; u_2 = \ln a$ nên
$$\begin{cases} A - \frac{B}{3} = 0 \\ A + \frac{B}{9} = \ln a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3\ln a}{4} \\ B = \frac{9\ln a}{4} \end{cases}$$

Nên $u_n = \frac{3\ln a}{4} + \frac{9\ln a}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \forall n = 1, 2, \dots$ suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3\ln a}{4}$ vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Vì hàm số $f(x) = e^x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên ta có: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{u_n} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n} = e^{\frac{3\ln a}{4}} = \left(e^{\ln a}\right)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{4}}$.

Bài 9: (Đề nghị Olympic 30/4/ 2012) Cho dãy số (x_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_1 = 1; x_2 = 2012 \\ x_{n+2} = \sqrt[3]{x_{n+1}^2 x_n}, \forall n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) hội tụ và tính giới hạn của dãy số này.

Đây trường hợp riêng của bài 8.

Bài 10: Cho dãy số (x_n) được xác định như sau :
$$\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 5 \\ x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1}, \forall n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Hãy tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \{\sqrt{2}x_n\}$ ký hiệu : $\{a\} = a - [a]$ chỉ lấy phần lẻ của a.

Giải

Công thức tổng quát

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})^n + (\sqrt{2}-1)(3-2\sqrt{2})^n \right] \Leftrightarrow x_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(\sqrt{2}+1)^{2n+1} + (\sqrt{2}-1)^{2n+1} \right]$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x_n = \frac{1}{2} \left[(\sqrt{2}+1)^{2n+1} + (\sqrt{2}-1)^{2n+1} \right], \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Do đó } \sqrt{2}x_n - (\sqrt{2}-1)^{2n+1} = \frac{1}{2} \left[(\sqrt{2}+1)^{2n+1} - (\sqrt{2}-1)^{2n+1} \right], \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Mà } 0 < (\sqrt{2}-1)^{2n+1} < 1, \forall n = 0, 1, 2, \dots \text{ nên } \sqrt{2}x_n = (\sqrt{2}-1)^{2n+1}, \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Do đó } x_n \{\sqrt{2}x_n\} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[1 + (\sqrt{2}-1)^{4n+2} \right], \forall n = 0, 1, 2, \dots \text{ suy ra}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x_n \{\sqrt{2}x_n\} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + (\sqrt{2}-1)^{4n+2} \right] = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Bài 11: Tìm giới hạn của dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_n = 2^n \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n+1}}, \forall n = 1, 2, \dots$

Giải

Đặt $u_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n+1}, \forall n = 1, 2, \dots$. Bằng quy nạp ta Chứng minh được

$$u_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Ta có } x_n = 2^n \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} = 2^n \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = 2^n \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\pi}{2^{n+2}}} = 2^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{do } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1)$$

Bài 12: Tìm giới hạn của dãy số (x_n) được xác định bởi:

$$x_n = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \dots \frac{2}{\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_n}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Giải

$$\text{Theo bài 10 ta có } x_n = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^2}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^3}} \dots \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^{2n+1}}}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Theo công thức nhân đôi $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ nên

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\sin \frac{\pi}{2^{2n+1}}}{\cos \frac{\pi}{2^2} \cdot \cos \frac{\pi}{2^3} \dots \cos \frac{\pi}{2^{2n+1}} \sin \frac{\pi}{2^{2n+1}}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2^{2n+1}}}{\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2^2} \cdot \cos \frac{\pi}{2^3} \dots \cos \frac{\pi}{2^{2n}} \sin \frac{\pi}{2^{2n}}} \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{2^{2n+1}}}{\frac{1}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^2} \cdot \cos \frac{\pi}{2^3} \dots \cos \frac{\pi}{2^{2n-1}} \sin \frac{\pi}{2^{2n-1}}} = \dots = \frac{\sin \frac{\pi}{2^{2n+1}}}{\frac{1}{2^{2n}}}, \forall n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^{2n+1}}}{\frac{\pi}{2^{2n+1}}} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{do } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1).$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1 (Đề HSG Tây Ninh năm học 2014 – 2015) Cho dãy số (x_n) được xác định bởi :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5} \\ (n+1)^2 x_n = n^2 x_{n+1} + (4n+2)x_{n+1} \cdot x_n, \forall n \geq 1, n \in N \end{cases} . \text{ Tìm } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

Giải

Dùng quy nạp chứng minh $x_n > 0, \forall n \geq 1, n \in N$

Chia 2 vế cho $x_{n+1} \cdot x_n$ ta được $\frac{(n+1)^2}{x_{n+1}} = \frac{n^2}{x_n} + (4n+2), \forall n \geq 1, n \in N$

Đặt $y_n = \frac{n^2}{x_n}$ ta có $(n+1)^2 y_{n+1} = n^2 y_n + 4n + 2$

Ta phân tích $4n + 2 = 2(n+1)^2 - 2n^2$ do đó:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 y_{n+1} &= n^2 y_n + 2(n+1)^2 - 2n^2 \Leftrightarrow (n+1)^2 (y_{n+1} - 2) = n^2 (y_n - 2) \\ &= (n-1)^2 (y_{n-1} - 2) = \dots = 1^2 (y_1 - 2) = 3 \\ \Rightarrow n^2 (y_n - 2) &= 3 \Leftrightarrow y_n = \frac{3}{n^2} + 2 = \frac{3 + 2n^2}{n^2} = \frac{1}{x_n} \Rightarrow x_n = \frac{n^2}{3 + 2n^2} \end{aligned}$$

$$\text{vậy } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2}{3 + 2n^2} \right) = \frac{1}{2}$$

Bài 2: (Đề HSG Tp Hồ Chí Minh năm học 2012 – 2013)

$$\text{Cho dãy số } (u_n) \text{ được xác định bởi: } \begin{cases} u_1 = \frac{1}{5} \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{2u_n + 1}, \forall n \in N^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó

$$\text{Hd: Công thức tổng quát } u_n = \frac{3 \cdot (-1)^n + 4 \cdot 5^{n-1}}{3 \cdot (-1)^{n+1} + 2 \cdot 5^{n-1}} \text{ nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot (-1)^n + 4 \cdot 5^{n-1}}{3 \cdot (-1)^{n+1} + 5^{n-1}} = 2 .$$

Bài 3: Tìm giới hạn của dãy số $u_0 > 0; u_1 > 0; u_{n+2} = (u_n^4 u_{n+1})^{\frac{1}{5}}, \forall n = 1, 2, \dots$ **Kết quả** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0^{\frac{4}{9}} u_1^{\frac{5}{9}}$.

III. SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ WEIERSTRASS ĐỂ CHỨNG MINH DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN.

1) Một số kiến thức thường dùng.

Định nghĩa 10 : Cho dãy số (x_n) , ta nói dãy số đó:

Đơn điệu tăng nếu $x_{n+1} \geq x_n, \forall n = 1, 2, \dots$

Đơn điệu giảm nếu $x_{n+1} \leq x_n, \forall n = 1, 2, \dots$

Đơn điệu tăng thực sự nếu $x_{n+1} > x_n, \forall n = 1, 2, \dots$

Đơn điệu giảm thực sự nếu $x_{n+1} < x_n, \forall n = 1, 2, \dots$

Dãy số đơn điệu tăng và đơn điệu giảm gọi chung là Dãy số đơn điệu.

Định nghĩa 11 : Cho dãy số (x_n) ta nói dãy số

Bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $x_n \leq M, \forall n=1,2,\dots$

Bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $x_n \geq m, \forall n=1,2,\dots$

Bị chặn nếu nó bị chặn trên và bị chặn dưới.

Định lý 9: (định lý Weierstrass) Nếu dãy số (u_n) tăng và bị chặn trên (hoặc giảm và bị chặn dưới) đều hội tụ .

Chú ý:

i) Nếu dãy số (x_n) tăng và không bị chặn trên thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ và khi đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Nếu dãy số (x_n) giảm và không bị chặn dưới thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$ và khi đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

ii) Dãy số tăng (giảm) hội tụ khi và chỉ khi nó bị chặn trên (bị chặn dưới)

iii) Cho 2 dãy $(x_n), (y_n)$ khi đó $x_n \leq y_n, \forall n=1,2,\dots$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

Định lý 10: Mọi dãy hội tụ đều bị chặn.

Phương pháp :

Bước 1: Xét xem dãy số đã cho tăng hay giảm.

– Nếu tăng thì chứng minh $x_n \leq L, \forall n=1,2,\dots$ để suy ra dãy bị chặn trên.

– Nếu giảm thì chứng minh $x_n \geq L, \forall n=1,2,\dots$ để suy ra dãy bị chặn dưới.

Bước 2: Sử dụng kết quả bước 1 để chứng minh dãy số đơn điệu.

Bước 3: Sử dụng **định lý Weierstrass** để chứng minh dãy số đã cho hội tụ. Sau đó, Giả sử dãy số đã cho hội tụ về L, từ $x_{n+1} = f(x_n), \forall n=1,2,\dots$ khi $n \rightarrow +\infty$ và sử dụng tính liên tục của hàm f ta được $L = f(L)$. Vậy giới hạn của dãy số đã cho là nghiệm của phương trình $x = f(x)$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG.

Bài 1. Chứng minh rằng dãy số (u_n) cho bởi công thức
$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$$
 với $n \geq 1$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Giải

Ta có $u_1 = \sqrt{2}$ và $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ nên $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

* Ta chứng minh $u_n < 2 \forall n \in \mathbb{N}$ (1).

Với $n=1$ Ta có $u_1 = \sqrt{2} < 2$ thì (1) đúng .

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ thì $u_k < 2$ ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$ thì

$u_{k+1} < 2$ Thật vậy $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} < \sqrt{2+2} = 2$ vậy $u_n < 2 \forall n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh dãy số (u_n) tăng .

Xét $u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow \sqrt{2+u_n} > u_n \Leftrightarrow u_n^2 - u_n - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < u_n < 2$ mà $0 < u_n < 2$ nên $u_{n+1} > u_n$.

Vậy dãy số (u_n) có giới hạn.

Đặt $\lim u_n = a$ thì $0 \leq a \leq 2$ và $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \Rightarrow \lim u_n = \lim \sqrt{2+u_n}$

$\Rightarrow a = \sqrt{2+a} \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1 \vee a = 2$ vì $u_n > 0$ nên $\lim u_n = a > 0$ vậy $\lim u_n = 2$.

Bài 2: Chứng minh rằng dãy số (u_n) cho bởi công thức
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \quad n \geq 2 \end{cases}$$
 có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Giải

Công thức tổng quát $u_{n+1} = \frac{n}{n+1}$ ta chứng minh dãy số (u_n) giảm và bị chặn bởi 1

và $\lim u_n = \lim \frac{n}{n+1} = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$. vậy $\lim u_n = 1$

Bài 3: Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = \frac{3}{2}; x_n = \sqrt{3x_{n-1} - 2}, \forall n = 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn khi $n \rightarrow +\infty$, tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn :

Cách 1: Bằng quy nạp chứng minh $\frac{3}{2} \leq x_n \leq 2, \forall n = 1, 2, \dots$

$$\text{Xét } x_{n+1} - x_n = \sqrt{3x_n - 2} - x_n = \frac{-x_n^2 + 3x_n - 2}{\sqrt{3x_n - 2} + x_n} \geq 0 \text{ vì } x_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$$

Vậy dãy số (x_n) tăng và bị chặn trên nên hội tụ

Đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ khi đó $a \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ Từ $x_n = \sqrt{3x_{n-1} - 2}, \forall n = 2, 3, \dots$ cho $n \rightarrow +\infty$ ta được

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{3x_{n-1} - 2} = \sqrt{3 \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n-1} - 2} \text{ hay } a = \sqrt{3a - 2} \Leftrightarrow a = 2.$$

Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$.

Cách 2: Bằng quy nạp chứng minh $\frac{3}{2} \leq x_n \leq 2, \forall n = 1, 2, \dots$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3x - 2}, \forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$. Khi đó $x_{n+1} = f(x_n), \forall n = 1, 2, \dots$

Ta có $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} > 0, \forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ do đó $f(x)$ là hàm tăng trên $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$

Ta có $x_2 = f(x_1) = \sqrt{3x_1 - 2} = \sqrt{3 \cdot \frac{3}{2} - 2} = \sqrt{\frac{5}{2}} \geq \frac{3}{2} = x_1$ suy ra dãy số (x_n) tăng.

Bài 4: (HSG QG năm 2012) Cho dãy số (x_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2), \forall n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn, tính giới hạn đó.

Hướng dẫn

Bằng quy nạp chứng minh $x_{n-1} \geq \frac{n+2}{n-1}, \forall n = 3, 4, \dots$

suy ra dãy số (x_n) bị chặn dưới bởi số 0.

$$\text{Với } n \geq 3 \text{ ta có } x_n - x_{n-1} = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2) - x_{n-1} = \frac{2[n+2-(n-1)x_{n-1}]}{3n} \leq 0$$

Vậy dãy số (x_n) giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn hữu hạn.

Đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ cho $n \rightarrow +\infty$ ta được

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3n} \right) \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n-1} + 2) \text{ hay } a = \frac{1}{3}(a + 2) \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.

Bài 5: Cho trước $a > 0$, xét dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $0 < x_n < a$ và $x_n(a - x_{n+1}) > \frac{a^2}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn: ta có $0 < x_n < a$ dãy số (u_n) bị chặn.

Áp dụng bất đẳng thức cauchy

$$x_n + (a - x_{n+1}) \geq 2\sqrt{x_n(a - x_{n+1})} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{4}} = a \Rightarrow x_{n+1} < x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

suy ra dãy số (x_n) giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn hữu hạn

$$\text{Đặt } \lim x_n = x (x > 0) \text{ ta có } x_n(a - x_{n+1}) > \frac{a^2}{4} \Rightarrow \lim x_{n+1}(a - x_{n+1}) > \frac{a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow x(1-x) \geq \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}. \text{ vậy } \lim x_n = \frac{a}{2}.$$

Bài 6: Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{2}$ và $x_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + x_n + x_{n-1}^3), \forall n = 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn, tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

Giải

$$\text{Ta chứng minh } 0 \leq x_n \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \forall n = 1, 2, \dots (2)$$

$$\text{Ta có } 0 \leq x_1, x_2 \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ Giả sử } 0 \leq x_{n-1} \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0 \leq x_n \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\text{Khi đó } 0 \leq x_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + x_n + x_n^3) \leq \frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Theo nguyên lý quy nạp (2) đúng. Ta chứng minh dãy số (x_n) tăng.

$$\text{Ta có: } x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 \leq x_2 \leq x_3 \text{ Giả sử } x_{n-2} \leq x_{n-1}, x_{n-1} \leq x_n$$

$$\text{Khi đó } x_{n+1} - x_n = \frac{1}{3}\left[(1 + x_n + x_n^3) - (1 + x_{n-1} + x_{n-1}^3)\right] = \frac{1}{3}\left((x_n - x_{n-1}) + (x_n^3 - x_{n-1}^3)\right) \geq 0$$

Vậy $x_n \leq x_{n+1}, \forall 1, 2, \dots$ nên dãy số (x_n) có giới hạn.

Đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ cho $n \rightarrow +\infty$ ta được

$$a = \frac{1}{3}(1 + a + a^3) \Leftrightarrow (a-1)(a^2 + a - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Bài 7: Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $x_1 > 0, a > 0$ và $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn:

$$\text{Ta có } x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) \geq \sqrt{a} \text{ do đó bằng quy nạp và bất đẳng thức cauchy ta suy ra}$$

$$x_n \geq \sqrt{a}, \forall n = 2, 3, \dots \text{ Mặt khác } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} + \frac{a}{2x_n^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{a}{2a} = 1 \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n, \forall n = 2, 3, \dots$$

Vậy dãy số (x_n) giảm và bị chặn dưới bởi $\sqrt{a}$ nên hội tụ.

$$\text{Đặt } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l \text{ cho } n \rightarrow +\infty \text{ ta được } l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right) \Leftrightarrow 2l^2 = l^2 + a \Leftrightarrow l = \sqrt{a} (l \geq \sqrt{a}).$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{a}.$$

Bài 8: Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_n = 2n + a\sqrt[3]{8n^3 + 1}, \forall n = 1, 2, 3, \dots (a \in \mathbb{R})$

a) Tìm a sao cho dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn.

b) Tìm a sao cho (x_n) là dãy số tăng (kể từ số hạng nào đó)

Giải

a) Nếu $a = -1$ thì dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn vì :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2n - \sqrt[3]{8n^3 + 1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{4n^2 + 2n\sqrt[3]{8n^3 + 1} + \sqrt[3]{(8n^3 + 1)^2}} = 0.$$

Giả sử dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn vì $x_n = 2n - \sqrt[3]{8n^3 + 1} + (a+1)\sqrt[3]{8n^3 + 1}$ mà dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn nên dãy số (y_n) với $y_n = (a+1)\sqrt[3]{8n^3 + 1}, \forall n = 1, 2, \dots$ cũng có giới hạn hữu hạn. Mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8n^3 + 1} = +\infty$ nên từ dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn suy ra

$$a+1=0 \Leftrightarrow a=-1$$

Vậy dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi $a = -1$

b) Dãy số (x_n) là dãy số tăng (kể từ số hạng nào đó) khi và chỉ khi tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \geq n_0$. Ta có

$$\begin{aligned} x_{n+1} \geq x_n &\Leftrightarrow 2n+2+a\sqrt[3]{8(n+1)^3+1} \geq 2n+\sqrt[3]{8n^3+1} \Leftrightarrow a\left(\sqrt[3]{8(n+1)^3+1}-\sqrt[3]{8n^3+1}\right) \geq -2 \\ &\Leftrightarrow \frac{a\left[8(n+1)^3+1-(8n^3+1)\right]}{\left(\sqrt[3]{8(n+1)^3+1}\right)^2+\left(\sqrt[3]{8(n+1)^3+1}\right)\left(\sqrt[3]{8n^3+1}\right)+\left(\sqrt[3]{8n^3+1}\right)^2} \geq -2 \\ &\Leftrightarrow \frac{a(24n^2+24n+8)}{\left(\sqrt[3]{8(n+1)^3+1}\right)^2+\left(\sqrt[3]{8(n+1)^3+1}\right)\left(\sqrt[3]{8n^3+1}\right)+\left(\sqrt[3]{8n^3+1}\right)^2} \geq -2 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a(24n^2+24n+8)}{\left(\sqrt[3]{8(n+1)^3+1}\right)^2+\left(\sqrt[3]{8(n+1)^3+1}\right)\left(\sqrt[3]{8n^3+1}\right)+\left(\sqrt[3]{8n^3+1}\right)^2} \geq -2 \Leftrightarrow \frac{24a}{4+4+4} \geq -2 \Leftrightarrow a \geq -1 \end{aligned}$$

Vậy dãy số (x_n) tăng (kể từ số hạng nào đó) khi và chỉ khi $a \geq -1$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1: Cho dãy số (u_n) cho bởi công thức $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$ và $u_1 > 0$

a) Chứng minh rằng $u_n > \sqrt{2}, \forall n \geq 2$

b) Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn.

Bài 2: (Đề HSG Tp Hồ Chí Minh năm học 2012 – 2013)

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = \frac{1}{5}$ và $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{2u_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó

Bài 3: (HSG Gia Lai năm 2004)

Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = 2004$ và $x_{n+1} = \frac{2n+1}{3n+1}(x_n + 1), \forall n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn, tính giới hạn đó.

Hướng dẫn: tương tự bài 4 trên.

Bài 4: Chứng minh rằng cho bởi công thức $\begin{cases} 0 < u_n < 1 \\ u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{4} \end{cases} (n \geq 1)$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn: tương tự bài 5 trên

Bài 5: Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = \frac{5}{2}$ và $x_{n+1} = \sqrt{x_n^3 - 12x_n + \frac{20n+21}{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn, tính giới hạn đó.

Hướng dẫn.

- Chứng minh : $x_n > 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Chứng minh $x_n \leq x_{n+1}, \forall 1, 2, \dots$ nên dãy số (x_n) có giới hạn.

Đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ cho $n \rightarrow +\infty$ ta được Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$.

Bài 6: Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = \frac{2011}{2010}$ và $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + \frac{2n+4999}{n+2499}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn, tính giới hạn đó.

Hướng dẫn.

- Chứng minh : $x_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Chứng minh $x_n \leq x_{n+1}, \forall 1, 2, \dots$ nên dãy số (x_n) có giới hạn.

Đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ cho $n \rightarrow +\infty$ ta được Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.

Bài 7: Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $x_1 > 0, a > 0$ và $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{a}{x_n^2} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn: Ta có $x_2 = \frac{1}{3} \left(x_1 + x_1 + \frac{a}{x_1^2} \right) \geq \sqrt[3]{a}$ tương tự bài 7 trên

Bài 8: Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_n = n + a\sqrt{n^2 + 1}, \forall n = 1, 2, \dots (a \in \mathbb{R})$

a) Tìm a sao cho dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn.

b) Tìm a sao cho (x_n) là dãy số tăng (kể từ số hạng nào đó)

tương tự bài 8 trên

Bài 9: (T10/404) Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{5}{2}$ và $x_{n+1} = \sqrt{x_n^3 - 12x_n + \frac{20n+21}{n+1}}$. Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 10: (HSG Tây ninh 2014) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{5}{u_n} \right) \forall n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh rằng $u_n > \sqrt{5} (n > 2)$ Tìm $\lim u_n$.

IV. GIỚI HẠN CỦA DÃY TỔNG.

Bài 1. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \end{cases} n \in N^*$. Tìm $\lim_{i=1}^n \frac{1}{a_i}, n=1; 2; 3...$

Để tiến hành giải bài toán trên ta tiến hành theo các bước sau.

Bước 1: Chỉ ra $\lim a_n = +\infty$.

Bước 2: tính tổng $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$

Bước 3: Tìm $\lim_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$.

Giải

Do $a_1 = 2 > 1$ và $a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2, n=1; 2; 3...$ nên $1 < 2 = a_1 < a_2 < a_3 < ...$ tức là dãy số này tăng (1).

Ta chứng minh dãy số (a_n) không bị chặn trên (2).

Thật vậy, nếu dãy số (a_n) bị chặn trên thì (a_n) hội tụ Giả sử $\lim a_n = a (a > 1)$ khi đó $a = a + (a - 1)^2 \Leftrightarrow a = 1$ (mâu thuẫn).

Từ (1) và (2) suy ra $\lim a_n = +\infty$.

Ta có $a_{i+1} - 1 = a_i (a_i - 1) \Rightarrow \frac{1}{a_i} = \frac{1}{a_i - 1} - \frac{1}{a_{i+1} - 1}, i=1; 2; ...$

suy ra $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{a_i - 1} - \frac{1}{a_{i+1} - 1} \right) = 1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1} \rightarrow 1$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Vậy $\lim_{i=1}^n \frac{1}{a_i} = 1$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Bài 2 : Cho dãy số (x_n) xác định bởi $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 2008x_n^2 + x_n \end{cases} n=1; 2; 3; \dots$ Tìm $\lim \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}} \right)$

Giải

Ta có $x_{n+1} - x_n = 2008x_n^2 > 0, n=1; 2; 3...$ nên dãy số (x_n) là dãy số tăng và dương .Ta chứng minh (x_n) không bị chặn trên.

Thật vậy, nếu dãy số (x_n) bị chặn trên thì (x_n) hội tụ Giả sử $\lim x_n = a (a > 0)$ khi đó $a = 2008a^2 + a \Leftrightarrow a = 0$ (vô lý).suy ra $\lim x_n = +\infty$.

Biến đổi $x_{k+1} = 2008x_k^2 + x_k \Leftrightarrow \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \right)$

suy ra $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}} \right)$

$$\text{Vậy } \lim \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) = \frac{1}{2008}.$$

Bài 3: Cho dãy số $(x_n), n=1, 2, \dots$ xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n^2 + 4x_n} + x_n}{2} \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (y_n) với $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}, n=1; 2; 3 \dots$ có giới hạn hữu hạn. Tìm $\lim y_n$.

Giải

Từ giả thiết ta thấy $x_n > 0 \quad \forall n \geq 1$ nên

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\sqrt{x_n^2 + 4x_n} + x_n}{2} - x_n = \frac{\sqrt{x_n^2 + 4x_n} - x_n}{2} = \frac{2x_n}{\sqrt{x_n^2 + 4x_n} + x_n} > 0, \forall n \geq 1$$

Do đó dãy số (x_n) tăng.

Giả sử $\lim x_n = a (a > 0)$ khi đó $a = \frac{\sqrt{a^2 + 4a} + a}{2} \Leftrightarrow a = 0$ (vô lý).

Suy ra $\lim x_n = +\infty$.

$$\text{Từ } x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n^2 + 4x_n} + x_n}{2} \Rightarrow x_{n+1}^2 = x_n(x_{n+1} + 1) \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}^2} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{Suy ra } y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \frac{1}{x_1^2} + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \right) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}} = 6 - \frac{1}{x_{n+1}}$$

Do đó $y_n < 6 \quad \forall n \geq 1$ và dãy số (y_n) tăng vì $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{x_{n+1}} > y_n$

Vậy dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim y_n = 6$

Bài 4 : Cho dãy số (a_n) xác định bởi

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n(a_n+1)(a_n+2)(a_n+3)+1} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

đặt $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2}, n=1; 2; 3 \dots$ Tìm $\lim y_n$.

Giải

Từ công thức xác định dãy suy ra $a_2 = 5$ và $a_n > 0 \quad \forall n=1; 2; 3 \dots$ ta biến đổi .

$$\sqrt{a_n(a_n+1)(a_n+2)(a_n+3)+1} = \sqrt{(a_n^2 + 3a_n)(a_n^2 + 3a_n + 2) + 1}$$

$$= \sqrt{(a_n^2 + 3a_n)^2 + 2(a_n^2 + 3a_n) + 1} = a_n^2 + 3a_n + 1 \quad \text{với } n \geq 1.$$

$$a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n + 1 > 3a_n > 3^2 a_{n-1} > \dots > 3^n a_1 = 3^n$$

Bằng quy nạp ta chỉ ra được $a_n > 3^{n-1} \forall n \geq 2$. Nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{n-1} = +\infty$ ta lại có

$$a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n + 1 \Rightarrow a_{n+1} + 1 = a_n^2 + 3a_n + 2 = (a_n + 1)(a_n + 2) \text{ nên}$$

$$\frac{1}{a_{n+1} + 1} = \frac{1}{(a_n + 1)(a_n + 2)} = \frac{1}{a_n + 1} - \frac{1}{a_n + 2} \Rightarrow \frac{1}{a_n + 2} = \frac{1}{a_n + 1} - \frac{1}{a_{n+1} + 1}$$

$$\text{Do đó } y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i + 1} - \frac{1}{x_{i+1} + 1} \right) = \frac{1}{x_1 + 1} - \frac{1}{x_{n+1} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x_{n+1} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Vậy $\lim y_n = \frac{1}{2}$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Bài 5. Xét dãy số thực $(x_n) (n \geq 1)$ xác định bởi $\begin{cases} x_1 = a (a \in \mathbb{R}) \\ x_{n+1} = 2x_n^3 - 5x_n^2 + 4x_n \end{cases} \forall n \geq 1$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn của dãy số (x_n) trong các trường hợp đó.

Giải

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4t$. Khi đó dãy số đã cho có dạng $x_{n+1} = f(x_n) \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $f'(t) = 6t^2 - 10t + 4 = 2(3t - 2)(t - 1)$ và $f(x) - x = x(x - 1)(2x - 3)$. Từ đó suy ra $f(x) = x$ khi $x = 0$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = \frac{3}{2}$ và khi $x < 0$ thì $f(x) < x$, khi $x > \frac{3}{2}$ thì $f(x) > x$.

Bằng cách lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có khi $0 < x < \frac{3}{2}$ thì $0 < f(x) < \frac{3}{2}$.

Từ các nhận xét trên ta thu được:

(i) Với $x \in (-\infty; 0)$ luôn luôn có $f(x) \in (-\infty; 0)$.

(ii) Với $x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$ luôn luôn có $f(x) \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

(iii) Với $x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ luôn luôn có $f(x) \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Ta xét các trường hợp cụ thể:

Trường hợp 1: $a < 0$ theo (i) thì mọi $x_n < 0$ và $x_{n+1} - x_n = x_n(x_n - 1)(2x_n - 3) < 0$ do đó dãy số (x_n) là dãy giảm nên có giới hạn $\lim x_n = b$ khi đó $b \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$ và $b < a$ mâu thuẫn vì $a < 0$. Suy ra dãy số (x_n) không có giới hạn hữu hạn ứng với $a < 0$.

Trường hợp 2: $a = 0$. Khi đó dãy số (x_n) là dãy hằng và $\lim x_n = 0$.

Trường hợp 3: $0 < a < \frac{3}{2}$ theo (ii) thì mọi $0 < x_n < \frac{3}{2}$ và $|x_{n+1} - 1| < (x_n - 1)^2 |x_n - 1| < |x_n - 1|$

do $x_n \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$ nên $|(x_n - 1)(2x_n - 1)| < 1$.

Bằng phương pháp quy nạp từ $|x_{n+1} - 1| < |x_n - 1|$ suy ra $|x_{n+1} - 1| < |a - 1|$ với mọi n nguyên dương.

do $a \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$ nên $|a - 1| < \frac{1}{2}$ suy ra $\lim x_n = 1$

Trường hợp 4: $a = \frac{3}{2}$ Khi đó dãy số (x_n) là dãy hằng và $\lim x_n = \frac{3}{2}$.

Trường hợp 5: $a > \frac{3}{2}$ theo (iii) thì mọi $x_n \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ và $x_{n+1} - x_n > 0$ do đó dãy số (x_n) là dãy tăng. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim x_n = b$ thì $b \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$ và $b > 0$ (vô lý).

Kết luận: Dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi $a \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$.

Khi $a = 0$ thì $\lim x_n = 0$.

Khi $0 < a \leq 1$ thì $\lim x_n = 1$.

Khi $1 < a \leq \frac{3}{2}$ thì $\lim x_n = \frac{3}{2}$

Bài 6. Xét dãy số $(x_n) (n=1; 2; 3; \dots)$ xác định bởi
$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{x_n + 1}} \end{cases} \text{ với } n=1; 2; 3; \dots \text{ và } \alpha \text{ là số cho trước}$$

lớn hơn 1. Tìm $\lim x_n$.

Giải

Nhận xét: với $x_0 = \alpha > 1$ thì $x_n > 1$ với $n=1; 2; 3; \dots$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{1 + \frac{1}{t+1}}$. Khi đó dãy số đã cho có dạng $x_{n+1} = f(x_n) \forall n \in \mathbb{N}^*$

ta có $f'(t) = \frac{-1}{2(t+1)^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t+1}}} < 0$ và $|f'(t)| < \frac{1}{8}$ với $x > 1$

Vì $f(1) > 1$ và $f(2) < 2$ nên phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất trong $(1; 2)$. Gọi nghiệm đó là L

Theo định lý Lagrange thì với mọi $L \neq x > 1$ tồn tại $c > 1$ sao cho

$$\frac{f(x) - f(L)}{x - L} = f'(c) \Rightarrow |f(x) - f(L)| < \frac{1}{8} |x - L| \text{ và } |f(x_n) - f(L)| < \frac{1}{8} |x_n - L|$$

Hay $|x_{n+1} - L| < \frac{1}{8} |x_n - L| < \dots < \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1} |x_0 - 1|$ suy ra $\lim x_n = L$

Ta cần xác định L . giải phương trình

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{x+1}} = x \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{25}{27}$$

ta được $L = \sqrt{\frac{43}{54} + \frac{\sqrt{177}}{18}} + \sqrt{\frac{43}{54} - \frac{\sqrt{177}}{18}} - \frac{1}{3}$ trong khoảng $(1; 2)$.

Vậy $\lim x_n = \sqrt{\frac{43}{54} + \frac{\sqrt{177}}{18}} + \sqrt{\frac{43}{54} - \frac{\sqrt{177}}{18}} - \frac{1}{3}$.

Bài 7: Xét dãy số $(x_n) (n=1; 2; 3; \dots)$ xác định bởi
$$\begin{cases} x_1 = 2,1 \\ x_{n+1} = \frac{x_n - 2 + \sqrt{x_n^2 + 8x_n - 4}}{2} \end{cases} \text{ Với mỗi số nguyên}$$

dương n , đặt $y_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_{i+1}^2 - 4}$ Tìm $\lim y_n$.

Giải

Nhận xét: ta có $\frac{x - 2 + \sqrt{x^2 + 8x - 4}}{2} \Leftrightarrow x^2 - 4 = (x - 3)(x - 2)$.

Phương trình không có nghiệm khi $x > 2$. Do đó $2,1 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ (1).

Mặt khác từ công thức truy hồi của dãy (x_n) ở giả thiết bài toán ta suy ra

$$(2x_{n+1} - x_n + 2)^2 = x_n^2 + 8x_n - 4 \Rightarrow 4x_{n+1}^2 + x_n^2 + 4 - 4x_{n+1}x_n + 8x_{n+1} - 4x_n = x_n^2 + 8x_n - 4.$$

$$\Rightarrow x_{n+1}^2 - 4 = x_{n+1}x_n - 2x_{n+1} + 3x_n - 6 \Rightarrow x_{n+1}^2 - 4 = (x_{n+1} + 3)(x_n - 2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_n - 2} = \frac{x_{n+1} + 3}{x_{n+1}^2 - 4} = \frac{x_{n+1} + 2 + 1}{x_{n+1}^2 - 4} = \frac{1}{x_{n+1} - 2} + \frac{1}{x_{n+1}^2 - 4} \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}^2 - 4} = \frac{1}{x_n - 2} - \frac{1}{x_{n+1} - 2} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta thấy tồn tại $\lim x_n$ và $\lim \frac{1}{x_{n+1}^2 - 4} = \lim \frac{1}{x_n - 2} - \lim \frac{1}{x_{n+1} - 2} = 0$ suy ra

$$\lim x_n = +\infty.$$

Do đó $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i+1}^2 - 4} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i - 2} - \frac{1}{x_{i+1} - 2} \right) = \frac{1}{x_1 - 2} - \frac{1}{x_{n+1} - 2} = 10 - \frac{1}{x_{n+1} - 2}$

Vậy $\lim y_n = 10$.

Bài 8. Cho dãy số (x_n) xác định bởi
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1} \end{cases} \quad n=1; 2; \dots$$

a) Chứng minh rằng dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Đặt $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ với mỗi số nguyên dương n . Tìm phần nguyên $[b_n]$ và giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Giải

$$\text{Ta có } a_n^2 - a_n + 1 = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow a_n > 0 \quad \forall n \geq 1.$$

$$\text{Mặt khác } a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1} - a_n = \frac{-a_n(a_n - 1)^2}{a_n^2 - a_n + 1} < 0 \quad (1).$$

$$\text{Do đó chứng minh quy nạp ta được: } 0 < a_n < a_{n-1} < \dots < a_1 = \frac{1}{2}.$$

Vậy dãy số (a_n) là dãy giảm bị chặn dưới bởi 0, suy ra tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ và (1) s

$$\text{b) Ta có } a_{n+1} - 1 = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1} - 1 = \frac{a_n - 1}{a_n^2 - a_n + 1} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1} - 1} = a_n + \frac{1}{a_n - 1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_n - 1}$$

$$\text{do đó } b_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{a_{i+1} - 1} - \frac{1}{a_i - 1} \right) = \frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_1 - 1} = 2 - \frac{1}{1 - a_{n+1}}$$

$$\text{vì } 0 < a_{n+1} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 > \frac{1}{1 - a_{n+1}} > 1 \Rightarrow 1 > b_n > 0 \Rightarrow b_n = 0 \text{ và}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2 - 1 = 1.$$

Bài 9: Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = a_2 = 1$ và $a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n(n+1)}, n = 2, 3, \dots$ Chứng minh rằng dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn.

Giải

Ta thấy $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ do đó suy ra dãy số (a_n) là dãy số tăng. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_{n-1}}{n(n+1)} + a_n = \frac{a_{n-1}}{n(n+1)} + \left[\frac{a_{n-2}}{(n-1)n} + a_{n-1} \right] = \dots \\ &= \frac{a_{n-1}}{n(n+1)} + \frac{a_{n-2}}{(n-1)n} + \frac{a_{n-3}}{(n-2)(n-1)} + \dots + \frac{a_2}{3.4} + \frac{a_1}{2.3} + a_2 \\ &= \frac{a_{n-1}}{n(n+1)} + \frac{a_{n-2}}{(n-1)n} + \frac{a_{n-3}}{(n-2)(n-1)} + \dots + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{2.3} + 1 (*) \end{aligned}$$

Bằng quy nạp ta chứng minh $a_n < \frac{5}{3}, \forall n = 3, 4, \dots$

$$\text{Ta có } a_3 = a_2 + \frac{a_1}{2.3} = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6} < \frac{5}{3}$$

Giả sử $a_k < \frac{5}{3}, \forall k \in \mathbb{N} : 3 \leq k \leq n$ khi đó từ (*) ta có:

$$a_{n+1} < \frac{5}{3} \left[\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \dots + \frac{1}{4.5} \right] + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{2.3} + 1$$

$$= \frac{5}{3} \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \dots + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \right] + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + 1$$

$$= \frac{5}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{5}{4} < \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

dãy số (a_n) tăng và bị chặn trên nên dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn.

Lưu ý: Giả sử $a_k < \alpha, \forall k \in \mathbb{N} : 3 \leq k \leq n$ ta chứng minh $a_{n+1} < \alpha$

từ (*) ta có: $a_{n+1} < \alpha \left[\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k-1)k} + \frac{1}{(k-2)(k-1)} + \dots + \frac{1}{4.5} \right] + \frac{5}{4}$

$$= \alpha \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{5}{4} < \frac{\alpha+5}{4} \text{ Để } a_{n+1} < \alpha \text{ thì } \frac{\alpha+5}{4} = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{5}{3}.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Bài 1. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 3$ và. Tìm $\lim \left(\frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2-1} + \dots + \frac{1}{x_n-1} \right)$

Bài 2. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = a > 1$ và $x_{n+1} = x_n^2$. Tìm $\lim \left(\frac{x_1}{x_2-1} + \frac{x_2}{x_3-1} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}-1} \right)$

Bài 3. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 2$ và $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1) \quad n=1,2,\dots$. Đặt $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k + 1}$. Tìm phần nguyên $[S_{2008}]$ và tìm $\lim S_n$.

Bài 4. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = a > 1$ và $2003x_{n+1} = x_n^2 + 2002x_n \quad (n \geq 1)$ Tìm $\lim \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k+1}-1}$.

Bài 5. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = a > 1$ và $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + x_n - 1}{x_n} \quad (n \geq 1)$ Tìm $\lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^2 - 1}$.

Bài 6. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 8$ và $x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 - 7x_n + 25) \quad (n=1,2,\dots)$ Tìm $\lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k - 2}$.

Bài 7. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 2009$ và $x_{n+1} = x_n \left(\sqrt{x_n} + 1 \right)^2$ Tìm $\lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_k} + 1}$.

Bài 8. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 2$ và $x_{n+1} = \frac{x_n^4 - x_n + 1}{x_n^3 - x_n + 1} \quad (n \geq 1)$ Chứng minh dãy số (y_n)

xác định bởi $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^3}$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 9. (HSG Gia Lai năm 2011 – 2012) Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 24, a_2 = 60$ và

$a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n(n+1)(n+2)}, n = 2, 3, \dots$ Chứng minh rằng dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn..

V. PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH DÃY SỐ.

1) Định lý 11 (Nguyên lý kẹp) Nếu ba dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ thỏa điều kiện $y_n \leq x_n \leq z_n, \forall n \geq n_0$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = L$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$.

CÁC BÀI TOÁN.

Bài 1: (Đề Olympic toán SV toàn quốc 2003) Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!}, \forall k = 1, 2, \dots \text{Hãy tính } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2003}^n}$$

Giải

$$\text{Vì } x_{k+1} - x_k = \frac{k+1}{(k+2)!} > 0 \text{ nên } 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2002} < x_{2003} < \dots$$

$$\text{Ta có: } \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

$$\text{Do đó } x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!} = \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\text{Ta có: } x_{2003}^n < x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2003}^n < 2003x_{2003}^n.$$

$$\text{suy ra } x_{2003} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2003}^n} < 2003^{\frac{1}{n}} x_{2003}.$$

$$\text{nên } 1 - \frac{1}{2004!} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2003}^n} < 2003^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{2004!}\right).$$

$$\text{Vì } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2004!}\right) = 2003^{\frac{1}{n}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2004!}\right) = 1 - \frac{1}{2004!}$$

$$\text{Suy ra } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2003}^n} = 1 - \frac{1}{2004!}.$$

Bài 2: (Đề Olympic 30/4/ 2011) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = a > 0$ và

$$u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n}, \forall k = 1, 2, \dots \text{Tìm giới hạn của dãy } \left(\frac{u_n}{n}\right).$$

Giải

$$\text{Ta có } u_2 = u_1 + \frac{2}{u_1} \geq 2\sqrt{2} > 2. \text{Giả sử } u_n > n, \forall n \geq 2$$

$$\text{Khi đó, } u_{n+1} - (n+1) = \frac{u_n^2 - (n+1)u_n + n}{u_n} = \frac{(u_n - 1)(u_n - n)}{u_n} > 0$$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra $u_n > n, \forall n \geq 2$, do đó $\frac{u_n}{n} > 1, \forall n = 2, 3, \dots$.

$$\text{Từ đây ta được } u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n} < u_n + 1 < u_{n-1} + 2 < \dots < u_2 + (n-1)$$

$$\text{suy ra } 1 < \frac{u_n}{n} < \frac{u_2}{n} + \frac{n-2}{n} \Rightarrow 1 < \frac{u_n}{n} < 1 + \frac{u_2 - 2}{n} (*)$$

Từ (*) cho $n \rightarrow +\infty$ và sử dụng giới hạn kẹp ta được $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

Bài 3 (Đề Olympic 30/4/ 2001):

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_0 = \frac{1}{2}$ và $u_k = u_{k-1} + \frac{u_{k-1}^2}{n}, \forall k = 1, 2, \dots, n$. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Từ giả thiết ta có: } n(u_k - u_{k-1}) &= u_k^2 - u_{k-1}^2 \Leftrightarrow nu_k - nu_{k-1} + u_k u_{k-1} - u_{k-1}^2 = u_k u_{k-1} \\ \Leftrightarrow (u_k - u_{k-1})(n + u_{k-1}) &= u_k u_{k-1} \Rightarrow \frac{u_k - u_{k-1}}{u_k u_{k-1}} = \frac{1}{n + u_{k-1}} \Rightarrow \frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} = \frac{1}{n + u_{k-1}} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Do } \frac{1}{2} = u_0 < u_1 < u_2 < \dots \text{ nên từ (1) ta suy ra } \frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} < \frac{1}{n}, \forall k = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Từ (2) thay $k = 1, 2, \dots, n$.

Rồi cộng các bất đẳng thức ta được:

$$\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n} < 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{u_n} \Leftrightarrow u_n < 1 \Rightarrow u_k < 1, \forall k = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$\text{Nên từ (1) ta suy ra } \frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} > \frac{1}{n+1}, \forall k = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Trong (3) thay $k = 1, 2, \dots, n$. rồi cộng các bất đẳng thức ta được

$$\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n} > \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} < 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Mà } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Bài 4 (Đề Olympic 30/4/ 2006):

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $1 < x_1 < 2$ và $x_{n+1} = 1 + x_n + \frac{x_n^2}{2}, \forall n = 1, 2, \dots$ Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$?

Giải

$$\text{Ta có } x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{x_n^2}{2} = -\frac{1}{2}(x_n^2 - 2x_n - 2) = -\frac{1}{2}(x_n - 1)^2 + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Bằng quy nạp ta chứng minh $x_n > 1, \forall n = 1, 2, \dots$

Theo giả thiết ta có $x_1 > 1$

Giả sử $x_n > 1$,

$$\text{Khi đó từ } 1 < x_n < 2 \Rightarrow x_n^2 - 3x_n + 2 < 0 \text{ hay } \frac{x_n^2}{2} - \frac{3}{2}x_n + 1 < 0 \Leftrightarrow x_n - \frac{x_n^2}{2} > 1 - \frac{x_n}{2}.$$

$$\text{Do đó } x_{n+1} = 1 + \left(x_n - \frac{x_n^2}{2}\right) > 1 + 1 - \frac{x_n}{2} = 2 - \frac{x_n}{2} = 2 - 1 = 1 \text{ vì } (x_n < 2)$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta suy ra $x_n > 1, \forall n = 1, 2, \dots$

Như vậy ta chứng minh được $1 < x_n < \frac{3}{2}, \forall n = 2, 3, \dots$

Đặt $a = \sqrt{2}$ khi đó $a = 1 + a - \frac{a^2}{2}$.

$$\begin{aligned}\text{Do đó, ta có: } |x_{n+1} - a| &= \left| 1 + x_n - x_n^2 - \left(1 + a - \frac{a^2}{2} \right) \right| = \left| (x_n - a) - \frac{1}{2}(x_n^2 - a^2) \right| \\ &= |x_n - a| \cdot \left| 1 - \frac{1}{2}(x_n + a) \right| = |x_n - a| \cdot \frac{1}{2} \cdot |2 - a - x_n|\end{aligned}$$

mà $|2 - a - x_n| < 1$

$$\text{nên } |x_{n+1} - a| < \frac{1}{2}|x_n - a| < \frac{1}{2^2}|x_{n-1} - a| < \dots < \frac{1}{2^n}|x_1 - a|$$

$$\text{Vậy } 0 \leq |x_n - a| \leq \frac{1}{2^{n-1}}|x_1 - \sqrt{2}|, \forall n = 2, 3, \dots$$

vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ nên theo nguyên lý kẹp ta được $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a = \sqrt{2}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1 (Đề vô địch Singapore 1997): Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_0 = \frac{1}{2}$ và

$$u_k = u_{k-1} + \frac{u_{k-1}^2}{n}, \forall k = 1, 2, \dots, n-1. \text{ Chứng minh rằng } 1 - \frac{1}{n} < u_n < 1. \text{ Hướng dẫn: xem bài giải bài 3.}$$

Bài 2 (HSG Gia Lai 1996): Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{1}{3}$ và $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2} - 1, \forall n = 1, 2, \dots$

Chứng minh rằng dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn:

Bằng quy nạp ta chứng minh $-1 < x_n < 0, \forall n = 2, 3, \dots$

Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$ khi $n \rightarrow +\infty$

$$\text{Ta giải phương trình: } L = \frac{L^2}{2} - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} L = 1 + \sqrt{3} \\ L = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow L = 1 - \sqrt{3}.$$

$$\text{Ta chứng minh } 0 \leq |x_{n+1} - L| < \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1} |x_2 - L|, \forall n = 2, 3, \dots$$

Bài 2: Cho trước $a \in [0; 1]$, xét dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{a}{2}$ và $x_{n+1} = \frac{a}{2} - \frac{x_n^2}{2}, \forall n = 1, 2, \dots$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn :

Bằng quy nạp ta chứng minh $-\frac{1}{8} < x_n < \frac{1}{2}, \forall n = 2, 3, \dots$

Giả sử: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$ khi $n \rightarrow +\infty$

Ta giải phương trình: $L = \frac{a}{2} - \frac{L^2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} L = \sqrt{1+a^2} - 1 \\ L = -\sqrt{1+a^2} - 1 \end{cases} \Rightarrow L = \sqrt{1+a^2} - 1.$

Ta chứng minh: $|x_n - L| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left|\frac{a}{2} - L\right|, \forall n = 2, 3, \dots$

Vậy: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{1+a^2} - 1.$

Bài 3: Cho trước $a \in (0; +\infty)$, xét dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{a}{2}, x_{n+1} = x_n(2 - ax_n), \forall n = 1, 2, \dots$

Chứng minh rằng nếu $x_n > 0, \forall n = 1, 2, \dots$ thì dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn:

Ta có $x_2 = x_1(2 - ax_1) > 0, 2 - ax_1 > 0, 1 - ax_1 > -1$. Nhưng vì $x_1 > 0, a > 0$ nên $1 - ax_1 < 1$ suy ra $|1 - ax_1| < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ta có:

$$\begin{aligned} \left|x_{n+1} - \frac{1}{a}\right| &= \left|x_n(2 - ax_n) - \frac{1}{a}\right| \Rightarrow |ax_{n+1} - 1| = |1 - ax_n(2 - ax_n)| = |a^2x_n^2 - 2ax_n + 1| = |1 - ax_n|^2 \\ \Rightarrow |1 - ax_n| &= |1 - ax_{n-1}|^2 = |1 - ax_{n-2}|^4 = \dots = |1 - ax_1|^{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Vậy: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (|1 - ax_n|) = \lim_{n \rightarrow +\infty} |1 - ax_n|^{2^{n-1}} = 0$ do $|1 - ax_1| < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Do đó: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - ax_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} ax_n = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a^{-1}.$

Bài 4 (HSG QG năm 2012): Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2), \forall n = 2, 3, \dots \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn, tính giới hạn đó.

Giải

Ta có :

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n+2}{3n}(x_{n-1} - 1) + \frac{2}{n}\right| \leq \frac{n+2}{3n}|x_{n-1} - 1| + \frac{2}{n} \leq \frac{2}{5} \left(|x_{n-1} - 1| + \frac{5}{n}\right), \forall n \geq 10.$$

Đặt $y_k = \max \left\{ |x_k - 1|; \frac{5}{k} \right\}, \forall k \geq 10, \forall n \geq 11$

* Nếu $y_n = |x_n - 1|$ thì $y_n \leq \frac{2}{5} \left(|x_{n-1} - 1| + \frac{5}{n}\right) \leq \frac{2}{5} \cdot 2y_{n-1} = \frac{4}{5}y_{n-1}.$

* Nếu $y_n = \frac{5}{n}$ thì $y_n < \frac{5}{n-1} = y_{n-1}.$

Vậy : (y_n) là dãy giảm, bị chặn dưới bởi số 0 nên có giới hạn hữu hạn.

Ta chứng minh: $a = 0.$

Suy ra nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - 1| = 0.$ Do đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$