

Lời mở đầu

Trong chương trình trung học phổ thông, chúng ta được giới thiệu công thức Niuton – Laibonit thiết lập mối tương quan giữa tích phân và nguyên hàm. Đa số các bài toán tính tích phân chúng ta chỉ cần tìm nguyên hàm và thay số tính toán, do vậy bạn đọc cần tìm hiểu kỹ phần tìm nguyên hàm (tôi đã giới thiệu). Trong tài liệu này, những phần chỉ đơn thuần tìm nguyên hàm và thay số tính tích phân tôi xin không đề cập nhiều ví dụ, mà tôi sẽ tập trung vào những dạng toán hướng tích phân nhiều hơn, tôi cũng sẽ đi sâu giới thiệu các dạng bài tập phần trắc nghiệm tích phân. Ở cuối mỗi mục có phần bài tập tự luyện, xin bạn đọc tự làm để rèn luyện, áp dụng các kiến thức trong mục đó.

Mặc dù các đa số các dòng máy tính cầm tay hiện nay đều có thể tính được tích phân và được phép mang vào phòng thi, nhưng xu thế ra đề hiện nay đều hạn chế đi rất nhiều việc sử dụng trực tiếp máy tính cầm tay tìm ra đáp án, các câu hỏi đòi hỏi người làm bài phải có kỹ năng – kiến thức thực sự mới có thể làm được bài toán. Vì vậy tôi mong bạn đọc sẽ dành thời gian tìm hiểu, tiếp thu kiến thức thực sự và hạn chế tối đa việc phụ thuộc vào máy tính cầm tay.

Trước khi đọc tài liệu này xin bạn đọc phần A: NGUYÊN HÀM tôi đã viết [tại đây](#) để việc đọc tài liệu này được hiệu quả.

Lời cuối: do tài liệu xuất bản online lần đầu nên không tránh được sai sót, bạn đọc nếu tìm ra lỗi sai, xin bạn đọc liên hệ qua các kênh dưới chân trang để tôi chỉnh sửa lại.

Mục lục

Tài liệu tham khảo	3
1. Lý thuyết tích phân	4
1.1. Định nghĩa tích phân	4
1.2. Các tính chất của tích phân	4
2. Tính tích phân bằng phương pháp phân tích	5
3. Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số	6
4. Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần	8
5. Ứng dụng của tích phân (trọng điểm)	10
5.1. Tính diện tích hình phẳng	10
5.1.1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một đường cong	10
5.1.2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong	11
5.2. Tính thể tích vật thể	14
5.2.1. Tính thể tích vật thể từ công thức diện tích thiết diện	14
5.2.2. Tính thể tích khối tròn xoay	15
5.3. Một số bài toán thực tế	17
6. Giới thiệu một số bài tập định dạng trắc nghiệm (trọng điểm)	23
6.1. Trắc nghiệm lý thuyết tích phân	23
6.2. Trắc nghiệm liên quan tính tích phân trực tiếp	31
6.3. Trắc nghiệm liên quan ứng dụng tích phân	44

Tài liệu tham khảo

Lê Hồng Đức, L. H. (2006). *Phương pháp giải toán Tích Phân*.

Internet. (không ngày tháng). *Tuyển tập các đề thi thử, đề minh họa, đề chính thức của bộ GD và ĐT*.

Trần Văn Hạo. (không ngày tháng). *Sách giáo khoa giải tích 12*. nhà xuất bản giáo dục.

B: TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

1. Lý thuyết tích phân

1.1. Định nghĩa tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Khi đó hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$.

Kí hiệu: $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

Gọi a là cận dưới; b là cận trên; $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

*Dưới đây là một số ví dụ:

$$1/ \int_1^2 2x dx = x^2|_1^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

$$2/ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{1}{2} \cos 2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$3/ \int_0^1 2e^{3x} dx = \frac{2}{3} e^{3x} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} e^3 - \frac{2}{3} e^0 = \frac{2}{3} e^3 - \frac{2}{3}$$

$$4/ \int_{-1}^2 (x+1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \Big|_{-1}^2 = \left(\frac{2^2}{2} + 2\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + (-1)\right) = \frac{9}{2}$$

1.2. Các tính chất của tích phân

$$1/ \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2/ \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$3/ \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$4/ \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$5/ \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ với } a < c < b$$

6/ Tích phân không phụ thuộc vào biến số mà chỉ phụ thuộc vào cận.

Tức là:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

*Một số VD minh họa

$$1/ \int_1^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$$

$$= (x^3 - x^2 + x) \Big|_1^2 = (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 5$$

$$2/ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{\cos^2 2x} - 1\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} \tan 2x - x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \left(\frac{1}{2} \tan \frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{1}{2} \tan 0 - 0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$3/ \int_0^1 \left(e^{2t} + \frac{3}{t+1}\right) dt$$

$$= \left(\frac{1}{2} e^{2t} + 3 \ln|t+1| \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2} e^2 + 3 \ln 2 \right) - \left(\frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{1}{2} e^2 + 3 \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$4/ \int_0^4 |x-2| dx = I$$

$$\text{Ta có: } |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{nếu } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$$

$$I = \int_0^2 (-x+2) dx + \int_2^4 (x-2) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^4$$

$$= (-2+4) - 0 + (8-8) - (2-4) = 4$$

2. Tính tích phân bằng phương pháp phân tích

Xin bạn đọc cách tìm nguyên hàm bằng phương pháp phân tích trong tài liệu “nguyên hàm” mục 4. Tôi xin không chi tiết cách tìm nguyên hàm ở đây mà chỉ đưa luôn ra kết quả phân tích. Xin bạn đọc tự phân tích để so sánh kết quả trong tài liệu này.

Một số ví dụ:

$$1/ \int_0^{\ln 2} (e^x + 1) e^x dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} (e^{2x} + e^x) dx = \left(\frac{1}{2} e^{2x} + e^x \right) \Big|_0^{\ln 2} = \left(\frac{1}{2} \cdot e^{2 \ln 2} + e^{\ln 2} \right) - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{5}{2}$$

$$2/ \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$$

$$= \int_0^4 (2x+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) \Big|_0^4 = \sqrt{2x+1} \Big|_0^4 = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 2$$

$$3/ \int_1^2 \frac{(x^2-1)^2}{x} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x} dx = \int_1^2 \left(x^3 - 2x + \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - x^2 + \ln|x| \right) \Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{2^4}{4} - 2^2 + \ln 2 \right) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 0 \right) = \ln 2 + \frac{3}{4}$$

*Rõ ràng phần chính vẫn là tìm nguyên hàm, tích phân chỉ là thay số mà thôi.

$$4/ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin x) dx = (x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$5/ \int_{10}^{12} \frac{2x+1}{x^2+x-2} dx$$

$$= \int_{10}^{12} \frac{x-1+x+2}{(x-1)(x+2)} dx = \int_{10}^{12} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} \right) dx = (\ln|x+2| + \ln|x-1|) \Big|_{10}^{12}$$

$$= (\ln|14| + \ln 11) - (\ln 12 + \ln 9) = \ln \frac{14 \cdot 11}{12 \cdot 9} = \ln \frac{77}{54}$$

$$6/ \int_0^1 \frac{7+6x}{3x+2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2(3x+2)+3}{3x+2} dx = \int_0^1 \left(2 + \frac{3}{3x+2}\right) dx = (2x + \ln|3x+2|)|_0^1 = 2 + \ln 5 - \ln 2 = 2 + \ln \frac{5}{2}$$

$$7/ \int_0^1 \frac{2x^2+5x-2}{x^3+2x^2-4x-8} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2x^2+5x-2}{(x+2)^2(x-2)} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}\right) dx = \left(-\frac{1}{x+2} + \ln|x^2-4|\right)|_0^1$$

$$= \left(-\frac{1}{3} + \ln 3\right) - \left(-\frac{1}{2} + \ln 4\right) = \ln \frac{3}{4} + \frac{1}{6}$$

$$8/ \int_0^2 |x^2 - x| dx = I$$

$$\text{Ta có: } |x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{nếu } x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ -x^2 + x & \text{nếu } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 (-x^2 + x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)|_1^2$$

$$= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - 0 + \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = 1$$

*Bài tập tự luyện

$\int_1^2 \frac{x(2+x)}{(x+1)^2} dx$	$\int_0^1 \frac{2^{x+1}-5^{x+1}}{10^x} dx$	$\int_1^2 \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x}\right) dx$
$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x^2} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \sin 2x dx$	$\int_{-2}^{-1} \left(x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}\right) dx$
$\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x+3)} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \sin^2 x) dx$	$\int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2} dx$
$\int_1^2 \left(\frac{5}{x} + \sqrt{x^3}\right) dx$	$\int_{\ln 2}^{\ln 4} (2 + e^{3x})^2 dx$	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$
$\int_0^3 x^2 - 4x + 3 dx$	$\int_1^3 \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 dx$	$\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1} dx$
$\int_1^5 \frac{2 x-2 +1}{x} dx$	$\int_1^3 \frac{dx}{x^2+5x+4}$	$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$
$\int_2^3 \frac{xdx}{x^2-1}$	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$	$\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9} dx$
$\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} dx$	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}$	$\int_0^1 (3x-1 - 2 x) dx$

3. Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số

Xin bạn đọc lại phần tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến trong tài liệu “Nguyên Hàm” mục 5

Cách làm đổi biến ở tích phân hoàn toàn tương tự đổi biến nguyên hàm chỉ thêm bước đổi cận để thay số.

Một số ví dụ minh họa

$$1/I = \int_0^{\ln 4} \frac{e^x dx}{e^x + 2}$$

Đặt $u = e^x + 2$ (*); $du = e^x dx$. Đổi cận (thay x vào (*)): $\begin{matrix} x=0 \rightarrow u=3 \\ x=\ln 4 \rightarrow u=6 \end{matrix}$

$$I = \int_3^6 \frac{du}{u} = \ln|u| \Big|_3^6 = \ln 6 - \ln 3 = \ln 2$$

$$2/I = \int_0^1 (x^2 - 1)^9 x dx$$

Đặt $u = x^2 - 1$; $du = 2x dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x dx$. Đổi cận: $\begin{matrix} x=0; u=-1 \\ x=1; u=0 \end{matrix}$

$$I = \int_{-1}^0 u^9 \cdot \frac{du}{2} = \frac{u^{10}}{20} \Big|_{-1}^0 = 0 - \frac{(-1)^{10}}{20} = -\frac{1}{20}$$

$$3/I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$$

Đặt $u = \sin x$; $du = \cos x dx$. Đổi cận: $\begin{matrix} x=0; u=0 \\ x=\frac{\pi}{2}; u=1 \end{matrix}$

$$I = \int_0^1 u^3 du = \frac{u^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$4/I = \int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2}; a > 0$$

Đặt $x = a \tan t$; $dx = a \cdot (1 + \tan^2 t) dt$. Đổi cận: $\begin{matrix} x=0; \tan t=0 \Rightarrow t=0 \\ x=a; \tan t=1; t=\frac{\pi}{4} \end{matrix}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a(1 + \tan^2 t) \cdot \frac{1}{a^2(1 + \tan^2 t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{a}$$

$$5/I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$$

Đặt $u = \sqrt[3]{1+x^2}$; $u^3 = 1+x^2 \Rightarrow 3u^2 du = 2x dx \Leftrightarrow x dx = \frac{3u^2 du}{2}$

Đổi cận: $\begin{matrix} x=0; u=1 \\ x=\sqrt{7}; u=2 \end{matrix}$

$$I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^2 \cdot x dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int_1^2 \frac{(u^3-1)}{u} \cdot \frac{3u^2 du}{2} = \int_1^2 \frac{3}{2} \cdot (u^4 - u) du = \frac{3}{2} \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{3}{2} \left[\left(\frac{2^5}{5} - \frac{2^2}{2} \right) - \left(\frac{1^5}{5} - \frac{1^2}{2} \right) \right] = \frac{141}{20}$$

$$6/I = \int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$$

Nhân cả tử và mẫu với e^x ta được: $I = \int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{e^x dx}{(e^x)^2 - 3e^x + 2} = \int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{e^x dx}{(e^x - 1)(e^x - 2)}$

Đặt $u = e^x - 1$; $du = e^x dx$. Đổi cận: $\begin{matrix} x=\ln 3; u=2 \\ x=\ln 6; u=5 \end{matrix}$

$$I = \int_2^5 \frac{du}{u(u-1)} = \int_2^5 \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} \right) du = (\ln|u-1| - \ln|u|) \Big|_2^5 = (\ln 4 - \ln 5) - (0 - \ln 2)$$

$$= \ln 2^2 - \ln 5 + \ln 2 = 3 \ln 2 - \ln 5$$

$$7/I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$$

Đặt $u = \sqrt{3x+1}$; $u^2 = 3x+1 \Rightarrow x = \frac{u^2-1}{3}$; $dx = \frac{2udu}{3}$

Đổi cận: $\begin{matrix} x=1; u=2 \\ x=5; u=4 \end{matrix}$

$$I = \int_2^4 \frac{2u}{3} \cdot \frac{1}{u^2-1} du = \int_2^4 \frac{2}{u^2-1} du = \int_2^4 \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du = (\ln|u-1| - \ln|u+1|) \Big|_2^4$$

$$= (\ln 3 - \ln 5) - (0 - \ln 3) = 2 \ln 3 - \ln 5$$

$$8/I = \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x + 1} \ln x}{x} dx$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{\ln x + 1}; u^2 = \ln x + 1 \Rightarrow \ln x = u^2 - 1; \frac{dx}{x} = 2u du$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{matrix} x=1; u=1 \\ x=e; u=\sqrt{2} \end{matrix}$$

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} u \cdot (u^2 - 1) \cdot 2u du = \int_1^{\sqrt{2}} 2(u^4 - u^2) du = 2 \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = 2 \left[\left(\frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) \right]$$

$$= 2 \left(\frac{2\sqrt{2}+2}{15} \right)$$

*Tóm lại: bước quan trọng nhất là tìm nguyên hàm.

*Bài tập tự luyện

$\int_1^e \frac{\ln x dx}{x(\ln x + 2)^2}$	$\int_0^1 3x \cdot e^{2x} dx$	$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$
$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^2 x dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx$	$\int_0^e x \sqrt{e + x^2} dx$
$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$	$\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$	$\int_1^2 x \sqrt{4 - x^2} dx$
$\int_0^1 e^{\sqrt{3x+1}} dx$	$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$ đặt $x = 4 \tan t$	$\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$
$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \cos x dx$	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin x + 1}$	$\int_0^3 \frac{xdx}{1+\sqrt{x+10}}$
$\int_1^3 \frac{\sqrt{1+3 \ln x}}{x} dx$	$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}-5} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos x}}$ (PT $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$)
$\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1}$	$\int_0^1 \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}} dx$	$\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^3}$
$\int_0^1 \sqrt[3]{1-x} dx$	$\int_0^2 x^2 \sqrt{x^3+1} dx$	$\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$

4. Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần

Cũng giống như hai phương pháp: phân tích và đổi biến, phương pháp tích phân từng phần cũng yêu cầu bước quan trọng nhất là tìm nguyên hàm. Tôi xin đưa ra một số ví dụ để bạn đọc xem cách tính.

$$1/I = \int_1^e (x+1) \ln x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} + x \end{cases}$$

$$I = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \cdot \frac{dx}{x} = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} + 1 \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x \Big|_1^e - \left(\frac{x^2}{4} + x \right) \Big|_1^e$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} + e \right) \ln e - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \ln 1 - \left[\left(\frac{e^2}{4} + e \right) - \left(\frac{1}{4} + 1 \right) \right] = \frac{e^2}{2} + e - \frac{e^2}{4} - e + \frac{5}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{5}{4}$$

$$2/ I = \int_1^{2 \ln x} \frac{dx}{x^3}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^{-3} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^{-2}}{-2} \end{cases}$$

$$I = \frac{x^{-2}}{-2} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^{-2}}{-2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^{-2}}{-2} \ln x \Big|_1^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 x^{-3} dx = -\frac{1}{2x^2} \ln x \Big|_1^2 + \left(-\frac{1}{4x^2}\right) \Big|_1^2$$

$$= \left(-\frac{1}{8} \ln 2 - \left(-\frac{1}{2} \ln 1\right)\right) + \left(-\frac{1}{16} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = -\frac{1}{8} \ln 2 + \frac{3}{16}$$

$$3/ I = \int_0^2 (3x - 1) e^{\frac{x}{2}} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 3x - 1 \\ dv = e^{\frac{x}{2}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3 dx \\ v = 2e^{\frac{x}{2}} \end{cases}$$

$$I = 2e^{\frac{x}{2}} (3x - 1) \Big|_0^2 - \int_0^2 6e^{\frac{x}{2}} dx = 10e - (-2) - 12e^{\frac{x}{2}} \Big|_0^2 = 10e + 2 - [12e - 12] = 14 - 2e$$

$$4/ I = \int_1^e x^2 \ln x dx$$

Ta có thể tìm nguyên hàm trước rồi tính tích phân.

$$\text{Gọi } F(x) = \int x^2 \ln x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

$$I = \left(\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}\right) \Big|_1^e = \left(\frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9}\right) - \left(0 - \frac{1}{9}\right) = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}$$

$$5/ I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$$

$$I = x \cdot \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = x \cdot \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - (-\ln|\cos x|) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = (x \cdot \tan x + \ln|\cos x|) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0 + 0) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$$

Nếu bạn đọc chưa rõ xin xem lại phần nguyên hàm lượng giác trong tài liệu nguyên hàm.

$$6/ I = \int_0^1 \ln(x + 1) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x + 1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+1} \\ v = x + 1 (\text{chọn } C = 1) \end{cases}$$

$$I = (x+1) \ln(x+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 dx = (x+1) \ln(x+1) \Big|_0^1 - x \Big|_0^1 = (2 \ln 2 - 0) - (1 - 0) = 2 \ln 2 - 1$$

*Bài tập tự luyện

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin x \, dx$	$\int_0^1 (x^2 - 2x - 1)e^{-x} \, dx$	$\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} \, dx$
$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2-x) \sin x \, dx$	$\int_0^2 x^2 e^{3x} \, dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos 2x \, dx$
$\int_0^{\ln 2} x e^{-2x} \, dx$	$\int_0^1 \ln(2x+1) \, dx$	$\int_1^e \frac{1+x \cdot \ln x}{x} e^x \, dx$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos^2 x \, dx$	$\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$	$\int_1^3 \frac{e^{3x}}{x} \, dx$
$\int_{-3}^{e-4} (x+4) \ln(x+4) \, dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos x \, dx$	$\int_1^e \frac{1+2 \ln x}{x} \, dx$
$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$	$\int_1^e \frac{2 \ln x}{x^2} \, dx$	$\int_1^2 \ln(9-x^2) \, dx$

5. Ứng dụng của tích phân(trọng điểm)

Trong phần này tôi xin chỉ trình bày chi tiết phần ứng dụng đưa ra công thức tính, phần tính toán tích phân tôi xin chỉ trình bày các bước chính hoặc chỉ đưa ra kết quả.

5.1. Tính diện tích hình phẳng

5.1.1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một đường cong

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị (C) và liên tục trên $[a; b]$

Diện tích S giới hạn bởi đồ thị $f(x)$ với trục hoành (Ox) và hai đường thẳng $x=a; x=b$ là:

$$S = \int_a^b |f(x)| \, dx$$

Các bước tính:

+, xác định đoạn

+, xác định các khoảng $f(x)$ nhận giá trị dương và âm để phá giá trị tuyệt đối (vẽ đồ thị hoặc kẻ bảng biến thiên nếu cần)

+, Tính tích phân sau khi phá dấu giá trị tuyệt đối.

Một số ví dụ:

1/ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành, hai đường thẳng $x = -1; x = 2$

Giải

$$\text{Ta có: } S = \int_{-1}^2 |x^3| \, dx$$

$$|x^3| = x^2|x| = \begin{cases} x^3 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } S = \int_{-1}^0 -x^3 \, dx + \int_0^2 x^3 \, dx = \frac{17}{4}$$

*Các bạn có thể viết dấu trị tuyệt đối trên máy tính bằng cách ấn: SHIFT+hyp

2/ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2 - 2x$; $x = -2$; $x = 1$

Giải

$$S = \int_{-2}^1 |x^2 - 2x| dx$$

$$|x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{nếu } x \geq 2 \vee x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & \text{nếu } 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$S = \int_{-2}^0 (x^2 - 2x) dx + \int_0^1 (-x^2 + 2x) dx = \frac{22}{3}$$

3/ Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi: $x = 1$; $x = e$; $y = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

Giải

$$S = \int_1^e \left| \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \right| dx$$

Nhắc lại: $\begin{cases} \ln x \geq 0 & \text{nếu } x \geq 1 \\ \ln x < 0 & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$

$$S = \int_1^e \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx \text{ sử dụng phương pháp tính tích phân từng phần ta được kết quả: } S = 2 - \sqrt{e}$$

4/ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = \sin^2 x \cos x$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin^2 x \cos x| dx$$

Do trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $y = \sin^2 x \cos x \geq 0$ nên:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \cos 2x \cos x) dx = \dots = \frac{1}{3}$$

5.1.2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Dạng 1: Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ cùng liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $f(x)$; $g(x)$; hai đường thẳng $x=a$; $x=b$ là:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Cũng giống như dạng 5.1.1, chúng ta cần phá dấu giá trị tuyệt đối bằng cách xét dấu $f(x) - g(x)$ để tích được tích phân.

Một số ví dụ:

1/ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \frac{1}{\sin^2 x}$; $y = \frac{1}{\cos^2 x}$; $x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{3}$

Giải

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left| \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right| dx$$

$$\text{Từ } \frac{\pi}{6} \text{ đến } \frac{\pi}{4}: \sin x < \cos x \Rightarrow \sin^2 x < \cos^2 x \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} > \frac{1}{\cos^2 x}$$

Từ $\frac{\pi}{4}$ đến $\frac{\pi}{3}$: $\cos x < \sin x \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} > \frac{1}{\sin^2 x}$

Vậy: $S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = (-\cot x - \tan x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + (\tan x + \cot x) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}$
 $= (-1 - 1) - \left(-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) + \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - (1 + 1) = -4 + 2\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} - 4$

2/ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = 2^x$; $y = 3 - x$; $x = 0$; $x = 1$

Giải

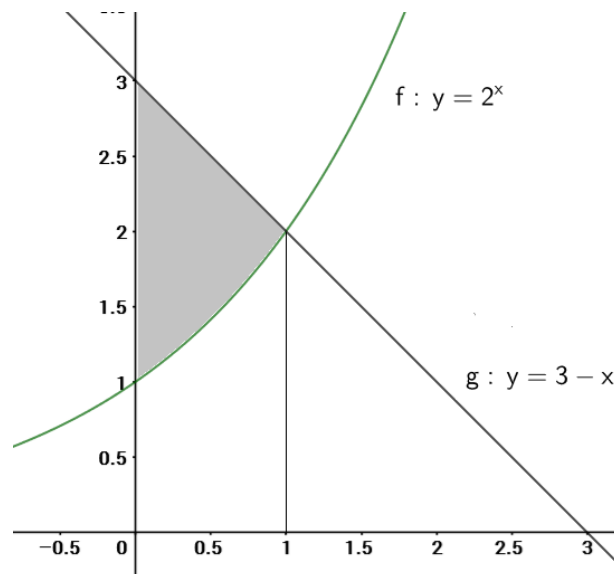
$$S = \int_0^1 |2^x - (3 - x)| dx$$

Tôi xin trình bày cách phá dấu GTTĐ bằng đồ thị:

Ta thấy từ 0 đến 1 thì $g(x) = 3 - x$ luôn lớn hơn $f(x) = 2^x$

$$\text{Do đó } S = \int_0^1 (3 - x - 2^x) dx = \left(3x - \frac{x^2}{2} - \frac{2^x}{\ln 2} \right) \Big|_0^1$$

$$= \left(3 - \frac{1}{2} - \frac{2}{\ln 2} \right) - \left(-\frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{5}{2} - \frac{1}{\ln 2}$$



3/ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = x + \sin x$; $y = x$; $0 \leq x \leq \pi$

Giải

$$S = \int_0^\pi |(x + \sin x) - x| dx = \int_0^\pi |\sin x| dx. \text{ Do từ 0 đến } \pi \text{ thì } \sin x \geq 0 \text{ nên } S = \int_0^\pi \sin x dx = 2$$

Dạng 2: tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $f(x)$; $g(x)$ liên tục; chưa biết cận.

Cách làm:

Bước 1: Giải phương trình $f(x) = g(x)$ để tìm cận $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$. Cần lưu ý cả điều kiện xác định nếu có.

Các bạn cũng có thể tìm cận thông qua vẽ đồ thị $f(x)$; $g(x)$.

$$\text{Bước 2: tính diện tích } S = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x) - g(x)| dx + \dots$$

Một số ví dụ:

1/ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^3$; $y = 2x - x^2$

$$\text{Giải phương trình: } x^3 = 2x - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } |x^3 - (2x - x^2)| = |x^3 + x^2 - 2x|$$

Xét dấu $x^3 + x^2 - 2x$:

x	-2	0	1
$x^3 + x^2 - 2x$	+	-	

$$S = \int_{-2}^0 |x^3 + x^2 - 2x| dx + \int_0^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx = \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-2}^0 - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 = \left(0 - \left(-\frac{8}{3} \right) \right) - \left(-\frac{5}{12} - 0 \right) = \frac{37}{12}$$

2/ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $x + y = 1$; $x + y = -1$; $x - y = 1$; $x - y = -1$

Giải:

Đây là dạng có nhiều hàm số nên tôi xin giải bằng cách vẽ đồ thị.

Từ đồ thị ta thấy hình giới hạn bởi bốn đường thẳng là một hình vuông cạnh $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Do vậy $S = (\sqrt{2})^2 = 2$

*Hoặc ta cũng có thể tính như sau:

Ta thấy hình giới hạn được chia làm 4 phần bằng nhau nên ta chỉ cần tính một phần rồi nhân với 4.

Ta tính phần 1 giới hạn bởi $y=1-x$; trục hoành; trục tung

$$S = 4 \int_0^1 (1-x) dx = 4 \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 4 \left(1 - \frac{1}{2} - 0 \right) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Cách này tổng quát hơn cho các hình cong không đặc biệt.

3/ Tính diện tích giới hạn bởi $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$; $y = x^2$

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$

Giải phương trình: $1 - \sqrt{1-x^2} = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 - x^2 \Rightarrow \begin{cases} 1-x^2 = 0 \\ 1-x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases}$

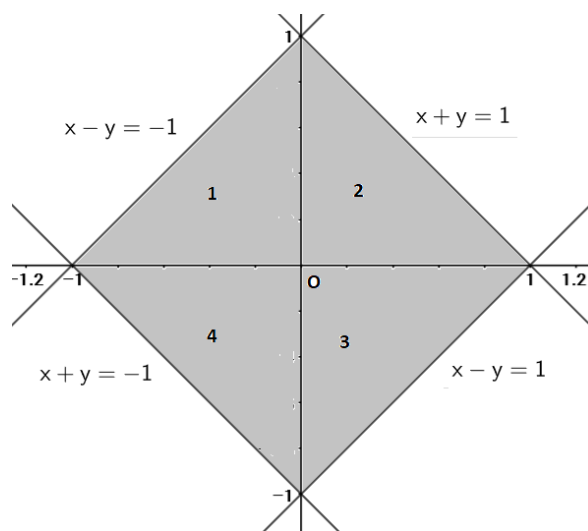
Vậy ta có 3 cận.

Ta có: $|1 - \sqrt{1-x^2} - x^2| = |(1-x^2) - \sqrt{1-x^2}| = \sqrt{1-x^2} + x^2 - 1$

(do $0 \leq 1-x^2 \leq 1 \Rightarrow 1-x^2 \leq \sqrt{1-x^2}$)

$$S = \int_{-1}^0 (\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1) dx + \int_0^1 (\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1) dx = \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1) dx$$

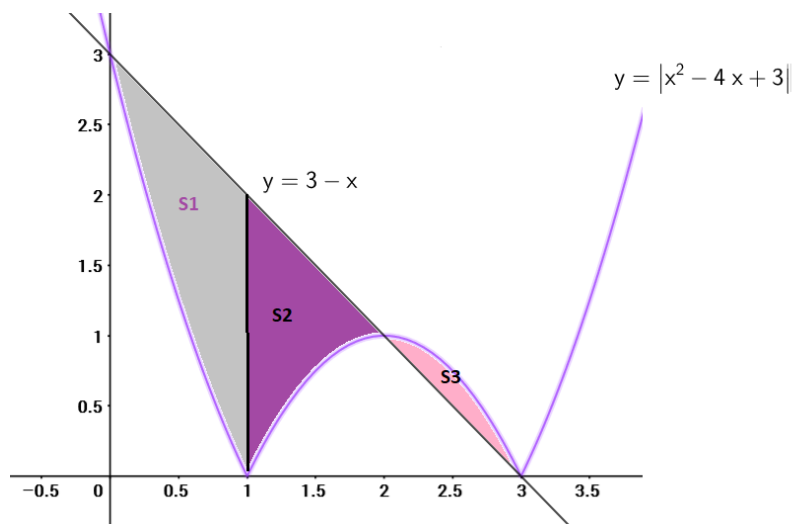
$$= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx. \text{ Tính hai tích phân này ta được kết quả: } S = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$$



4/ Tính diện tích hình phẳng giới hạn

bởi: $y = |x^2 - 4x + 3|$; $y = 3 - x$

Vẽ đồ thị để tính diện tích:



Từ đồ thị ta thấy: $S = S_1 + S_2 + S_3$

Ta có:

$$|x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ -(x^2 - 4x + 3) & \text{nếu } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$+, S_1 = \int_0^1 (3 - x - (x^2 - 4x + 3)) dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2 + 3x) dx = \frac{7}{6}$$

$$+, S_2 = \int_1^2 ((3 - x) + (x^2 - 4x + 3)) dx = \int_1^2 (x^2 - 5x + 6) dx = \frac{5}{6}$$

$$+, S_3 = \int_2^3 (-(x^2 - 4x + 3) - (3 - x)) dx = \int_2^3 (-x^2 + 5x - 6) dx = \frac{1}{6}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{7}{6} + \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$$

5.2. Tính thể tích vật thể

5.2.1. Tính thể tích vật thể từ công thức diện tích thiết diện

Cắt một vật thể T bằng hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với trục Ox tại $x=a$ và $x=b$ ($a < b$). Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox cắt Ox tại x ($a \leq x \leq b$) tạo thành thiết diện có diện tích là $S(x)$. Khi đó thể tích vật thể T giới hạn bởi hai mặt phẳng (P); (Q) là:

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

*Từ công thức này chúng ta có hàng loạt công thức tính thể tích của các khối đa diện đã học ở chương một hình học lớp 12.

Ví dụ:

1\ Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$; $x=3$, Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$. (Đề minh họa lần 3 - 2017)

Giải

$$\text{Diện tích thiết diện là: } S(x) = 3x\sqrt{3x^2 - 2}$$

$$\text{Theo lý thuyết ta có: } V = \int_1^3 3x\sqrt{3x^2 - 2} dx. \text{ Đặt } u = \sqrt{3x^2 - 2}; u^2 = 3x^2 - 2 \Rightarrow 2udu = 6xdx$$

$3x dx = u du$. Đổi cận: $\begin{matrix} x=1; u=1 \\ x=3; u=5 \end{matrix}$

$$V = \int_1^5 u \cdot u du = \int_1^5 u^2 du = \left. \frac{u^3}{3} \right|_1^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{124}{3}$$

2\ Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1; x = 4$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 4$) thì được thiết diện là một hình lục giác đều có cạnh $2x$

Giải

Xác định diện tích thiết diện:

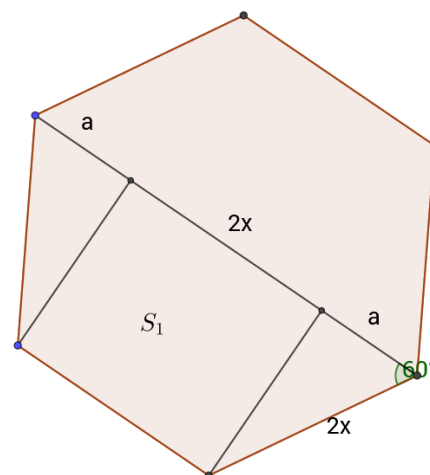
Chia hình lục giác thành hai hình thang cân có góc ở đáy bằng 60° . Xác định chiều cao và đáy lớn.

$$h = 2x \cdot \sin 60^\circ = x\sqrt{3}; a = 2x \cdot \cos 60^\circ = x;$$

$$\text{Gọi đáy lớn là } b: b = 2x + 2a = 2x + 2x = 4x$$

$$\text{Diện tích thiết diện: } S = 2S_1 = 2 \cdot \frac{(2x+4x) \cdot x\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}x^2$$

$$\text{Thể tích cần tính: } V = \int_1^4 S(x) dx = \int_1^4 6\sqrt{3}x^2 dx = 2\sqrt{3}x^3 \Big|_1^4 = 126\sqrt{3}$$



5.2.2. Tính thể tích khối tròn xoay

Từ công thức 5.1.1 ta có công thức của khối tròn xoay

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Quay đồ thị $y=f(x)$ xung quanh trục Ox. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại x ($a \leq x \leq b$) là một hình tròn bán kính $|f(x)|$. Diện tích thiết diện là: $S(x) = \pi|f(x)|^2 = \pi f(x)^2$. Áp dụng công thức 5.1.1 ta có công thức tính thể tích khối tròn xoay:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Thể tích khối tạo thành bởi hai hàm số $f(x); g(x)$ quay quanh Ox

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

*Đây là công thức rất thú vị khi các bạn biết áp dụng để tính thể tích khối tròn xoay ở chương 2 hình học lớp 12.

Một số ví dụ:

1/ Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay đồ thị hàm số $y = \tan x$ quanh trục Ox, giới hạn bởi các mặt phẳng $x = 0; x = \frac{\pi}{3}$

Giải

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = (\tan x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

2/ Tính thể tích vật tròn xoay do hình phẳng $S = \{y = x \cdot \ln x; x = 1; x = e\}$ quay quanh Ox

Giải

$$V = \pi \int_1^e (x \ln x)^2 dx = \pi \int_1^e x^2 \ln^2 x dx.$$

$$\frac{V}{\pi} = \int_1^e x^2 \ln^2 x dx \quad \text{Đặt} \begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2 \ln x}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\frac{V}{\pi} = \frac{x^3}{3} \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{2}{3} x^2 \ln x dx. \text{ đặt } \begin{cases} u_1 = \ln x \\ dv = \frac{2}{3} x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{2x^3}{9} \end{cases}$$

$$\frac{V}{\pi} = \frac{x^3}{3} \ln^2 x \Big|_1^e - \left(\frac{2x^3}{9} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{2}{9} x^2 dx \right) = \frac{x^3}{3} \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{2x^3}{9} \ln x \Big|_1^e + \frac{2}{27} x^3 \Big|_1^e$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2x^3}{9} \ln x + \frac{2x^3}{27} \right) \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{2e^3}{9} + \frac{2e^3}{27} - \frac{2}{27} = \frac{5e^3 - 2}{27}$$

$$\Rightarrow V = \pi \cdot \frac{5e^3 - 2}{27}$$

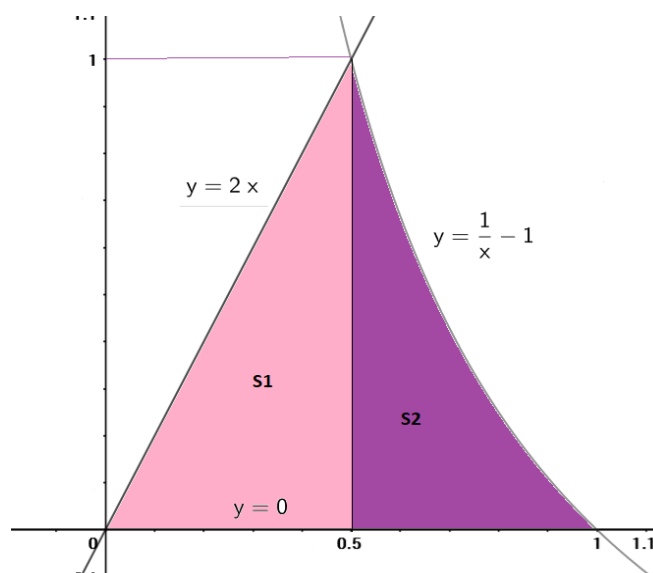
3/ Tính thể tích khối tạo thành khi quay hình phẳng xác định bởi: $y = \frac{1}{x} - 1$; $y = 2x$; $y = 0$ quanh Ox

Giải

Vẽ đồ thị hai hàm số $y = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$; $y = 2x$.

$$V = V_1 + V_2$$

$$+, V_1 = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (2x)^2 dx = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} 4x^2 dx = \pi \frac{4x^3}{3} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$$



$$+, V_2 = \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^2 dx = \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 \right) dx = \pi \left(-\frac{1}{x} - 2 \ln|x| + x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= \pi \cdot 0 - \pi \cdot \left(-2 - 2 \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \pi \left(\frac{3}{2} - 2 \ln 2 \right)$$

$$\text{Vậy } V = \frac{\pi}{6} + \pi \left(\frac{3}{2} + 2 \ln 2 \right) = \pi \left(\frac{5}{3} - 2 \ln 2 \right)$$

*Bài tập tự luyện

Tính các diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

1/ $y = x^2$; $y = 2 - x$; Ox ; $x \geq 0$	2/ $y = x^3 - x$; $y = 2x$; $x = -1$; $x = 1$
3/ $y = \frac{-3x-1}{x-1}$; Ox ; Oy	4/ $y = x^2$; $y = x$
5/ $y = x^2 - x$; $x = 0$; $x = 2$	6/ $y = x^2$; $y = 2 - x^2$
7/ $y = x^2 + 4$; $y = x + 4$	8/ $y = x^2 - 4x + 3$; Ox
9/ $y = x^3 - 1$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 2$	10/ $y = x^2$; $y = \frac{x^2}{27}$; $y = \frac{27}{x}$
11/ $y = \ln x$; $y = 0$; $x = e^2$	12/ $y = xe^x$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 2$

Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi:

1/ $y = (1 - x)^2; y = 0; x = 0; x = 2$	2/ $y = \sqrt{2 + \sin x}; x = 0; x = \pi$
3/ $y = \sqrt{x^2 + 1}; x = 0; x = 1$	4/ $y = e^x; x = 0; x = 1$
5/ $y = \sqrt{x}; y = 2 - x; Ox$	6/ $y = x^2 - 4x; y = 0$
7/ $y = -2\sqrt{x}; y = x; x = 5$	8/ $y = x \ln x; y = 0; x = e$

5.3. Một số bài toán thực tế

Đối với bài toán vận tốc: $v = \int a(t)dt; s = \int v(t)dt$; với a là gia tốc; v là vận tốc; s là quãng đường.

Đối với các bài toán khác không thể đưa ra cách giải cụ thể mà cần phân tích để tìm hàm dưới dấu tích phân.

Ví dụ minh họa

1/ Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của đường Parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.

Giải

Quãng đường s mà vật di chuyển trong 3 giờ đầu bằng tích phân từ 0 đến 3 của $v(t)$

$$s = \int_0^3 v(t)dt$$

Đồ thị vận tốc là một đường Parabol nên có dạng: $v(t) = at^2 + bt + c$

$$\begin{matrix} t=0 \\ v=6 \end{matrix} \Rightarrow c = 6$$

$$\text{Tại đỉnh } I = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = (2; 9) \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 2 \Leftrightarrow b = -4a$$

$$\text{Mặt khác: } v(2) = 9 \Leftrightarrow 4a + 2b + 6 = 9 \Leftrightarrow 4a + 2(-4a) = 3 \Leftrightarrow -4a = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}; \Rightarrow b = 3$$

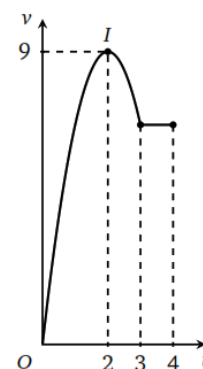
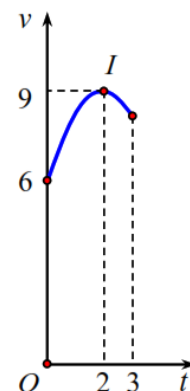
$$\text{Vậy } v(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6$$

$$\text{Vậy: } s = \int_0^3 \left(-\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6\right) dt = 24,75 \text{ (km)}$$

2/ Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của vận tốc. Trong 3 giờ đầu kể từ khi bắt đầu chuyển động đồ thị vận tốc là một phần của parabol đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động trong 4 giờ đó.

Giải

Chia quãng đường thành hai phần: phần 1: chuyển động với vận tốc theo quỹ đạo parabol; phần 2 chuyển động với vận tốc theo quỹ đạo thẳng.



$$s = \int_0^3 v_1(t)dt + \int_3^4 v_2(t)dt$$

Tìm $v_1(t) = at^2 + bt + c$ ()

Tại $t = 0; v = 0 \Rightarrow c = 0$

Đỉnh I có hoành độ $x = -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a$

Thay tọa độ đỉnh I(2; 9) vào (*) ta có: $4a + (-4a).2 + 0 = 9 \Leftrightarrow -4a = 9 \Leftrightarrow a = -\frac{9}{4} \Rightarrow b = 9$

Vậy $v_1(t) = -\frac{9}{4}t^2 + 9t$

*Ta thấy $v_2(t) = v_1(3) = -\frac{9}{4}.3^2 + 9.3 = 6,75$ (đồ thị là đường thẳng song song Ot nên có dạng $v = k$)

Vậy $s = \int_0^3 \left(-\frac{9}{4}t^2 + 9t\right) dt + \int_3^4 6,75 dt = 27$ (km)

3/ Một vật chuyển động theo qui luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t(giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s(m) là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t. Hỏi trong khoảng thời gian 6(s) kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật là bao nhiêu?

Giải

Ta có: $v(t) = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 12t$

Ta tìm được $\max_{[0;6]} v(t) = 24$ (m/s)

4/ Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = 3t^2 + t$ (m/s^2). Vận tốc ban đầu của vật là 2 m/s. Hỏi vận tốc của vật là bao nhiêu sau khi chuyển động với gia tốc đó được 2s.

Giải

Ta có: $v(t) = \int a(t)dt = \int (3t^2 + t)dt = t^3 + \frac{t^2}{2} + C$

Vận tốc ban đầu(t=0) là 2 m/s: $v(0) = C = 2$

Vậy: $v(t) = t^3 + \frac{t^2}{2} + 2 \Rightarrow v(2) = 2^3 + \frac{2^2}{2} + 2 = 12$ m/s

Cách 2: sử dụng công thức tính tích phân: $v(2) - v(0) = \int_0^2 a(t)dt \Rightarrow v(2) = v(0) + \int_0^2 (3t^2 + t)dt$

Đây là công thức tôi đã giới thiệu ở phần 7.2 tài liệu “Nguyên Hàm”.

5/ Một ô tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t) = 6 - 2t$ (m/s^2), trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Hỏi quãng đường ô tô đi được kể từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt GTLN là bao nhiêu mét?

Giải

Ta có: $v(t) = \int a(t)dt = \int (6 - 2t)dt = 6t - t^2 + C$

Tại thời điểm vật bắt đầu chuyển động: $t=0; v=0 \Rightarrow v(0) = C = 0$

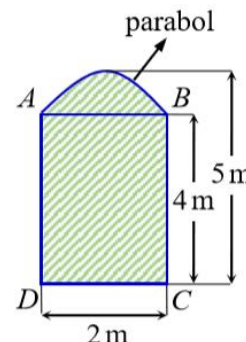
Vậy $v(t) = 6t - t^2$. Vận tốc lớn nhất tại thời điểm $t=3$

Quãng đường vật đi được đến thì điểm $t=3$ là: $S(3) = \int_0^3 v(t)dt = \int_0^3 (6t - t^2)dt = 18 \text{ m}$

6/ Ông A muốn làm một cánh cửa bằng sắt có hình dạng là kích thước như hình vẽ. Biết đường cong phía trên là parabol, tứ giác ABCD là hình chữ nhật. Giá thành được tính là $900\,000/\text{m}^2$. Hỏi ông A phải trả bao nhiêu tiền để làm cánh cửa đó.

Giải

Chiếu hình vẽ lên hệ tọa độ Oxy. Với $A(0;0)$ là gốc tọa độ; $B(2;0)$; đỉnh parabol $I(1;1)$.



Tìm công thức biểu diễn parabol. $y = ax^2 + bx$ (parabol đi qua gốc tọa độ nên $c=0$)

+, Điểm B có $\begin{matrix} x=2 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow 4a + 2b = 0 \Leftrightarrow b = -2a$

+, Điểm I có $\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix} \Rightarrow a + b = 1 \Leftrightarrow a - 2a = 1 \Leftrightarrow a = -1 \Rightarrow b = 2$

Vậy parabol có dạng: $y = -x^2 + 2x$

Diện tích phần giới hạn bởi parabol và đường thẳng AB là: $S_1 = \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = \frac{4}{3}$

Diện tích hình chữ nhật là: $S_2 = 4.2 = 8$

Tổng diện tích cánh cửa: $S = \frac{4}{3} + 8 = \frac{28}{3}$

Số tiền ông A phải trả là: $T = \frac{28}{3} \cdot 900\,000 = 8\,400\,000$ đồng

7/ Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo công thức $v(t) = 3t + 2$ (m/s), thời gian t tính bằng giây. Tại thời điểm $t=2\text{s}$ vật đi được 10m. Hỏi tại thời điểm $t=30\text{s}$ vật đi được bao nhiêu mét?

Giải

Ta có: $s(t) = \int v(t)dt = \int (3t + 2)dt$

$s(30) - s(2) = \int_2^{30} (3t + 2)dt = 1400 \Rightarrow s(30) = 1400 + s(2) = 1400 + 10 = 1410 \text{ m}$

8/ Một học sinh đi học từ nhà đến trường bằng xe đạp với vận tốc thay đổi theo công thức $v(t) = 40t + 100$ m/phút. Biết rằng sau khi đi được 1 phút thì quãng đường học sinh đó đi được là 120m. Quãng đường từ nhà đến trường là 3km, hỏi thời gian học sinh đó đi đến trường là bao nhiêu phút?

Giải

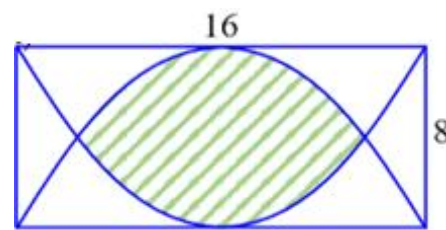
Gọi thời gian học sinh đó đi đến trường là a phút. Ta có: $s(a) - s(1) = \int_1^a (40t + 100)dt$

$\Rightarrow 3000 - 120 = (20t^2 + 100t)|_1^a \Leftrightarrow 2880 = (20a^2 + 100a) - (20 + 100)$

$\Leftrightarrow 20a^2 + 100a - 3000 = 0 \Leftrightarrow a = 10 \vee a = -15$ (loại).

Vậy thời gian học sinh đi đến trường là 10 phút.

8/ Một mảnh vườn toán học có dạng hình chữ nhật, chiều dài là 16m và chiều rộng là 8m. Các nhà Toán học dùng hai đường parabol, mỗi parabol có đỉnh là trung điểm của một cạnh dài và đi qua 2 mút của cạnh dài đối diện; phần mảnh vườn nằm ở miền trong của cả hai parabol (phần gạch sọc như hình vẽ minh họa) được trồng hoa Hồng. Biết chi phí để trồng hoa Hồng là 45.000 đồng/1m². Hỏi các nhà Toán học phải chi bao nhiêu tiền để trồng hoa trên phần mảnh vườn đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



Giải

Chiều hình vẽ lên hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ:

O là gốc tọa độ, OA nằm trên Ox, OC nằm trên Oy.

Diện tích mảnh vườn gồm 2 phần bằng nhau $S_1 = S_2$

*Tìm công thức parabol 1 tạo thành S_1

Gọi parabol là: $y = ax^2 + bx + c$

+, điểm B(0;-4) thuộc Parabol $\Rightarrow c = -4$

+, điểm D(16; -4) thuộc parabol $\Rightarrow 256a + 16b - 4 = -4 \Leftrightarrow b = -16a$

+, điểm I(8;4) thuộc parabol $\Rightarrow 64a + 8b - 4 = 4 \Leftrightarrow 64a + 8(-16a) = 8 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{8} \Rightarrow b = 2$

Vậy parabol 1 xác định bởi: $y = -\frac{1}{8}x^2 + 2x - 4$

Giải phương trình: $-\frac{1}{8}x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 8 \pm 4\sqrt{2}$

$$S = 2S_1 = 2 \int_{8-4\sqrt{2}}^{8+4\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{8}x^2 + 2x - 4 \right) dx = 60,3398$$

Vậy chi phí trồng hoa Hồng là $T = 60,3398 \times 45000 = 2\,715\,290$ đồng

9/ Ông Khang muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá 1(m²) của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông Khang phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).

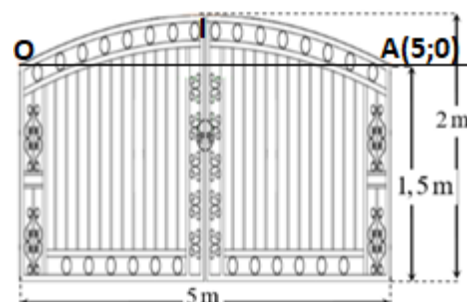
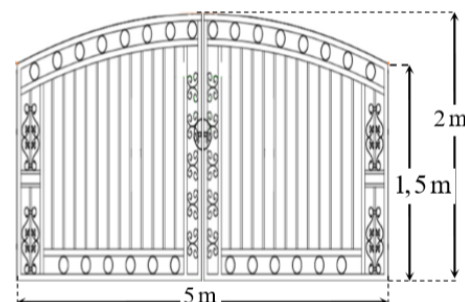
Giải

Chia bộ cửa làm hai phần: phần 1 giới hạn bởi parabol và phần 2 là phần hình chữ nhật (như hình vẽ). Chiều lên hệ trục tọa độ để tìm công thức parabol.

O là gốc tọa độ, OA nằm trên Ox, A(5;0), I(2,5; 0,5) là đỉnh parabol.

*Tính diện tích S_1 giới hạn bởi parabol và OA.

+, Tìm công thức parabol: $y = ax^2 + bx$ (parabol đi qua gốc tọa độ)



Từ các ví dụ trên xin bạn đọc tự tìm các hệ số a, b . Kết quả: $y = -\frac{2}{25}x^2 + \frac{2}{5}x$

+, Tính $S_1 = \int_0^5 \left(-\frac{2}{25}x^2 + \frac{2}{5}x\right) dx = \frac{5}{3}$

*Tính S_2 là phần hình chữ nhật bên dưới

$$S_2 = 5.1,5 = 7,5$$

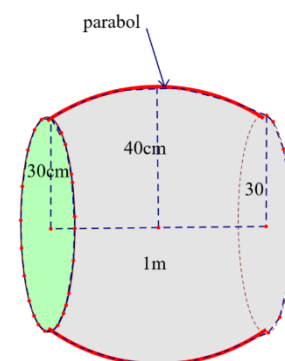
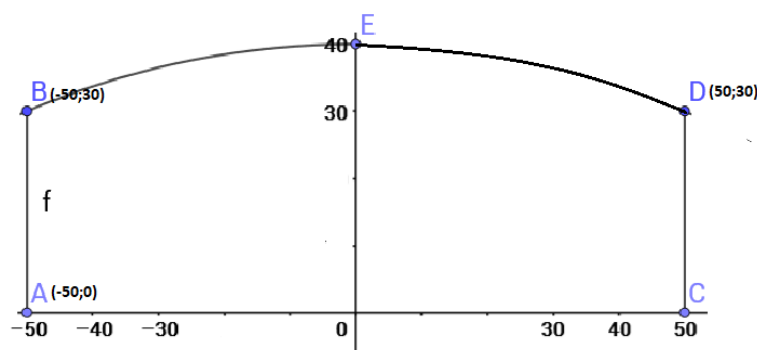
$$\text{Vậy } S = S_1 + S_2 = \frac{5}{3} + 7,5 = \frac{55}{6}$$

$$\text{Số tiền làm cửa là: } T = \frac{55}{6} \times 700000 = 6\,416\,667 \text{ đồng}$$

10/ Một cái trống trường có bán kính các đáy là 30cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có diện tích là $1600\pi \text{ (cm}^2\text{)}$, chiều dài của trống là 1m. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường Parabol. Hỏi thể tích của cái trống là bao nhiêu?

Giải

Chiếu hình vẽ lên hệ trục Oxy như hình vẽ:



*Tìm công thức của parabol.

Gọi công thức parabol là: $y = ax^2 + bx + c$ (*)

Thay tọa độ các điểm $B(-50;30)$; $D(50;30)$; $E(0;40)$ vào công thức (*) ta được $a = -\frac{1}{250}$; $b = 0$; $c = 40$. vậy $y = -\frac{1}{250}x^2 + 40$

$$\text{Vậy } V = \pi \int_{-50}^{50} \left(-\frac{1}{250}x^2 + 40\right)^2 dx = 425\,162,2058 \text{ (cm}^3\text{)} = 425,162 \text{ (lít)}$$

*Bài tập tự luyện

1/ Một vật chuyển động với vận tốc 10 (m/s) thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

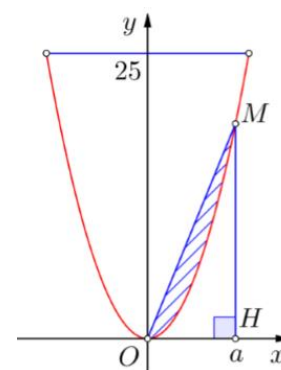
2/ Hai ô tô xuất phát tại cùng một thời điểm trên cùng đoạn đường thẳng AB, ô tô thứ nhất bắt đầu xuất phát từ A và đi theo hướng từ A đến B với vận tốc $v_1(t) = 2t + 1 \text{ (km/h)}$; ô tô thứ hai xuất phát từ O cách A một khoảng 22 km và đi theo hướng từ A đến B với vận tốc 10 km/h, sau một khoảng thời gian người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô thứ hai chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v_0(t) = -5t + 20 \text{ km/h}$. Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu kể từ khi xuất phát hai ô tô đó gặp nhau.

3/ Một công ty phải gánh chịu nợ với tốc độ $D(t)$ đô la mỗi năm, với $D'(t) = 90(t+6)\sqrt{t^2+12t}$ trong đó t là thời gian (tính theo năm) kể từ khi công ty bắt đầu vay nợ. Sau bốn năm công ty đã phải chịu 1626000 đô la tiền nợ nần. Tìm hàm số $D(t)$ biểu diễn tốc độ nợ nần của công ty này.

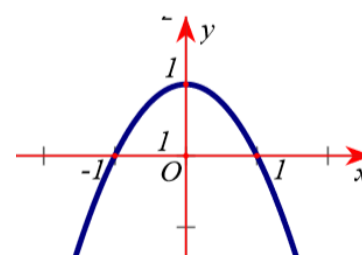
4/ Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ m/s có gia tốc $v'(t) = \frac{3}{t+1} \text{ m/s}^2$. Vận tốc ban đầu của vật là 6m/s. Tính vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

5/ Một ô tô đang chuyển động đều với vận tốc 12m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 12 \text{ m/s}$ (trong đó t là thời gian tính bằng giây, kể từ lúc đạp phanh). Hỏi trong thời gian 8 giây cuối (tính đến khi xe dừng hẳn) thì ô tô đi được quãng đường bằng bao nhiêu?

6/ Ông B có một khu vườn giới hạn bởi một đường parabol và một đường thẳng. Nếu đặt trong hệ tọa độ Oxy như hình vẽ bên thì parabol có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng là $y=25$. Ông B dự định dùng một mảnh vườn nhỏ được chia từ khu vườn bởi một đường thẳng đi qua O và điểm M trên parabol để trồng một loại hoa. Hãy giúp ông B xác định điểm M bằng cách tính độ dài OM để diện tích mảnh vườn nhỏ bằng $\frac{9}{2}$.



7/ Gọi S là diện tích Ban - Công của một ngôi nhà có hình dạng như hình vẽ (S được giới hạn bởi parabol (P) và trục Ox. Tính diện tích S đó.



8/ Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với gia tốc phụ thuộc vào thời gian $t(s)$ là $a(t) = 2t - 7 \text{ m/s}^2$. Biết vận tốc đầu bằng 10 m/s . Hỏi trong 6 giây đầu tiên, thời điểm nào chất điểm ở xa nhất về phía bên phải?

9/ Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng $N(t)$, biết rằng $N'(t) = \frac{7000}{t+2}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Hỏi sau 10 ngày, đám vi trùng có bao nhiêu con (làm tròn số đến hàng đơn vị)?

10/ Một ô tô đang chạy thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -12t + 24 \text{ m/s}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

11/ Một ô tô đang chạy với vận tốc 36 km/h thì tăng tốc chuyển động nhanh dần với gia tốc $a(t) = 1 + \frac{t}{3} \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường mà ô tô đi được sau 6 giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc.

6. Giới thiệu một số bài tập định dạng trắc nghiệm (trọng điểm)

Các bài tập dưới đây đều được lấy từ các đề thi thử của các trường trong cả nước, đề chính thức năm 2017 của bộ Giáo Dục và Đào Tạo và được tổng hợp trong tài liệu “1287 bài tập trắc nghiệm nguyên hàm, tích phân và ứng dụng” do nhóm Toán học Bắc – Trung – Nam biên soạn.

* Các cách tính tích phân đã được trình bày chi tiết trong tài liệu nguyên hàm và tích phân, các câu hỏi dưới đây sẽ chỉ giải chi tiết một số câu, các câu hỏi về sau sẽ chỉ đưa ra đáp án hoặc hướng dẫn cách làm.

6.1. Trắc nghiệm lý thuyết tích phân

Nhắc lại lý thuyết:

* Công thức tích phân: $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ (1)

$\int_a^b f'(x)dx = f(x)|_a^b = f(b) - f(a)$ (2)

- Công thức (2) cũng là một công thức thường xuyên phải sử dụng, xin bạn đọc chú ý công thức này.
- Tích phân chỉ phụ thuộc vào cận mà không phụ thuộc vào biến:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du \dots$$

* Các tính chất của tích phân: giả sử các hàm $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên K và các điểm a , b , c thuộc K . Ta có các tính chất sau:

$$+, \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$+, \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$+, \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx, k \in \mathbb{R}$$

$$+, \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$+, \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$+, \text{ Nếu } f(x) \text{ là hàm chẵn thì } \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx = 2 \int_{-a}^0 f(x)dx$$

$$+, \text{ Nếu } f(x) \text{ là hàm lẻ thì } \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

* Ý nghĩa hình học của tích phân: Nếu $f(x)$ liên tục và không âm trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$ và hai đường thẳng $x=a$; $x=b$.

Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 1. Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$; $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)]dx$

A. $I = \frac{11}{2}$

B. $I = \frac{17}{2}$

C. $I = \frac{5}{2}$

D. $\frac{7}{2}$

Giải

$$I = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx - 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = \frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} + 2.2 - 3.(-1) = \frac{17}{2}$$

Đáp án B

Câu 2. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$

A. $I = 7$

B. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$

C. $I = 3$

D. $I = 5 + \pi$

Đáp án A

Câu 3. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 9$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x) \cdot \cos 3x dx$

A. $I=5$

B. $I=9$

C. $I=3$

D. $I=2$

Giải

Đặt $u = \sin 3x$; $du = 3 \cos 3x dx$. Đổi cận $\begin{matrix} x=0; u=0 \\ x=\frac{\pi}{6}; u=1 \end{matrix}$

$$I = \int_0^1 f(u) \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int_0^1 f(u) du = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$$

*Xin lưu ý tích phân chỉ phụ thuộc vào cận mà không phụ thuộc vào biến.

Cụ thể: $\int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx = 9$

Câu 4. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 (f(x) + 2x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^2 f(x) dx$

A. $I=9$

B. $I=1$

C. $I=-1$

D. $I=-9$

Giải

Ta có: $\int_0^2 (f(x) + 2x) dx = 5 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 2x dx = 5$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 5 - \int_0^2 2x dx = 1$$

Đáp án B

Câu 5. Cho hai hàm số f, g liên tục trên đoạn $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\int_a^b xf(x) dx = x \int_a^b f(x) dx$

B. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

C. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

D. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

Đáp án A

Câu 6. Cho $\int_1^2 f(x) dx = 3$; $\int_5^3 f(x) dx = 2$; $\int_2^3 f(x) dx = 4$. Tính $\int_1^5 f(x) dx$

A. 9

B. 5

C. 24

D. -24

Giải

$$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx - \int_5^3 f(x)dx$$

$$= 3 + 4 - 2 = 5$$

Đáp án B.

Câu 7. Cho các số thực a, b và các mệnh đề:

$$(1) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$(2) \int_a^b 2f(x)dx = 2 \int_a^b f(x)dx$$

$$(3) \int_a^b f^2(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx \right)^2$$

$$(4) \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du$$

Số mệnh đề đúng là:

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

Giải:

Các mệnh đề đúng là: (1)(4)

Đáp án C

Câu 8. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó hiệu số $F(1)-F(2)$ bằng:

A. $\int_1^2 f(x)dx$

B. $\int_1^2 -f(x)dx$

C. $\int_2^1 -F(x)dx$

D. $\int_1^2 -F(x)dx$

Giải

$$F(1) - F(2) = \int_2^1 f(x)dx = -\int_1^2 f(x)dx$$

Đáp án B

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=-12$

B. $I=8$

C. $I=1$

D. $I=-8$

Giải

Sử dụng nguyên hàm từng phần.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x + 1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int f'(x)dx = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10 \Leftrightarrow (x+1)f(x)|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = 10$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = (x+1)f(x)|_0^1 - 10 = 2f(1) - f(0) - 10 = 2 - 10 = -8$$

Đáp án D

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)dx = 7$; $\int_2^6 f(x)dx = 3$. Tính giá trị của biểu thức $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$

A. $P=4$

B. $P=10$

C. $P=3$

D. $P=2$

Giải

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_2^6 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx$$

$$\Rightarrow P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx = P = \int_0^{10} f(x)dx - \int_2^6 f(x)dx = 7 - 3 = 4$$

Đáp án A

Câu 11. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x)dx = -2$; $\int_1^3 f(2x)dx = 10$. Tính $\int_0^2 f(3x)dx$

A. $I=8$ B. $I=6$ C. $I=4$ D. $I=2$

Giải

$$\text{Xét tích phân: } \int_1^3 f(2x)dx = 10 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_2^6 f(u)du = 10 \text{ (đổi biến } u = 2x)$$

$$\Rightarrow \int_2^6 f(u)du = 20$$

$$\text{Xét tích phân } I = \int_0^2 f(3x)dx = \frac{1}{3} \int_0^6 f(u)du \text{ (đổi biến } u = 3x)$$

$$\text{Tách cận: } I = \frac{1}{3} \left(\int_0^2 f(u)du + \int_2^6 f(u)du \right) = \frac{1}{3} (-2 + 20) = 6$$

Đáp án B

Câu 12. Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 2$ thì $I = \int_1^2 [3f(x) - 2]dx$ bằng bao nhiêu?

A. $I=2$ B. $I=3$ C. $I=4$ D. $I=1$

Đáp án C

Câu 13. Cho hai hàm số $y = f(x); y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x=a; x=b$ được tính theo công thức:

$$A. \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \quad B. \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \quad C. \int_a^b |g(x) - f(x)|dx \quad D. \int_a^b |f(x) + g(x)|dx$$

Đáp án C

$$\text{Lưu ý: } |a - b| = |b - a|$$

Câu 14. Giả sử hàm số f có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=6$, $\int_0^1 xf'(x)dx = 5$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng:

A. 1

B. -1

C. 11

D. 3

Đáp án A. (bạn đọc xem cách giải ở câu 9)

Câu 15. Cho $\int_{\frac{1}{2}}^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}$. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(\sin x)dx$

A. $I=2$ B. $I = \frac{\pi}{3}$ C. $I = \frac{1}{2}$ D. $I=1$

Giải.

$$\text{Đặt } u = \sin x; du = \cos x dx, \text{ đổi cận: } \begin{matrix} x=\frac{\pi}{6}; u=\frac{1}{2} \\ x=\frac{\pi}{2}; u=1 \end{matrix}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cdot \cos x \cdot f(\sin x) dx = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 u f(u) du = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Đáp án D

Câu 16. Cho $a < b < c$, $\int_a^b f(x) dx = 5$; $\int_c^b f(x) dx = 2$. Tính $\int_a^c f(x) dx$

A. $\int_a^c f(x) dx = -2$ B. $\int_a^c f(x) dx = 3$ C. $\int_a^c f(x) dx = 7$ D. $\int_a^c f(x) dx = 1$

Đáp án B

Câu 17. Cho $\int_0^9 f(x) dx = 27$. Tính $\int_{-3}^0 f(-3x) dx$.

A. 27 B. -3 C. 9 D. 3

Đáp án C (sử dụng phương pháp đổi biến)

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ có $f(1)=-1$, $f(0)=1$. Tính $I = \int_0^1 f'(x) dx$

A. $I=1$ B. $I=2$ C. $I=-2$ D. $I=0$

Giải

Nhắc lại: $\int f'(x) dx = f(x) + C$

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(x)|_0^1 = f(1) - f(0) = -1 - 1 = -2$$

Đáp án C

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;c]$ và $a < b < c$. Biết $\int_b^a f(x) dx = -10$,

$\int_c^a f(x) dx = -5$. Tính $\int_c^b f(x) dx$

A. 15 B. -15 C. -5 D. 5

Đáp án D

Câu 20. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $[a;b]$ và $2F(a) - 1 = 2F(b)$. Tính

$I = \int_a^b f(x) dx$.

A. $I=-1$ B. $I=1$ C. $I=-0,5$ D. $I=0,5$

Đáp án C

Câu 21. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$. Biết $\int_{-1}^2 f(x) dx = 1$;

$F(-1) = -1$, tính $F(2)$.

A. $F(2)=2$ B. $F(2)=0$ C. $F(2)=3$ D. $F(2)=1$

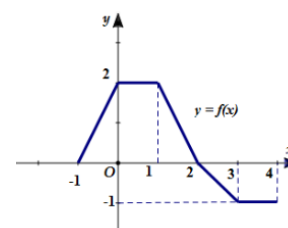
Đáp án B.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1;4]$ như hình vẽ bên. Tính

tích phân $I = \int_{-1}^4 f(x) dx$.

Giải

Tích phân I chính là diện tích phần giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ ($f(x) \geq 0$) với trục Ox , đường thẳng $x=-1$; $x=4$. Ta thấy phần hình phẳng tạo thành là hai



hình thang, phần hình thang bên trên có $f(x) \geq 0$, phần hình thang bên dưới có $f(x) \leq 0$. Áp dụng công thức tính diện tích hình thang ta có:

$$I = \frac{(1+3) \cdot 2}{2} - \frac{(1+2) \cdot 1}{2} = \frac{5}{2}$$

Đáp án A.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = -\pi$, $\int_0^{2\pi} f'(x) dx = 6\pi$. Tính $f(2\pi)$.

- A. $f(2\pi) = 6\pi$ B. $f(2\pi) = 7\pi$ C. $f(2\pi) = 5\pi$ D. $f(2\pi) = 0$

Đáp án C

Câu 24. Cho $\int_1^4 f(x) dx = 9$. Tính $I = \int_0^1 f(3x+1) dx$

- A. $I=9$ B. $I=3$ C. $I=1$ D. $I=0$

Đáp án B

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$, $f(0)=2$ và $\int_0^3 f'(x) dx = 5$. Tính $f(3)$.

- A. $f(3)=2$ B. $f(3)=-3$ C. $f(3)=0$ D. $f(3)=7$

Đáp án D

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^2 f(x^2) dx = 1$, tính $I = \int_0^4 f(x) dx$.

- A. $I=2$ B. $I=4$ C. $I=-2$ D. $I=1$

Đáp án A (đổi biến $u = x^2$)

Câu 27. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ với $a < b$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a;b]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k[F(b) - F(a)]$

B. $\int_b^a f(x) dx = F(b) - F(a)$

C. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x=a$, $x=b$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành được tính theo công thức $S = F(b) - F(a)$.

D. $\int_a^b f(2x+3) dx = F(2x+3) \Big|_a^b$

Giải

A đúng. $\int_a^b k f(x) dx = k F(x) \Big|_a^b = k F(b) - k F(a) = k(F(b) - F(a))$

B sai. $\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b)$ bao giờ cũng tính cận trên trước.

C sai. $S = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = |F(b) - F(a)|$

D. sai. $\int_a^b f(2x+3) dx = \frac{1}{2} F(2x+3) \Big|_a^b$

Câu 28. Cho $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(t) dt = -4$. Tính $I = \int_2^4 f(y) dy$

- A. $I=-5$ B. $I=5$ C. $I=-3$ D. $I=3$

Giải

Cần nhớ rằng tích phân chỉ phụ thuộc vào cận mà không phụ thuộc vào biến, vì thế như bài trên khi ta thay biến x, y, t là như nhau.

$$\text{Ta có: } \int_{-2}^2 f(y)dy + \int_2^4 f(y)dy = \int_{-2}^4 f(y)dy$$

$$\Rightarrow \int_2^4 f(y)dy = \int_{-2}^4 f(y)dy - \int_{-2}^2 f(y)dy = -4 - 1 = -5$$

Đáp án A

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^2 f(x)dx = 3$. Tính $\int_{-1}^1 f(|2x|)dx$

A. 3

B. 6

C. $\frac{3}{2}$

D. 0

Giải

Ta sẽ làm mất dấu giá trị tuyệt đối. $|2x| = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -2x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

$$I = \int_{-1}^1 f(|2x|)dx = \int_{-1}^0 f(-2x)dx + \int_0^1 f(2x)dx \text{ đổi biến } u = -2x; v = 2x \text{ ta được}$$

$$I = -\frac{1}{2} \int_2^0 f(u)du + \frac{1}{2} \int_0^2 f(v)dv = \frac{1}{2} \int_0^2 f(u)du + \frac{1}{2} \int_0^2 f(v)dv = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 3$$

Đáp án A.

Câu 30. Cho $\int_1^3 f(x)dx = -5$; $\int_1^3 [f(x) - 2g(x)]dx = 9$. Tính $I = \int_1^3 g(x)dx$

A. $I=14$ B. $I=-14$ C. $I=7$ D. $I=-7$

Đáp án D

Câu 31. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$. Giá trị của $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x) \cdot \sin x \cdot \cos x dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{4}$

Đáp án A (đổi biến $u = \cos 2x$)

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-1;4]$, $f(4)=2018$, $\int_{-1}^4 f'(x)dx = 2000$. Tính $f(-1)$.

A. $f(-1)=18$ B. $f(-1)=-18$ C. $f(-1)=4018$ D. $f(-1)=-4018$

Đáp án A

Câu 33. Cho $\int_0^4 f(x)dx = -1$. Tính $\int_0^1 f(4x)dx$.

A. $I = \frac{1}{4}$ B. $I = -2$ C. $I = -\frac{1}{4}$ D. $I = -\frac{1}{2}$

Đáp án C

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có nguyên hàm là $F(x)$ trên đoạn $[1;2]$, $F(2)=1$ và $\int_1^2 F(x)dx = 5$. Tính tích phân $I = \int_1^2 (x-1)f(x)dx$

A. $I=-3$ B. $I=6$ C. $I=-4$ D. $I=1$

Giải

Sử dụng nguyên hàm từng phần để tính tích phân $I = \int_1^2 (x-1)f(x)dx$

Đặt $\begin{cases} u = x - 1 \\ dv = f(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int f(x)dx = F(x) \end{cases}$

$$I = (x - 1)F(x)|_1^2 - \int_1^2 F(x)dx = F(2) - 0 \cdot F(1) - \int_1^2 F(x)dx = 1 - 0 - 5 = -4$$

Đáp án C

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)dx = 4$. Tính $I = \int_0^1 xf'(2x)dx$

A. 13

B. 12

C. 20

D. 7

Đáp án D

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_0^3 f(x)dx$ bằng:

A. $I=2$ B. $I=6$ C. $I=4$ D. $I=10$

Đáp án C (đổi biến $u = \sqrt{x}$; $v = \sin x$)

Câu 37. Cho các số thực $a < b < c$, $\int_a^b f(x)dx = 7$, $\int_c^b f(x)dx = -2$. Khi đó $\int_a^c f(x)dx$ bằng:

A. $-\frac{7}{2}$

B. -14

C. 9

D. 5

Đáp án C

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $\int_0^{2018} f(x)dx = 1$. Tính $\int_0^1 f(2018x)dx$.

A. 2018

B. 0

C. 1

D. $\frac{1}{2018}$

Đáp án D

Câu 39. Nếu $f(1)=12$, $f'(x)$ liên tục và $\int_1^4 f'(x)dx = 17$. Giá trị của $f(4)$ bằng:

A. 29

B. 15

C. 5

D. 19

Đáp án A

Câu 40. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_{-3}^0 f(x)dx = 2$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $\int_{-3}^3 f(x)dx = 2$ B. $\int_{-3}^3 f(x)dx = 4$ C. $\int_0^3 f(x)dx = -2$ D. $\int_3^0 f(x)dx = 2$

Giải

Ta có: $\int_{-3}^3 f(x)dx = 2 \int_{-3}^0 f(x)dx = 2 \cdot 2 = 4$

Đáp án B

Câu 41. Biết $\int_1^3 f(3x - 1) = 20$. Khi đó tích phân $I = \int_2^5 f(x)dx$ bằng:

A. 20

B. 40

C. 10

D. 60

Đáp án D

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[0;1]$, $f(0)=1$, $f(1)=-1$. Tính $I = \int_1^0 f'(x)dx$

A. $I=1$ B. $I=2$ C. $I=-2$

D. 0

Đáp án B

Câu 43. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)dx = 2018$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \cos 2x dx$

A. $\frac{1}{1009}$ B. 1009 C. 2018 D. -1009

Đáp án B

Câu 44. $\int_0^2 f(x)dx = 3$. Khi đó $\int_0^2 (4f(x) - 3)dx$ bằng:

A. 8 B. 6 C. 4 D. 2

Đáp án B

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ là hàm chẵn, có đạo hàm trên $[-6;6]$. Biết $\int_{-1}^2 f(x)dx = 8, \int_1^3 f(-2x)dx = 3$.
Tính $\int_{-1}^6 f(x)dx$.

A. 11 B. 5 C. 2 D. 14

Đáp án D.

Câu 46. Cho $\int_{-1}^5 f(x)dx = 15$. Tính giá trị của $P = \int_0^2 [f(5 - 3x) + 7]dx$

A. $P=15$ B. $P=37$ C. $P=27$ D. $P=19$

Đáp án D

Câu 47. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[2; 6]$ và thỏa mãn $\int_2^3 f(x)dx = 3;$
 $\int_3^6 f(x)dx = 7; \int_3^6 g(x)dx = 5$. Hãy tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau:

A. $\int_3^6 [3g(x) - f(x)]dx = 8$ B. $\int_2^3 [3f(x) - 4]dx = 5$
C. $\int_2^{\ln e^6} [2f(x) - 1]dx = 16$ D. $\int_3^{\ln e^6} [4f(x) - 2g(x)]dx = 16$

Đáp án D.

Câu 48. Cho $\int_1^2 f(x)dx = -3$. Tính $I = \int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$

A. -6 B. $-\frac{3}{2}$ C. -1 D. 5

Đáp án A

Câu 49. Giả sử $\int_0^1 f(x)dx = 3; \int_0^5 f(z)dz = 9$. Tổng $\int_1^3 f(t)dt + \int_3^5 f(t)dt$ bằng:

A. 12 B. 5 C. 6 D. 3

Đáp án C

Câu 50. Biết hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = \frac{\pi}{2}; \int_0^{\pi} f'(x)dx = 2\pi$. Tính $f(\pi)$.

A. $f(\pi) = \frac{3\pi}{2}$ B. $f(\pi) = 2\pi$ C. $f(\pi) = \frac{5\pi}{2}$ D. $f(\pi) = 3\pi$

Đáp án C

6.2. Trắc nghiệm liên quan tính tích phân trực tiếp

*Với xu hướng ra đề yêu cầu người học phải có kiến thức thật sự, các câu hỏi về nguyên hàm – tích phân hiện nay hầu hết đều không thể sử dụng trực tiếp máy tính tìm ra đáp án. Vì vậy các bạn học

sinh hãy trang bị cho mình những kiến thức cần thiết để làm bài thay vì chờ phụ thuộc vào máy tính. Khi chúng ta có kiến thức thì việc phối hợp với máy tính cầm tay mới thực sự đạt hiệu quả.

*Các câu hỏi sẽ không hỏi trực tiếp kết quả tích phân mà sẽ hỏi những câu hỏi phụ liên quan đến việc chúng ta tính tích phân, việc này nhằm hạn chế sử dụng máy tính tìm ra kết quả khi người làm bài không có kiến thức thực sự.

Các câu hỏi minh họa.

Câu 1. Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào là đúng?

A. $a+b=2$

B. $a-2b=0$

C. $a+b=-2$

D. $a+2b=0$

Giải

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = (\ln|x+1| - \ln|x+2|) \Big|_0^1 = (\ln 2 - \ln 3) - (0 - \ln 2) = 2 \ln 2 - \ln 3$$

$$\text{Suy ra } a=2; b=-1 \Rightarrow a+2b=0$$

Đáp án D

Câu 2. Cho $\int_0^{\ln m} \frac{e^x dx}{e^x + 2} = \ln 2$. Khi đó giá trị của m là:

A. $m = \frac{1}{2}$

B. $m = 2$

C. $m = 4$

D. $m = 0, m = 4$

Giải

*Cách 1: làm trực tiếp.

Điều kiện: $m > 0$

Xét: $I = \int_0^{\ln m} \frac{e^x dx}{e^x + 2}$. Đặt $u = e^x + 2$; $du = e^x dx$. Đổi cận: $\begin{matrix} x=0; u=3 \\ x=\ln m; u=m+2 \end{matrix}$

$$I = \int_3^{m+2} \frac{du}{u} = \ln|u| \Big|_3^{m+2} = \ln|m+2| - \ln 3$$

$$\text{Theo bài: } \ln|m+2| - \ln 3 = \ln 2 \Leftrightarrow \ln \left| \frac{m+2}{3} \right| = \ln 2 \Rightarrow \frac{m+2}{3} = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{matrix} m=4 \\ m=-8(\text{loại}) \end{matrix}$$

Đáp án C

*Cách 2: thử đáp án và kiểm tra bằng máy tính.

$$\text{Ta có: } \int_0^{\ln m} \frac{e^x dx}{e^x + 2} = \ln 2 \Leftrightarrow \int_0^{\ln m} \frac{e^x dx}{e^x + 2} - \ln 2 = 0$$

Thử bằng máy tính các phương án thấy $m=4$ thỏa mãn.

Câu 3. Cho n là số tự nhiên sao cho $\int_0^1 (x^2 - 1)^n x dx = -\frac{1}{20}$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos x dx$

A. $\frac{1}{10}$

B. $\frac{1}{15}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{1}{20}$

Giải

*Nếu dùng máy tính “mò” tìm n bài này là rất mất thời gian và rất khó tìm được n nếu n càng lớn. Đây là một cách hỏi hay để hạn chế việc dùng máy tính.

Tính tích phân $\int_0^1 (x^2 - 1)^n x dx$. Đặt $u = x^2 - 1$; $du = 2x dx$. Đổi cận $\begin{matrix} x=0; u=-1 \\ x=1; u=0 \end{matrix}$

$$\int_0^1 (x^2 - 1)^n x dx = \int_{-1}^0 u^n \cdot \frac{du}{2} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{2} \left(0 - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right) = -\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} = -\frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{10} \Rightarrow n+1 = 10 \Rightarrow n = 9$$

Thay $n=9$ vào tích phân cần tính (bấm máy): $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x \cos x dx = \frac{1}{10}$

Đáp án A.

Ta cũng có thể đổi biến tích phân trên bằng cách đặt $u = \sin x$

Xin bạn đọc kiểm tra.

Câu 4. Chi $I = \int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2}$ ($a > 0$). Đặt $x = a \tan t$. Tìm mệnh đề sai.

A. $I = \int_0^a \frac{1}{a} dt$

B. $dx = a(1 + \tan^2 t) dt$

C. $a^2 + x^2 = a^2(1 + \tan^2 t)$

D. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a} dt$

Giải

Do A và D có cùng hàm dưới dấu tích phân và khác cận. Do vậy đáp án sai chắc chắn ở một trong hai phương án này.

Ta có: $x = a \tan t$. Đổi cận: $x = a \Rightarrow \tan t = 1 \Rightarrow t = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

Vậy phương án A là sai.

Câu 5. Biết $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x+1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

A. $S = -2$

B. $S = 10$

C. $S = 5$

D. $S = 2$

Giải

Đây là dạng tích phân tính bằng phương pháp phân tích đa thức.

$$\text{Ta có: } \int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x+1} dx = \int_3^5 \frac{x(x+1)+1}{x+1} dx = \int_3^5 \left(x + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x+1| \right) \Big|_3^5$$

$$= \left(\frac{5^2}{2} + \ln 6 \right) - \left(\frac{3^2}{2} + \ln 4 \right) = 8 + \ln \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a=8; b=3. \text{ Vậy } S = a - 2b = 8 - 2 \cdot 3 = 2$$

Đáp án D

Câu 6. Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cdot \sin 2x dx = a + \frac{b\sqrt{2}}{10}$, với a, b là các số nguyên. Tính $S = a + b$.

A. $S = -2$

B. $S = -3$

C. $S = 2$

D. $S = 3$

Giải

Ta sử dụng công thức lượng giác phân tích tích thành tổng để tính tích phân này.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{2}(\cos 5x - \cos x)dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x - \sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

$$\Rightarrow a=0; b=3. \text{ Vậy } S = a + b = 3$$

Đáp án D

Câu 7. Giá trị của $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ được viết dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Khi đó giá trị của $a-7b$ là:

A. 2

B. 1

C. 0

D. -1

Giải

*Đối với dạng kết quả chỉ có phân số hữu tỉ thì máy tính có thể tính được kết quả. Cụ thể trong câu này thì $I = \frac{141}{20}$. $\Rightarrow a=141, b=20$. Vậy $a-7b=141-7.20=1$

Đáp án B

*Bạn đọc hãy giải câu này bằng phương pháp đổi biến đặt $u = \sqrt[3]{1+x^2}$

Câu 8. Biết $I = \int_0^2 (3x-1)e^{\frac{x}{2}}dx = a + be$ với a, b là các số nguyên. Tính $S=a+b$.

A. $S=12$ B. $S=16$ C. $S=8$ D. $S=10$

Đây là dạng tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần. Xin bạn đọc tự giải.

Đáp án A

Câu 9. Biết $I = \int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{dx}{e^{x+2}e^{-x}-3} = 3 \ln a - \ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P=ab$.

A. $P=10$ B. $P=-10$ C. $P=15$ D. $P=20$

Giải

Nhân cả tử và mẫu hàm dưới dấu tích phân với e^x ta được.

$$I = \int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{e^x dx}{(e^x)^2 - 3e^{x+2}}. \text{ Đặt } u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$I = \int_3^6 \frac{du}{u^2 - 3u + 2} = \int_3^6 \frac{du}{(u-1)(u-2)} = \int_3^6 \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u-1}\right) du = (\ln|u-2| - \ln|u-1|)\Big|_3^6$$

$$= (\ln 4 - \ln 5) - (0 - \ln 2) = 2 \ln 2 - \ln 5 + \ln 2 = 3 \ln 2 - \ln 5$$

$$\Rightarrow a = 2; b = 5. P=2.5=10$$

Đáp án A

Câu 10. Kết quả phép tính tích phân $\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ có dạng $I = a \ln 3 + b \ln 5$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Khi đó biểu thức

$a^2 + ab + 3b^2$ có giá trị là:

A. 4

B. 5

C. 1

D. 0

Đáp án B (đổi biến $u = \sqrt{3x+1}$)

Câu 11. Bài toán tính tích phân $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x + 1} \ln x}{x} dx$ được một học sinh giải theo ba bước như sau:

I. đặt ẩn phụ: $t = \ln x + 1$, suy ra $dt = \frac{1}{x} dx$. Đổi cận: $\begin{matrix} x=1; t=1 \\ x=e; t=2 \end{matrix}$

$$\text{II. } I = \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x + 1} \cdot \ln x}{x} dx = \int_1^2 \sqrt{t}(t-1)dt$$

$$\text{III. } I = \int_1^2 \sqrt{t}(t-1)dt = \left(\sqrt{t^5} - \frac{2}{\sqrt{t}} \right) \Big|_1^2 = 1 + 3\sqrt{2}$$

Học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

- A. Học sinh giải đúng B. Sai ở bước III C. Sai ở bước II D. Sai ở bước I

Giải

Học sinh này giải sai ở bước III.

$$\text{Ta có: } I = \int_1^2 (\sqrt{t} \cdot t - \sqrt{t}) dt = \int_1^2 \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}} \right) dt = \left(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{2}{5} \sqrt{t^5} - \frac{2}{3} \sqrt{t^3} \right) \Big|_1^2 = \frac{4\sqrt{2}+4}{15}$$

Đáp án B

Câu 12. Biết $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ với a là số thực, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính giá trị của biểu thức $2a+3b+c$

- A. 4 B. -6 C. 6 D. 5

Giải

Tính tích phân bằng tính phân từng phần. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \left(-\frac{\ln x}{x} \right) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{\ln x}{x} \right) \Big|_1^2 - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2$$

$$= \left(-\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \right) - (0 - 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}; b = 1; c = 2$$

$$\text{Vậy } 2a + 3b + c = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + 3 \cdot 1 + 2 = 4$$

Đáp án A

Câu 13. Cho tích phân $I = \int_2^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2x+3}}$. Đặt $t = \sqrt{2x+3}$, ta được $I = \int_2^3 \frac{m}{t^2+n} dt$, với $m, n \in \mathbb{Z}$. Tính

$$T=3m+n.$$

- A. $T=7$ B. $T=2$ C. $T=4$ D. $T=5$

Giải

$$\text{Ta có: } t^2 = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{t^2-3}{2} \Rightarrow dx = t dt.$$

$$I = \int_2^3 \frac{1}{\left(\frac{t^2-3}{2} + 1 \right) \cdot t} \cdot t dt = \int_2^3 \frac{1}{\frac{t^2-3+2}{2}} dt = \int_2^3 \frac{2}{t^2-1} dt$$

$$\Rightarrow m = 2; n = -1$$

$$\text{Vậy } T = 3m + n = 3 \cdot 2 + (-1) = 5$$

Đáp án D

*Khi làm trắc nghiệm không chỉ đòi hỏi chính xác mà còn phải nhanh. Khi đọc đề cần phân tích những yếu tố đã có, những yêu cầu phải làm. Tránh tính toán lặp lại những yếu tố đã có. Ví dụ như bài này, ta thấy đề bài đã đổi cận nên không cần phải đổi cận nữa; bài toán cũng chỉ hỏi hàm số dưới dấu tích phân sau đổi biến chứ không hỏi kết quả tích phân, nên tránh việc không đọc kỹ đề rồi đi tính kết quả cuối cùng làm mất thời gian.

Câu 14. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{2 \sin x + \cos x} = a\pi + b \ln 2$. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu?

A. 1

B. 2

C. $\frac{1}{2}$

D. 0

Giải

Đây là dạng tính tích phân bằng cách phân tích và đổi biến.

Để ý rằng khi ta đặt $u = 2 \sin x + \cos x$ thì $du = (2 \cos x - \sin x)dx$

Ta cần phân tích tử số theo mẫu số và kết quả vi phân: $\sin x = a(2 \sin x + \cos x) + b(2 \cos x - \sin x)$

$$\Leftrightarrow \sin x = (2a - b) \sin x + (a + 2b) \cos x. \text{ Đồng nhất hệ số ta có: } \begin{cases} 2a - b = 1 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{5} \\ b = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2}{5}(2 \sin x + \cos x) - \frac{1}{5}(2 \cos x - \sin x)}{2 \sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{5} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\frac{1}{5}(2 \cos x - \sin x)}{2 \sin x + \cos x} dx$$

$$\text{Đổi biến tích phân thứ 2 như trình bày ở trên ta được: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{5} dx - \frac{1}{5} \int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{2}{5} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{5} \ln|u| \Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{\pi}{5} - 0\right) - \frac{1}{5}(\ln 2 - 0) = \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{5}\ln 2 \Rightarrow a = \frac{1}{5}; b = -\frac{1}{5}$$

$$\text{Vậy } a + b = \frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right) = 0$$

Câu 15. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\pi}{a} + \frac{1}{b} \ln 4$. Tính $P=a+b$.

A. $P=2$ B. $P=6$ C. $P=0$ D. $P=8$

Đáp án C (tích phân từng phần)

Câu 16. Cho tích phân $I = \int_0^4 \frac{1}{3+\sqrt{2x+1}} dx = a + b \ln \frac{2}{3}$, với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào đúng?

A. $a+b=3$ B. $a-b=3$ C. $a-b=5$ D. $a+b=5$

Đáp án D (tích phân đổi biến)

Câu 17. Cho tích phân $I = \int_1^e x \ln^2 x dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

$$A. I = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e + \int_1^e x \ln x dx$$

$$B. I = x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e x \ln x dx$$

$$C. I = x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx$$

$$D. I = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx$$

Đáp án D

Câu 18. Ta có tích phân $I = 4 \int_1^e x(1 + \ln x) dx = ae^2 + b$ với a, b là các số nguyên.

Tính $M = ab + 4(a + b)$.

A. $M = -5$

B. $M = -2$

C. $M = 5$

D. $M = -6$

Đáp án C

Câu 19. Cho m là số thực dương thỏa mãn: $\int_0^m \frac{x}{(1+x^2)^3} dx = \frac{3}{16}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m \in \left(3; \frac{7}{2}\right)$

B. $m \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$

C. $m \in \left(\frac{3}{2}; 3\right)$

D. $m \in \left(\frac{7}{2}; 5\right)$

Giải

Đặt $u = 1 + x^2$; $du = 2xdx \Leftrightarrow \frac{du}{2} = xdx$. Đổi cận $\begin{matrix} x=0; u=1 \\ x=m; u=1+m^2 \end{matrix}$

$$I = \int_1^{1+m^2} \frac{du}{2u^3} = -\frac{1}{4u^2} \Big|_1^{1+m^2} = \left(-\frac{1}{4(1+m^2)^2}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{(1+m^2)^2}\right) = \frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{(1+m^2)^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+m^2)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow (1+m^2)^2 = 4 \Leftrightarrow 1+m^2 = 2 \text{ (loại -2 do } 1+m^2 \geq 1)$$

$$\Rightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1 \text{ do } m \text{ dương nên } m=1.$$

Đáp án B.

Câu 20. Cho $\int_0^1 \ln(x+1) dx = a + \ln b$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $(a+3)^b$

A. 25

B. $\frac{1}{7}$

C. 16

D. $\frac{1}{9}$

Đáp án C

Câu 21. Tính tích phần $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du$

B. $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$

C. $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$

D. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du$

Đáp án C

*Ta loại ngay B, D do không đổi cận

Làm bằng máy tính cầm tay (bạn đọc xin làm thêm bằng tự luận)

$$\text{Dùng máy tính tính tích phân } I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx = 3,4641 \dots$$

$$\text{Tính tiếp tích phân phương án C (A phức tạp hơn nên tính sau): } \int_0^3 \sqrt{u} du = 3,4641 \dots = I$$

Vậy đáp án C

Câu 22. Cho $\int_0^1 \frac{dx}{e^{x+1}} = a + b \ln \frac{1+e}{2}$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$

A. $S=2$

B. $S=-2$

C. $S=0$

D. $S=1$

Đáp án C

Câu 23. Biết $\int_1^2 \frac{x-1}{x+3} dx = 1 + 4 \ln \frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên và $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị $2a + b$ là bao nhiêu?

A. 0

B. 13

C. 14

D. -20

Đáp án B (phân tích tích phân hoặc đổi biến)

Câu 24. Biết $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = 4 + a \ln 2 + b \ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $S=a+b$.

A. $S=9$ B. $S=11$ C. $S=-3$ D. $S=5$

Giải

Phá trị tuyệt đối: $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{nếu } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 \frac{2(-x+2)+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x} dx = \int_1^2 \left(-2 + \frac{5}{x}\right) dx + \int_2^5 \left(2 - \frac{3}{x}\right) dx$$

$$= (-2x + 5 \ln x)|_1^2 + (2x - 3 \ln x)|_2^5 = (-4 + 5 \ln 2) - (-2) + (10 - 3 \ln 5) - (4 - 3 \ln 2)$$

$$= 4 + 8 \ln 2 - 3 \ln 5 \Rightarrow a = 8; b = -3$$

$$S = a + b = 8 + (-3) = 5$$

Đáp án D

Bạn đọc hãy làm thêm bằng cách biến đổi: $|x-2| = \sqrt{(x-2)^2}$

Câu 25. Cho $\int_1^3 \frac{dx}{(x+1)(x+4)} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 7$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a + 4b - c$

A. 2

B. 4

C. 3

D. 5

Đáp án A

Câu 26. Cho $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2} dx = \ln a + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2a + 3b = 3$ B. $\frac{1}{a} - b = 1$ C. $4a^2 + 9b^2 = 11$ D. $2ab = 1$

Đáp án B (đổi biến $u = \ln x + 2$)

Câu 27. Cho tích phân $\int_2^3 \frac{1}{x^2+x^3} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a + b + c$

A. $S = -\frac{2}{3}$ B. $S = -\frac{7}{6}$ C. $S = \frac{2}{3}$ D. $S = \frac{7}{6}$

Giải

$$I = \int_2^3 \frac{1}{x^2+x^3} dx = \int_2^3 \frac{dx}{x^2(1+x)} = \int_2^3 \left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{1+x}\right) dx.$$

Xin bạn đọc tiếp tục qui đồng để tìm A, B, C từ đó tính được tích phân và tìm a, b, c

Đáp án D

Câu 28. Biết $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{(a+1)} \ln 2$. Tính a.

A. $a=0$ B. $a=1$ C. $a=2$ D. $a=3$

Giải

*Cách 1: làm tự luận $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^2 \cdot x dx}{x^2+1}$ đổi biến $u = x^2 + 1$. Xin bạn đọc tiếp tục tính.

*Cách 2: sử dụng máy tính

Tính vết trái: $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx = 0.1534 \dots$

Tính vết phải ứng với a ở các phương án.

Nhập: $\frac{1}{2} - \frac{1}{a+1} \ln 2 \rightarrow \text{CALC } A=0$ kết quả -0,193...(loại) $\rightarrow \text{CALC } A=1$ kết quả 0,1534... (thỏa mãn)

Đáp án B.

*Từ các ví dụ trên ta thấy chỉ có những câu hỏi dạng hỏi trực tiếp hệ số mới có thể sử dụng máy tính trực tiếp, những câu hỏi dạng tính giá trị biểu thức hệ số không thể sử dụng được máy tính cầm tay.

Câu 29. Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$ đặt $u = \sin x$. Chọn mệnh đề đúng?

A. $I = \int_0^1 u^2 du$ B. $I = 2 \int_0^1 u du$ C. $I = - \int_{-1}^0 u^2 du$ D. $I = \int_0^1 u^2 du$

Đáp án A (xem cách làm máy tính ở câu 21)

Câu 30. Cho các số thực m, n thỏa mãn: $\int_a^1 (1-x) dx = m$; $\int_b^1 (1-x) dx = n$ trong đó a, b $\in \mathbb{R}$ và $a < 1 < b$. Tính $I = \int_a^b |1-x| dx$

A. $I = -m - n$ B. $I = n - m$ C. $I = m - n$ D. $I = m + n$

Giải

$$+, \int_a^1 (1-x) dx = m \Leftrightarrow \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_a^1 = m \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(a - \frac{a^2}{2}\right) = m \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} - a + \frac{1}{2} = m$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{2} - b + \frac{1}{2} = n \text{ do } a < 1 < b \text{ nên cho } a=0; b=2 \Rightarrow m=1/2; n=1/2$$

$$I = \int_a^b |1-x| dx = \int_0^2 |1-x| dx = 1$$

Đối chiếu các phương án thấy phương án D là chính xác.

A. $I = -m - n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$

B. $I = n - m = 0$

C. $I = m - n = 0$

D. $I = m + n = \frac{1}{2}$

*Do đây là dạng trắc nghiệm nên chúng ta có thể cho giá trị cụ thể đối với những bài toán tổng quát dạng như này thay vì giải tổng quát sẽ rất lâu và phức tạp.

Câu 31. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$ với a, b $\in \mathbb{Q}$, c > 0. Tính tổng S = a + b + c.

A. S=3 B. S=4 C. S=0 D. S=1

Đáp án B (đổi biến u=sin x)

Câu 32. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} - \sqrt{b} + 1 = 0$. Tính $I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$

A. I=2 B. I=1 C. I=-2 D. $I = \frac{1}{2}$

Giải

Ta có: $\sqrt{a} - \sqrt{b} + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} - 1 \Rightarrow a = (\sqrt{b} - 1)^2$ cho $b=4$; $\Rightarrow a=1$

(ta cần chọn a, b sao cho tích phân có thể tính được)

Bấm máy: $I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$

Đáp án A

Câu 33. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos^2 x \, dx$ được biểu diễn dưới dạng $a\pi^2 + b$; $a, b \in \mathbb{Q}$. Tích ab bằng:

- A. 0 B. $-\frac{1}{32}$ C. $-\frac{1}{16}$ D. $-\frac{1}{64}$

Giải

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} x \cdot \cos 2x \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} x \cdot \cos 2x dx$$

Sử dụng phương pháp tính tích phân từng phần tính tích phân thứ 2.

Đáp án: D

*Ta có cũng thể sử dụng tích phân từng phần luôn từ tích phân ban đầu bằng cách đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos^2 x \, dx \end{cases}$

$$v = \int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x; du = dx. \text{ Bạn đọc có thể tự tính toán để tìm kết quả.}$$

Câu 34. Cho tích phân $I = \int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$ và $u = x^2$; $dv = \cos x \, dx$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $I = x^2 \sin x|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \, dx$ B. $I = x^2 \sin x|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \, dx$
C. $I = x^2 \sin x|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \, dx$ D. $I = x^2 \sin x|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \, dx$

Đáp án A

Câu 35. Cho $I = \int_1^2 x\sqrt{4-x^2} dx$ và $t = \sqrt{4-x^2}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $I = \sqrt{3}$ B. $I = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}}$ C. $I = \int_0^{\sqrt{3}} t^2 dt$ D. $I = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{3}}$

Giải

Ta có: $dt = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx \Leftrightarrow -tdt = xdx$. Đổi cận: $\begin{matrix} x=1; t=\sqrt{3} \\ x=2; t=0 \end{matrix}$

$$I = \int_{\sqrt{3}}^0 t \cdot (-tdt) = \int_0^{\sqrt{3}} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Đáp án B sai.

Câu 36. Biết rằng $I = \int_0^1 e^{\sqrt{3x+1}} dx = \frac{a}{b} e^2$ với a, b là các số thực thỏa mãn: $a-b=2$. Tính tổng $S=a+b$.

- A. $S=10$ B. $S=5$ C. $S=4$ D. $S=7$

Giải

Cách 1: giải trực tiếp.

Đặt $t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow dt = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow dx = \frac{2tdt}{3}$. Đổi cận $\begin{matrix} x=0; t=1 \\ x=1; t=2 \end{matrix}$

$$I = \int_1^2 e^t \cdot \frac{2tdt}{3} \text{ đặt } \begin{cases} u = \frac{2t}{3} \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{3} dt \\ v = e^t \end{cases}$$

$$I = \frac{2}{3} te^t \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{2}{3} e^t dt = \frac{2}{3} e^t (t-1) \Big|_1^2 = \frac{2}{3} e^2.$$

$$\text{Xét } \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \\ a-b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a-2b = 0 \\ a-b = -2 \end{cases} \Rightarrow a=4; b=6. \text{ Vậy } a+b=10$$

Đáp án A.

Cách 2: giải gián tiếp bằng sử dụng các phương án kết hợp máy tính.

+, xét phương án A, ta có hệ $\begin{cases} a-b = -2 \\ a+b = 10 \end{cases} \Rightarrow a=4; b=6$

Bấm máy: $\int_0^1 e^{\sqrt{3x+1}} dx - \frac{4}{6} e^2$. Kết quả: 0. Vậy phương án A đúng.

+, trong trường hợp kết quả khác 0. Ta sử dụng tiếp phương án tiếp theo cho tới khi thu được kết quả bằng 0.

+, nếu có hai máy tính thì xử lý câu hỏi sẽ nhanh hơn. Trong lúc chờ kiểm tra phương án A, ta có thể sử dụng máy tính thứ 2 kiểm tra phương án khác.

Câu 37. Có bao nhiêu số thực $a \in (0; 10\pi)$ thỏa mãn điều kiện $\int_0^a \sin^5 x \cdot \sin 2x dx = \frac{2}{7}$?

A. 4 số

B. 6 số

C. 7 số

D. 5 số

Giải

$$I = \int_0^a \sin^5 x \cdot \sin 2x dx = \int_0^a \sin^5 x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x dx = 2 \int_0^a \sin^6 x \cdot \cos x dx$$

Đặt $u = \sin x$; $du = \cos x dx$. Đổi cận $\begin{matrix} x=0; u=0 \\ x=a; u=\sin a \end{matrix}$

$$I = 2 \int_0^{\sin a} u^6 du = 2 \frac{u^7}{7} \Big|_0^{\sin a} = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{2}{7} \sin^7 a = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \sin^7 a = 1 \Leftrightarrow \sin a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$a \in (0; 10\pi) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{2} + k2\pi < 10\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < k2\pi < \frac{19\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{19}{4} \Leftrightarrow -0,25 < k < 4,75$$

Do đó $k=0;1;2;3;4$. Vậy có 5 số.

Đáp án D

Câu 38. Đặt $t = x + \sqrt{x^2 + 16}$. Tích phân $I = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$ trở thành:

A. $I = \int_4^8 \frac{dt}{t}$

B. $I = \int_4^8 t dt$

C. $I = \int_4^5 \frac{dt}{t}$

D. $I = \int_4^5 t dt$

Giải

2 tích phân bằng nhau thì hiệu của chúng phải bằng 0 và nhớ rằng tích phân không phụ thuộc biến số mà chỉ phụ thuộc vào cận.

Kiểm tra cận: $\begin{matrix} x=0; t=4 \\ x=3; t=8 \end{matrix}$. Đáp án chỉ có thể là A hoặc B.

Bấm máy: $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} - \int_4^8 \frac{dx}{x}$. Kết quả: 0

Đáp án A

Câu 39. Biết $I = \int_0^1 \ln(3x+1) dx = a \ln 2 + b$. Tính $S = 3a - b$

A. $S=7$

B. $S=11$

C. $S=8$

D. $S=9$

Đáp án D

Câu 40. Biết $\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9} dx = 3 \ln \frac{a}{b} - \frac{5}{6}$, trong đó a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Hãy tính ab .

A. $ab = -5$

B. $ab = \frac{5}{4}$

C. $ab = 12$

D. $ab = 6$

Đáp án C

Câu 41. Biết tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \cos 2x dx = a + b\pi$; $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $S=a+2b$.

A. $S=0$

B. $S=1$

C. $S = \frac{1}{2}$

D. $S = \frac{3}{8}$

Đáp án A

Câu 42. Biết $\int_a^b \frac{1}{x} dx = 2$, trong đó a, b là các hằng số dương. Tính tích phân $\int_a^b \frac{1}{x \ln x} dx$

A. $I = \ln 2$

B. $I = 2$

C. $I = \frac{1}{\ln 2}$

D. $I = \frac{1}{2}$

Giải

Ta có: $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a} = 2 \Rightarrow \frac{b}{a} = e^2 \Rightarrow b = a \cdot e^2$. Cho $a=1$ thì $b = e^2$

Bấm máy: $\int_{e^1}^{e^{e^2}} \frac{1}{x \ln x} dx$. Kết quả: 2

Đáp án B

*Đối với những bài toán dạng có điều kiện phụ, ta cứ cho cụ thể bằng những con số cụ thể rồi xử lí bằng máy tính.

Câu 43. Biết $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = 4 + a \ln 2 + b \ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $S=a+b$.

A. $S=9$

B. $S=11$

C. $S=-3$

D. $S=5$

Giải

Ta có: $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{nếu } x \geq 2 \\ 2-x & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$

$$I = \int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x} dx = \int_1^2 \left(-2 + \frac{5}{x}\right) dx + \int_2^5 \left(2 - \frac{3}{x}\right) dx$$

$$= (-2x + 5 \ln x) \Big|_1^2 + (2x - 3 \ln x) \Big|_2^5 = (-4 + 5 \ln 2) - (-2) + (10 - 3 \ln 5) - (4 - 3 \ln 2)$$

$$= 4 + 8 \ln 2 - 3 \ln 5$$

Suy ra $a=8$; $b=-3$. $S=5$

Đáp án D

Câu 44. Đẳng thức nào sai trong các đẳng thức sau:

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \int_0^1 1 \, dx$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t \, dt$

D. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \frac{\sin^3 x}{x} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

Giải.

Ta chuyển về đổi dấu và bấm máy. Kết quả bằng 0 là chính xác và khác 0 là sai.

Bấm máy:

+, phương án A: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx - \int_0^1 1 \, dx$. Kết quả: 0

+, phương án B: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$. Kết quả 0

+, phương án C: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \, dx$. Kết quả 0

Vậy phương án D.

+, phương án D: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = 0,74$.

$$\frac{\sin^3 x}{x} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi/2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\frac{\pi}{6}} = 0,397$$

Đáp án D

Câu 45. Cho tích phân $\int_2^3 \frac{x \, dx}{x^2 - 1} = a \ln 2 - b \ln 3$, trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$. Khi đó a, b đồng thời là hai nghiệm của phương trình nào dưới đây?

A. $x^2 - 4x + 3 = 0$

B. $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$

C. $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$

D. $x^2 - 2x - 3 = 0$

Đáp án B

Câu 46. Tìm a để $\int_0^a \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx = \ln \frac{3}{2}$

A. $a = -1$

B. $a = 2$

C. $a = \ln 2$

D. $a = \ln 3$

Đáp án C

Ta có thể bấm máy thử với từng phương án.

Câu 47. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} \, dx = a\sqrt{3} + b\sqrt{2} + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tổng $a+b+c$ là:

A. 1

B. -1

C. 2

D. 0

Đáp án D

Câu 48. Cho số thực m thỏa mãn $\int_1^e \frac{1+m \ln t}{t} \, dt = 0$, các giá trị tìm được của m thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

A. $-5 \leq m \leq 0$

B. $m \geq -1$

C. $-6 < m < -4$

D. $m < -2$

Giải

Xét: $I = \int_1^e \frac{1+m \ln t}{t} dt$. Đặt $u = 1 + m \ln t \Rightarrow du = \frac{m dt}{t} \Rightarrow \frac{du}{m} = \frac{dt}{t}$. Đổi cận $\begin{matrix} t=1; u=1 \\ t=e; u=1+m \end{matrix}$

$$I = \int_1^{1+m} u \cdot \frac{du}{m} = \frac{u^2}{2m} \Big|_1^{1+m} = \frac{(1+m)^2}{2m} - \frac{1}{2m} = 0, m \neq 0$$

$$\Rightarrow (1+m)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+m=1 \\ 1+m=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=0(\text{loại}) \\ m=-2 \end{cases}$$

Đáp án A.

Câu 49. Biết $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} dx = m\pi + n \ln 2, (m, n \in \mathbb{R})$. Tính $P = 2m + n$

A. $P=1$

B. $P=0,75$

C. $P=0,25$

D. $P=0$

Câu 50. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$. Nếu đặt $t = \cos 2x$ thì mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I = \int_0^1 \frac{-1}{t^2+1} dt$

B. $I = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt$

C. $I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt$

D. $I = \int_0^1 \frac{2}{t^2+1} dt$

Đáp án B

Bấm máy từng phương án kiểm tra. Phương án đúng phải có kết quả giống tích phân ban đầu.

6.3. Trắc nghiệm liên quan ứng dụng tích phân

*Xin đọc lại mục 5: ứng dụng tích phân.

Câu 1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y = -2x^3 + x^2 + x + 5$ và đồ thị (C') của hàm số $y = x^2 - x + 5$ bằng:

A. 0

B. 1

C. 3

D. 2

Giải

$$\text{Giải phương trình: } -2x^3 + x^2 + x + 5 = x^2 - x + 5 \Leftrightarrow -2x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 1$$

$$\text{Xét dấu } f(x) = -2x^3 + 2x$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$-2x^3 + 2x$	+	-	+	-	

$$\text{Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có: } S = \int_{-1}^0 (2x^3 - 2x) dx + \int_0^1 (-2x^3 + 2x) dx = 1$$

Đáp án B

Câu 2. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = x^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}}, x = 1, x = 2, y = 0$ quanh trục Ox là $V = \pi(a + be^2)$. Tính giá trị biểu thức $a+b$.

A. 4

B. 3

C. 1

D. 2

Giải

$$\text{Áp dụng công thức tính thể tích vật thể tròn xoay: } V = \pi \int_1^2 \left(x^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 x \cdot e^x dx$$

Sử dụng tích phần từng phần đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$V = \pi \left(x e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx \right) = \pi (x e^x - e^x) \Big|_1^2 = \pi (2e^2 - e^2) - \pi (e - e) = \pi e^2$$

Suy ra $a=0; b=1$. Vậy $a+b=1$

Đáp án C

Câu 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2 - 3x + 2; y = x - 1$.

A. $S = \frac{4}{3}$

B. $S=2$

C. $S = \frac{37}{14}$

D. $S = \frac{799}{300}$

Đáp án

Câu 4. Cho hình phẳng H được giới hạn bởi các đường $y = -\sqrt{x+2}$,

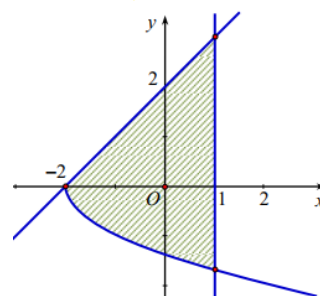
$y = x + 2, x = 1$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng H quanh trục hoành.

A. $V = \frac{27\pi}{2}$

B. $V = \frac{9\pi}{2}$

C. 9π

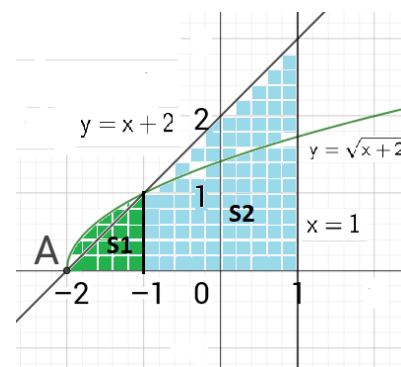
D. $V = \frac{55\pi}{6}$



Giải

Lấy đối xứng phần đồ thị $y = -\sqrt{x+2}$. Chia phần diện tích bị giới hạn thành 2 phần S1 và S2 như hình vẽ. Áp dụng công thức tính thể tích ta có:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^{-1} (\sqrt{x+2})^2 dx + \pi \int_{-1}^1 (x+2)^2 dx \\ &= \pi \left(\int_{-2}^{-1} (x+2) dx + \int_{-1}^1 (x+2)^2 dx \right) = \frac{55}{6} \pi \end{aligned}$$



Đáp án D

*Để làm được những dạng có nhiều hàm số như câu này thì cách tốt nhất và chính xác nhất là sử dụng đồ thị để xác định công thức thể tích.

Câu 5. Một ô tô đang chạy với vận tốc 36km/h thì tăng tốc chuyển động nhanh dần với gia tốc $a(t) = 1 + \frac{t}{3} (m/s^2)$. Tính quãng đường mà ô tô đi được sau 6 giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc.

A. 90m

B. 246m

C. 58m

D. 102m

Giải

*Nhắc lại: quãng đường là nguyên hàm của vận tốc. Vận tốc là nguyên hàm của gia tốc.

$$v(t) = v_0 + \int a(t) dt = v_0 + \int \left(1 + \frac{t}{3} \right) dt = v_0 + t + \frac{t^2}{6}. v_0 = 36 \frac{km}{h} = 10 \frac{m}{s}$$

$$s = \int_0^6 \left(v_0 + t + \frac{t^2}{6} \right) dt = \int_0^6 \left(10 + t + \frac{t^2}{6} \right) dt = 90m$$

Đáp án A

*rất nhiều người sẽ ra kết quả 246m. Nguyên nhân là các bạn không đổi đơn vị. Bạn đọc cần lưu ý điều này.

Câu 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$ và trục Ox.

A. $\frac{8}{3}$

B. $\frac{4}{3}\pi$

C. $\frac{4}{3}$

D. $\frac{8}{3}\pi$

Đáp án C

Câu 7. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y = \frac{2x-1}{x+1}$, tiệm cận ngang của (C), trục tung và đường thẳng $x=a$ ($a>0$). Tìm a để $S = \ln 2017$

A. $a = \sqrt[3]{2017} - 1$

B. $a = \frac{2017}{3} - 1$

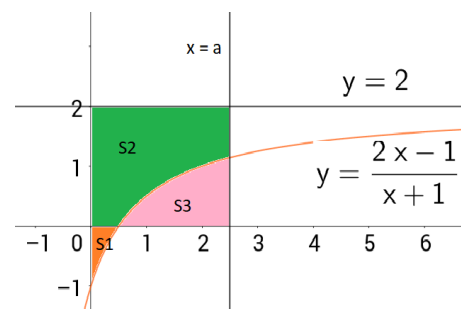
C. $a = 2016$

D. $a = \sqrt{2017} - 1$

Giải

Đối với những câu có nhiều dữ kiện như này thì bạn đọc nên vẽ đồ thị ra để nhận biết một cách trực quan.

Ta thấy phần diện tích cần tìm là phần S1 và S2. Trong đó phần S2 bằng toàn bộ hình chữ nhật chứa S2, S3 trừ đi phần S3.



$$+, S_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2x-1}{x+1} \right) dx$$

$$+, S_2 = S_{hcn} - S_3 = 2a - \int_{\frac{1}{2}}^a \frac{2x-1}{x+1} dx$$

Đến đây ta có thể giải bằng cách thử trực tiếp các phương án hoặc làm tự luận tìm a.

Tôi xin giải bằng cách thử trực tiếp + máy tính.

$$\text{Ta có: } S = S_1 + S_2 \Leftrightarrow S - S_1 - S_2 = 0 \Leftrightarrow \ln 2017 - \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2x-1}{x+1} \right) dx - 2a + \int_{\frac{1}{2}}^a \frac{2x-1}{x+1} dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln 2017 - 2a + \int_0^a \frac{2x-1}{x+1} dx = 0$$

Ghi vào máy tính: $\ln 2017 - 2a + \int_0^a \frac{2x-1}{x+1} dx$ với a thay bằng các phương án cụ thể.

+, phương án A: kết quả 0; phương án B kết quả: -11,9; phương án C kết quả: -15,2; phương án D kết quả: -3,8

Đáp án A. (thực tế chỉ cần kiểm tra phương án A là ta có thể chọn được luôn).

Câu 8. Gọi H là hình hỗng giới hạn bởi $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H xung quanh trục hoành.

A. $V = \frac{4\pi}{3}$

B. $V = \frac{16}{15}$

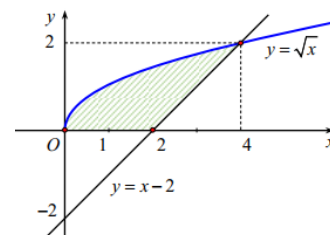
C. $V = \frac{16\pi}{15}$

D. $V = \frac{20\pi}{3}$

Đáp án C

Câu 9. Cho hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$; $y = x - 2$ và trục hoành. Tìm công thức tính thể tích của vật thể sinh ra khi cho hình H quay quanh trục hoành.

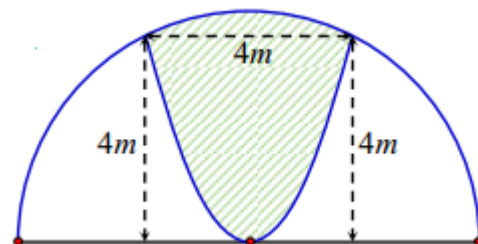
- A. $V = \pi \left[\int_0^4 x dx + \int_2^4 (x-2)^2 dx \right]$
 B. $V = \pi \left[\int_0^4 x dx - \int_2^4 (x-2)^2 dx \right]$
 C. $V = \pi \left[\int_0^2 x dx + \int_2^4 (x-2)^2 dx \right]$
 D. $V = \pi \left[\int_0^2 \sqrt{x} dx - \int_2^4 (x-2) dx \right]$



Đáp án B

Câu 10. Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính $4\sqrt{5}$ m. Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4 m, phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100 000 đồng/ m^2 . Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó?. Làm tròn đến hàng nghìn.

- A. 3 895 000 đồng B. 1 948 000 đồng
 C. 2 388 000 đồng D. 1 194 000 đồng

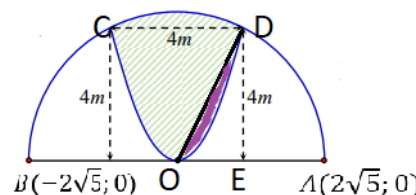


Giải.

Chiếu lên hệ trục tọa độ như hình vẽ. (bạn đọc lại phần 5.3 để hiểu chi tiết cách làm này)

Do đường tròn có đường kính $4\sqrt{5}$ m nên bán kính $OA = OB = 2\sqrt{5}$ m

Do diện tích trồng cỏ gồm hai phần đối xứng có diện tích bằng nhau nên ta chỉ cần tích diện tích một bên. Ta sẽ tính phần bên phải là S_1 .



Diện tích phần trồng cỏ S_1 bằng diện tích hình quạt AOD trừ đi diện tích giới hạn bởi parabol và đoạn OD (phần màu tím - tô đậm).

*Xác định parabol có dạng $y = ax^2$ (parabol có gốc tọa độ là đỉnh)

+, xác định tọa độ điểm D: ta có $y_D = 4$; $OD = OA = 2\sqrt{5} \Rightarrow x_D = \sqrt{OD^2 - y_D^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4^2} = 2$

Vậy $D(2; 4)$.

+, thay tọa độ điểm D vào phương trình parabol ta được $a=1$.

Vậy parabol có dạng: $y = x^2$

*Xác định đường thẳng OD: $y = ax$. Thay tọa độ điểm D vào phương trình ta được $a=2$.

Vậy đường thẳng OD có dạng: $y = 2x$

Diện tích phần tô đậm là $S_{tô} = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{4}{3}$

*Xác định diện tích phần quạt AOD.

$\sin \widehat{AOD} = \frac{DE}{OD} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \widehat{AOD} \approx 1,107 \text{ rad.}$

Diện tích hình quạt AOD là: $S_{AOD} = \frac{\alpha}{2} \cdot r^2 = \frac{1,107}{2} \cdot (2\sqrt{5})^2 = 11,07$

Vậy diện tích phần trồng cỏ là: $S = 2S_1 = 2 \cdot \left(11,07 - \frac{4}{3}\right) = 19,473$

Số tiền cần để trồng cỏ là: $T = 19,473 \times 100\,000 = 1\,947\,300$ đồng.

Đáp án B. (đáp án có thể chênh lệch một chút do cách lấy xấp xỉ)

*Trong bài này khó nhất chính là phải nhớ được công thức tính diện tích hình quạt tròn.

$$S_{\text{quạt}} = \frac{\alpha}{2} \cdot r^2 = \frac{rl}{2} = \frac{\pi R^2 \alpha^0}{360^0}$$

Câu 11. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x} + 1, y = 0, x = 1, x = k (k > 1)$, quay xung quanh trục Ox. Tìm k để $V = \pi \left(\frac{15}{4} + \ln 16\right)$.

A. $k=4$

B. $k=8$

C. $k=4e$

D. $k = e^2$

Đáp án A

Câu 12. Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x; y = 0; x = 0; x = 1$ quanh trục Ox có giá trị bằng:

A. $\frac{8\pi}{15}$

B. $\frac{7\pi}{15}$

C. $\frac{15\pi}{8}$

D. $\frac{8\pi}{7}$

Đáp án A

Câu 13. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y = x^2\sqrt{x^2 + 1}$, trục Ox và đường thẳng $x=1$ bằng $\frac{a\sqrt{b} - \ln(1+\sqrt{b})}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của $a+b+c$ là:

A. 11

B. 12

C. 13

D. 14

Đáp án C

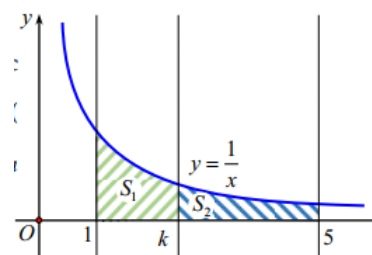
Câu 14. Cho hình thang cong H giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1, x = 5$. Đường thẳng $x=k (1 < k < 5)$ chia H thành hai phần S_1 và S_2 (như hình vẽ). Cho hai hình $S_1; S_2$ quay xung quanh trục Ox ta thu được hai khối tròn xoay có thể tích lần lượt là $V_1; V_2$. Xác định k để $V_1 = 2V_2$

A. $k = \frac{15}{7}$

B. $k = \frac{5}{3}$

C. $k = \sqrt[3]{25}$

D. $k = \ln 5$



Giải.

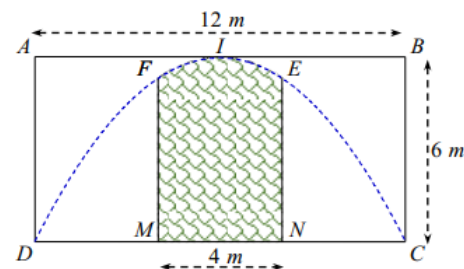
$$V_1 = 2V_2 \Leftrightarrow \pi \int_1^k \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = 2\pi \int_k^5 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx \Rightarrow \pi \int_1^k \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx - 2\pi \int_k^5 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = 0$$

Bấm máy: $\int_1^k \frac{1}{x^2} dx - 2 \int_k^5 \frac{1}{x^2} dx$. Với k thay ở mỗi phương án. Phương án đúng có kết quả bằng 0.

Kiểm tra thấy phương án A: $k=15/7$ nhận kết quả bằng 0.

Đáp án A

Câu 15. Một công ty quảng cáo muốn làm một bức tranh trang trí hình MNEIF ở chính giữa một bức tường hình chữ nhật ABCD có các kích thước như hình vẽ. Cung EIF là một phần của parabol đỉnh I. Với I là trung điểm cạnh AB. Parabol đi qua hai điểm C, D. Kinh phí làm bức tranh là 900.000 đồng/m². Chi phí để làm bức tranh này là bao nhiêu?



- A. 20 400 000 đồng B. 20 600 000 đồng C. 20 800 000 đồng D. 21 200 000 đồng

Giải

Chiếu hình vẽ lên hệ trục Oxy như hình vẽ.

*Xác định parabol: $y = ax^2 + bx + c$

+, Thay tọa độ điểm C(6;0) ta được: $36a + 6b + c = 0$ (1)

+, Thay tọa độ điểm D(-6;0) ta được: $36a - 6b + c = 0$ (2)

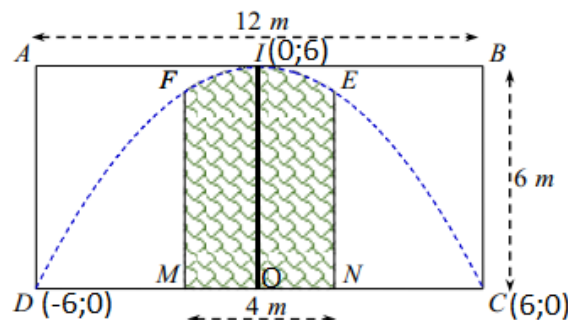
+, Thay tọa độ đỉnh I(0;6) ta được: $c = 6$ (3)

Từ (1)(2)(3) suy ra $a = -\frac{1}{6}$; $b = 0$; $c = 6$

Vậy parabol có dạng: $y = -\frac{1}{6}x^2 + 6$

Diện tích phần vẽ tranh là: $S = \int_{-2}^2 \left(-\frac{1}{6}x^2 + 6\right) dx = \frac{208}{9}$

Kinh phí để vẽ bức tranh là: $T = \frac{208}{9} \times 900\,000 = 20\,800\,000$ đồng



Câu 16. Một viên đạn được bắn theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu 29,4 m/s. Gia tốc trọng trường là 9,8 m/s². Tính quãng đường S viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi chạm đất.

- A. $S = 88,2$ m B. $S = 88,5$ m C. $S = 88$ m D. $S = 89$ m

Giải

Vận tốc của vật biến thiên theo hàm số: $v(t) = v_0 - gt$ (do gia tốc ngược chiều chuyển động)

Thời điểm vật đạt độ cao cao nhất thì $v=0$: $\Rightarrow v_0 - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{g} = \frac{29,4}{9,8} = 3(s)$

Quang đường viên đạn đi được từ lúc bắn lên tới khi chạm đất là:

$$S = 2 \int_0^3 v(t) dt = 2 \int_0^3 (29,4 - 9,8t) dt = 88,2 \text{ m}$$

Đáp án A

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x) = x(x-1)(x-2)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$ và trục hoành là:

A. $\int_0^2 f(x) dx$

B. $\int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$

C. $\left| \int_0^2 f(x) dx \right|$

D. $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$

Đáp án B (xét dấu $f(x)$)

Câu 18. Cho hình H giới hạn bởi đồ thị (C): $y = x \ln x$, trục hoành và các đường thẳng $x=1$, $x=e$. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay H quanh trục hoành.

- A. $\frac{3}{2}\pi$ B. $-\frac{5}{2}e^3 + \ln 64\pi$ C. $(-4 + \ln 64)\pi$ D. $\frac{\pi}{27}(5e^3 - 2)$

Đáp án D

Câu 19. Một vật rơi tự do với gia tốc $9,8 \text{ m/s}^2$. Hỏi sau 2 giây (tính từ thời điểm rơi) vật có vận tốc bao nhiêu?

- A. 4,9 B. 19,6 C. 39,2 D. 78,4

Giải

Vận tốc của vật rơi tự do: $v(t) = gt = 9,8t$ ($v_0 = 0$)

$$v(2) = 9,8 \cdot 2 = 19,6 \text{ m/s}$$

đáp án B

Câu 20. Khi quan sát một đám vi khuẩn trong phòng thí nghiệm người ta thấy tại ngày thứ x có số lượng $N(x)$ con. Biết rằng $N'(x) = \frac{2017}{x+1}$ và lúc đầu đám vi khuẩn có 3000 con. Hỏi số lượng vi khuẩn sau đúng một tuần gần với số nào sau đây nhất?

- A. 36194 B. 38417 C. 35194 D. 34194

Giải

$$N(x) = \int \frac{2017}{x+1} dx = 2017 \ln|x+1| + C$$

$$N(0) = C = 30000$$

$$\text{Vậy } N(x) = 2017 \ln|x+1| + 30000$$

$$\text{Sau một tuần: } N(7) = 2017 \ln 8 + 3000 = 34194 \text{ con}$$

Đáp án D

Câu 21. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số: $y = x^3$; $y = x^5$

- A. $S=1$ B. $S=2$ C. $S = \frac{1}{6}$ D. $S = \frac{1}{3}$

Đáp án C

Câu 22. Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15 \text{ m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t \text{ m/s}^2$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

- A. 68,25 m B. 70,25 m C. 69,75 m D. 67,25 m

Đáp án C

Câu 23. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $y = x$ quay xung quanh trục Ox được tính bởi công thức nào sau đây?

- A. $V = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx - 4\pi \int_0^{\frac{1}{2}} x^4 dx$ B. $V = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (x - 2x^2) dx$
C. $V = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (2x^2 - x)^2 dx$ D. $V = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx + 4\pi \int_0^{\frac{1}{2}} x^4 dx$

Đáp án A (vẽ hình)

Câu 24. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3\sqrt{x}$; $x = 4$, trục Ox là:

A. 72

B. $\frac{16}{3}$

C. 16

D. 24

Đáp án C

Câu 25. Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ khi $t=0$. Chuyển động thẳng với vận tốc $v(t) = t(5 - t)$ m/s. tìm quãng đường vật đi được cho tới khi nó dừng lại.

A. 20,8 m

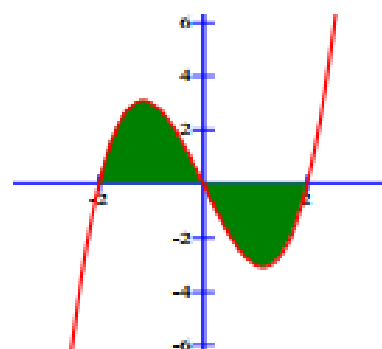
B. 20,83 m

C. $\frac{125}{6}$ m

D. 20,8333 m

Đáp án C

Câu 26. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng (phần tô đậm) là:

A. $\left| \int_{-2}^2 f(x) dx \right|$ B. $\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx$ C. $\left| \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \right|$ D. $\left| \int_{-2}^0 f(x) dx \right| + \left| \int_0^2 f(x) dx \right|$ 

Đáp án D

Câu 27. Gọi V là thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ quanh trục Ox . Tính giá trị của V

A. $V = \pi^2 e$ B. $V = \pi(e^2 - e)$ C. $V = \pi e^2$ D. $V = \pi(e^2 + e)$

Đáp án C

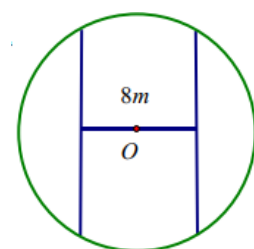
Câu 28. Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 8m. người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 8m nhận O làm tâm đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí trồng cây là 70 000 đồng/m². Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó? (làm tròn đến hàng đơn vị).

A. 8 571 239 đồng

B. 8 571 238 đồng

C. 4 285 619 đồng

D. 4 285 620 đồng



Giải

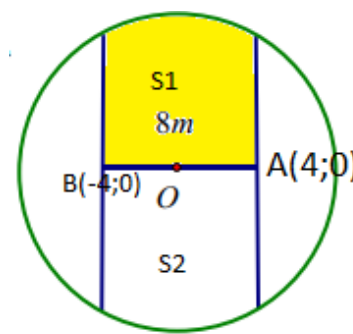
Chiếu hệ trục Oxy lên hình vẽ với O trùng với gốc tọa độ.

Khi đó đường tròn có phương trình: $x^2 + y^2 = 8^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{64 - x^2}$

Dải đất được chia thành hai phần S_1 và S_2 bằng nhau.

Ta có:

$$S = 2S_1 = 2 \int_{-4}^4 \sqrt{x^2 - 64} dx = 122,4462691$$



Số tiền cần để trồng cây là: $T = 122,4462691 \times 70\,000 = 8\,571\,238,838$ đồng

Đáp án A (làm tròn đến hàng đơn vị)

Câu 29. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 - 2x$ trên đoạn $[-1; 2]$ và trục hoành.

A. $\frac{37}{12}$

B. $\frac{28}{3}$

C. $\frac{8}{3}$

D. $\frac{9}{4}$

Đáp án A (vẽ hình để làm)

Câu 30. Một ô tô đang chạy với vận tốc 12 m/s thì người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -4t + 12$ m/s. Trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn đi được bao nhiêu mét?

A. 5 m

B. 3 m

C. 18 m

D. 36 m

Đáp án C

Câu 31. Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = -20(1 + 2t)^{-2}$ m/s². Khi $t=0$ thì vận tốc là 30 m/s. Tính quãng đường vật đó di chuyển sau 2 giây.

A. 46m

B. 48m

C. 47m

D. 49m

Đáp án B

Câu 32. Tính diện tích hình phẳng H giới hạn bởi hai đồ thị $y = 3^x$; $y = 4 - x$ và trục tung.

A. $S = \frac{9}{2} + \frac{2}{\ln 3}$

B. $S = \frac{9}{2} + \frac{3}{\ln 3}$

C. $S = \frac{7}{2} - \frac{3}{\ln 3}$

D. $S = \frac{7}{2} - \frac{2}{\ln 3}$

Đáp án D

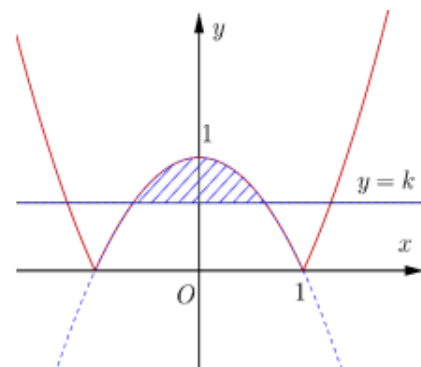
Câu 33. Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường: $y = |x^2 - 1|$; $y = k$, $0 < k < 1$. Tìm k để diện tích hình phẳng H gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc trong hình vẽ bên.

A. $k = \sqrt[3]{4}$

B. $k = \sqrt[3]{2} - 1$

C. $k = \frac{1}{2}$

D. $k = \sqrt[3]{4} - 1$



Đáp án D

Câu 34. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \sin 2x \cdot \cos x$; $y = 0$, $(0 \leq x \leq \pi)$ xung quanh trục Ox.

A. $\frac{\pi^2}{8}$

B. $\frac{\pi}{8}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi^2}{4}$

Đáp án D

Câu 35. Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v = 30$ m/s thì đột ngột thay đổi gia tốc $a(t) = 4 - t$ ($\frac{m}{s^2}$). Tính quãng đường đi được của chất điểm kể từ thời điểm thay đổi gia tốc đến thời điểm vận tốc lớn nhất.

A. $\frac{848}{3}$ m

B. $\frac{424}{3}$ m

C. $\frac{128}{3}$ m

D. $\frac{64}{3}$ m

Đáp án B

Câu 36. Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162m so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo qui luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t tính bằng phút là thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động, $v(t)$ tính theo đơn vị mét/phút. Vận tốc của vật khi bắt đầu tiếp đất là:

- A. $v = 5m/p$ B. $v = 7m/p$ C. $v = 9m/p$ D. $v = 3m/p$

Đáp án C.

Câu 37. Một ô tô đang chạy với vận tốc 19m/s thì người lái hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -38t + 19 \text{ m/s}$. Hỏi từ lúc hãm phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn đi chuyển bao nhiêu mét?

- A. 4,75m B. 4,5m C. 4,25m D. 5m

Đáp án A

Câu 38. Bạn mình ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới, vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t) = 3t^2 + 5 \text{ m/s}$. Tính quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10.

- A. 246m B. 252m. C. 1134m D. 966m

Đáp án D

Câu 39. Người ta trồng hoa vào phần đất được tô màu đen được giới hạn bởi cạnh AB, CD, đường trung bình MN của mảnh đất hình chữ nhật ABCD và một đường cong hình sin (như hình vẽ). Biết $AB=2\pi$ (m), $AD=2$ (m). tính diện tích phần còn lại của mảnh đất (phần không tô màu).

- A. $4\pi - 1$ B. $4(\pi - 1)$
C. $4\pi - 2$ D. $4\pi - 3$

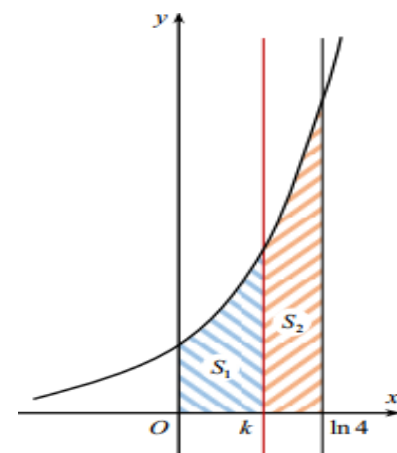


Đáp án B. (tính diện tích hình chữ nhật trừ đi diện tích phần tô đen)

Câu 40. Cho hình thang cong H giới hạn bởi các đường $y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \ln 4$. Đường thẳng $x=k$ ($0 < k < \ln 4$) chia H thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 .

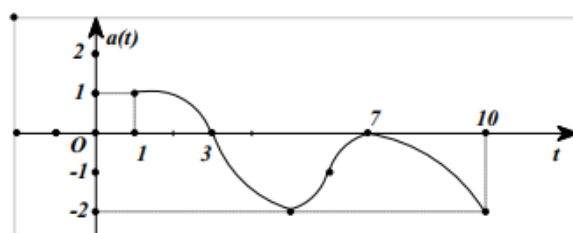
Tìm k để $S_1 = 2S_2$.

- A. $k = \frac{2}{3} \ln 4$ B. $k = \ln 2$
C. $k = \ln \frac{8}{3}$ D. $k = \ln 3$



Đáp án D

Câu 41. Người ta khảo sát gia tốc $a(t)$ của một vật thể chuyển động từ giây thứ nhất đến giây thứ 10 và ghi nhận được $a(t)$ là một hàm số liên tục có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi trong thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 10 được khảo sát đó, thời điểm nào vật thể có vận tốc lớn nhất?



A. Giây thứ 1

B. Giây thứ 3

C. Giây thứ 10

D. Giây thứ 7

Giải

Ta có: $a(t) = v'(t)$.

Xét bảng biến thiên :

t	1	3	7	10
$a(t) = v'(t)$	1	0	0	-2
$v(t)$				

Ta thấy vận tốc đạt giá trị lớn nhất ở giây thứ 3.

Đáp án B

*Rất nhiều người sẽ chọn phương án A. Chúng ta cần đọc kỹ câu hỏi tránh nhầm lẫn.

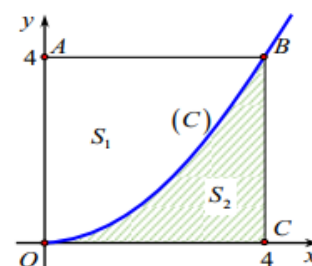
Câu 42. Hình vuông OABC có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của phần không bị gạch và phần bị gạch (như hình vẽ). Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$

B. $\frac{S_1}{S_2} = 2$

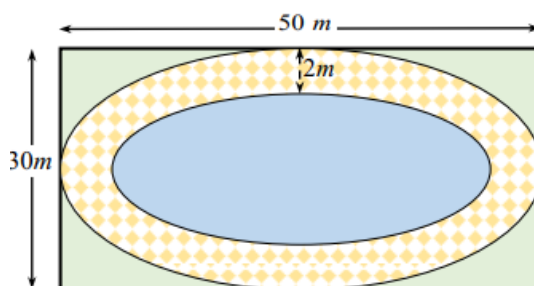
C. $\frac{S_1}{S_2} = 1$

D. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2}$



Đáp án D

Câu 43. Một sân chơi dành cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 50m và chiều rộng 30m. Người ta làm một con đường nằm trong sân (như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, trục lớn và trục bé của hình elip song song với các cạnh của hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là 2m. Kinh phí để làm mỗi m^2 đường là 500000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (làm tròn đến hàng nghìn).



A. 119 000 000 đồng B. 152 000 000 đồng C. 119 320 000 đồng D. 125 520 000 đồng

Đáp án C

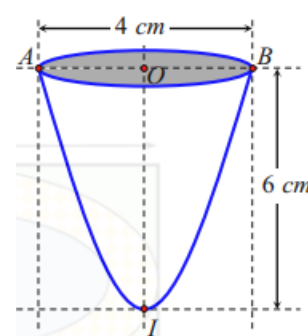
Câu 44. Một vật thể hình tròn xoay có dạng giống một cái ly như hình vẽ. Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4cm và chiều cao là 6cm. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích $V (cm^3)$ của vật thể.

A. $V = 12\pi$

B. $V = 12$

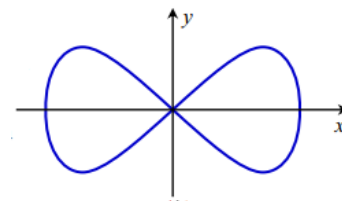
C. $V = \frac{72}{5}\pi$

D. $V = \frac{72}{5}$



Đáp án A

Câu 45. Trong công viên Toán học có những mảnh đất trồng hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemniscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2(25 - x^2)$ như hình bên. Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli, biết mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.



A. $S = \frac{125}{6} m^2$

B. $S = \frac{125}{4} m^2$

C. $S = \frac{250}{3} m^2$

D. $S = \frac{125}{3} m^2$

Đáp án D.

Câu 46. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ m/s. Đi được 5s thì người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ m/s². Tính quãng đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh đến khi dừng hẳn.

A. 95,70 m

B. 96,25 m

C. 87,50 m

D. 94,00 m

Giải

*Tính quãng đường đi được sau 5s đầu trước khi phanh.

$$S_1 = \int_0^5 7t dt = \frac{175}{2} m$$

*Tính quãng đường từ lúc phanh đến khi dừng lại.

Tại thời điểm phanh ô tô có vận tốc: $v_0 = v_1(5) = 7 \cdot 5 = 35$ m/s.

Vận tốc khi phanh của ô tô: $v_2(t) = v_0 + \int a(t) dt = 35 + \int -70 dt = 35 - 70t$

Thời gian phanh của ô tô bằng thời gian lúc ô tô có vận tốc bằng 0 (lấy gốc thời gian là lúc bắt đầu đạp phanh), suy ra $35 - 70t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ (s)

Đoạn đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu phanh đến khi dừng lại là: $S_2 = \int_0^{1/2} (35 - 70t) dt = \frac{35}{4}$

Tổng quãng đường đi được là: $S = \frac{175}{2} + \frac{35}{4} = 96,25$ m

Đáp án B

Câu 47. Người ta thay nước mới cho một bể bơi dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu $h_1 = 280$ cm. Giả sử $h(t)$ là chiều cao của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3}$. Hỏi sau bao lâu thì nước bơm được $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi?

A. 7545,2 s

B. 7234,8 s

C. 7200,7 s

D. 7560,5 s

Giải

$$h(t) = \int_0^t \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3} dt = \frac{3}{4} \cdot 280 = 210$$

Bấm máy: $\int_0^t \frac{1}{500} \sqrt[3]{X+3} dX$ thay t ở các phương án, tìm phương án cho kết quả 210.

Đáp án B

Câu 48. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với vận tốc $v(t) = 25 - gt$, với t tính bằng giây, g là gia tốc trọng trường lấy xấp xỉ $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Vận tốc ban đầu là 25 m/s . Sau khi bay lên đạt độ cao lớn nhất thì viên đạn lại rơi tự do xuống đất. Hỏi sau bao lâu thì viên đạn đạt độ cao lớn nhất?

A. $t = \frac{125}{49}$

B. $t = \frac{75}{24}$

C. $t = \frac{100}{39}$

D. $t = \frac{265}{49}$

Đáp án A

Câu 49. Giả sử $h(t)$ (cm) là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm được t (s). Biết rằng $h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Mực nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 (s) là:

A. 2,33 cm

B. 5,06 cm

C. 2,66 cm

D. 3,33 cm

Đáp án B

Câu 50. Kí hiệu H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V khi quay H quanh Ox .

A. $V = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$

B. $V = \frac{\pi}{2} \ln \frac{3}{4}$

C. $V = \pi \ln \frac{4}{3}$

D. $V = \frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{3}$

Đáp án D