



**ĐỀ ÔN LUYỆN CÁC NHÓM CÂU HỎI
VẬN DỤNG CAO TRONG ĐỀ THI THPT QUỐC GIA**

*Đề gồm 40 câu trắc nghiệm
Sản phẩm được thực hiện bởi nhóm
Chinh Phục Olympic Toán*

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\sqrt{m+x} - \sqrt{\frac{m^2}{m+x}} = \sqrt{2m+x}$$

Có đúng một nghiệm nhỏ hơn 10.

- A. 5 B. 4 C. 9 D. Vô số.

Câu 2: Cho 2 dãy cấp số cộng $u_n = u_1; u_2; \dots u_n$ có công sai d_1 và $v_n = v_1; v_2; \dots v_n$ có công sai d_2 . Gọi tổng của n số hạng đầu của mỗi cấp số theo thứ tự là

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 7n + 1$ và $T_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = 14n + 27$. Tính tỉ số của $\frac{u_{11}}{v_{11}}$

- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{9}{4}$ D. $\frac{5}{4}$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x, BC = y, AB = AC = SB = SC = 1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất khi tổng $(x + y)$ bằng:

- A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ D. $4\sqrt{3}$.

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất của m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \log_2(x+y) + \log_3(xy+2) = 2 \\ x^3 + y^3 - 2xy = m \end{cases}$$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 5: Cho $2\sin(a+b) = \cos(a-b), a-b \neq k\pi$. Tính giá trị của biểu thức

$$E = \frac{1}{1-2\sin 2a} + \frac{1}{1-2\sin 2b}$$

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2. D. 0.

Câu 6: Cho dãy $\{u_n\}$ thỏa mãn $25.2^{2u_5+1} - 15.2^{u_1+u_5+2} + 5.2^{u_5} + 15.2^{u_1} - 4 = 0$ và $u_{n+1} = u_n + 8$.

Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 2019$.

- A. 512. B. 258. C. 511. D. 257.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Kí hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

A. $\frac{\sqrt{2}+1}{9}$

B. $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$

D. $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$

Câu 8: Cho một cấp số cộng : u_1, u_2, u_3, u_4 thỏa $|u_1 u_4 - u_2 u_3| \leq 6$. Tìm tập xác định D của hàm $f(x) = \sqrt{(x-u_1)(x-u_2)(x-u_3)(x-u_4)+9}$

A. $D = (-\infty; 6)$

B. $D = (6; +\infty)$

C. $D = \mathbb{R}$

D. $D = (-6; 6)$

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (\sin \alpha)x + |\sin \alpha| - 1}{x+1} (C_\alpha)$. Tìm α để (C_α) sao cho khoảng cách giữa 2 điểm cực đại và cực tiểu là lớn nhất ?

A. $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$.

B. $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

C. $\alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

D. $\alpha = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng 1. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Mặt phẳng (P) thay đổi luôn luôn đi qua AG cắt BC, BD lần lượt tại I, K . Tính thể tích nhỏ nhất của $ABIK$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{27}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{18}$.

C. $\frac{4}{9}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{36}$.

Câu 11: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 2 - 3i| = \sqrt{17}; |z_2 + 1| = \sqrt{5}$. Biết rằng $z_1 - 1 + i = k(z_2 - 1 + i)(k < 0)$. Tìm k khi $P = |z_1 - z_2|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $k = 1$

B. $k = -2$

C. $k = -3$

D. $k = -5$

Câu 12: Gọi A là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A . Tính xác suất để chọn được số chia hết cho 7 và có chữ số hàng đơn vị bằng 2.

A. $\frac{257}{90000}$

B. $\frac{257}{18000}$

C. $\frac{127}{90000}$

D. $\frac{127}{30000}$

Câu 13: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| = 5$. Tìm GTLN của $P = 2|z - 8i| - |z - 7 - 9i|$.

A. $P = \sqrt{109}$

B. $P = -1 + \sqrt{109}$

C. $P = \sqrt{109} - 2$

D. $P = \sqrt{109} + 1$

Câu 14: Cho số phức z thỏa mãn $4|z| = |z - i - 1| + 2|z + i + 1|$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 2 + 2i|$

A. $P = \frac{\sqrt{30}}{3} + 2\sqrt{2}$

B. $P = \frac{\sqrt{30}}{4} + 3\sqrt{2}$

C. $P = \frac{\sqrt{30}}{5} + 4\sqrt{2}$

D. $P = \frac{\sqrt{30}}{6} + 5\sqrt{2}$

Câu 15: Biết tổng $S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$. Giá trị nhỏ nhất của n để

$S_n > \frac{3^{99} + 2n4^n}{4^n}, n \in \mathbb{N}^*$

A. 41

B. 40

C. 51

D. 50

Câu 16: Cho 3 số phức z_0, z_1, z_2 thỏa mãn đồng thời $\begin{cases} |z-2|+|z+2|=8 \\ z_1-z_3=z_3-z_2 \end{cases}$, với $z_3=-1-\frac{3}{2}i$. Biết

rằng $\begin{cases} z_0-z_1=a+bi \\ z_0-z_2=c+di \end{cases} (a,b,c,d \in \mathbb{R})$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{2}|ad-bc|$

A. $P=17$

B. $P=18$

C. $P=19$

D. $P=20$

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Gọi $(C_1), (C_2), (C_3)$ lần lượt là đồ thị của các hàm số $y=f(x), y=f(f(x)), y=f(x^2+1)$. Các tiếp tuyến $(C_1), (C_2)$ tại điểm $x_0=2$ có phương trình lần lượt là $y=2x+1, y=4x+3$, hỏi tiếp tuyến của (C_3) tại điểm $x_0=2$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $Q(2;-11)$

B. $M(-2;11)$

C. $N(-2;-21)$

D. $P(2;-21)$

Câu 18: Cho dãy (x_n) thỏa mãn $x_1=5, x_{n+1}=x_n^2-2, \forall n \geq 1$. Tính giá trị của

$$M = \lim \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)$$

A. $M = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$

B. $M = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$

C. $M = \frac{3+\sqrt{31}}{3}$

D. $M = \frac{3-\sqrt{15}}{3}$

Câu 19: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn $0 < a, b \leq 100$ sao cho đồ thị của 2 hàm số $y = \frac{1}{a^x} + \frac{1}{b}$ và $y = \frac{1}{b^x} + \frac{1}{a}$ cắt nhau tại đúng 2 điểm phân biệt?

A. 9704

B. 9702

C. 9698

D. 9700

Câu 20: Xét các hình chóp $S.ABCD$ thỏa mãn điều kiện: đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng a . Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất V_0 khi cosin góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\sqrt{\frac{p}{q}}$, trong đó p, q là các số nguyên dương và phân số $\frac{p}{q}$ là tối giản. Tính $T=(p+q).V_0$.

A. $T=3\sqrt{3}a^3$.

B. $T=\sqrt{6}a^3$.

C. $T=2\sqrt{3}a^3$.

D. $T=\frac{5\sqrt{3}}{2}a^3$.

Câu 21: Cho số phức z_1, z_2, z_3 lần lượt thỏa mãn $z_1=3+i$, z_2 là số thuần ảo với thuần ảo không âm, z_3 là số thực không âm. Biết rằng $|z_2-z_3|=\sqrt{|z_2-z_1|^2+|z_3-z_1|^2}$. Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_2-z_1||\overline{z_3-z_1}|$. Khi đó $M.n$ bằng?

A. $M.n=90$

B. $M.n=80$

C. $M.n=100$

D. $M.n=70$

Câu 22: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $5(x^2+y^2+z^2)=9(xy+2yz+zx)$. Tìm giá

trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{x}{y^2+z^2}-\frac{1}{(x+y+z)^3}$.

- A. 14 B. 16 C. 12 D. 18

Câu 23: Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Giả sử m là tích số chấm mà con súc sắc xuất hiện sau hai lần gieo. Tính xác suất sao cho hàm số $y = (m-3)x^2 + (41-2m)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{17}{36}$

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$. Biết rằng :

$$f(2) + f(3) + \dots + f(2018) = \ln a - \ln b + \ln c - \ln d$$

trong đó a, c, d là các số nguyên tố và $a < b < c < d$. Tính $P = a + b + c + d$

- A. 1986 B. 1698 C. 1689 D. 1989

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

- A. $\frac{5}{4} < m \leq 2$ B. $-2 < m < \frac{5}{4}$ C. $-\frac{5}{4} < m < 2$ D. $\frac{5}{4} < m < 2$

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn đẳng thức:

$$\frac{3x^3 f(x)}{[f'(x)]^2 + x f'(x) + x^2} = f'(x) - x, \forall x \in [1; 2] \text{ và } f(1) = \frac{7}{3}. \text{ Tính } f(2).$$

- A. $f(2) = \frac{7\sqrt{7}-1}{3}$ B. $f(2) = \frac{7\sqrt{7}+1}{3}$ C. $f(2) = \frac{2\sqrt{7}-1}{3}$ D. $f(2) = \frac{2\sqrt{7}+1}{3}$

Câu 27: Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đi qua các điểm sau $A(2; 4), B(3; 9), C(4; 16)$. Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị tại lần lượt tại các điểm D, E, F (D khác A và B , E khác A và C , F khác B và C). Biết rằng tổng các hoành độ của D, E, F bằng 24. Tính $f(0)$.

- A. $f(0) = -2$ B. $f(0) = 0$ C. $f(0) = \frac{24}{5}$ D. $f(0) = 2$

Câu 28: Cho hàm số $g(x) = f(\sin^2 x) f(\cos^2 x)$ trong đó f thỏa mãn điều kiện :

$$f(\cot x) = \sin 2x + \cos 2x, \forall x \in [0; \pi].$$

Tích của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ bằng:

- A. $\frac{1}{25}$. B. $\frac{1}{5}$. C. $-\frac{1}{5}$. D. $-\frac{1}{25}$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ thỏa mãn $f(1) = -1, f(4) = -8$ và đồng thời $[f'(x)]^2 \sqrt{x^3} - f(x) = 9\sqrt{x^3} - \sqrt{x} - 3x, \forall x \in [1; 4]$. Tích phân $\int_1^4 f(x) dx$ bằng

- A. -7 B. $-\frac{89}{6}$ C. $-\frac{79}{6}$ D. -8

Câu 30: Cho phương trình $\log_2(2x^2 + 2x + 2) = 2^{y^2} + y^2 - x^2 - x$. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$, với $0 < x < 500$ thỏa mãn phương trình đã cho?

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A' là điểm trên SA sao cho $\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'S}$. Mặt phẳng (α) qua A' cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' .

Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} - \frac{SC}{SC'}$.

- A. $T = \frac{3}{2}$ B. $T = \frac{1}{3}$ C. $T = 2$ D. $T = \frac{1}{2}$

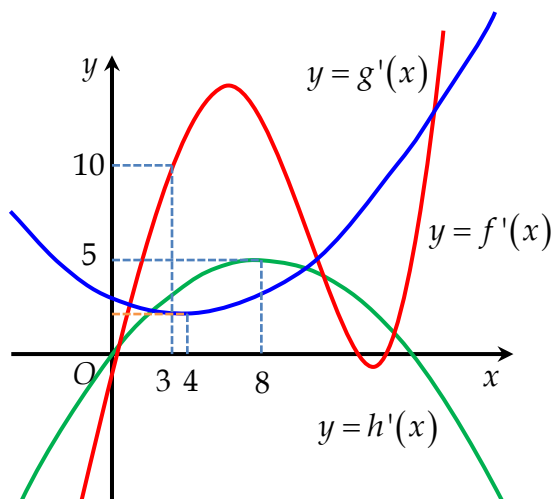
Câu 32: Gọi q là công bội của một cấp số nhân, biết tổng ba số hạng đầu bằng $16\frac{4}{9}$, đồng thời theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng. Hỏi q thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $q \in (3; 4)$ B. $q \in (1; 2)$ C. $q \in (2; 3)$ D. $q \in (0; 1)$

Câu 33: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, biết rằng tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của I được viết dưới dạng $\frac{a\pi}{b} + \frac{c}{d}$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c + d$?

- A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

Câu 34: Cho 3 hàm số $y = f(x), y = g(x), y = h(x)$. Đồ thị của 3 hàm số $y = f'(x), y = g'(x), y = h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới, trong đó đường đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Hàm số $k(x) = f(x+7) + g(5x+1) - h\left(4x + \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $\left(-\frac{15}{4}; 0\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$. C. $\left(\frac{3}{8}; 1\right)$. D. $\left(\frac{3}{8}; +\infty\right)$.

Câu 35: Cho 2 số phức z_1 thỏa mãn $\left|z_1 - \frac{7}{4} - \frac{5i}{4}\right| = \left|z_1 - \frac{9}{4} - \frac{3i}{4}\right|$, $z_2 = a + bi$ với

$(\sqrt{3} + 2)a + b + 1 = 0$ Biết rằng $|z_1 + i| = 2|z_2 + i|$. Tìm GTNN của $P = |z_1 - 3 - i| + 2|z_2 - 3 - i|$

- A. $P = \sqrt{38}$ B. $P = \sqrt{39}$ C. $P = 2\sqrt{38}$ D. $P = 2\sqrt{39}$

Câu 36: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc + a + c = b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 1} + \frac{3}{c^2 + 1}$.

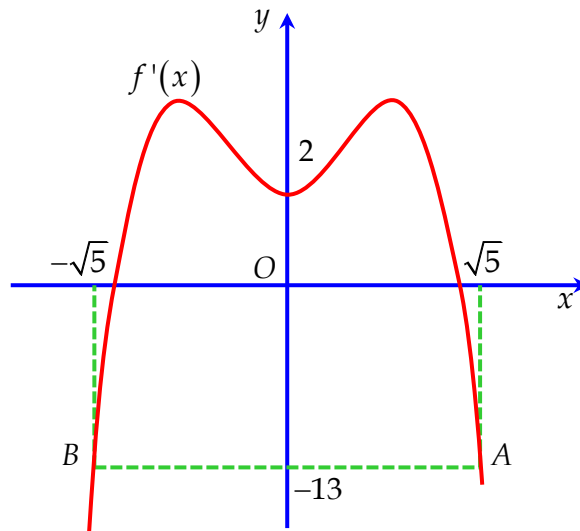
- A. $P_{\max} = \frac{5}{3}$. B. $P_{\max} = \frac{10}{3}$. C. $P_{\max} = \frac{7}{2}$. D. $P_{\max} = \frac{14}{3}$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f^3(x) \cdot [4(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x)] = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$, biết $f(0) = 0$. Khi đó $\int_0^{5\ln 2} f^5(x) dx$ bằng?

- A. $5\left(31 - \frac{25\ln^2 2}{2} - 5\ln 2\right)$ B. $\frac{1}{5}\left(31 - \frac{355\ln 2}{2}\right)$
C. $\frac{1}{5}\left(31 - \frac{25\ln^2 2}{2} - 5\ln 2\right)$ D. $5\left(31 - \frac{355\ln 2}{2}\right)$

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ với m là số thực. Để $g(x) \leq 0$ $\forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ thì điều kiện của m là

- A. $m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$ B. $m \leq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$
C. $m \leq \frac{2}{3}f(0) - 2\sqrt{5}$ D. $m \geq \frac{2}{3}f(-\sqrt{5}) - 4\sqrt{5}$

Câu 39: Cho 4 số nguyên a, b, c, d thay đổi thỏa: $1 \leq a < b < c < d \leq 50$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

- A. $P_{\min} = \frac{53}{175}$ B. $P_{\min} = \frac{61}{200}$ C. $P_{\min} = \frac{58}{175}$ D. $P_{\min} = \frac{73}{200}$

Câu 40: Cho các số tự nhiên từ 1 đến 100. Chọn ra 6 số bất kỳ. Tính xác suất để chọn ra 6 số sao cho chúng có thể xếp thành 1 cặp số cộng.

- A. $\frac{95}{7528752}$ B. $\frac{95}{1254792}$ C. $\frac{95}{2509584}$ D. $\frac{95}{3764376}$

Câu 41: Cho các số thực x, y thỏa mãn

$$\log_2(x-3) + 2\log_2(2-\sqrt{y+3}) = \log_2(y+3) - 2\log_2(\sqrt{x-3}-2).$$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy$ là?

- A. $\min P = -80$ B. $\min P = -91$ C. $\min P = -83$ D. $\min P = -63$

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn $f'(1) = g(1) = 1; f(2).g(2) = f(1)$ và đồng

thời $1 - f'(x)g'(x) = g(x)\left[f''(x) + \frac{1}{x}f'(x)\right], \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tính tích phân

$$I = \int_1^2 f(x)g'(x)dx?$$

- A. $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$ B. $-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$ C. $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ D. $-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

Câu 43: Có tối đa bao nhiêu hình vuông được tạo bởi các ô vuông của bàn cờ 8×8 khi bớt đi một ô vuông?

- A. 204 B. 63 C. 196 D. 150

Câu 44: Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$. Giả sử $BC = a, AA_1 = h$. Khi R ngắn nhất thì tam giác ABC

- A. Đều. B. Cân tại A. C. Vuông tại A. D. Nhọn

Câu 45: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = \sqrt{2}, |z_2| = \sqrt{5}$. Biết rằng $\begin{cases} z_1 - i = a + bi \\ z_2 - i = c + di \end{cases}$.

Tìm GTLN của biểu thức $P = \frac{1}{2}|ad - bc|$.

- A. $P = 1$ B. $P = 2$ C. $P = 3$ D. $P = 4$

Câu 46: Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp trong một mặt cầu bán kính R và thỏa mãn điều kiện $AB = CD, BC = AD, AC = BD$. M là một điểm thay đổi trong không gian. Đặt $P = MA + MB + MC + MD$, giá trị nhỏ nhất của P là?

- A. $P_{\min} = 2R\sqrt{3}$. B. $P_{\min} = 4R$. C. $P_{\min} = 3R$. D. $P_{\min} = \frac{16R}{3}$.

Câu 47: Cho 2 số thực x, y dương thỏa mãn điều kiện

$$\log_2^2 2x + \log_2^2 4y + (1 - \log_2 xy)^3 = \frac{11}{2}$$

Đặt $P = x^3 + y^3$. Hỏi P có bao nhiêu ước số nguyên?

- A. 1 B. 2 C. 5 D. 0

Câu 48: Cho phương trình $\sqrt{m+3}\sqrt{m+3(\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x})} = \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm?

- A. 10 B. 11 C. 9 D. 12

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\sin^6 x |\cos x| + \cos^6 x |\sin x|}{|\sin x| + |\cos x|}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị $x \in (-2019; 2019)$ thỏa mãn hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. 2453 B. 5142 C. 2571 D. 4906

Câu 50: Cho 2 hàm số $f(x) = (m-1)6^x - \frac{2}{6^x} + 2m+1, h(x) = (x-6^{1-x})$. Tìm tham số m để hàm số $g(x) = h(x).f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 0 với mọi $x \in [0; 1]$

- A. $m = 1$ B. $m \leq \frac{1}{2}$ C. $m \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ D. $m \geq 1$

Câu 51: Cho cấp số nhân $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$; trong đó $u_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Biết rằng $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 2018, T_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n} = 2019$ và $P = u_1.u_2.u_3.\dots.u_n > \frac{1}{100}$.

Hỏi số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn P là:

- A. 9295 B. 9296 C. 18592 D. 18591

Câu 52: Cho tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số có 5 năm chữ số phân biệt được lập từ A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S. Khi đó xác suất để chọn được số có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ sao cho $a_1 < a_2 < a_3$ và $a_3 > a_4 > a_5$ là?

- A. $\frac{5}{7}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{1}{24}$

Câu 53: Cho bất phương trình $\log_{3a} 11 + \left(\log_{\frac{1}{7}} \left(\sqrt{x^2 + 3ax + 10} + 4 \right) \right) \log_{3a} (x^2 + 3ax + 12) \geq 0$.

Giá trị thực của tham số a để bất phương trình trên có nghiệm duy nhất thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-1; 0)$ B. $(1; 2)$ C. $(0; 1)$ D. $(2; +\infty)$

Câu 54: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện

$$\frac{2}{2^{x-2y} + 1} = 2 - \log_{y^2+y-x^2-x} (x+y+1)$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_{x+y+1} (y-x).2^{2x-4y}$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{16}$

Câu 55: Gọi A là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A . Tính xác suất để chọn được số chia hết cho 7 và có chữ số hàng đơn vị bằng 2.

- A. $\frac{257}{90000}$ B. $\frac{257}{18000}$ C. $\frac{127}{90000}$ D. $\frac{127}{30000}$

Câu 56 : Có tất cả bao nhiêu cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện

$$\begin{cases} 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)} \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8 \end{cases} ?$$

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Câu 57: Cho (C_m) là đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3mx + 1$ (với $m < 0$ là tham số thực). Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C_m) . Đường thẳng d cắt đường tròn tâm $I(-1;0)$ bán kính $R=3$ tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất. Hỏi S có tất cả bao nhiêu phần tử?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 58: Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $2z \geq y^2$. Khi biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính $\log_2 \sqrt{xyz}$?

$$P = \log_2^2 xy + \log_2(x^3 y^3 + x^3 z^3) + \sqrt{-y^4 - xy^2 + 2zy^2 + 2xz}$$

- A. 3 B. 2 C. -1 D. 0

Câu 59: Cho phương trình $\sin 2x - \cos 2x + |\sin x + \cos x| - \sqrt{2 \cos^2 x + m} - m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm?

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 9.

Câu 60: Giả sử k là số thực lớn nhất sao cho bất đẳng thức $\frac{1}{\sin^2 x} < \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{k}{\pi^2}$ đúng với

$\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó giá trị của k là?

- A. 5 B. 2 C. 4 D. 6

LỜI GIẢI CHI TIẾT ĐỀ 3

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\sqrt{m+x} - \sqrt{\frac{m^2}{m+x}} = \sqrt{2m+x}$$

Có đúng một nghiệm nhỏ hơn 10.

A. 5

B. 4

C. 9

D. Vô số.

Lời giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} m+x-|m| = \sqrt{2m+x} \cdot \sqrt{m+x} \\ m+x > 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{Xét } m=0: (I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \\ x > 0 \end{cases} \text{ mọi } x > 0 \text{ đều là nghiệm của phương trình đã cho.}$$

$$\text{Xét } m > 0: (I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2m+x} \cdot \sqrt{m+x} \\ m+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = (2m+x)(m+x) \\ x \geq 0 \\ m+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2m}{3} < 0 \\ x \geq 0 \\ m+x > 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{Xét } m < 0: (I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+x = \sqrt{2m+x} \cdot \sqrt{m+x} \\ m+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+x)^2 = (2m+x)(m+x) \\ m+x > 0 \\ 2m+x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2m \\ 2m+x \geq 0 \Leftrightarrow x = -2m \\ m+x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Vì } x = -2m < 10 \Leftrightarrow m > -5 \xrightarrow[m < 0]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-4, -3, -2, -1\}.$$

Câu 2: Cho 2 dãy cấp số cộng $u_n = u_1; u_2; \dots; u_n$ có công sai d_1 và $v_n = v_1; v_2; \dots; v_n$ có công sai d_2 . Gọi tổng của n số hạng đầu của mỗi cấp số theo thứ tự là

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 7n + 1 \text{ và } T_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = 14n + 27. \text{ Tính tỉ số của } \frac{u_{11}}{v_{11}}$$

A. $\frac{5}{3}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{9}{4}$

D. $\frac{5}{4}$

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết, ta có } S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d_1]}{2} \text{ và } T_n = \frac{n[2v_1 + (n-1)d_2]}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{S_n}{T_n} = \frac{2u_1 + (n-1)d_1}{2v_1 + (n-1)d_2} = \frac{7n+1}{4n+27} & (1) \\ \frac{u_{11}}{v_{11}} = \frac{u_1 + 10d_1}{v_1 + 10d_2} = \frac{2u_1 + 20d_1}{2v_1 + 20d_2} & (2) \end{cases}$$

So sánh (1) và (2) bằng cách đồng nhất $\Rightarrow n-1=20 \Rightarrow n=21 \Rightarrow \frac{u_{11}}{v_{11}} = \frac{148}{111} = \frac{4}{3}$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=x, BC=y, AB=AC=SB=SC=1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất khi tổng $(x+y)$ bằng :

- A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. D. $4\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi H, K lần lượt là trung điểm BC, SA .

Đặt $BC=2x, SA=2y$.

$$\text{Có } SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \sqrt{1 - x^2}; AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Do đó $\triangle SAH$ cân tại H . Hay $HK \perp SA$.

$$\text{Có } d(BC, SA) = HK = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{BC \cdot SA \cdot d(BC, SA) \sin(BC, SA)}{6} = \frac{2}{3} xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + 1 - x^2 - y^2}{3} \right)^3} = \frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } x = y = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Rightarrow x = y = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x + y = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất của m để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} \log_2(x+y) + \log_3(xy+2) = 2 \\ x^3 + y^3 - 2xy = m \end{cases}$$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Đặt $\log_2(x+y) = a, \log_3(xy+2) = b$ khi đó $a+b=2$

$$\text{Lại có: } (x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow (2^a)^2 \geq 4(3^b - 2) = 4(3^{2-a} - 2) \Leftrightarrow 12^a + 8 \cdot 3^a - 36 \geq 0$$

Xét hàm $g(a) = 12^a + 8 \cdot 3^a - 36$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, $g(1) = 0 \Rightarrow a \geq 1$

$$m = (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 2xy = (2^a)^3 - 3(3^{2-a} - 2) \cdot 2^a - 2(3^{2-a} - 2) = f(a)$$

Hàm f đồng biến trên $[1; +\infty)$ suy ra $m \geq f(1) = 1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi phương trình thứ 2 có nghiệm

$$a \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 1$$

Câu 5: Cho $2\sin(a+b) = \cos(a-b), a-b \neq k\pi$. Tính giá trị của biểu thức

$$E = \frac{1}{1-2\sin 2a} + \frac{1}{1-2\sin 2b}$$

- A. $-\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. 0.

Lời giải

Để dàng chứng minh được: $\sin 2a = 2 \sin^2(a+b) + \cos(a+b) \sin(a-b)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 - 2 \sin 2a &= 1 - 4 \sin^2(a+b) - 2 \cos(a+b) \sin(a-b) \\ &= 1 - \cos^2(a-b) - 2 \cos(a+b) \sin(a-b) \\ &= \sin^2(a-b) - 2 \cos(a+b) \sin(a-b) = \sin(a-b) [\sin(a-b) - 2 \cos(a+b)] \end{aligned}$$

Tương tự ta có: $1 - 2 \sin 2b = \sin(a-b) [\sin(a-b) + 2 \cos(a+b)]$

Suy ra:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\sin(a-b)} \cdot \frac{2 \sin(a-b)}{\sin^2(a-b) - 4 \cos^2(a+b)} = \frac{2}{\sin^2(a-b) + 4 \sin^2(a+b) - 4} \\ &= \frac{2}{\sin^2(a-b) + \cos^2(a-b) - 4} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Câu 6: Cho dãy $\{u_n\}$ thỏa mãn $25.2^{2u_5+1} - 15.2^{u_1+u_5+2} + 5.2^{u_5} + 15.2^{u_1} - 4 = 0$ và $u_{n+1} = u_n + 8$.

Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 2019$.

A. 512.

B. 258.

C. 511.

D. 257.

Lời giải

Từ $u_{n+1} = u_n + 8 \Rightarrow (u_n)$ là CSC công sai $d = 8 \Rightarrow u_n = u_1 + 8(n-1) \Rightarrow u_5 = u_1 + 32$

Thay vào giả thiết ta được:

$$2[(5.2^{32} - 3)2^{u_1}]^2 + (5.2^{32} - 3)2^{u_1} - 4 = 0$$

Có dạng phương trình bậc 2 suy ra: $(5.2^{32} - 3)2^{u_1} = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} \Rightarrow u_1 = \log_2 \left[\frac{-1 + \sqrt{33}}{4(5.2^{32} - 3)} \right]$

$$u_n = u_1 + 8(n-1) > 2019 \Leftrightarrow n > \frac{2019 - u_1}{8} + 1 \approx 257,63 \Rightarrow n_{\min} = 258$$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Kí hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là ?

A. $\frac{\sqrt{2}+1}{9}$

B. $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$

D. $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$

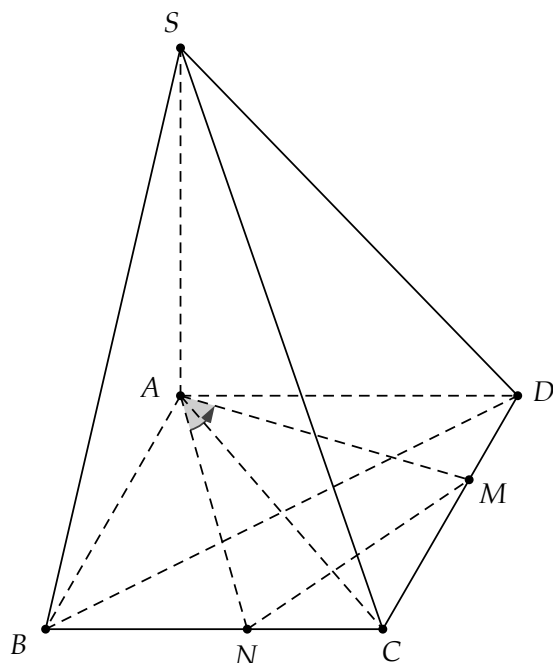
Lời giải

Đặt $DM = x, BN = y$ ta có

$$\tan 45^\circ = \tan(\angle DAM + \angle BAN) = \frac{\tan \angle DAM + \tan \angle BAN}{1 - \tan \angle DAM \cdot \tan \angle BAN} = \frac{x+y}{1-xy}. \text{ Suy ra } y = \frac{1-x}{1+x}.$$

$$\text{và } AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{x^2 + 1}, AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{1+y^2} = \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}.$$

$$\text{Vì vậy } V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{AMN} = \frac{1}{6} SA \cdot AM \cdot AN \sin 45^\circ = f(x) = \frac{x^2+1}{6(x+1)} \geq f(\sqrt{2}-1) = \frac{\sqrt{2}-1}{3}.$$



Câu 8: Cho một cặp số cộng : u_1, u_2, u_3, u_4 thỏa $|u_1 u_4 - u_2 u_3| \leq 6$. Tìm tập xác định D của hàm $f(x) = \sqrt{(x-u_1)(x-u_2)(x-u_3)(x-u_4)+9}$

- A. $D = (-\infty; 6)$ B. $D = (6; +\infty)$ C. $D = \mathbb{R}$ D. $D = (-6; 6)$

Lời giải

Theo tính chất của cặp số cộng, ta có : $u_1 + u_4 = u_2 + u_3$

Do đó $(x-u_1)(x-u_2)(x-u_3)(x-u_4) = [x^2 - (u_1 + u_4)x + u_1 u_4][x^2 - (u_2 + u_3)x + u_2 u_3]$ (*)

Đặt $t = x^2 - (u_1 + u_4)x = x^2 - (u_2 + u_3)x$, khi đó :

$$(*) \Leftrightarrow f(t) = (t + u_1 u_4)(t + u_2 u_3) + 9 = t^2 + (u_1 u_4 + u_2 u_3)t + u_1 u_4 u_2 u_3 + 9$$

Với : $\Delta_t = (u_1 u_4 + u_2 u_3)^2 - 4u_1 u_2 u_3 u_4 - 36 = (u_1 u_4 - u_2 u_3)^2 - 36$.

Rõ ràng $|u_1 u_4 - u_2 u_3| \leq 6 \Rightarrow \Delta_t < 0 \Leftrightarrow f(t) > 0, \forall t \Rightarrow f(x)$ có nghĩa với mọi x.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (\sin \alpha)x + |\sin \alpha| - 1}{x + 1} (C_\alpha)$. Tìm α để (C_α) sao cho khoảng cách giữa 2 điểm cực đại và cực tiểu là lớn nhất ?

- A. $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$. B. $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. C. $\alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. D. $\alpha = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x^2 + (\sin \alpha)x + |\sin \alpha| - 1}{x + 1} = \frac{U(x)}{V(x)}$ có miền xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và đồng thời ta

có $y' = \frac{x^2 + 2x + (\sin \alpha)x - |\sin \alpha| + 1}{(x + 1)^2}$. Điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu là $\Delta'_{y'} > 0$ hay

$$|\sin \alpha| - \sin \alpha > 0 \Leftrightarrow \sin \alpha < 0.$$

Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ các điểm cực đại, cực tiểu của (C_α) thì khi đó:

$$y_{\max} = \frac{U'(x_1)}{V'(x_1)} = 2x_1 + \sin \alpha, y_{\min} = \frac{U'(x_2)}{V'(x_2)} = 2x_2 + \sin \alpha$$

Gọi $A(x_1, 2x_1 + \sin \alpha), B(x_2, 2x_2 + \sin \alpha)$ là các điểm cực đại, cực tiểu tương ứng của (C_α) ,

khi đó x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y' = 0$ nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = \sin \alpha - |\sin \alpha| + 1 = 2 \sin \alpha + 1 \end{cases}$

$$\text{Ta có } AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 5(x_2 - x_1)^2 = -40 \sin \alpha$$

Do vậy AB lớn nhất khi $\alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng 1. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Mặt phẳng (P) thay đổi luôn luôn đi qua AG cắt BC, BD lần lượt tại I, K . Tính thể tích nhỏ nhất của $ABIK$.

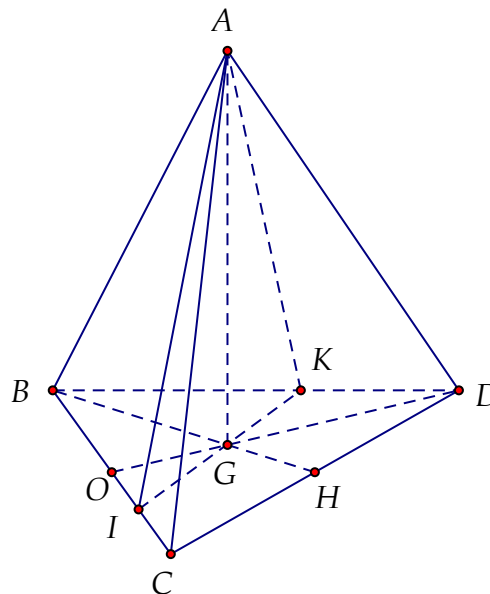
A. $\frac{\sqrt{2}}{27}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{18}$.

C. $\frac{4}{9}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{36}$.

Lời giải



Đặt $BK = x, BI = y$

Sử dụng công thức tính tỷ số thể tích ta có $\frac{V_{A.BKG}}{V_{A.BHD}} = \frac{2V_{A.BKG}}{V_{A.BCD}} = \frac{2x}{3}, \frac{2V_{A.BGI}}{V_{A.BCD}} = \frac{2y}{3}, \frac{V_{A.BIK}}{V_{A.BCD}} = xy$

Mặt khác ta có $V_{A.BHD} = V_{A.BCH} = \frac{1}{2} V_{A.BCD}$ nên $\frac{2(x+y)}{6} = xy \geq \frac{4\sqrt{xy}}{6} \Rightarrow xy \geq \frac{4}{9}$

Ta có $V_{A.BIK} = \frac{xy\sqrt{2}}{12} \geq \frac{\sqrt{2}}{27}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{2}{3}$. Chọn đáp án A.

Câu 11: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 2 - 3i| = \sqrt{17}; |z_2 + 1| = \sqrt{5}$.

Biết rằng $z_1 - 1 + i = k(z_2 - 1 + i) (k < 0)$. Tìm k khi $P = |z_1 - z_2|$ đạt giá trị lớn nhất.

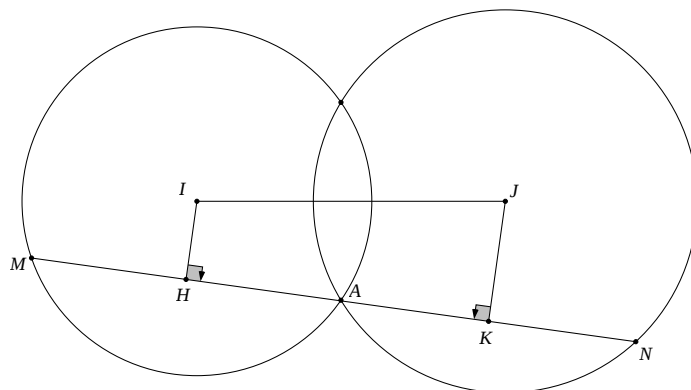
A. $k = 1$

B. $k = -2$

C. $k = -3$

D. $k = -5$

Lời giải



Gọi $M(z_1), N(z_2), I(2;3), J(0;-1)$. Theo giả thiết ta có:

- Điểm M thuộc đường tròn (C_1) tâm I bán kính $R_1 = \sqrt{17}$
- Điểm N thuộc đường tròn (C_2) tâm J bán kính $R_2 = \sqrt{5}$

Ta thấy rằng số phức $z = 1 - i$ đều thỏa mãn $\begin{cases} |z - 2 - 3i| = \sqrt{17} \\ |z + 1| = \sqrt{5} \end{cases}$. Điều này chứng tỏ $A(1;-1)$

là giao điểm của $(C_1), (C_2)$ và theo giả thiết ta suy ra được A, M, N thẳng hàng.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của I, J lên MN $\Rightarrow P = MN = 2HK \leq 2IJ$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $MN \parallel IJ$. Khi đó phương trình MN đi qua điểm A và có vector pháp tuyến $\vec{IJ}(-3;-3)$ là $MN: x - y - 2 = 0$. Từ đây suy ra điểm $M(6;4), N(0;-2)$

Vậy $k = \frac{z_1 - 1 + i}{z_2 - 1 + i} = \frac{6 + 4i - 1 + i}{-2i - 1 + i} = -5$. Chọn ý D.

Câu 12: Gọi A là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A. Tính xác suất để chọn được số chia hết cho 7 và có chữ số hàng đơn vị bằng 2.

A. $\frac{257}{90000}$

B. $\frac{257}{18000}$

C. $\frac{127}{90000}$

D. $\frac{127}{30000}$

Lời giải

Gọi số tự nhiên gồm 5 chữ số là $\overline{abcde}$

Chọn $a \neq 0$ có 9 cách.

Chọn b, c, d, e mỗi số có 10 cách.

Nên $|A| = 9 \cdot 10^4$.

Gọi B là biến cố "chọn được tự nhiên gồm 5 chữ số chia hết cho 7 và có chữ số hàng đơn vị bằng 2".

Gọi số tự nhiên gồm 5 chữ số chia hết cho 7 và có chữ số hàng đơn vị bằng 2 là $\overline{abcd2}$

Ta có $\overline{abcd2} = 10 \cdot \overline{abcd} + 2 = 7 \cdot \overline{abcd} + 3 \cdot \overline{abcd} + 2$

$\overline{abcd}2$ chia hết cho 7 nên $3\overline{abcd} + 2$ chia hết cho 7 hay $3\overline{abcd} + 2 = 7t, (t \in \mathbb{Z})$

$$3\overline{abcd} + 2 = 7t \Leftrightarrow \overline{abcd} = \frac{7t-2}{3} \Leftrightarrow \overline{abcd} = 2t + \frac{t-2}{3}$$

Suy ra $(t-2):3$ hay $t-2 = 3n \Leftrightarrow t = 3n+2$

Khi đó $\overline{abcd} = 7n+4$ mà $1000 \leq \overline{abcd} \leq 9999$ nên $1000 \leq 7n+4 \leq 9999 \Leftrightarrow \frac{996}{7} \leq n \leq \frac{9995}{7}$

Mặt khác n là số nguyên $\Rightarrow n \in \{143; 144; 145; \dots; 1427\}$

Nên $|B| = 1285$.

$$\text{Khi đó, } P(B) = \frac{1285}{9 \cdot 10^4} = \frac{257}{18000}.$$

Câu 13: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-i|=5$. Tìm GTLN của $P = 2|z-8i| - |z-7-9i|$.

A. $P = \sqrt{109}$

B. $P = -1 + \sqrt{109}$

C. $P = \sqrt{109} - 2$

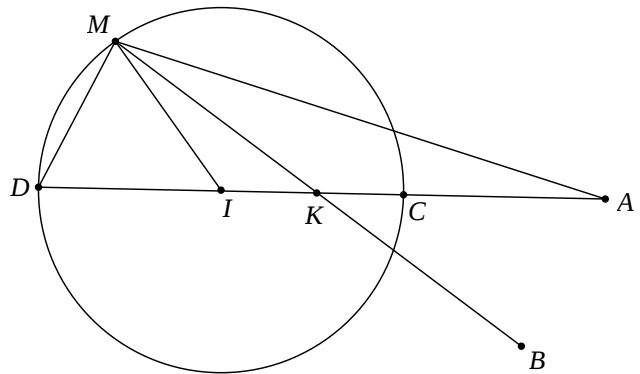
D. $P = \sqrt{109} + 1$

Lời giải

Gọi $I(1;1), A(7;9), B(1;8)$.

Yêu cầu bài toán chuyển về tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2MB - MA$.

Ý tưởng cho bài toán này là ta sẽ sử dụng bất đẳng thức tam giác, nhưng do có số 2 ở giữa nên ta sẽ nảy ý tưởng tìm một điểm K cố định thỏa mãn $MA = 2MK$. Giả sử tồn tại một điểm K như thế thì ta có:



$$\begin{aligned} MA = 2MK &\Rightarrow \overline{MA}^2 = 4\overline{MK}^2 \Leftrightarrow (\overline{MI}^2 + \overline{IA}^2) = 4(\overline{MI}^2 + \overline{IK}^2) \\ &\Leftrightarrow 3MI^2 + 4IK^2 - IA^2 + 2\overline{MI}(4\overline{IK} - \overline{IA}) = 0 \end{aligned}$$

Để tồn tại điểm K thì $\begin{cases} 3MI^2 + 4IK^2 - IA^2 = 0 \\ 4\overline{IK} - \overline{IA} = 0 \end{cases} \Rightarrow 3\left(R^2 - \frac{IA^2}{4}\right) = 0$. Dễ thấy điều này luôn

đúng do đó luôn tồn tại điểm K cố định thỏa mãn $MA = 2MK$ và điểm K này nằm trên IC .

Lấy điểm K thuộc IC sao cho $IK = \frac{R}{2}$.

Ta có: $IK \cdot IA = IM^2 \Rightarrow \triangle IAM \sim \triangle IMK (c.g.c) \Rightarrow MA = 2MK$

Vậy khi M thay đổi thì $MA = 2MK$. Theo bất đẳng thức tam giác thì ta có:

$$P = 2MB - MA = 2(MB - MK) \leq 2BK$$

Ta có: $K\left(\frac{5}{2}; 3\right) \Rightarrow P = 2BK = \sqrt{109}$.

Câu 14: Cho số phức z thỏa mãn $4|z| = |z - i - 1| + 2|z + i + 1|$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 2 + 2i|$

- A. $P = \frac{\sqrt{30}}{3} + 2\sqrt{2}$ B. $P = \frac{\sqrt{30}}{4} + 3\sqrt{2}$ C. $P = \frac{\sqrt{30}}{5} + 4\sqrt{2}$ D. $P = \frac{\sqrt{30}}{6} + 5\sqrt{2}$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có:

$$16|z|^2 = (|z - i - 1| + 2|z + i + 1|)^2 \leq (1 + 4)(|z - i + 1|^2 + |z + i + 1|^2) = 5(2|z|^2 + 2|i + 1|^2)$$

Từ đây sử dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối ta có $\Rightarrow P \leq \frac{\sqrt{30}}{3} + 2\sqrt{2}$.

Câu 15: Biết tổng $S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$. Giá trị nhỏ nhất của n để

$$S_n > \frac{3^{99} + 2n4^n}{4^n}, n \in \mathbb{N}^*$$

- A. 41 B. 40 C. 51 D. 50

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_n &= \left(2^2 + 2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(2^4 + 2 + \frac{1}{2^4}\right) + \dots + \left(2^{2n} + 2 + \frac{1}{2^{2n}}\right) \\ &= (2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2n}) + 2n + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2n}}\right) \end{aligned}$$

Áp dụng công thức tính tổng của n số hạng đầu của một cấp số nhân: $S_n = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$:

$$S_n = 4 \cdot \frac{4^n - 1}{3} + 2n + \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} = 2n + \frac{(4^n - 1)(4^{n+1} + 1)}{3 \cdot 4^n}$$

Theo đề bài ta có:

$$2n + \frac{(4^n - 1)(4^{n+1} + 1)}{3 \cdot 4^n} > \frac{3^{99} + 2n4^n}{4^n} \Leftrightarrow (4^n - 1)(4^{n+1} + 1) > 3^{100} \Rightarrow n > 39,124 \dots \Rightarrow n_{\min} = 40$$

Câu 16: Cho 3 số phức z_0, z_1, z_2 thỏa mãn đồng thời $\begin{cases} |z - 2| + |z + 2| = 8 \\ z_1 - z_3 = z_3 - z_2 \end{cases}$, với $z_3 = -1 - \frac{3}{2}i$. Biết

rằng $\begin{cases} z_0 - z_1 = a + bi \\ z_0 - z_2 = c + di \end{cases} (a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{2}|ad - bc|$

- A. $P = 17$ B. $P = 18$ C. $P = 19$ D. $P = 20$

Lời giải

Gọi $A(z_1), B(z_2), M(z_3), C(z_0)$. Theo giả thiết ta có $z_1 - z_3 = z_3 - z_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, suy ra

được A đối xứng với B qua điểm M. Mặt khác $\begin{cases} z_0 - z_1 = a + bi \\ z_0 - z_2 = c + di \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CA} = (a; b) \\ \overrightarrow{CB} = (c; d) \end{cases}$.

Vậy $P = \frac{1}{2}|ad - bc| = S_{ABC}$. Do $AB = |z_1 - z_2| = 3\sqrt{5}$ nên để diện tích lớn nhất thì $d(C; AB)_{\max}$.

Gọi $A(x; y), B(-2 - x; -3 - y)$ mà A, B thuộc elip nên ta có:

$$A(-4; 0), B(2; -3) \Rightarrow AB: x + 2y + 4 = 0$$

Sử dụng tiếp giả thiết $|z - 2| + |z + 2| = 8$ ta suy ra điểm C thuộc vào elip có phương trình là

$$(E): \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 1 \Rightarrow C(4\sin\varphi; 2\sqrt{3}\cos\varphi)$$

$$\text{Ta có } d(C; AB) = \frac{8}{\sqrt{5}} \left| \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{12\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow P_{\max} = 18$$

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Gọi $(C_1), (C_2), (C_3)$ lần lượt là đồ thị của các hàm số $y = f(x), y = f(f(x)), y = f(x^2 + 1)$. Các tiếp tuyến $(C_1), (C_2)$ tại điểm $x_0 = 2$ có phương trình lần lượt là $y = 2x + 1, y = 4x + 3$, hỏi tiếp tuyến của (C_3) tại điểm $x_0 = 2$ đi qua điểm nào sau đây?

- A. $Q(2; -11)$ B. $M(-2; 11)$ C. $N(-2; -21)$ D. $P(2; -21)$

Lời giải

$$\text{Theo giả thiết ta có } \begin{cases} f'(x_0) = 2 \\ f(x_0) = 5 \\ f'(x_0) \cdot f'(f(x_0)) = 4 \\ f(f(x_0)) = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 2 \\ f(x_0) = 5 \\ f'(5) = 2 \\ f(5) = 11 \end{cases}$$

Do đó hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ của đồ thị hàm số (C_3) là $k = 2x_0 \cdot f'(x_0^2 + 1) = 4f'(5) = 8$ từ đây suy ra phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C_3) là $y = 8(x - 2) + 11 = 8x - 5$.

Câu 18: Cho dãy (x_n) thỏa mãn $x_1 = 5, x_{n+1} = x_n^2 - 2, \forall n \geq 1$. Tính giá trị của

$$M = \lim \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)$$

- A. $M = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$ B. $M = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$ C. $M = \frac{3 + \sqrt{31}}{3}$ D. $M = \frac{3 - \sqrt{15}}{3}$

Lời giải

Đầu tiên dễ thấy $x_n \rightarrow \infty$

$$\text{Ta có } x_{n+1}^2 = (x_n^2 - 2)^2 \Rightarrow x_{n+1}^2 - 4 = x_n^2(x_n^2 - 4) = \dots = (x_1 \cdot x_2 \dots x_n)^2 (x_1^2 - 4)$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_1 \cdot x_2 \dots x_n} = \sqrt{\frac{4}{(x_1 \cdot x_2 \dots x_n)^2} + 21} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 \cdot x_2 \dots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4}{(x_1 \cdot x_2 \dots x_n)^2} + 21} = \sqrt{21}$$

$$\text{Lại có } \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} = \frac{x_n^2 - 2}{x_1 x_2 \dots x_n} = \frac{x_n}{x_1 \dots x_{n-1}} - \frac{2}{x_1 x_2 \dots x_n} = \dots = x_1 - 2 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} = \frac{1}{2} \left(x_1 - \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)$$

$$\Rightarrow \lim \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right) = \frac{1}{2} \left(5 - \lim \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} \right) = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$$

Câu 19: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a; b)$ thỏa mãn $0 < a, b \leq 100$ sao cho đồ thị của 2 hàm số $y = \frac{1}{a^x} + \frac{1}{b}$ và $y = \frac{1}{b^x} + \frac{1}{a}$ cắt nhau tại đúng 2 điểm phân biệt?

A. 9704

B. 9702

C. 9698

D. 9700

Lời giải

Ta thấy $a > 1; b > 1$, nếu $a = b$ 2 đường cong trùng nhau nên có vô số điểm chung, loại.

Vì vai trò của a, b như nhau nên ta chỉ cần tìm cặp số nguyên $(a; b)$ với $a > b > 1$ sao cho

phương trình $\frac{1}{a^x} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b^x} + \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a^x} - \frac{1}{b^x} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{a^x} - \frac{1}{b^x} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow f'(x) = -\left(\frac{1}{a}\right)^x \ln a + \left(\frac{1}{b}\right)^x \ln b, f(1) = 0$

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \log_{\frac{b}{a}} \left(\frac{\ln b}{\ln a} \right), f'(x) > 0$ khi $x > x_0, f'(x) < 0$ khi $x < x_0$.

Nếu $x_0 = 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{b}{a}} \left(\frac{\ln b}{\ln a} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b} \Leftrightarrow (a; b) = (4; 2)$.

Chú ý xét hàm số $f(t) = \frac{\ln t}{t} \Rightarrow \frac{\ln 3}{3} > \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4} > \frac{\ln 5}{5} > \dots > \frac{\ln 100}{100}$

Khi đó $f(x) \geq f(x_0) = f(1) = 0 \Rightarrow f(x)$ có đúng 1 nghiệm $x_0 = 1$

Nếu $x_0 \neq 1$, khi đó vẽ bảng biến thiên cho hàm số ta thấy phương trình $f(x) = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Với mỗi $b = k \in \{2, 3, \dots, 99\} \Rightarrow a \in \{k+1, \dots, 100\}$ tức có $100 - k$ cách chọn a .

Vậy có $\sum_{k=2}^{99} (100 - k) = 4851$ cặp $(a; b) (a > b > 1)$ và loại đi cặp $(4; 2)$ ta có 4850 cặp.

Xét tương tự với trường hợp $b > a > 1$ ta có tất cả 9700 cách chọn.

Câu 20: Xét các hình chóp $S.ABCD$ thỏa mãn điều kiện: đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng a . Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất V_0 khi cosin góc giữa đường thẳng SB

và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\sqrt{\frac{p}{q}}$, trong đó p, q là các số nguyên dương và phân số $\frac{p}{q}$ là tối giản. Tính $T = (p + q) \cdot V_0$.

A. $T = 3\sqrt{3}a^3$.

B. $T = \sqrt{6}a^3$.

C. $T = 2\sqrt{3}a^3$.

D. $T = \frac{5\sqrt{3}}{2}a^3$.

Lời giải

Ta có $BC \perp AB; BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Khi đó $AH \perp (SBC)$ và $d(A, (SBC)) = AH$.

Ta có góc giữa hai đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc SBA .

Đặt $SBA = \alpha$. Theo giả thiết ta có $AB = \frac{a}{\sin \alpha}; SA = \frac{a}{\cos \alpha}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3 \sin^2 \alpha \cos \alpha} a^3$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \cdot 2 \cos^2 \alpha \leq \left(\frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{3} \right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow \sin^2 \alpha \cos \alpha \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Do đó $V \geq \frac{\sqrt{3}}{2} a^3$. Dấu bằng xảy ra khi $\sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{2} a^3$ khi $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$

Suy ra $V_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^3; p = 1, q = 3 \Rightarrow T = (p + q)V_0 = 2\sqrt{3}a^3$.

Câu 21: Cho số phức z_1, z_2, z_3 lần lượt thỏa mãn $z_1 = 3 + i$, z_2 là số thuần ảo với thuần ảo không âm, z_3 là số thực không âm. Biết rằng $|z_2 - z_3| = \sqrt{|z_2 - z_1|^2 + |z_3 - z_1|^2}$. Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_2 - z_1| |\overline{z_3 - z_1}|$. Khi đó M.n bằng?

- A. $M.n = 90$ B. $M.n = 80$ C. $M.n = 100$ D. $M.n = 70$

Lời giải

Gọi $M(3;1), A(z_2), B(z_3)$. Theo giả thiết ta có:

$$|z_2 - z_3| = \sqrt{|z_2 - z_1|^2 + |z_3 - z_1|^2} \Rightarrow AB^2 = MA^2 + MB^2 \Rightarrow MA \perp MB$$

Do z_2 là số thuần ảo với thuần ảo không âm, z_3 là số thực không âm nên ta có điều kiện

là $A(a;0), B(0;b) (a, b \geq 0)$. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow b = 10 - 3a \left(0 \leq a \leq \frac{10}{3} \right)$

Ta có: $P = |z_2 - z_1| |\overline{z_3 - z_1}| = MA \cdot MB = 3(a^2 - 6a + 10) \in [3; 30]$.

Vậy $\min P = 3, \max P = 30$

Câu 22: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx)$. Tìm giá

trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x + y + z)^3}$.

- A. 14 B. 16 C. 12 D. 18

Lời giải

Ta có: $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx) \Leftrightarrow 5(x + y + z)^2 = 9(xy + 2yz + zx) + 10(xy + yz + zx)$

$$\Leftrightarrow 5(x+y+z)^2 = 19x(y+z) + 28yz \leq 19x(y+z) + 7(y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{x}{y+z} + 1\right)^2 \leq 19\frac{x}{y+z} + 7 \Leftrightarrow \frac{x}{y+z} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 2(y+z)$$

$$\text{Mặt khác ta có: } y^2 + z^2 \geq \frac{(y+z)^2}{2} \Rightarrow P \leq \frac{2(y+z)}{\frac{(y+z)^2}{2}} - \frac{1}{(2(y+z)+y+z)^3} = \frac{4}{y+z} - \frac{1}{27(y+z)^3}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{4}{t} - \frac{1}{27t^3}, t > 0 \Rightarrow \max f(t) = 16 \Rightarrow P_{\max} = 16$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = z = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Câu 23: Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Giả sử m là tích số chấm mà con súc sắc xuất hiện sau hai lần gieo. Tính xác suất sao cho hàm số $y = (m-3)x^2 + (41-2m)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{17}{36}$

Lời giải

Ta có $\Omega = \{(a; b) \mid a, b \in \mathbb{N}; 1 \leq a, b \leq 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 36$.

Gọi biến cố A: "hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$."

Ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: $m-3=0 \Leftrightarrow m=3$, ta được: $y=35x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên y cũng đồng biến trên $(0; +\infty)$.

+ Trường hợp 2: $m \neq 3$: Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{2a} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 > 0 \\ 41-2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m \leq \frac{41}{2}$$

Từ hai trường hợp ta suy ra $3 \leq m \leq 20$.

$$\Rightarrow \bar{A} = \{(1;1), (1;2), (2;1), (4;6), (6;4), (5;5), (5;6), (6;5), (6;6)\} \Rightarrow n(\bar{A}) = 9.$$

$$\Rightarrow p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{3}{4}.$$

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$. Biết rằng:

$$f(2) + f(3) + \dots + f(2018) = \ln a - \ln b + \ln c - \ln d$$

trong đó a, c, d là các số nguyên tố và $a < b < c < d$. Tính $P = a + b + c + d$

A. 1986

B. 1698

C. 1689

D. 1989

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = \ln(x-1) + \ln(x+1) - 2\ln x$$

Khi đó:

$$f(2) = \ln 1 + \ln 3 - 2\ln 2$$

$$f(3) = \ln 2 + \ln 4 - 2\ln 3$$

$$f(4) = \ln 3 + \ln 5 - 2\ln 4$$

.....

$$f(2017) = \ln 2016 + \ln 2018 - 2\ln 2017$$

$$f(2018) = \ln 2017 + \ln 2019 - 2\ln 2018$$

$$\Rightarrow f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(2017) + f(2018)$$

$$= -\ln 2 - \ln 2018 + \ln 2019 = \ln 3 - \ln 4 + \ln 673 - \ln 1019$$

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. $\frac{5}{4} < m \leq 2$

B. $-2 < m < \frac{5}{4}$

C. $-\frac{5}{4} < m < 2$

D. $\frac{5}{4} < m < 2$

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 2(2m-1)x + 2 - m$$

Hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 - 3(2-m) > 0 \\ \frac{2(2m-1)}{3} > 0 \\ \frac{2-m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ m > \frac{1}{2} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2$$

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn đẳng thức:

$$\frac{3x^3 f(x)}{[f'(x)]^2 + x f'(x) + x^2} = f'(x) - x, \forall x \in [1; 2] \text{ và } f(1) = \frac{7}{3}. \text{ Tính } f(2).$$

A. $f(2) = \frac{7\sqrt{7}-1}{3}$

B. $f(2) = \frac{7\sqrt{7}+1}{3}$

C. $f(2) = \frac{2\sqrt{7}-1}{3}$

D. $f(2) = \frac{2\sqrt{7}+1}{3}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} \frac{3x^3 f(x)}{[f'(x)]^2 + x f'(x) + x^2} = f'(x) - x &\Leftrightarrow 3x^3 f(x) = [f'(x) - x][f'(x)^2 + x f'(x) + x^2] \\ &\Leftrightarrow 3x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3 \Leftrightarrow x^3 [3f(x) + 1] = [f'(x)]^3 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{3f(x)+1}} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{3f(x)+1}} dx &= \int_1^2 x dx = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_1^2 [3f(x)+1]^{\frac{1}{3}} d(3f(x)+1) = \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} [3f(x)+1]^{\frac{2}{3}} \Big|_1^2 &= \frac{3}{2} \Leftrightarrow [3f(2)+1]^{\frac{2}{3}} - [3f(1)+1]^{\frac{2}{3}} = 3 \\ \Leftrightarrow [3f(2)+1]^{\frac{2}{3}} &= 7 \Rightarrow f(2) = \frac{7\sqrt[3]{7}-1}{3} \end{aligned}$$

Câu 27: Cho hàm số đa thức bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị đi qua các điểm sau $A(2;4), B(3;9), C(4;16)$. Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị tại lần lượt tại các điểm D, E, F (D khác A và B , E khác A và C , F khác B và C). Biết rằng tổng các hoành độ của D, E, F bằng 24. Tính $f(0)$.

- A. $f(0)=-2$ B. $f(0)=0$ C. $f(0)=\frac{24}{5}$ D. $f(0)=2$

Lời giải

Giả sử $f(x)=a(x-2)(x-3)(x-4)+x^2$ ($a \neq 0$).

Ta có AB qua $A(2;4)$ và nhận $\overline{AB}=(1;5)$ là một VTCP

$$\Rightarrow AB: 5(x-2)-(y-4)=0 \Leftrightarrow y=5x-6.$$

Tương tự $AC: y=6x-8$ và $BC: y=7x-12$.

Hoành độ của điểm D là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} a(x-2)(x-3)(x-4)+x^2 &= 5x-6 \Leftrightarrow a(x-2)(x-3)(x-4)=-(x-2)(x-3) \\ \Rightarrow a(x-4) &=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{a}+4. \end{aligned}$$

Tương tự, hoành độ của điểm E và F lần lượt là $x=-\frac{1}{a}+3$ và $x=-\frac{1}{a}+2$.

$$\text{Bài ra ta có } \left(-\frac{1}{a}+2\right)+\left(-\frac{1}{a}+3\right)+\left(-\frac{1}{a}+4\right)=24 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{5}.$$

$$\text{Do đó } f(0)=a \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)+0^2=\frac{24}{5}.$$

Câu 28: Cho hàm số $g(x)=f(\sin^2 x)f(\cos^2 x)$ trong đó f thỏa mãn điều kiện:

$$f(\cot x)=\sin 2x+\cos 2x, \quad \forall x \in [0; \pi].$$

Tích của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ bằng:

- A. $\frac{1}{25}$. B. $\frac{1}{5}$. C. $-\frac{1}{5}$. D. $-\frac{1}{25}$.

Lời giải

Đặt $t=\cot x$

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{2 \cot x}{1+\cot^2 x} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos 2x = \frac{t^2-1}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2t}{1+t^2} + \frac{t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2+2t-1}{t^2+1} \text{ hay } f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{(\sin^4 x + 2\sin^2 x - 1)(\cos^4 x + 2\cos^2 x - 1)}{(1 + \sin^4 x)(1 + \cos^4 x)} = \frac{\sin^4 x \cdot \cos^4 x + 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 2}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + 2}$$

Đặt $u = \sin^2 x \cdot \cos^2 x \Rightarrow 0 \leq u \leq \frac{1}{4}$, khi đó phương trình trở thành:

$$h(u) = \frac{u^2 + 8u - 2}{u^2 - 2u + 2}, u \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$$

Dễ dàng tìm được $\max_{u \in \left[0; \frac{1}{4}\right]} h(u) = h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{25}$ và $\min_{u \in \left[0; \frac{1}{4}\right]} h(u) = h(0) = -1$

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ thỏa mãn $f(1) = -1, f(4) = -8$ và đồng thời $[f'(x)]^2 \sqrt{x^3} - f(x) = 9\sqrt{x^3} - \sqrt{x} - 3x, \forall x \in [1;4]$. Tích phân $\int_1^4 f(x)dx$ bằng

- A. -7 B. $-\frac{89}{6}$ C. $-\frac{79}{6}$ D. -8

Lời giải

Giả thiết đã cho tương đương $[f'(x)]^2 - \frac{f(x)}{\sqrt{x^3}} = 9 - \frac{1}{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1;4]$ ta được:

$$\int_1^4 [f'(x)]^2 dx - \int_1^4 \frac{f(x)}{\sqrt{x^3}} dx = \int_1^4 \left(9 - \frac{1}{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx = 21 - 2\ln 2$$

Sử dụng tích phân từng phần ta được:

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{f(x)}{\sqrt{x^3}} dx &= \int_1^4 f(x) d\left(-\frac{2}{\sqrt{x}} + a\right), a \text{ sẽ được xác định sau} \\ &= \left(a - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) f(x) \Big|_1^4 - \int_1^4 \left(a - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) f'(x) dx = 7a - 6 + 2 \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{a}{2}\right) f'(x) dx \end{aligned}$$

Từ đây ta có đẳng thức:

$$\begin{aligned} \int_1^4 (f'(x))^2 dx + 7a - 6 - 2 \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{a}{2}\right) f'(x) dx &= 21 - 2\ln 2 \\ \Leftrightarrow \int_1^4 \left(f'(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{a}{2}\right)^2 dx - 2\ln 2 + 9a - \frac{3a^2}{4} - 6 &= 21 - 2\ln 2 \end{aligned}$$

Ta dễ tìm được $a = 3$ để $-2\ln 2 + 9a - \frac{3a^2}{4} - 6 = 21 - 2\ln 2$, khi đó

$$f'(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{x}} - 3, \forall x \in [1;4] \Rightarrow f(x) = 2\sqrt{x} - 3x$$

$$\text{Vậy } \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 (2\sqrt{x} - 3x) dx = -\frac{79}{6}$$

Câu 30: Cho phương trình $\log_2(2x^2 + 2x + 2) = 2^{y^2} + y^2 - x^2 - x$. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$, với $0 < x < 500$ thỏa mãn phương trình đã cho?

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\begin{aligned}\log_2(2x^2 + 2x + 2) &= 2^{y^2} + y^2 - x^2 - x \Leftrightarrow \log_2(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1 = 2^{y^2} + y^2 \\ &\Leftrightarrow 2^{\log_2(x^2 + x + 1)} + \log_2(x^2 + x + 1) = 2^{y^2} + y^2 \Leftrightarrow \log_2(x^2 + x + 1) = y^2\end{aligned}$$

Do $0 < x < 500 \Rightarrow y^2 = \log_2(x^2 + x + 1) \in (0; 18) \Rightarrow 0 < y < 5$. Vậy ta có 4 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu đề bài đồng nghĩa có 4 cặp số (x, y) thỏa mãn phương trình đã cho.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A' là điểm trên SA sao cho $\overline{A'A} = \frac{1}{2}\overline{A'S}$. Mặt phẳng (α) qua A' cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' .

Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} - \frac{SC}{SC'}$.

- A. $T = \frac{3}{2}$ B. $T = \frac{1}{3}$ C. $T = 2$ D. $T = \frac{1}{2}$

Lời giải

Gọi O là giao của AC và BD . Ta có O là trung điểm của đoạn thẳng AC, BD .

Các đoạn thẳng $SO, A'C', B'D'$ đồng quy tại I .

$$\begin{aligned}\text{Ta có } S_{SA'I} + S_{SCI} &= S_{SA'C'} \Leftrightarrow \frac{S_{SA'I}}{S_{SAC}} + \frac{S_{SCI}}{S_{SAC}} = \frac{S_{SA'C'}}{S_{SAC}} \Leftrightarrow \frac{S_{SA'I}}{2S_{SAO}} + \frac{S_{SCI}}{2S_{SCO}} = \frac{S_{SA'C'}}{S_{SAC}} \\ &\Leftrightarrow \frac{SA'}{2SA} \cdot \frac{SI}{SO} + \frac{SC'}{2SC} \cdot \frac{SI}{SO} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \Leftrightarrow \frac{SI}{2SO} \left(\frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC} \right) = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \Leftrightarrow \frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC} = 2 \cdot \frac{SO}{SI}.\end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 2 \cdot \frac{SO}{SI}. \text{ Suy ra: } \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} - \frac{SC}{SC'} = \frac{SA}{SA'} = \frac{3}{2}.$$

Câu 32: Gọi q là công bội của một cấp số nhân, biết tổng ba số hạng đầu bằng $16\frac{4}{9}$, đồng thời theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng. Hỏi q thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $q \in (3; 4)$ B. $q \in (1; 2)$ C. $q \in (2; 3)$ D. $q \in (0; 1)$

Lời giải

Gọi: u_1, u_2, u_3 là 3 số hạng đầu tiên của cấp số nhân, với công bội q . Gọi (v_n) là cấp số cộng tương ứng với công sai là d . Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 16\frac{4}{9} \\ u_1 = v_1 \\ u_2 = v_4 = v_1 + 3d \\ u_3 = v_8 = v_1 + 7d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 16\frac{4}{9} & (1) \\ u_1q = u_1 + 3d & (2) \\ u_1q^2 = u_1 + 7d & (3) \end{cases}$$

Khử d từ (2) và (3) ta được : $u_1(3q^2 - 7q + 4) = 0$ (4).

Do (1) nên : $u_1 \neq 0 \Rightarrow (4) \Leftrightarrow \begin{cases} q = 1 \\ q = \frac{4}{3} \end{cases}$. Theo định nghĩa thì $q \neq 1$, do vậy $q = \frac{4}{3}$

Câu 33: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, biết rằng tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ

nhất của I được viết dưới dạng $\frac{a\pi}{b} + \frac{c}{d}$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$

là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c + d$?

A. 9

B. 10

C. 11

D. 12

Lời giải

Ta có $x^{2n} \geq 0 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx \geq \frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$

Ta thấy $n \in \mathbb{N}^*, x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow x^{2n} \leq x^2 \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6}$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$

Câu 34: Cho 3 hàm số $y = f(x), y = g(x), y = h(x)$. Đồ thị của 3 hàm số $y = f'(x), y = g'(x), y = h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới, trong đó đường đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Hàm số $k(x) = f(x+7) + g(5x+1) - h\left(4x + \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

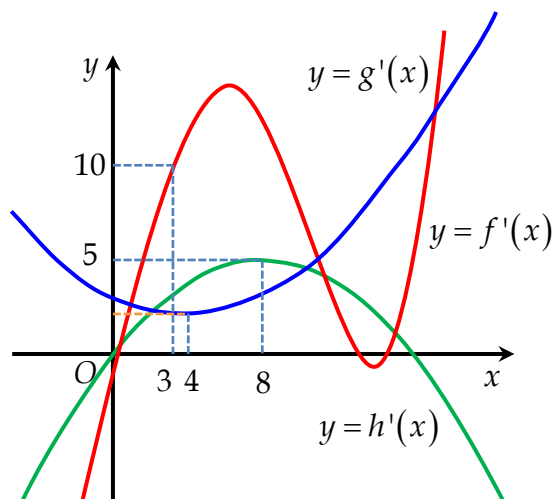
A. $\left(-\frac{15}{4}; 0\right)$.

B. $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.

C. $\left(\frac{3}{8}; 1\right)$.

D. $\left(\frac{3}{8}; +\infty\right)$.

Lời giải



Ta cần giải bất phương trình $k'(x) = f'(x+7) + 2g'\left(2x + \frac{15}{2}\right) - 4h'\left(4x + \frac{3}{2}\right) > 0$

Không thể giải trực tiếp bất phương trình này. Quan sát các đồ thị của các hàm số $y = f'(x), y = g'(x), y = h'(x)$ ta nhận thấy

$$f'(x) > 10, \forall x \in (3; 8); g'(x) \geq 5, \forall x, h'(x) < 5, \forall x \in (3; 8)$$

Do đó $f'(a) + 2g'(b) - 4h'(c) > 10 + 2.5 - 4.5 = 0, \forall a, c \in (3; 8), b \in \mathbb{R}$

Vì vậy ta chỉ cần chọn $\begin{cases} 3 < x+7 < 8 \\ 3 < 4x + \frac{3}{2} < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{8} < x < 1$. Đối chiếu với đáp án ta chọn ý C.

Câu 35: Cho 2 số phức z_1 thỏa mãn $\left|z_1 - \frac{7}{4} - \frac{5i}{4}\right| = \left|z_1 - \frac{9}{4} - \frac{3i}{4}\right|$, $z_2 = a + bi$ với

$(\sqrt{3} + 2)a + b + 1 = 0$ Biết rằng $|z_1 + i| = 2|z_2 + i|$. Tìm GTNN của $P = |z_1 - 3 - i| + 2|z_2 - 3 - i|$

A. $P = \sqrt{38}$

B. $P = \sqrt{39}$

C. $P = 2\sqrt{38}$

D. $P = 2\sqrt{39}$

Lời giải

Theo giả thiết ta có điểm $M(z_1) \in d_1 : x - y - 1 = 0$, $N(z_2) \in d_2 : (\sqrt{3} + 2)x + y + 1 = 0$

Giao điểm của d_1, d_2 là $I(0; -1)$. Theo giả thiết ta có $MI = 2NI$.

Gọi điểm $A(3; 1) \Rightarrow P = MA + 2NA$.

$$\Rightarrow P.IN = AM.IN + AN.2IN = AM.IN + AN.IM$$

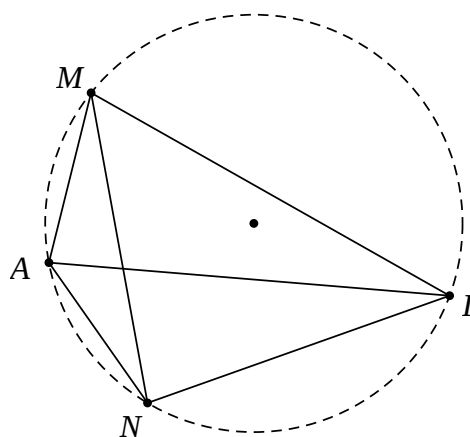
Theo bất đẳng thức Ptolemy ta có:

$$AM.IN + AN.IM \geq AI.MN$$

$$\Rightarrow P = 2AM + 2AN \geq \frac{AI.MN}{IN}$$

Ta có $\cos(d_1, d_2) = \frac{1}{2}$. Theo định lý hàm số Cosine

ta có:



$$MN^2 = MI^2 + NI^2 - 2MI \cdot NI \cdot \cos MIN$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{NI} = \sqrt{5 - 4 \cos MIN} \geq \sqrt{3} \Rightarrow P \geq AI\sqrt{3} = \sqrt{39}$$

Dấu “=” chỉ xảy ra khi $AMIN$ nội tiếp đường tròn và $MIN = 60^\circ$

Chọn ý B.

Câu 36: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc + a + c = b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

$$\text{thức } P = \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 1} + \frac{3}{c^2 + 1}.$$

A. $P_{\max} = \frac{5}{3}.$

B. $P_{\max} = \frac{10}{3}.$

C. $P_{\max} = \frac{7}{2}.$

D. $P_{\max} = \frac{14}{3}.$

Lời giải

Ta có: $a + c = b(1 - ac) > 0$. Dễ thấy $ac \neq 1 \Rightarrow 0 < a < \frac{1}{c}$

$$\Rightarrow b = \frac{a+c}{1-ac} \Rightarrow P = \frac{2}{a^2+1} - \frac{2(1-ac)^2}{(a+c)^2 + (1-ac)^2} + \frac{3}{c^2+1} = \frac{2}{a^2+1} + \frac{2(a+c)^2}{(a^2+1)(c^2+1)} + \frac{3}{c^2+1} - 2$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{2}{x^2+1} + \frac{2(x+c)^2}{(x^2+1)(c^2+1)} + \frac{3}{c^2+1} - 2 = \frac{2(x^2+2cx+2c^2+1)}{(x^2+1)(c^2+1)} + \frac{3}{c^2+1} - 2$$

Với $0 < x = a < \frac{1}{c}$

$$\text{Tính } f'(x) = \frac{-4c(x^2+2cx-1)}{(x^2+1)^2(c^2+1)}$$

Trên khoảng $\left(0; \frac{1}{c}\right)$: $f'(x) = 0$ có nghiệm $x_0 = -c + \sqrt{c^2+1}$ và $f'(x)$ đổi dấu từ dương

sang âm khi x qua x_0 , suy ra $f(x)$ đạt cực đại tại $x = x_0$

$$\Rightarrow \left(0; \frac{1}{c}\right): f(x) \leq \frac{2}{c^2+1-c\sqrt{c^2+1}} + \frac{3}{c^2+1} - 2 = \frac{2c}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{3}{c^2+1} = g(c)$$

Khảo sát hàm số $g(c)$ với $c > 0 \Rightarrow \max_{(0;+\infty)} g(c) = g\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{10}{3} \Rightarrow P_{\max} = \frac{10}{3}$

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f^3(x) \cdot \left[4(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x)\right] = e^x, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ biết } f(0) = 0. \text{ Khi đó } \int_0^{5\ln 2} f^5(x) dx \text{ bằng?}$$

A. $5\left(31 - \frac{25\ln^2 2}{2} - 5\ln 2\right)$

B. $\frac{1}{5}\left(31 - \frac{355\ln 2}{2}\right)$

C. $\frac{1}{5}\left(31 - \frac{25\ln^2 2}{2} - 5\ln 2\right)$

D. $5\left(31 - \frac{355\ln 2}{2}\right)$

Lời giải

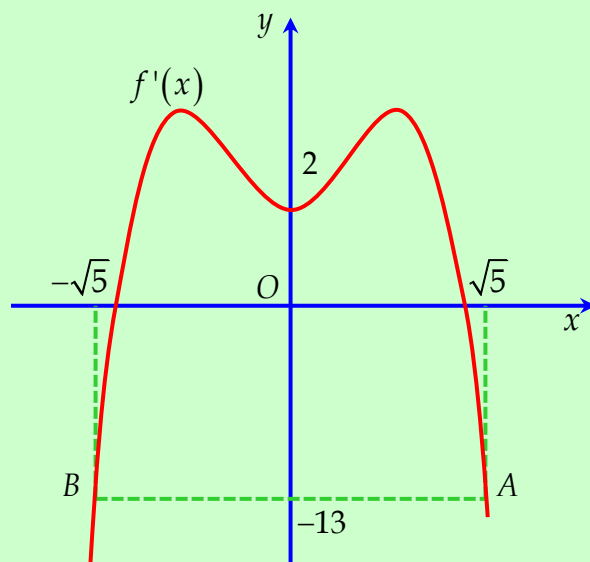
Giả thiết tương đương $(f^4(x) \cdot f'(x))' = e^x \Rightarrow f^4(x) f'(x) = e^x + C$ mà $f(0) = 0 \Rightarrow C = -1$

$$\Rightarrow f^4(x) f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow \int f^4(x) f'(x) dx = e^x - x + D \Rightarrow f^5(x) = 5(e^x - x + D)$$

Mặt khác $f(0) = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow f^5(x) = 5(e^x - x - 1)$

$$\Rightarrow \int_0^{5\ln 2} f^5(x) dx = 5 \int_0^{5\ln 2} (e^x - x - 1) dx = 5 \left(31 - \frac{25 \ln^2 2}{2} - 5 \ln 2 \right)$$

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ với m là số thực. Để $g(x) \leq 0$ $\forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ thì điều kiện của m là

A. $m \geq \frac{2}{3} f(\sqrt{5})$

B. $m \leq \frac{2}{3} f(\sqrt{5})$

C. $m \leq \frac{2}{3} f(0) - 2\sqrt{5}$

D. $m \geq \frac{2}{3} f(-\sqrt{5}) - 4\sqrt{5}$

Lời giải

Ta có $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5} \leq 0 \Leftrightarrow 3m \geq 2f(x) + 2x^3 - 4x - 6\sqrt{5}$.

Đặt $h(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 6\sqrt{5}$. Ta có $h'(x) = 2f'(x) + 6x^2 - 4$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} h'(-\sqrt{5}) = 2f'(-\sqrt{5}) + 6.5 - 4 = 0 \\ h'(\sqrt{5}) = 2f'(\sqrt{5}) + 6.5 - 4 = 0 \\ h'(0) = 2f'(0) + 0 - 4 = 0 \\ h'(1) = 2f'(1) + 6.1 - 4 > 0 \\ h'(-1) = 2f'(-1) + 6.1 - 4 > 0 \end{cases}$$

Từ đó ta có bảng biến thiên

x	$-\sqrt{5}$	0	$\sqrt{5}$
h'	$-$	0	$-$
h	$h(-\sqrt{5})$	$h(0)$	$h(\sqrt{5})$

Từ bảng biến thiên ta có $3m \geq h(\sqrt{5}) \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$.

Câu 39: Cho 4 số nguyên a, b, c, d thay đổi thỏa: $1 \leq a < b < c < d \leq 50$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

A. $P_{\min} = \frac{53}{175}$

B. $P_{\min} = \frac{61}{200}$

C. $P_{\min} = \frac{58}{175}$

D. $P_{\min} = \frac{73}{200}$

Lời giải

Vì $1 \leq a < b < c < d \leq 50$ và a, b, c, d là các số nguyên nên $c \geq b + 1$

Suy ra: $P = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \geq \frac{1}{b} + \frac{b+1}{50}$

Để thấy $2 \leq b \leq 48$ nên xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x+1}{50}, x \in [2; 48]$

Ta có $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{50} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$

Lập bảng biến thiên ta được $\min_{[2; 48]} f(x) = f(5\sqrt{2})$

Do $x = 7$ và $x = 8$ là 2 giá trị gần $x = 5\sqrt{2}$ nhất, vì vậy:

$\min_{[2; 48]} f(x) = \min\{f(7); f(8)\} = \min\left\{\frac{53}{175}; \frac{61}{200}\right\} = \frac{53}{175}$

Vậy GTNN của $P = \frac{53}{175}$

Câu 40: Cho các số tự nhiên từ 1 đến 100. Chọn ra 6 số bất kỳ. Tính xác suất để chọn ra 6 số sao cho chúng có thể xếp thành 1 cấp số cộng.

A. $\frac{95}{7528752}$

B. $\frac{95}{1254792}$

C. $\frac{95}{2509584}$

D. $\frac{95}{3764376}$

Lời giải

Gọi 6 số đó là $u_1; u_2; u_3; u_4; u_5; u_6$. Viết theo cấp số cộng sẽ là

$u_1; u_1 + d; u_1 + 2d; u_1 + 3d; u_1 + 4d; u_1 + 5d$

Do đó $d = \frac{u_6 - u_1}{5} \Rightarrow u_6 - u_1$ chia hết cho 5

Nếu ta xác định được $u_6; u_1$ ta sẽ tìm được d và từ đó tìm được các số còn lại. Vậy bài toán chuyển thành chọn ra hai số sao cho chúng có cùng số dư khi chia cho 5

Từ 1 đến 100 có 20 số chia hết cho 5 ta có C_{20}^2 cách chọn

Từ 1 đến 100 có 20 số chia 5 dư 1 ta có C_{20}^2 cách chọn

Từ 1 đến 100 có 20 số chia 5 dư 2 ta có C_{20}^2 cách chọn

Từ 1 đến 100 có 20 số chia 5 dư 3 ta có C_{20}^2 cách chọn

Từ 1 đến 100 có 20 số chia 5 dư 4 ta có C_{20}^2 cách chọn

Vậy ta có $C_{20}^2 \cdot 5$ cách chọn

Xác suất sẽ là $\frac{C_{20}^2 \cdot 5}{C_{100}^5}$

Câu 41: Cho các số thực x, y thỏa mãn

$$\log_2(x-3) + 2\log_2(2-\sqrt{y+3}) = \log_2(y+3) - 2\log_2(\sqrt{x-3}-2).$$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy$ là?

A. $\min P = -80$

B. $\min P = -91$

C. $\min P = -83$

D. $\min P = -63$

Lời giải

Giả thiết tương đương $\frac{1}{2}\log_2(x-3) + \log_2(2-\sqrt{y+3}) = \frac{1}{2}\log_2(y+3) - \log_2(\sqrt{x-3}-2)$

$$\Leftrightarrow \log_2\sqrt{x-3} + \log_2(\sqrt{x-3}-2) = \log_2\sqrt{y+3} + \log_2(2-\sqrt{y+3})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3}(\sqrt{x-3}-2) = -\sqrt{y+3}(\sqrt{y+3}-2)$$

$$\Leftrightarrow (x-3) - 2\sqrt{x-3} = -(y+3) + 2\sqrt{y+3} \Leftrightarrow x+y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3})$$

$$\text{Ta có } x+y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}) \Leftrightarrow (x+y)^2 = 4(x+y) + 8\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{y+3} \geq 4(x+y) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 4 \\ x+y \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } x+y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}) \leq 2\sqrt{2(x+y)} \Leftrightarrow x+y \leq 8 \Rightarrow x+y \in [4; 8]$$

$$\text{Xét biểu thức } P = 4(x^2 + y^2) + 15xy = 4(x+y)^2 + 7xy \geq 16(x+y) + 7xy = 7x(y+3) + 16y - 5x.$$

$$\text{Mà } \begin{cases} y+3 \geq 0 \\ y \geq 4-x \end{cases} \Rightarrow P \geq 16(4-x) - 5x = 64 - 21x$$

$$\text{Kết hợp với } x+y \geq 4 \Rightarrow x \in [3; 7] \Rightarrow 64 - 21x \geq -83$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là -83

Câu 42 : Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn $f'(1) = g(1) = 1; f(2) \cdot g(2) = f(1)$ và đồng

$$\text{thời } 1 - f'(x)g'(x) = g(x)\left[f''(x) + \frac{1}{x}f'(x)\right], \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x)g'(x)dx$?

A. $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$

B. $-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$

C. $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

D. $-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\ln 2$

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\begin{aligned}
 x - xf'(x)g'(x) &= xg(x)f''(x) + g(x)f'(x) \\
 \Leftrightarrow x &= x[g'(x)f'(x) + g(x)f''(x)] + g(x)f'(x) \\
 \Leftrightarrow x &= (xf'(x)g(x))' \Rightarrow xf'(x)g(x) = \frac{x^2}{2} + C \\
 \Leftrightarrow f'(x)g(x) &= \frac{x}{2} + \frac{C}{x} \xrightarrow{f'(1)=g(1)=1} f'(x)g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \\
 \Leftrightarrow \int_1^2 f'(x)g(x)dx &= \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \right) dx = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2
 \end{aligned}$$

Sử dụng tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^2 f'(x)g(x)dx = g(x)f(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 f(x)g'(x)dx = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \\
 \Rightarrow \int_1^2 f(x)g'(x)dx &= -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \ln 2
 \end{aligned}$$

Chọn ý D.

Câu 43: Có tối đa bao nhiêu hình vuông được tạo bởi các ô vuông của bàn cờ 8x8 khi bớt đi một ô vuông?

A. 204

B. 63

C. 196

D. 150

Lời giải

Để có tối đa số hình vuông $\Rightarrow$ Bớt 1 ô vuông ở góc vuông của bàn cờ

Số hình vuông được tạo thành từ các ô vuông trong bàn cờ là $\sum_{x=1}^8 x^2 = 204$ (hình vuông)

Số hình vuông chứa ô vuông đã bớt là 8

$\Rightarrow$ Số hình vuông được tạo thành sau khi bớt $204 - 8 = 196$

Câu 44: Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$. Giả sử $BC = a$, $AA_1 = h$. Khi R ngắn nhất thì tam giác ABC

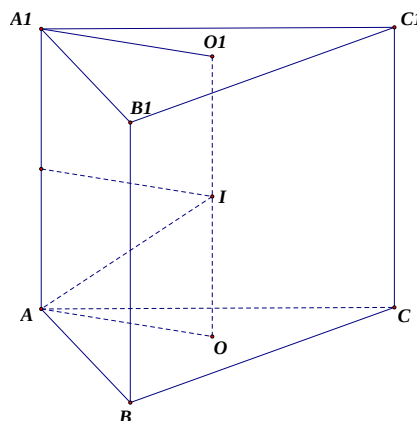
A. Đều.

B. Cân tại A.

C. Vuông tại A.

D. Nhọn

Lời giải



Gọi O, O_1 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $A_1B_1C_1$. Khi đó, OO_1 là trục của đường tròn ngoại tiếp đáy. Trong mặt phẳng (AOO_1A_1) , đường trung trực cạnh

AA_1 cắt OO_1 tại I . Ta chứng minh được I là trung điểm OO_1 và cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$. Do đó, $R = IA$.

$$\text{Ta có } IA^2 = OA^2 + OI^2 = OA^2 + \left(\frac{OO_1}{2}\right)^2 = OA^2 + \frac{h^2}{4} \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng định lý hàm sin trong tam giác ABC , ta được

$$\frac{BC}{\sin(BAC)} = 2OA \Rightarrow OA = \frac{BC}{2\sin(BAC)} = \frac{a}{2\sin(BAC)} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } IA^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{\sin^2(BAC)} + h^2 \right).$$

Do đó, $R = IA$ ngắn nhất $\Leftrightarrow IA^2$ bé nhất

$$\Leftrightarrow \sin^2(BAC) \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \sin^2(BAC) = 1 \Leftrightarrow BAC = 90^\circ$$

Hay tam giác ABC vuông tại A .

Câu 45: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = \sqrt{2}, |z_2| = \sqrt{5}$. Biết rằng $\begin{cases} z_1 - i = a + bi \\ z_2 - i = c + di \end{cases}$.

Tìm GTLN của biểu thức $P = \frac{1}{2}|ad - bc|$.

A. $P = 1$

B. $P = 2$

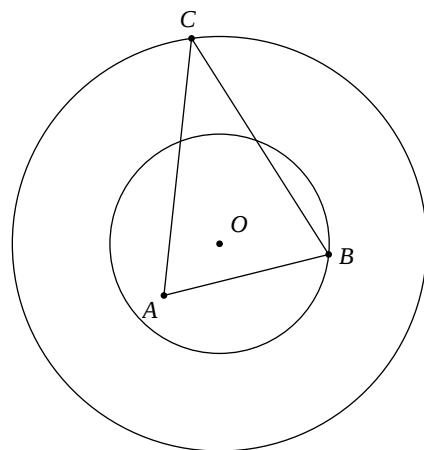
C. $P = 3$

D. $P = 4$

Lời giải

Gọi $A(0;1), B(z_1), C(z_2)$ thì $B \in (0; \sqrt{2}), C \in (0; \sqrt{5})$.

Bổ đề: Cho hai đường tròn đồng tâm $C_1(O; R)$ và $C_2(O; R')$ ($R > R'$). Các điểm B và C lần lượt di động trên $(C_1), (C_2)$ tương ứng. Khi đó S đạt max khi O là trực tâm tam giác ABC và O nằm trong tam giác. Thật vậy, nếu cố định B thì đường thẳng AB cố định. Giả sử AB cắt (C_2) tại M và N , diện tích lớn nhất khi $CO \perp AB$. Tương tự nếu cố định C . Tức O là trực tâm của ABC . Khi đó C là điểm chính giữa cung lớn MN hay O nằm trong tam giác ABC .



Áp dụng với $A(0;1) \Rightarrow BC \parallel Ox$.

Do tính đối xứng nên có thể gọi $B(\sqrt{2-b^2}; b), C(-\sqrt{5-b^2}; b) (b < 0)$

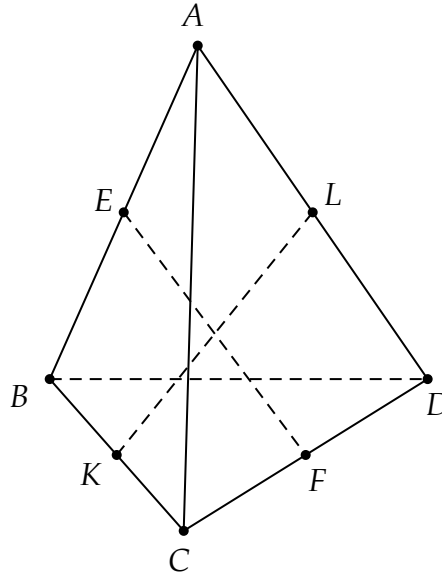
$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CO} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(2-b^2)(5-b^2)} = b(b-1) \Leftrightarrow b = -1 \Rightarrow \begin{cases} B(-2; -1) \\ C(1; -1) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = \frac{1}{2}|ad - bc| = S_{ABC \max} = 1$$

Câu 46: Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp trong một mặt cầu bán kính R và thỏa mãn điều kiện $AB = CD, BC = AD, AC = BD$. M là một điểm thay đổi trong không gian. Đặt $P = MA + MB + MC + MD$, giá trị nhỏ nhất của P là?

- A. $P_{\min} = 2R\sqrt{3}$. B. $P_{\min} = 4R$. C. $P_{\min} = 3R$. D. $P_{\min} = \frac{16R}{3}$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm của tứ diện; E, F, K, L lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, AD . Ta có tam giác ACD bằng tam giác BCD nên $AF = BF$ suy ra $EF \perp AB$, tương tự ta chứng minh được $EF \perp CD$ và đường thẳng PQ vuông góc với cả hai đường thẳng BC, AD . Từ đó suy $GA = GB = GC = GD = R$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MA + MB + MC + MD &= \frac{MA \cdot GA + MB \cdot GB + MC \cdot GC + MD \cdot GD}{GA} \\ &\geq \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{GD}}{GA} = \frac{\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) + 4 \cdot GA^2}{GA} = 4GA = 4R. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M trùng với điểm G .

Vậy $P_{\min} = 4R$.

Câu 47: Cho 2 số thực x, y dương thỏa mãn điều kiện

$$\log_2^2 2x + \log_2^2 4y + (1 - \log_2 xy)^3 = \frac{11}{2}$$

Đặt $P = x^3 + y^3$. Hỏi P có bao nhiêu ước số nguyên?

- A. 1 B. 2 C. 5 D. 0

Lời giải

$$\text{Đặt } \left(\log_2 2x, \log_2 4y, \log_2 \frac{2}{xy} \right) \rightarrow (a, b, c) \Rightarrow a + b + c = 4$$

Giả thiết trở thành $\frac{11}{2}$. Nhận thấy 2 giả thiết đều là đa thức đối xứng theo 2 biến a, b nên dấu “=” sẽ xảy ra tại $a = b = x, c = y$ đến đây ta sẽ tham số hóa để tìm điểm rơi.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{cases} a^2 + x^2 \geq 2ax \\ b^2 + x^2 \geq 2bx \\ c^3 + y^3 + y^3 \geq 3y^2c \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^3 \geq 2x(a+b) + 3y^2c - 2y^3 - 2x^2$$

Đến đây ta cần tìm x, y thỏa mãn $\begin{cases} 2x = 3y^2 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$. Vậy P không phải là số nguyên

nên không có ước nguyên dương.

Câu 48: Cho phương trình $\sqrt{m+3}\sqrt{m+3(\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x})} = \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm?

A. 10

B. 11

C. 9

D. 12

Lời giải

Đặt $a = \sqrt{m+3(\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x})}; b = \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}, (a \geq 0, b \geq 0)$.

Điều kiện $0 \leq x \leq 5$.

Ta có: $\begin{cases} \sqrt{m+3a} = b \\ \sqrt{m+3b} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3a = b^2 \\ m+3b = a^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow 3(a-b) = b^2 - a^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a+b+3 = 0 \end{cases} (L)$$

Với $a = b \Rightarrow \sqrt{m+3b} = b \Leftrightarrow m = b^2 - 3b = f(b) (*)$

- $b = \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} \Rightarrow b^2 = x + 10 + 2\sqrt{3x(10-2x)} \geq 10 \Rightarrow b \geq \sqrt{10} \quad (1)$
- $b = \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} \Rightarrow b^2 = (\sqrt{3x} + \sqrt{2(5-x)})^2 \leq (3+2)(x+5-x) = 25 \Rightarrow b \leq 5 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $b \in [\sqrt{10}; 5]$

Xét hàm số $f(b) = b^2 - 3b$ trên đoạn $[\sqrt{10}; 5]$ ta có

$$\min_{[\sqrt{10}; 5]} f(b) = f(\sqrt{10}) = 10 - 3\sqrt{10}, \max_{[\sqrt{10}; 5]} f(b) = f(5) = 10$$

Phương trình (*) có nghiệm khi $\min_{[\sqrt{10}; 5]} f(b) \leq m \leq \max_{[\sqrt{10}; 5]} f(b) \Rightarrow 10 - 3\sqrt{10} \leq m \leq 10$ mà $m \in \mathbb{Z}$

nên có 10 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\sin^6 x |\cos x| + \cos^6 x |\sin x|}{|\sin x| + |\cos x|}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị $x \in (-2019; 2019)$ thỏa mãn hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

A. 2453

B. 5142

C. 2571

D. 4906

Lời giải

Ta có $f(x) = \frac{\sin^6 x |\cos x| + \cos^6 x |\sin x|}{|\sin x| + |\cos x|}$. Vì $|\sin x| + |\cos x| \geq \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x$

Nên $f(x) = \frac{|\sin x \cos x| (|\sin^5 x| + |\cos^5 x|)}{|\sin x| + |\cos x|} = |\sin x \cos x| (1 - |\sin x \cos x| - \sin^2 x \cos^2 x)$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{8} |\sin 2x|^3 - \frac{1}{4} |\sin 2x|^2 + \frac{1}{2} |\sin 2x|$$

Đặt $t = |\sin 2x|, t \in [0; 1]$

Xét hàm số $f(x) = -\frac{1}{8} t^3 - \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{2} t$ liên tục trên $[0; 1]$

Khảo sát hàm số trên, suy ra $\max_{[0;1]} f(t) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{27}$

Đạt được khi $|\sin 2x| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{1}{9} + \frac{k\pi}{2} \xrightarrow{x \in (-2019; 2019)}$ có 5142 giá trị

Câu 50: Cho 2 hàm số $f(x) = (m-1)6^x - \frac{2}{6^x} + 2m+1, h(x) = (x-6^{1-x})$. Tìm tham số m để hàm số $g(x) = h(x) \cdot f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 0 với mọi $x \in [0; 1]$

A. $m = 1$

B. $m \leq \frac{1}{2}$

C. $m \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

D. $m \geq 1$

Lời giải

Ta thấy rằng với mọi m , ta luôn có $h(1)f(1) = 0$ nên bài toán trở thành tìm m để cho hàm số $g(x) = h(x) \cdot f(x) \geq 0 \forall x \in [0; 1]$. Dễ thấy với $x = 1$ thì bất đẳng thức luôn đúng, do đó ta sẽ xét trên $[0; 1)$.

Ta dễ thấy $h(x)$ là hàm đồng biến trên $[0; 1)$, $h(1) = 0 \Rightarrow h(x) < 0 \forall x \in [0; 1)$. Đến đây lại rút gọn bài toán trở thành tìm m để $f(x) \leq 0 \forall x \in [0; 1)$. Đặt $t = 6^x (t \in [1; 6))$ ta có

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow (m-1)6^x - \frac{2}{6^x} + 2m+1 \leq 0 \Rightarrow (m-1)t^2 + 2mt - 2 + t \leq 0 \Rightarrow m \leq \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + 2t}$$

Đến đây bài toán trở thành bài toán rất đơn giản, ta cần $m \leq \min_{[1;6]} \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + 2t} = \frac{1}{2}$

Câu 51: Cho cấp số nhân $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$; trong đó $u_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Biết rằng $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 2018$, $T_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n} = 2019$ và $P = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \dots \cdot u_n > \frac{1}{100}$.

Hỏi số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn P là:

- A. 9295 B. 9296 C. 18592 D. 18591

Lời giải

$$\text{Ta có } S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1} = 2018 \quad (1)$$

$$\text{Và } T_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n} = \frac{(1 - q^n)}{u_1 q^{n-1} (1 - q)} = 2019 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } \frac{T_n}{S_n} = u_1^2 q^{n-1} = \frac{2018}{2019}$$

$$\text{Ta có } Q_n = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \dots \cdot u_n = u_1 \cdot (u_1 \cdot q) \cdot (u_1 \cdot q^2) \cdot \dots \cdot (u_1 \cdot q^{n-1}) = u_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = (u_1^2 q^{n-1})^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{2018}{2019}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\text{Theo đề } \left(\frac{2018}{2019}\right)^{\frac{n}{2}} > \frac{1}{100} \Leftrightarrow n > 2 \log_{\frac{2018}{2019}} \left(\frac{1}{100}\right) \approx 18591,1 \Rightarrow n_{\min} = 18592$$

$$\text{đó, } P(B) = \frac{1285}{9 \cdot 10^4} = \frac{257}{18000}.$$

Câu 52: Cho tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số có 5 năm chữ số phân biệt được lập từ A . Chọn ngẫu nhiên một số từ S . Khi đó xác suất để chọn được số có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ sao cho $a_1 < a_2 < a_3$ và $a_3 > a_4 > a_5$ là?

- A. $\frac{5}{7}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{1}{24}$

Lời giải

Số phần tử của tập hợp S là $|S| = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$.

Gọi B là tập hợp các số có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ sao cho $a_1 < a_2 < a_3$ và $a_3 > a_4 > a_5$.

Ta xác định số phần tử của tập B như sau:

Trường hợp 1

Chọn 5 chữ số bất kỳ không có chữ số 0 có C_9^5 cách, sau đó xếp 5 chữ số vào 5 vị trí

$$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}.$$

Vị trí a_3 có 1 cách chọn, vì a_3 lớn nhất.

Có C_4^2 cách chọn hai số để xếp vào hai vị trí $\overline{a_1 a_2}$.

Có 1 cách chọn hai số để xếp vào hai vị trí $\overline{a_4 a_5}$.

Suy ra có $C_9^5 C_4^2 = 756$ (số).

Trường hợp 2

Chọn 5 chữ số bất kỳ phải có chữ số 0 có C_9^4 cách, sau đó xếp 5 chữ số vào 5 vị trí

$$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}.$$

Vị trí a_3 có 1 cách chọn, vì a_3 lớn nhất.

Có C_3^2 cách chọn hai số để xếp vào hai vị trí $\overline{a_1 a_2}$.

Có 1 cách chọn hai số để xếp vào hai vị trí $\overline{a_4 a_5}$.

Suy ra có $C_9^4 C_3^2 = 378$ (số).

Do đó số phần tử của tập B là $|B| = 756 + 378 = 1134$ (số).

Vì vậy xác suất cần tìm là $\frac{C_{1134}^1}{C_{27216}^1} = \frac{1}{24}$.

Suy ra chọn D.

Câu 53: Cho bất phương trình $\log_{3a} 11 + \left(\log_{\frac{1}{7}} (\sqrt{x^2 + 3ax + 10} + 4) \right) \log_{3a} (x^2 + 3ax + 12) \geq 0$.

Giá trị thực của tham số a để bất phương trình trên có nghiệm duy nhất thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 0)$

B. $(1; 2)$

C. $(0; 1)$

D. $(2; +\infty)$

Lời giải

Điều kiện xác định $0 < a \neq \frac{1}{3}$.

Biến đổi bất phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \log_{3a} 11 + \left(\log_{\frac{1}{7}} (\sqrt{x^2 + 3ax + 10} + 4) \right) \log_{3a} (x^2 + 3ax + 12) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \log_{3a} 11 - \log_7 (\sqrt{x^2 + 3ax + 10} + 4) \cdot \log_{3a} (x^2 + 3ax + 12) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \log_7 (\sqrt{x^2 + 3ax + 10} + 4) \cdot \log_{3a} (x^2 + 3ax + 12) \leq \log_{3a} 11 \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3ax + 10} \geq 0 \Rightarrow x^2 + 3ax + 12 = x^2 + 3ax + 10 + 2 = t^2 + 2$. Khi đó bất phương trình trở thành $\log_7 (t + 4) \log_{3a} (t^2 + 2) \leq \frac{1}{\log_{11} 3a} (*)$.

- Nếu $0 < a < \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{11} 3a < 0$ bất phương trình $(*)$ trở thành

$$\log_7 (t + 4) \log_{11} 3a \log_{3a} (t^2 + 2) \geq 1 \Leftrightarrow \log_7 (t + 4) \log_{11} (t^2 + 2) \geq 1$$

Xét hàm số $f(t) = \log_7 (t + 4) \log_{11} (t^2 + 2) (t \geq 0)$ là hàm đồng biến đồng thời $f(3) = 1$ nên $f(t) \geq f(3) \Leftrightarrow t \geq 3 \Leftrightarrow x^2 + 3ax + 1 \geq 0$. Để phương trình có nghiệm duy nhất thì ta có $a = \frac{2}{3}$, nghiệm này không thỏa mãn.

- Nếu $a > \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{11} 3a > 0$. Đến đây xét tương tự trường hợp 1 ta sẽ tìm được $a = \frac{2}{3}$

Câu 54: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện

$$\frac{2}{2^{x-2y} + 1} = 2 - \log_{y^2+y-x^2-x} (x+y+1)$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_{x+y+1} (y-x) \cdot 2^{2x-4y}$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{16}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\begin{aligned} \frac{2}{2^{x-2y} + 1} = 2 - \log_{y^2+y-x^2-x} (x+y+1) &\Leftrightarrow \frac{2}{2^{x-2y} + 1} = 2 - \frac{1}{\log_{x+y+1} (x+y+1)(y-x)} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{2^{x-2y} + 1} = 2 - \frac{1}{\log_{x+y+1} (y-x) + 1} \Leftrightarrow \frac{2}{2^{x-2y} + 1} + \frac{1}{\log_{x+y+1} (y-x) + 1} = 2 \end{aligned}$$

Khi đó P viết lại thành $P = \log_{x+y+1} (y-x) \cdot (2^{x-2y})^2$

Để đơn giản ta đặt $\begin{cases} a = \log_{x+y+1} (y-x) \\ b = 2^{x-2y} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{b+1} + \frac{1}{a+1} = 2 \Rightarrow a = \frac{b+1}{2b} - 1$

Thế vào ta được $P = \frac{b^2(1-b)}{2b} = \frac{b(1-b)}{2} \leq \frac{1}{8}$

Câu 55: Gọi A là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A . Tính xác suất để chọn được số chia hết cho 7 và có chữ số hàng đơn vị bằng 2.

A. $\frac{257}{90000}$

B. $\frac{257}{18000}$

C. $\frac{127}{90000}$

D. $\frac{127}{30000}$

Lời giải

Gọi số tự nhiên gồm 5 chữ số là $\overline{abcde}$

Chọn $a \neq 0$ có 9 cách.

Chọn b, c, d, e mỗi số có 10 cách. Nên $|A| = 9 \cdot 10^4$.

Gọi B là biến cố "chọn được tự nhiên gồm 5 chữ số chia hết cho 7 và có chữ số hàng đơn vị bằng 2".

Gọi số tự nhiên gồm 5 chữ số chia hết cho 7 và có chữ số hàng đơn vị bằng 2 là $\overline{abcd2}$

Ta có $\overline{abcd2} = 10 \cdot \overline{abcd} + 2 = 7 \cdot \overline{abcd} + 3 \cdot \overline{abcd} + 2$

$\overline{abcd2}$ chia hết cho 7 nên $3 \cdot \overline{abcd} + 2$ chia hết cho 7 hay $3 \cdot \overline{abcd} + 2 = 7t, (t \in \mathbb{Z})$

$$3 \cdot \overline{abcd} + 2 = 7t \Leftrightarrow \overline{abcd} = \frac{7t-2}{3} \Leftrightarrow \overline{abcd} = 2t + \frac{t-2}{3}$$

Suy ra $(t-2):3$ hay $t-2 = 3n \Leftrightarrow t = 3n+2$

Khi đó $\overline{abcd} = 7n+4$ mà $1000 \leq \overline{abcd} \leq 9999$ nên $1000 \leq 7n+4 \leq 9999 \Leftrightarrow \frac{996}{7} \leq n \leq \frac{9995}{7}$

Mặt khác n là số nguyên $\Rightarrow n \in \{143; 144; 145; \dots; 1427\}$

Nên $|B| = 1285$.

Câu 56 : Có tất cả bao nhiêu cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện

$$\begin{cases} 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)} \\ 4|y|-|y-1|+(y+3)^2 \leq 8 \end{cases} ?$$

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $\frac{3^{|x^2-2x-3|}}{3^{\log_3 5}} = 5^{-(y+4)} \Leftrightarrow \frac{3^{|x^2-2x-3|}}{5} = 5^{-(y+4)} \Leftrightarrow 3^{|x^2-2x-3|} = 5^{-(y+3)} \geq 1 \Rightarrow y \leq -3$

$$\Rightarrow 4|y|-|y-1|+(y+3)^2 = -4y-(1-y)+(y+3)^2 = -3y-1+(y+3)^2 \geq 8(y \leq -3)$$

$$\Rightarrow 4|y|-|y-1|+(y+3)^2 = -4y-(1-y)+(y+3)^2 = -3y-1+(y+3)^2 = 8$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $y = -3$. Thế vào giả thiết ta được $|x^2-2x-3| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Vậy tồn tại 2 bộ số thỏa mãn yêu cầu đề bài

Câu 57: Cho (C_m) là đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3mx + 1$ (với $m < 0$ là tham số thực). Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C_m) . Đường thẳng d cắt đường tròn tâm $I(-1;0)$ bán kính $R = 3$ tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất. Hỏi S có tất cả bao nhiêu phần tử ?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

Lời giải

Ta có $d: y = 2mx + 1$.

$$\text{Do đó } x = d(I, d) = \frac{|-2m+1|}{\sqrt{4m^2+1}} \leq \frac{\sqrt{(1^2+1^2)((-2m)^2+1^2)}}{\sqrt{4m^2+1}} = \sqrt{2}, AB = 2\sqrt{R^2-x^2} = 2\sqrt{9-x^2}.$$

$$\text{Vì vậy } S_{IAB} = \frac{1}{2} AB \cdot x = x\sqrt{9-x^2} \leq \max_{(0;\sqrt{2}]} x\sqrt{9-x^2} = y(\sqrt{2}) = \sqrt{14}.$$

$$\text{Dấu bằng đạt tại } \frac{-2m}{1} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

Câu 58: Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $2z \geq y^2$. Khi biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính $\log_2 \sqrt{xyz}$?

$$P = \log_2^2 xy + \log_2(x^3 y^3 + x^3 z^3) + \sqrt{-y^4 - xy^2 + 2zy^2 + 2xz}$$

A. 3

B. 2

C. -1

D. 0

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \log_2^2 xy + \log_2(x^3 y^3 + x^3 z^3) + \sqrt{-y^4 - xy^2 + 2zy^2 + 2xz}$$

$$= \log_2^2 xy + \log_2(x^3 y^3 + x^3 z^3) + \sqrt{(2z-y^2)(x+y)} \geq \log_2^2 xy + \log_2(x^3 y^3 + x^3 z^3)$$

$$\text{Theo bất đẳng thức AM - GM ta có } x^3 y^3 + z^3 x^3 \geq 2x^3 \sqrt{y^3 z^3}$$

$$\Rightarrow P \geq \log_2^2 xy + \log_2 \left(2(x^2 yz)^{\frac{3}{2}} \right) = \log_2^2 xy + \frac{3}{2} \log_2 (x^2 yz) + 1$$

- Trường hợp 1: $y \leq z \Rightarrow P \geq \log_2^2 xy + 3 \log_2 xy + 1 \geq -\frac{5}{4}$
- Trường hợp 2: $y \geq z \Rightarrow P \geq \log_2^2 xz + 3 \log_2 xz + 1 \geq -\frac{5}{4}$

Vậy $\min P = -\frac{5}{4}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{\sqrt{2}}{16}, y = z = 4 \Rightarrow \log_2 \sqrt{xyz} = -1$

Câu 59: Cho phương trình $\sin 2x - \cos 2x + |\sin x + \cos x| - \sqrt{2 \cos^2 x + m} - m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm?

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 9.

Lời giải

Điều kiện: $2 \cos^2 x + m \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 1 + \sin 2x + |\sin x + \cos x| &= 1 + \cos 2x + m + \sqrt{2 \cos^2 x + m} \\ \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 + |\sin x + \cos x| &= 2 \cos^2 x + m + \sqrt{2 \cos^2 x + m} \\ \Leftrightarrow (|\sin x + \cos x|)^2 + |\sin x + \cos x| &= \left(\sqrt{2 \cos^2 x + m} \right)^2 + \sqrt{2 \cos^2 x + m} \end{aligned}$$

Xét hàm $f(t) = t^2 + t$ với $t \geq 0$. Ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến.

Mà $f(|\sin x + \cos x|) = f(\sqrt{2 \cos^2 x + m})$, suy ra $|\sin x + \cos x| = \sqrt{2 \cos^2 x + m}$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 = 2 \cos^2 x + m \Leftrightarrow 1 + \sin 2x = 2 \cos^2 x + m \Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x = m.$$

$$\text{Vì } \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình đã cho có nghiệm} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0; 1\}.$$

Câu 60: Giả sử k là số thực lớn nhất sao cho bất đẳng thức $\frac{1}{\sin^2 x} < \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{k}{\pi^2}$ đúng với

$\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$. Khi đó giá trị của k là?

- A. 5 B. 2 C. 4 D. 6

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{1}{\sin^2 x} < \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{k}{\pi^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} < 1 - \frac{k}{\pi^2}.$$

$$\text{Xét } f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } f'(x) = -\frac{2 \cos x}{\sin^3 x} + \frac{2}{x^3} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right).$$

Thật vậy: $f'(x) = \frac{2\sin^3 x - 2x^3 \cos x}{x^3 \sin^3 x} > 0$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x - x^3 \cos x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin x > x\sqrt[3]{\cos x}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Ta có $g'(x) = \frac{2\cos^2 x + 1}{3\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x}} - 1 = \frac{2(\sqrt[3]{\cos x})^6 - 3(\sqrt[3]{\cos x})^4 + 1}{3\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x}}$

$$= \frac{\left[(\sqrt[3]{\cos x})^2 - 1\right]^2 \left[2(\sqrt[3]{\cos x})^2 + 1\right]}{3\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x}} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Do đó $g(x) > g(0) = 0$. Suy ra $f'(x) > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Vẽ bảng biến thiên ta suy ra $f(x) < 1 - \frac{k}{\pi^2}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{\pi^2} \leq 1 - \frac{k}{\pi^2} \Leftrightarrow k \leq 4$.