

ĐỀ BÀI

**Câu 1 (4 điểm).** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $M$  là điểm bất kì trên  $(C)$ . Tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $M$  cắt hai đường tiệm cận của  $(C)$  tại  $A$  và  $B$ . Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường tiệm cận. Tìm trên  $(C)$  tất cả các điểm  $M$  sao cho chu vi tam giác  $IAB$  nhỏ nhất.

**Câu 2 (3 điểm).** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} e^{x^3+xy^2} - e^{y^6+y^4} + \ln \frac{x^3+xy^2}{y^6+y^4} = 0 \\ \sqrt{9y-2} + \sqrt[3]{7x+2y-5} = 2y+3 \end{cases}$$

**Câu 3 (4 điểm).**

a) Cho  $a = \log_2 3; b = \log_3 5; c = \log_7 2$ . Tính  $\log_{280} 441$  theo  $a, b, c$ .

b) Có 2 nhà kho, nhà kho thứ nhất có 8 cái điều hòa tốt và 4 cái điều hòa hỏng. Nhà kho thứ hai có 9 cái điều hòa tốt và 6 cái điều hòa hỏng (Giả thiết các điều hòa ở hai nhà kho, mỗi cái đựng trong hộp kín, nhìn bề ngoài không phân biệt được). Hùng vào mỗi nhà kho lấy ra ngẫu nhiên 2 cái điều hòa. Tính xác suất để 4 cái điều hòa Hùng lấy được có ít nhất 2 cái tốt.

**Câu 4 (3 điểm).** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác  $ABC$  có 3 góc đều nhọn và nội tiếp đường tròn tâm  $I$ . Gọi  $K$  là hình chiếu vuông góc của  $B$  trên đường thẳng  $AC$ ,  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $C$  trên đường thẳng  $BI$ . Đường thẳng  $AC$  và  $KH$  lần lượt có phương trình  $x+y+1=0$  và  $x+2y-1=0$ . Biết điểm  $B$  thuộc đường thẳng  $y-5=0$ , điểm  $I$  thuộc đường thẳng  $x+1=0$ . Tìm tọa độ điểm  $C$ .

**Câu 5 (4 điểm).** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ , tâm  $O$ . Biết  $SO$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ ,  $SB=3a$  và  $BAD=120^\circ$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là các điểm thuộc các cạnh  $BC$  và  $SA$  sao cho  $BM = \frac{2}{3}BC, SN = \frac{1}{3}SA$ .

a) Tính thể tích hình chóp  $S.MND$  theo  $a$ .

b) Gọi  $\varphi$  là góc giữa đường thẳng  $MN$  và mặt phẳng  $(SBD)$ . Tính  $\cos \varphi$ .

**Câu 6 (2 điểm).** Cho các số thực  $a, b, c \in [1; 4]$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4(ab+bc+ca)}$$

----- HẾT -----

## LỜI GIẢI CHI TIẾT

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $M$  là điểm bất kì trên  $(C)$ . Tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $M$  cắt hai đường tiệm cận của  $(C)$  tại  $A$  và  $B$ . Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường tiệm cận. Tìm trên  $(C)$  tất cả các điểm  $M$  sao cho chu vi tam giác  $IAB$  nhỏ nhất.

### Lời giải

TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có  $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$ .

Ta có:  $M \in (C) \Rightarrow M\left(m; \frac{2m-1}{m-1}\right) (m \neq 1)$

Tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $M$  có phương trình  $\Delta: y = \frac{-1}{(m-1)^2}(x-m) + \frac{2m-1}{m-1}$ .

$(C)$  có đường tiệm cận đứng  $d_1: x=1$ ; đường tiệm cận ngang  $d_2: y=2$ .

Ta có  $I = d_1 \cap d_2 \Rightarrow I(1;2)$ .

Ta có  $A = \Delta \cap d_1 \Rightarrow$  Tọa độ  $A$  là nghiệm của hệ  $\begin{cases} x=1 \\ y = \frac{-1}{(m-1)^2}(x-m) + \frac{2m-1}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y = \frac{2m}{m-1} \end{cases}$

Suy ra  $A\left(1; \frac{2m}{m-1}\right)$ .

Ta có  $B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow$  Tọa độ  $B$  là nghiệm của hệ  $\begin{cases} y=2 \\ y = \frac{-1}{(m-1)^2}(x-m) + \frac{2m-1}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2m-1 \\ y=2 \end{cases}$

Suy ra  $B(2m-1;2)$ .

Ta có  $IA = \left|\frac{2}{m-1}\right|$ ;  $IB = |2m-2|$ ;  $AB = 2\sqrt{(m-1)^2 + \frac{1}{(m-1)^2}}$

Chu vi tam giác  $IAB$  là

$$C_{\Delta IAB} = IA + AB + BI = 2\left(|m-1| + \frac{1}{|m-1|} + \sqrt{(m-1)^2 + \frac{1}{(m-1)^2}}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương  $|m-1|$ ;  $\frac{1}{|m-1|}$  ta có

$$|m-1| + \frac{1}{|m-1|} \geq 2 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương  $(m-1)^2$ ;  $\frac{1}{(m-1)^2}$  ta có

$$(m-1)^2 + \frac{1}{(m-1)^2} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{(m-1)^2 + \frac{1}{(m-1)^2}} \geq \sqrt{2} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra  $2\left(|m-1| + \frac{1}{|m-1|} + \sqrt{(m-1)^2 + \frac{1}{(m-1)^2}}\right) \geq 2(2 + \sqrt{2})$

Suy ra  $C_{\Delta AB} \geq 2(2 + \sqrt{2})$ .

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $|m-1| = \frac{1}{|m-1|} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=2 \end{cases}$  (thỏa mãn).

+ Với  $m=0 \Rightarrow M(0;1)$ .

+ Với  $m=2 \Rightarrow M(2;3)$ .

Vậy có hai điểm  $M$  thỏa mãn yêu cầu đề bài:  $M_1(0;1)$ ;  $M_2(2;3)$ .

**Câu 2.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} e^{x^3+xy^2} - e^{y^6+y^4} + \ln \frac{x^3+xy^2}{y^6+y^4} = 0 \\ \sqrt{9y-2} + \sqrt[3]{7x+2y-5} = 2y+3 \end{cases}$$

**Lời giải**

**Cách 1:**

$$\begin{cases} e^{x^3+xy^2} - e^{y^6+y^4} + \ln \frac{x^3+xy^2}{y^6+y^4} = 0(1) \\ \sqrt{9y-2} + \sqrt[3]{7x+2y-5} = 2y+3(2) \end{cases}$$

Điều kiện:  $\begin{cases} 9y-2 \geq 0 \\ \frac{x^3+xy^2}{y^6+y^4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{2}{9} \\ x > 0 \end{cases}$ .

Với điều kiện trên, (1)  $\Leftrightarrow e^{x^3+xy^2} + \ln(x^3+xy^2) = e^{y^6+y^4} + \ln(y^6+y^4)$ .

Xét hàm số  $y = g(t) = e^t + \ln t$  trên  $(0; +\infty)$ .

$$y' = e^t + \frac{1}{t} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$$

$\Rightarrow y = g(t)$  đồng biến, liên tục trên  $(0; +\infty)$ .

Do đó (1)  $\Leftrightarrow x^3 + xy^2 = y^6 + y^4 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{x}{y}\right) = y^3 + y$ .

Xét hàm số  $y = h(t) = t^3 + t$  trên  $\mathbb{R}$ .

$$y' = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow y = h(t)$  đồng biến, liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

Do đó (1)  $\Leftrightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2$ .

Thế vào phương trình (2) ta được:  $\sqrt{9y-2} + \sqrt[3]{7y^2+2y-5} = 2y+3$ .

Đặt  $a = \sqrt{9y-2} (a \geq 0)$ .

Phương trình trở thành:  $a + \sqrt[3]{\left(\frac{a^2+2}{9}\right)^2 + 2\left(\frac{a^2+2}{9}\right) - 5} = 2\left(\frac{a^2+2}{9}\right) + 3$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{a^2+2}{9} \right)^2 + 2 \left( \frac{a^2+2}{9} \right) - 5 = \left( 2 \left( \frac{a^2+2}{9} \right) + 3 - a \right)^3$$

$$\Leftrightarrow 63a^4 + 414a^2 - 3069 = (2a^2 - 9a + 31)^3$$

$$\Leftrightarrow (a-4)(a-5)(8a^4 - 36a^3 + 311a^2 - 558a + 1643) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=5 \\ 2a^2 \left( 4a^2 - 18a + \frac{81}{4} \right) + 93(a^2 - 6a + 9) + \frac{355}{2}a^2 + 806 = 0 \text{ (VN do } a \geq 0) \end{cases}$$

Với  $a=4$  thì  $y=2 \Rightarrow x=4$  (thỏa điều kiện).

Với  $a=5$  thì  $y=3 \Rightarrow x=9$  (thỏa điều kiện).

Vậy hệ phương trình có nghiệm:  $(4;2), (9;3)$ .

**Cách 2:**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} y \geq \frac{2}{9} \\ \frac{x^3 + xy^2}{y^6 + y^4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{2}{9} \\ x \geq 0 \end{cases} (*)$$

Khi đó phương trình

$$e^{x^3+xy^2} - e^{y^6+y^4} + \ln \frac{x^3+xy^2}{y^6+y^4} = 0 \Leftrightarrow e^{x^3+xy^2} + \ln(x^3+xy^2) = e^{y^6+y^4} + \ln(y^6+y^4) (1)$$

Xét hàm số  $y = f(t) = e^t + \ln t$  trên  $(0; +\infty)$

$$\text{Ta có } f'(t) = e^t + \frac{1}{t} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$$

Suy ra hàm số  $y = f(t) = e^t + \ln t$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

$$\text{Do đó (1)} \Leftrightarrow x^3 + xy^2 = y^6 + y^4$$

$$\Leftrightarrow (x - y^2)(x^2 + xy^2 + y^4 + y^2) = 0 \Leftrightarrow x = y^2 \text{ (vì } x^2 + xy^2 + y^4 + y^2 > 0 \text{ với điều kiện } (*))$$

Thay  $x = y^2$  vào phương trình còn lại của hệ ta được:

$$\sqrt{9y-2} + \sqrt[3]{7y^2+2y-5} = 2y+3$$

$$\Leftrightarrow (y+2) - \sqrt{9y-2} + (y+1) - \sqrt[3]{7y^2+2y-5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y+2)^2 - (9y-2)}{y+2 + \sqrt{9y-2}} + \frac{(y+1)^3 - (7y^2+2y-5)}{(y+1)^2 + (y+1)\sqrt[3]{7y^2+2y-5} + \sqrt[3]{7y^2+2y-5}^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2-5y+6}{y+2 + \sqrt{9y-2}} + \frac{y^3-4y^2+y+6}{(y+1)^2 + (y+1)\sqrt[3]{7y^2+2y-5} + \sqrt[3]{7y^2+2y-5}^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y+2 + \sqrt{9y-2}} + \frac{y+1}{(y+1)^2 + (y+1)\sqrt[3]{7y^2+2y-5} + \sqrt[3]{7y^2+2y-5}^2} = 0 \text{ (2)} \\ y^2 - 5y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \text{ (Vì với điều kiện } (*) \text{ thì vế trái (2) } > 0 \text{ nên (2) vô nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=3 \end{cases}$$

Với  $y = 2$  thì  $x = 4$

Với  $y = 3$  thì  $x = 9$

Vậy hệ có 2 nghiệm  $(x; y) = (3; 2), (9; 3)$ .

**Câu 3.** a) Cho  $a = \log_2 3; b = \log_3 5; c = \log_7 2$ . Tính  $\log_{280} 441$  theo  $a, b, c$ .

b) Có 2 nhà kho, nhà kho thứ nhất có 8 cái điều hòa tốt và 4 cái điều hòa hỏng. Nhà kho thứ hai có 9 cái điều hòa tốt và 6 cái điều hòa hỏng (Giả thiết các điều hòa ở hai nhà kho, mỗi cái đựng trong hộp kín, nhìn bề ngoài không phân biệt được). Hùng vào mỗi nhà kho lấy ra ngẫu nhiên 2 cái điều hòa. Tính xác suất để 4 cái điều hòa Hùng lấy được có ít nhất 2 cái tốt.

### Lời giải

a) Ta có  $\log_2 7 = \frac{1}{c}; \log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = a \cdot b$ .

$$\log_{280} 441 = \frac{\log_2 441}{\log_2 280} = \frac{\log_2 (3^2 \cdot 7^2)}{\log_2 (2^3 \cdot 7 \cdot 5)} = \frac{2(\log_2 3 + \log_2 7)}{3 + \log_2 7 + \log_2 5}$$

$$\log_{280} 441 = \frac{2\left(a + \frac{1}{c}\right)}{3 + \frac{1}{c} + ab} = \frac{2(ac + 1)}{3c + abc + 1}.$$

b) Số cách lấy 4 điều hòa mỗi kho 2 điều hòa là:  $|\Omega| = C_{12}^2 \cdot C_{15}^2 = 6930$ .

Gọi  $A$  là biến cố "Hùng lấy được ít nhất 2 điều hòa tốt".

$\Rightarrow \bar{A}$  là biến cố "Hùng lấy được tối đa 1 điều hòa tốt".

Trường hợp 1: Hùng không lấy được điều hòa tốt.

Khi đó lấy 2 điều hòa không tốt ở kho 1 và 2 điều hòa không tốt ở kho 2.

Số cách lấy là:  $C_4^2 \cdot C_6^2 = 90$  (cách).

Trường hợp 2: Hùng lấy được 1 điều hòa tốt.

Khi đó Hùng lấy được 1 điều hòa tốt ở kho 1 hoặc kho 2.

Số cách lấy là:  $C_4^1 \cdot C_8^1 \cdot C_6^2 + C_4^2 \cdot C_9^1 \cdot C_6^1 = 804$  (cách).

Vậy  $|\bar{A}| = 90 + 804 = 894$

Vậy xác suất Hùng lấy được nhiều nhất 1 điều hòa tốt là :

$$P \bar{A} = \frac{894}{6930} = \frac{149}{1155} \Rightarrow P A = 1 - \frac{149}{1155} = \frac{1006}{1155}.$$

**Câu 4.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác  $ABC$  có 3 góc đều nhọn và nội tiếp đường tròn tâm  $I$ . Gọi  $K$  là hình chiếu vuông góc của  $B$  trên đường thẳng  $AC$ ,  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $C$  trên đường thẳng  $BI$ . Đường thẳng  $AC$  và  $KH$  lần lượt có phương trình  $x + y + 1 = 0$  và  $x + 2y - 1 = 0$ . Biết điểm  $B$  thuộc đường thẳng  $y - 5 = 0$ , điểm  $I$  thuộc đường thẳng  $x + 1 = 0$ . Tìm tọa độ điểm  $C$ .

### Lời giải



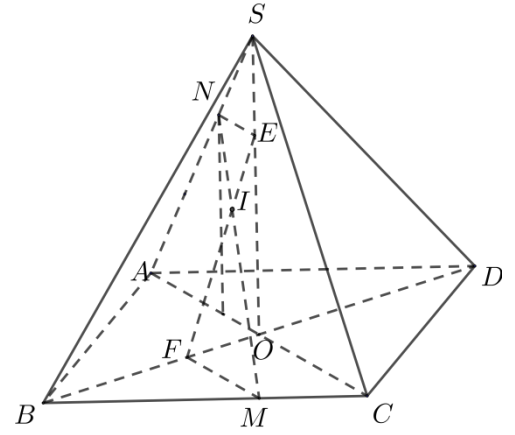
Ta có:  $NH \parallel SO \Rightarrow \frac{NH}{SO} = \frac{AN}{AS} = \frac{2}{3} \Rightarrow NH = \frac{2}{3}SO$

Mặt khác  $\triangle BAD$  là tam giác đều cạnh  $a \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó ta có:

$$SO^2 = SB^2 - BO^2 = \frac{33a^2}{4}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{33}}{2} \Rightarrow NH = \frac{a\sqrt{33}}{3}$$



Ta có:

$$S_{\triangle AMD} = S_{ABCD} - S_{\triangle ABM} - S_{\triangle DCM} = S_{ABCD} - \frac{2}{3}S_{\triangle ABC} - \frac{1}{3}S_{\triangle BCD}$$

$$= S_{ABCD} - \frac{1}{3}S_{ABCD} - \frac{1}{6}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Do đó  $V_{S.MND} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot NH \cdot S_{\triangle AMD} = \frac{a^3\sqrt{11}}{24}$

b) Ta có  $AC \perp BD$ ;  $AC \perp SO \Rightarrow AC \perp (SBD)$

Kẻ  $MF \parallel AC$ ,  $F \in BD$ ;  $NE \parallel AC$ ,  $E \in SO \Rightarrow EF$  là hình chiếu của  $MN$  lên  $(SBD)$ .

Gọi  $I = EF \cap MN \Rightarrow \alpha = \angle FIM$

Vì  $MF \parallel NE \Rightarrow \frac{IF}{IE} = \frac{MF}{NE} = \frac{\frac{2}{3}OC}{\frac{1}{3}OA} = 2 \Rightarrow IF = 2 \cdot IE \Rightarrow IF = \frac{2}{3} \cdot EF$

Ta có:  $EO = \frac{2}{3}SO = \frac{a\sqrt{33}}{3}$ ;  $FO = \frac{1}{3}OB = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$$\Rightarrow EF^2 = EO^2 + OF^2 = \frac{15a^2}{4} \Rightarrow EF = \frac{a\sqrt{15}}{2} \Rightarrow IF = \frac{a\sqrt{15}}{3}$$

Mặt khác:  $MF \parallel OC \Rightarrow \frac{MF}{OC} = \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow MF = \frac{a}{3}$

Ta có  $\tan \varphi = \frac{MF}{IF} = \frac{1}{\sqrt{15}}$

Mặt khác  $1 + \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{15}}{4}$

**Câu 6.** Cho các số thực  $a, b, c \in [1; 4]$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4(ab+bc+ca)}$ .

**Lời giải**

Ta có :

$$P = \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4(ab+bc+ca)} = \frac{\frac{(a+b)^2}{c^2}}{1 + 4\frac{ab}{c^2} + 4\left(\frac{a+b}{c}\right)}. \text{ Mà do } 4ab \leq (a+b)^2 \text{ nên}$$

---


$$P = \frac{\frac{(a+b)^2}{c^2}}{1 + 4\frac{ab}{c^2} + 4\left(\frac{a+b}{c}\right)} \geq \frac{\frac{(a+b)^2}{c^2}}{1 + \left(\frac{a+b}{c}\right)^2 + 4\left(\frac{a+b}{c}\right)}.$$

Đặt  $t = \frac{a+b}{c}$ , do  $a, b, c \in [1; 4]$  nên  $t \in \left[\frac{1}{2}; 8\right]$

Khi đó  $P \geq f(t) = \frac{t^2}{t^2 + 4t + 1}; t \in \left[\frac{1}{2}; 8\right]$

Ta có:  $f'(t) = \frac{2t(t^2 + 4t + 1) - t^2 \cdot (2t + 4)}{(t^2 + 4t + 1)^2} = \frac{4t^2 + 2t}{(t^2 + 4t + 1)^2} > 0; \forall t \in \left[\frac{1}{2}; 8\right]$

$$\Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{13}$$

Suy ra, giá trị nhỏ nhất của  $P$  bằng  $\frac{1}{13}$  khi  $\begin{cases} a = b = 1 \\ c = 4 \end{cases}$ .

----- HẾT -----

---