VẬN DỤNG CAO VÉC TƠ – TÍCH VÔ HƯỚNG

CÁC PHẦN CHÍNH CỦA CHUYÊN ĐỀ

VẤN ĐỀ 1. BIỂU DIỄN VÉC TƠ

Email: daytoan2018@gmail.com

Câu 1: Cho tam giác ABC biết $AB=3,BC=4,AC=6$, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .Gọi x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x.\overrightarrow{IA}+y.\overrightarrow{IB}+z.\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ .Tính $P=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$

A. $P=\frac{3}{4}$. **B.** $P=\frac{41}{12}$. **C.** $P=\frac{23}{12}$. **D.** $P=\frac{2}{3}$.

Họ và tên tác giả: Vũ Ngọc Thành Tên FB: Vũ Ngọc Thành

Câu 2: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của CD, G là trọng tâm tam giác BCI. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{AD}$. Hãy tìm đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$. **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{6}\vec{a}+\vec{b}$.

C. $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}$. **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$.

Họ và tên tác giả: Nguyễn Thi Tiết Hạnh Tên FB: Hạnhtiettiet, Email: tiethanh.78@gmail.com

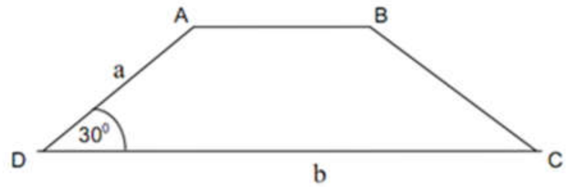
Câu 3: Cho tam giác ABC với các cạnh $AB=c,\ BC=a,\ CA=b$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AB**C.** Đẳng thức nào sau đây đúng.

A. $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ **B.** $b\overrightarrow{IA}+c\overrightarrow{IB}+a\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

C. $c\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+a\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ **D.** $c\overrightarrow{IA}+a\overrightarrow{IB}+b\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Họ và tên: Dương Bảo Trâm Facebook: Bảo Trâm, Email: ilovemath.ddt@gmail.com

Câu 4: Cho hình thang cân ABCD có CD là đáy lớn, $\widehat{ADC}=30^0$. Biết DA = a, DC = b, hãy biểu diễn $\overrightarrow{DB}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{DC}$.



A. $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$.

B. $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\dfrac{b-a\sqrt{3}}{b}\overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\dfrac{b-a}{b}\overrightarrow{DC}$.

D. $\overrightarrow{DB}=b\overrightarrow{DA}+a\overrightarrow{DC}$.

Họ tên: Đỗ Thị Hồng Anh, Đ/c mail: honganh161079@gmail.com

Email: kimduyenhtk@gmail.com, FB: Kim Duyên Nguyễn.

Câu 5: Cho hình bình hành $ABCD$, M là điểm thỏa mãn $5\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{CA}=\vec{0}$. Trên các cạnh AB, BC lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $MP//BC$, $MQ//AB$. Gọi N là giao điểm của AQ và CP. Giá trị của tổng $\dfrac{AN}{AQ}+\dfrac{CN}{CP}$ bằng:

A. $\dfrac{21}{19}$ **B.** $\dfrac{24}{19}$ **C.** $\dfrac{23}{19}$ **D.** $\dfrac{25}{19}$

Họ và tên tác giả: Phạm Thị Ngọc Tên FB: Giang Thao

Email: thuangiaoyen@gmail.com

Câu 6: Cho tứ giác ABCD, M là điểm tùy ý. K là điểm cố định thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=x\overrightarrow{MK}$. Tìm x:

A. 2. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Email: kimduyenhtk@gmail.com, FB: Kim Duyên Nguyễn.

Câu 7: Cho tam giác ABC, trên cạnh AC lấy điểm M, trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $AM=3MC$, $NC=2NB$. Gọi O là giao điểm của AN và BM. Tính diện tích tam giác ABC biết diện tích tam giác OBN bằng 1.

A. 24. **B.** 20. **C.** 30. **D.** 45

Họ và tên: Nguyễn Thanh Hoài, Email: ngthhoai1705@gmail.com

Câu 8: Cho tam giác ABC, gọi I là điểm trên BC kéo dài sao cho $IB=3IC$. Gọi J,K lần lượt là những điểm trên cạnh AC, AB sao cho $JA=2JC; KB=3KA$. Khi đó $\overrightarrow{BC}=m.\overrightarrow{AI}+n.\overrightarrow{JK}$. Tính tổng $P=m+n$?

A. $P=34$. **B.** $P=-34$. **C.** $P=-14$. **D.** $P=14$.

Họ và tên tác giả: Trần Ngọc Uyên Tên FB: Tran Ngoc Uyen, Email: ngocuyen203@gmail.com

Câu 9: Cho hình bình hành ABCD, lấy M trên cạnh AB và N trên cạnh CD sao cho $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. Gọi I và J là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BI}=m\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AJ}=n\overrightarrow{AI}$.

Khi J là trọng tâm tam giác BMN thì tích m.n bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{3}$ **B.** 3 **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 1

(Họ và tên tác giả: Phạm Văn Huấn, Tên FB: Pham Van Huan)

Câu 10: Cho tam giác ABC, trên cạnh AB lấy điểm M, trên cạnh BC lấy N sao cho AM=3MB, NC=2BN. Gọi I là giao điểm của AN với CM. Tính diện tích tam giác ABC biết diện tích tam giác ICN bằng 2.

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{33}{2}$ **C.** 11 **D.** $\frac{9}{11}$

Họ và tên: Hứa Nguyễn Tường Vy, Email: namlongkontum@gmail.com, FB: nguyennga

Câu 11: Cho ΔABC có trọng tâm G và hai điểm M, N thỏa mãn: $3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{CM}=\vec{0}$, $\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}=\vec{0}$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $\overrightarrow{NG}=4\overrightarrow{GM}$. **B.** $\overrightarrow{NG}=5\overrightarrow{GM}$. **C.** $\overrightarrow{NG}=6\overrightarrow{GM}$. **D.** $\overrightarrow{NG}=7\overrightarrow{GM}$.

(Họ và tên tác giả: Trần Công Sơn, Tên FB: Trần Công Sơn)

Câu 12: (Đẳng thức vec tơ) Cho tam giác ABC. Gọi A', B',C' là các điểm xác định bởi $2018\overrightarrow{A'B}+2019\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$, $2018\overrightarrow{B'C}+2019\overrightarrow{B'A}=\vec{0}$, $2018\overrightarrow{C'A}+2019\overrightarrow{C'B}=\vec{0}$. Khi đó, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

B. $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$.

C. $\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$.

D. ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trực tâm.

(Email): tranminhthao2011@gmail.com

Câu 13: (tính độ dài vec tơ) Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi điểm M là trung điểm BC. Tính độ dài của vec tơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 14: Cho ΔABC có M là trung điểm của BC, H là trực tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Tìm x để $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=x\overrightarrow{HO}$.

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Họ và tên: Trần Quốc An, Email: tranquocan1980@gmail.com, Facebook: Tran Quoc An

Câu 15: Cho tam giác ABC có đường trung tuyến CM vuông góc với phân giác trong AL. Giả sử ngoài ra còn có $CM=kAL$. Biết $\cos A=\frac{a+bk^2}{c+dk^2}$. Tính $a+b+c+d$

A. 18. **B.** 5. **C.** 26. **D.** 17.

(Bùi Duy Nam sưu tầm. FB: Bùi Duy Nam https://www.facebook.com/duynam.bui.1)

Câu 16: Cho tam giác ABC. Gọi M, N,P là các điểm lần lượt thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ Gọi K là giao điểm của AP và MN. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $4\overrightarrow{KA}+5\overrightarrow{KP}=\vec{0}$. **B.** $3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KP}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KP}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{KP}$.

Họ và tên: Phạm Thanh My, Email: phamthanhmy@gmail.com, Facebook: Pham Thanh My

Câu 17: Cho hình thang $ABCD(AB//CD)$ có hai đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AB+CD=20cm.$ Tìm $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$.

A. $40cm.$. **B.** $20cm.$. **C.** $30cm.$. **D.** $10cm.$.

Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Yến Tên FB: Nguyễn Yến, Email: ntyen.c3lqd@gmail.com

Câu 18: Cho tam giác ABC có $AB=3$; $AC=4$ .Gọi AD là đường phân giác trong của góc A .Biết $\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ .Khi đó tổng $m+n$ có giá trị là:

A. 1 **B.** -1 **C.** $\frac{1}{7}$ **D.** $-\frac{1}{7}$

Họ và tên tác giả:Lê Thanh Lâm, Mail:quyphucvn@gmail.com Fb:Thanh Lâm Lê

Câu 19: Cho tam giác ABC bất kỳ, gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh AB,BC,CA. H,H' lần lượt là trực tâm các tam giác ABC,MNP. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HH'}$. **B.** $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HH'}$.

C. $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{HM}+\overrightarrow{HN}+\overrightarrow{HP}=3\overrightarrow{HH'}$.

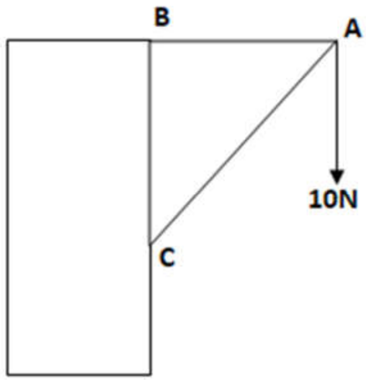
Câu 20: Cho tam giác đều ABC tâm O. M là một điểm bất kì bên trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M lên BC, CA, A**B.** Với giá trị nào của k ta có hệ thức:

$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=k\overrightarrow{MO}$$

A. $k=\frac{1}{2}$. **B.** $k=1$. **C.** $k=\frac{3}{2}$. **D.** $k=2$

Huỳnh Kim Linh GV Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn Khánh Hòa

Câu 21: Một giá đỡ hình tam được gắn vào tường (như hình vẽ). Tam giác ABC vuông cân tại **B.** Người ta treo vào điểm A một vật nặng 10N. Tính độ lớn của các lực tác động vào tường tại B và C? (Bỏ qua khối lượng của giá đỡ)



A. $F_B=10\sqrt{2}N,F_C=10N$

B. $F_B=10N,F_C=10\sqrt{2}$

C. $F_B = F_C = 10N$

D. $F_B = 10N, F_C = -10\sqrt{2}$

Họ và tên: Nguyễn Thanh Dũng Tên FB: Nguyễn Thanh Dũng,Email: thanhdungtoan6@gmail.com

Câu 22: Cho ba điểm A , B ,C thuộc đường tròn tâm O, thỏa mãn $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$. Tính góc $\widehat{AOB}$?

A. $\widehat{AOB}=120^0$. **B.** $\widehat{AOB}=90^0$. **C.** $\widehat{AOB}=150^0$. **D.** $\widehat{AOB}=30^0$.

Họ và tên: Trần Gia Chuân, Tên facebook: Trần Gia Chuân

Câu 23: Cho tam giác ABC. Điểm M trên cạnh BC thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}.\overrightarrow{AC}$, khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC}$. **B.** $MB=2MC$. **C.** $MC=2MB$. **D.** $\overrightarrow{MC}=-3\overrightarrow{MB}$.

Họ và tên: Trần Gia Chuân, Tên facebook: Trần Gia Chuân

âu 24. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O, M là một điểm tùy ý nằm bên trong tam giác đã cho; gọi $A';B';C'$theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên các cạnh $BC;CA$ và AB. Khi đó ta có đẳng thức vectơ $k\left(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}\right)=l\overrightarrow{MO}$, $k.l\neq 0, \frac{k}{l}$ là phân số tối giản. Tính $2k^2-l^2$. .

A. $2k^2-l^2=1$. **B.** $2k^2-l^2=-1$. **C.** $2k^2-l^2=14$. **D.** $2k^2-l^2=-5$.

Họ và tên tác giả: Cao Văn Tùng Tên FB: Cao Tung

Câu 24: Cho hình vuông ABCD, E,F thõa mãn $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$; $AE\cap BF=I$

Ta có $\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AD}$. Khi đó tỉ số k,l thõa mãn cặp nào sau:

A. $k=\frac{3}{5};l=\frac{2}{5}$ **B.** $k=\frac{6}{5};l=\frac{2}{5}$ **C.** $k=\frac{5}{6};l=\frac{3}{6}$ **D.** $k=-\frac{6}{5};l=\frac{1}{3}$

Họ tên: Nguyễn Thị Trang, Fb: Trang Nguyen

Câu 25: Cho tam giác ABC, trên cạnh AC lấy điểm M, trên cạnh BC lấy điểm N sao cho: $AM=3MC$, $NC=2NB$, gọi O là giao điểm của AN và BM .Tính diện tích ΔABC biết diện tích ΔOBN bằng 1.

A. 10. **B.** 20. **C.** 25. **D.** 30.

(Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Phương Thảo, Tên FB: Nguyễn Thị Phương Thảo)

Câu 26: Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chọn khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=4\overrightarrow{HO}$. **B.** $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.

C. $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{HO}$. **D.** $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HO}$.

Họ và tên: Nguyễn Văn Quân Tên FB: Quân Nguyễn, Email: Quanvan09@gmail.com

Câu 27: **Cho tam giác ABC có D là trung điểm của BC, O là một điểm trên đoạn AD sao cho $AO=4OD$. Gọi $\{E\}=CO\cap AB$, $\{F\}=BO\cap AC$, $\{M\}=AD\cap EF$. Khẳng định nào sau đây đúng?**

A. $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{7}\overrightarrow{AD}$ **B.** $\overrightarrow{MO}=\frac{2}{15}\overrightarrow{AD}$ **C.** $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ **D.** $\overrightarrow{EM}=\frac{2}{7}\overrightarrow{BC}$

Họ và tên tác giả: Nguyễn Đặng, Tên facebook: NT AG

Câu 28: **Cho hình thang $ABCD$ có $AB//CD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AC,BD. Kẻ $NH\perp AD$ $(H\in AD)$ và $ME\perp BC$ $(E\in BC)$. Gọi $\{I\}=ME\cap NH$, kẻ $IK\perp DC$ $(K\in DC)$. Khi đó trong tam giác MNK hệ thức nào sau đây đúng?**

A. $MK.\overrightarrow{IN}+NK.\overrightarrow{IM}+MN.\overrightarrow{IK}=\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{IN}.\tan N+\overrightarrow{IM}.\tan M+\overrightarrow{IK}.\tan K=\vec{0}$

C. $\overrightarrow{IN}.\cot N+\overrightarrow{IM}.\cot M+\overrightarrow{IK}.\cot K=\vec{0}$ **D.** $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{IK}=\vec{0}$

Họ và tên tác giả: Nguyễn Văn Toản Tên FB: Dấu Vết Hát,Email: nguyenvantoannbk@gmail.com

Câu 29: Cho ΔABC, điểm M thuộc cạnh BC sao cho $2018.S_{\Delta ABM}=2019.S_{\Delta ACM}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $2018.S_{\Delta ABC}=4037.S_{\Delta ACM}$. **B.** $2018.\overrightarrow{BM}+2019.\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{BC}=\frac{4037}{2018}.\overrightarrow{BM}$ **D.** $S_{\Delta ABM}=\frac{2019}{4037}.S_{\Delta ABC}$.

Câu 30: Cho tam giác ABC. M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $S_{ABC}=3S_{AMC}$. Một đường thẳng cắt các cạnh AB,AM,AC lần lượt tại B',M',C' phân biệt. Biết rằng $\frac{AB}{AB'}+2\frac{AC}{AC'}=k.\frac{AM}{AM'}$. Tìm số k.

A. $k=1$. **B.** $k=2$. **C.** $k=3$. **D.** $\frac{2}{3}$.

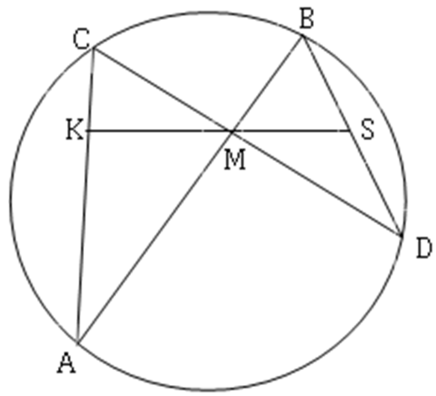
(Tác giả: Nguyễn Văn Phùng,Gmail: nvpmaster0808@gmail.com)

Câu 31: Cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là $A_1,A_2,...,A_n$. Bạn Bình kí hiệu chúng là $B_1,B_2,...,B_n$ ($A_1\not\equiv B_n$). Vectơ tổng $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+...+\overrightarrow{A_nB_n}$ bằng

A. $\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{A_1A_n}$. **C.** $\overrightarrow{B_1B_n}$. **D.** $\overrightarrow{A_1B_n}$.

(Sưu tầm, Tên FB: Trung Nguyễn Chí)

Câu 32: Trong đường tròn (O) với hai dây cung AB và CD cắt nhau tại M. Qua trung điểm S của BD kẻ SM cắt AC tại K sao cho $\frac{AK}{CK}=a$ .Tính: $\frac{AM^2}{CM^2}$



A. 2a **B.** a^2 **C.** $\frac{1}{a^2}$ **D.** a

Câu 33: Cho tam giác ABC. Gọi D, E lần lượt là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Điểm K trên AD sao cho 3 điểm B, K,E thẳng hàng. Xác định tỷ số $\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{AD}}$

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{5}$

Câu 34: Cho tam giác ABC vuông tại C, có $AC=b, BC=a$, D là chân đường cao kẻ từ **C.** Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{CD}=\frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CA}+\frac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{CD}=\frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CA}-\frac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{CD}=\frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{AC}+\frac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{CD}=\frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{AC}-\frac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{BC}$.

Facebook: Lê Văn Kỳ, Email: lethithuy@thpthv.vn

Câu 35: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là điểm xác định bởi $5\overrightarrow{IA}-7\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Gọi E là giao điểm của AI và BG. Tính tỷ số $\frac{EA}{EI}$.

A. 2. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{3}$.

(Họ tên tác giả: Nguyễn Thị Thu Huyền. Tên FB: Thu Huyen Nguyen)

Câu 36: Cho 2 tia Ox, Oy vuông góc. Trên tia Ox lấy các điểm A,B sao cho OA = OB = 1. C là điểm thuộc đoạn OA, N là một điểm thuộc đoạn OB và dựng hình vuông OCMN. Trên đoạn CM lấy điểm Q và dựng hình vuông ACQP. Gọi S là giao điểm của AM và PN. Giả sử $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AS}=x\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NS}=y\overrightarrow{NP}$, $k\in\left(\frac{1}{2};1\right)$

Khi x + y = $\frac{13}{10}$ thì k = $\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và a, b nguyên tố cùng nhau thì a.b bằng

A. 7 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 12

Email: nghiepbt3@gmail.com, FB: Ngô Quang Nghiệp

Câu 37: Cho tam giác ABC. Giả sử điểm M nằm trên cạnh BC thỏa các tam giác MAB, MAC lần lượt có diện tích là S_1, S_2. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(S_1+S_2)\overrightarrow{AM}=S_2\overrightarrow{AB}+S_1\overrightarrow{AC}.$ **B.** $(S_1+S_2)\overrightarrow{AM}=S_1\overrightarrow{AB}+S_2\overrightarrow{AC}.$

C. $(S_2-S_1)\overrightarrow{AM}=S_2\overrightarrow{AB}-S_1\overrightarrow{AC}.$ **D.** $(S_2-S_1)\overrightarrow{AM}=S_1\overrightarrow{AB}-S_2\overrightarrow{AC}.$

Họ Tên: Lê Duy Tên FB: Duy Lê Email: Duyleag@gmail.com

Câu 38: Cho tam giác ABC có có M là trung điểm của BC, $\overrightarrow{AI}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{MI}$. Điểm K thuộc cạnh AC sao cho B,I,K thẳng hàng. Khi đó $\overrightarrow{KA}=\frac{m}{n}\overrightarrow{CK}$. Tính $S=25m+6n+2019$

A. $S=2019$. **B.** $S=2068$. **C.** $S=2018$. **D.** $S=2020$.

Họ và tên tác giả: Nguyễn Đức Duẩn Tên FB: Duan Nguyen Duc, Email: Duanquy@gmail.com

Câu 39: Cho tam giác ABC có trọng tâm G, lấy các điểm I, J sao cho $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$ và $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$ và thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{IG}$. Giá trị của biểu thức $P=(25k^2-36)(k^2+k+1)^{500}$ là:

A. $P=1235$ **B.** $P=0$ **C.** $P=\frac{5}{6}$ **D.** $P=\frac{6}{5}$

Họ và tên: Nguyễn Quang Huy, Fb: Nguyễn Quang Huy, Email: boigiabao98@gmail.com

Câu 40: Cho tam giác ABC. M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $S_{ABC}=3S_{AMC}$. Một đường thẳng cắt các cạnh AB, AM, AC lần lượt tại B', M', C' phân biệt. Biết $\frac{AB}{AB'}+m\frac{AC}{AC'}=n\frac{AM}{AM'}$. Tính $m+n$.

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

(Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Trà My, Tên FB: Nguyễn My)

Câu 41: Cho tam giác ABC có D là trung điểm của BC, O là một điểm trên đoạn AD sao cho $AO=4OD$. Gọi $\{E\}=CO\cap AB$, $\{F\}=BO\cap AC$, $\{M\}=AD\cap EF$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{7}\overrightarrow{AD}$ **B.** $\overrightarrow{MO}=\frac{2}{15}\overrightarrow{AD}$ **C.** $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ **D.** $\overrightarrow{EM}=\frac{2}{7}\overrightarrow{BC}$

Họ và tên tác giả: Nguyễn Đặng, Tên facebook: NT AG

Câu 42: Cho hình thang $ABCD$ có $AB//CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. Kẻ $NH\perp AD$ $(H\in AD)$ và $ME\perp BC$ $(E\in BC)$. Gọi $\{I\}=ME\cap NH$, kẻ $IK\perp DC$ $(K\in DC)$. Khi đó trong tam giác MNK hệ thức nào sau đây đúng?

A. $MK.\overrightarrow{IN}+NK.\overrightarrow{IM}+MN.\overrightarrow{IK}=\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{IN}.\tan N+\overrightarrow{IM}.\tan M+\overrightarrow{IK}.\tan K=\vec{0}$

C. $\overrightarrow{IN}.\cot N+\overrightarrow{IM}.\cot M+\overrightarrow{IK}.\cot K=\vec{0}$ **D.** $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{IK}=\vec{0}$

Câu 43: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của CD, G là trọng tâm tam giác BCI. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}=\overrightarrow{AD}$. Hãy tìm đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$. **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{6}\vec{a}+\vec{b}$.

C. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$. **D.** $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

Họ và tên tác giả: Nguyễn Thi Tiết Hạnh Tên FB: Hạnhtiettiet, Email: tiethanh.78@gmail.com

Câu 44: Một đường thẳng cắt các cạnh DA, DC và đường chéo DB của hình bình hành $ABCD$ lần lượt tại các điểm E, F và M. Biết $\overrightarrow{DE} = m.\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DF} = n.\overrightarrow{DC}$ $(m,\ n > 0)$. Khẳng định đúng là:

A. $\overrightarrow{DM} = \frac{m+n}{m.n}\overrightarrow{DB}$. **B.** $\overrightarrow{DM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{DB}$.

C. $\overrightarrow{DM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{DB}$. **D.** $\overrightarrow{DM} = \frac{m.n}{m+n}\overrightarrow{DB}$.

(Email): locleduc10@gmail.com

(Họ và tên tác giả: Lê Đức Lộc, Tên FB: Lê Đức Lộc)

Câu 45: Hình thang cân ABCD có độ dài đường cao $AH = a; AB//CD, AB = a\sqrt{3}; AD = a\sqrt{2}; AB < DC$

AC cắt BH tại I. Biết $\overrightarrow{AI} = \frac{x + y\sqrt{z}}{m}\overrightarrow{AC}; x; y; z; m \in N$.

Tính tổng $T = x + y + z + m$

A. 20 **B.** 18 **C.** 17 **D.** 21

Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Phương Thu FB: Buisonca Bui

Câu 46: Cho hình thang ABCD với O là giao điểm của hai đường chéo AC và B**D.** Qua O vẽ đường thẳng song song với đáy hình thang, đường thẳng này cắt các cạnh bên AD và BC theo thứ tự tại M và N. Với $AB = a$, $\mathrm{CD} = b$, khi đó $\overrightarrow{MN}$ bằng:

A. $\frac{\mathrm{a}.\overrightarrow{AB} + b.\overrightarrow{DC}}{a+b}$. **B.** $\frac{b.\overrightarrow{AB} + a.\overrightarrow{DC}}{a+b}$. **C.** $\frac{\mathrm{a}.\overrightarrow{AB} - b.\overrightarrow{DC}}{a+b}$. **D.** $\frac{b.\overrightarrow{AB} - a.\overrightarrow{DC}}{a+b}$.

***Họ và tên: Nguyễn Thanh Tâm Tên FB:* Tâm Nguyễn**

Câu 47: Cho tam giác ABC đều tâm O; điểm M thuộc miền trong tam giác OBC; D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CA, AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$. **B.** $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MO}$.

C. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = 3\overrightarrow{MO}$. **D.** $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Phan Minh Tâm

VẤN ĐỀ 2. BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Email: phunghang10ph5s@gmail.com

Câu 48: Cho hình bình hành $ABCD$ có các điểm M, I, N lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, $BI = kBC$, $CN = \frac{1}{2}CD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BMN. Xác định k để AI đi qua G.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{9}{13}$. **C.** $\frac{6}{11}$. **D.** $\frac{12}{13}$.

Họ và tên tác giả: Phùng Hằng Tên FB: Phùng Hằng

Câu 49: Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB, N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AB,\ AN = \frac{3}{4}AC$. Gọi O là giao điểm của CM và BN. Trên đường thẳng BC lấy E. Đặt $\overrightarrow{BE} = x\overrightarrow{BC}$.

Tìm x để A, O, E thẳng hàng.

Chọn C

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{8}{9}$ **C.** $\frac{9}{13}$ **D.** $\frac{8}{11}$

Ý tưởng: Cho tam giác ABC, I là trung điểm của BC. Gọi P, Q, R là các điểm xác định bởi:

$$\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ} = q\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AR} = r\overrightarrow{AC} \text{ với } pqr \neq 0.$$

Chứng minh rằng: P, Q, R thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{2}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$.

Họ và tên: Nguyễn Thanh Dũng Tên FB: Nguyễn Thanh Dũng, Email: thanhdungtoan6@gmail.com

Câu 50: Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm BC; P là điểm đối xứng với A qua B; R là điểm trên cạnh AC sao cho $AR = \frac{2}{5}AC$. Khi đó đường thẳng AR đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?

A. Trọng tâm tam giác ABC. **B.** Trọng tâm tam giác ABI.

C. Trung điểm AI. **D.** Trung điểm BI.

(có thể phát triển P, J, G, M, R thẳng hàng với J – có lẽ là trung điểm BH, còn M chia AI theo tỷ số tính được)

Câu 51: Cho ΔABC có H là trung điểm của AB và $G \in AC : GC = 2AG$. Gọi F là giao điểm của CH và BG. Tìm điểm I trên BC sao cho I, F, A thẳng hàng

A. $\overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{IB}$. **B.** $\overrightarrow{IB} = -2\overrightarrow{IC}$. **C.** $IB = IC$. **D.** $\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB}$.

Câu 52: Cho tam giác ABC. I là trung điểm của BC. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AC}$, với $mnp \neq 0$. Tìm điều kiện của m, n, p để M, N, P thẳng hàng.

A. $mp = mn + np$ **B.** $2mp = mn + np$ **C.** $2np = mn + mp$ **D.** $2mn = mp + np$

Họ và tên tác giả: Hoàng Thị Trà FB: Hoàng Trà

Câu 53: Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác, I là trung điểm của BC, M và N là các điểm được xác định bởi $\begin{cases} \overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ 3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0} \end{cases}$. Gọi P là giao điểm của AC và MN. Tính tỉ số diện tích tam giác ANP và tam giác CNP.

A. 3 **B.** $\frac{7}{2}$ **C.** 4 **D.** 2

Câu 54: Cho tam giác ABC. Gọi D,E lần lượt là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Điểm K trên AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=\frac{a}{b}\overrightarrow{AD}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) sao cho 3 điểm B,K,E thẳng hàng. Tính $P=a^2+b^2$.

A. $P=10$. **B.** $P=13$. **C.** $P=29$. **D.** $P=5$.

Câu 55: Cho tam giác ABC, I là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

K là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

P là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

Có bao nhiêu cặp (m,n), $m,n\in Z$, $m,n\in[-10;10]$ sao cho I,K,P thẳng hàng.

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Email: themhaitotoanyp1@gmail.com, (Fb: Lưu Thêm)

Câu 56: Cho tam giác ABC, M và N là hai điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$. Xác định x để A, M, N thẳng hàng.

A. 3. **B.** $-\frac{1}{3}$. **C.** 2. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Email : boyhanam@gmail.com

Câu 57: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm AG, lấy K thuộc cạnh AC sao cho $\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\mathrm{k}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. Nếu $\mathrm{B,I,K}$ thẳng hàng thì giá trị của k nằm trong khoảng?

A. $\left[0;\frac{1}{6}\right]$ **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ **C.** $\left(\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{5};1\right)$

(Họ tên: Nguyễn Thu Hương. Tên FB: Thu Hương)

Câu 58: Cho tam giác ABC, M là điểm thuộc cạnh AC sao cho $\overrightarrow{MA}=-2.\overrightarrow{MC}$, N thuộc BM sao cho $\overrightarrow{NB}=-3\overrightarrow{NM}$, P là điểm thuộc BC. Biết rằng ba điểm A,N,P thẳng hàng khi $\overrightarrow{PB}=k\overrightarrow{PC}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $k\in\left(-3;-\frac{5}{2}\right)$. **B.** $k\in\left(-\frac{5}{2};-1\right)$. **C.** $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Họ và tên: Trần Văn Luật, Email: Tvluatc3tt@gmail.com, FB: Trần Luật

Họ và tên: Hoàng Thị Kim Liên

Câu 59: Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt nằm trên đường thẳng BC, CA, AB sao cho $\overrightarrow{MB}=m\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC}=n\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PB}$. Tính tích mnk để M, N, P thẳng hàng?

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Email: lientiencl@gmail.com, Facebook: Kim Liên

Câu 60: Cho hình bình hành *ABCD* gọi *M* là trung điểm của cạnh *CD*, *N* là điểm thuộc cạnh *AD* sao cho $AN=\frac{1}{3}AD$. Gọi *G* là trọng tâm của tam giác *BMN*, đường thẳng *AG* cắt *BC* tại *K*. Khi đó $\overrightarrow{BK}=\frac{m}{n}\overrightarrow{BC}$ ($\frac{m}{n}$ là tối giản). Tính $S=m+n$

A. $S=16$. **B.** $S=17$. **C.** $S=18$. **D.** $S=19$.

(Tên FB: Phùng Hằng)

Câu 61: Cho hình thang $ABCD$ có đáy AB, CD, $CD=2AB$. M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AD và BC sao cho $AM=5MD$, $3BN=2NC$. Gọi P là giao điểm của AC và MN; Q là giao điểm của BD và MN; Khi đó $\frac{PM}{PN}+\frac{QN}{QM}=\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a+b$ bằng

A. 386. **B.** 385. **C.** 287. **D.** 288.

Họ tên: Bùi Thị Lợi Facebook: LoiBui

Câu 62: Cho tam giác *ABC*, trên cạnh *AC* lấy điểm *M*, trên cạnh *BC* lấy điểm *N* sao cho *AM = 3MC*, *NC = 2BN*. Gọi *I* là giao điểm của *AN* và *BN*. Tính diện tích tam giác *ABC* biết diện tích tam giác *ABN* bằng 4.

A. $S_{ABC}=110$. **B.** $S_{ABC}=115$. **C.** $S_{ABC}=125$. **D.** $S_{ABC}=120$.

Họ và tên tác giả: Vũ Thị Hằng Tên FB: Đạt Lâm Huy

Câu 63: Cho tam giác ABC M thuộc cạnh AC sao cho $\overrightarrow{MA}=-2.\overrightarrow{MC}$, N thuộc BM sao cho $\overrightarrow{NB}=-3.\overrightarrow{NM}$, P thuộc BC sao cho $\overrightarrow{PB}=k.\overrightarrow{PC}$. Tìm giá trị k để ba điểm A, N, P thẳng hàng.

A. $k=\frac{1}{2}$. **B.** $k=-2$. **C.** $k=-\frac{1}{2}$. **D.** $k=2$.

Họ và tên: Nguyễn Khắc Sâm Facebook: Nguyễn Khắc Sâm

VẤN ĐỀ 3. QUỸ TÍCH

Câu 64: Cho tam giác ABC với J là điểm thoả mãn $2\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$, gọi E là điểm thuộc AB và thoả mãn $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AB}$. Xác định k để C, E, J thẳng hàng.

A. $k\in(-2;-1)$. **B.** $k\in(-1;0)$. **C.** $k\in(0;1)$. **D.** $k\in(1;2)$

Nguyễn Văn Dũng Fb: Nguyễn Văn Dũng, Email: dungtoanc3hbt@gmail.com

Câu 65: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh 1. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn $2MA^2+MB^2+2MC^2+MD^2=9$ là một đường tròn có bán kính R. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $R\in(0;1)$. **B.** $R\in(1;2)$. **C.** $R\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $R\in\left(\frac{3}{2};2\right)$.

(Sưu tầm: Lê Hồ Quang Minh – FB: Lê Minh)

Câu 66: Cho tam giác ABC. Tập hợp những điểm M thỏa mãn: $\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ là:

A. Đường thẳng đi qua A **B.** Đường thẳng qua B và C
C. Đường tròn **D.** Một điểm duy nhất.

(Họ và tên tác giả: Cấn Việt Hưng, Tên FB: Viet Hung)

Câu 67: Cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định với $BC=2a$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của đoạn BC. Nếu đỉnh A thay đổi nhưng luôn thỏa $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MH}+MA^2=4a^2$ thì điểm A luôn thuộc một đường tròn cố định có bán kính bằng

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** a.

(Họ và tên tác giả: Ngô Lê Tạo, Tên FB: Ngô Lê Tạo)

Câu 68: Cho hai điểm A và B cố định. Tìm giá trị $k>0$ để tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện $MA^2+MB^2=k$ là một đường tròn.

A. $k<\frac{2}{3}AB^2$. **B.** $k=\frac{2}{3}AB^2$. **C.** $k\le\frac{2}{3}AB^2$. **D.** $k>\frac{2}{3}AB^2$.

Câu 69: Cho tam giác vuông ABC tại A. Tìm tập hợp M sao cho $MB^2+MC^2=MA^2$.

A. Đường thẳng. **B.** Đường tròn. **C.** Đoạn thẳng. **D.** Một điểm.

PHẠM THANH LIÊM FB: Liêm Phạm, Email: Phamthanhliem1@gmail.com

Câu 70: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB=5cm$. Gọi (S) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=25$. Gọi I là trung điểm của BC. Kết luận nào sau đây **đúng**?

A. (S) là đường thẳng trung trực của đoạn thẳng AI.

B. (S) là đoạn thẳng AI.

C. (S) là đường tròn cố định bán kính $R=\frac{5\sqrt{10}}{4}$.

D. (S) là đường tròn tâm I bán kính $R=\frac{5\sqrt{2}}{4}$

(Họ và tên tác giả: Trịnh Văn Thạch, FB: www.facebook.com/thachtv.tc3)

Câu 71: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $4MA^2+MB^2+MC^2=\frac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính là:

A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

Câu 72: Cho ΔABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho: $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

A. Tập hợp các điểm M là một đường tròn.

B. Tập hợp của các điểm M là một đường thẳng.
C. Tập hợp các điểm M là tập rỗng.
D. Tập hợp các điểm M chỉ là một điểm trùng với A.

Câu 73: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $4MA^2+MB^2+MC^2=\frac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính là:

A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

Họ và tên tác giả: Vũ Thị Nga Tên FB: Linh Nga,Email: linhnga.tvb@gmail.com

Câu 74: Cho $\triangle ABC$ đều, có cạnh bằng a. Khi đó tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=\frac{a^2}{6}$ là:

A. Đường tròn có bán kính $R=\frac{a}{3}$.

B. Đường tròn có bán kính $R=\frac{a}{2}$.

C. Đường tròn có bán kính $R=\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. Đường tròn có bán kính $R=\frac{a\sqrt{3}}{9}$.

Câu 75: Cho ΔABC tìm tập hợp điểm M : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=AM^2$

Họ và tên tác giả: Tô Quốc An Tên FB: Tô Quốc An, Email: antq4949@gmail.com

Câu 76: Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 3. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$ là đường tròn cố định có bán kính bằng:

A. 1. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

(Họ tên: Lê Thị Bích Hải, Tên face: Bich Hai Le)

Câu 77: Cho tam giác ABC có là trọng tâm G. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MG}\right)^2=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}\right)^2$.

A. Đường tròn đường kính AB. **B.** Đường trung trực đoạn thẳng AB.
C. Đường tròn đường kính AC. **D.** Đường trung trực đoạn thẳng AC.

(Họ và tên tác giả: Trần Văn Thông, Tên FB: Trần Thông)

Câu 78: Cho đoạn thẳng $AB=\sqrt{5}$. Biết rằng tập hợp điểm M thỏa mãn $MA^2+MB^2=3\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ là một đường tròn có bán kính R. Tìm giá trị của R.

A. $R=\frac{5}{2}$. **B.** $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $R=\frac{3}{2}$. **D.** $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Họ và tên tác giả: Trần Văn Thông, Tên FB: Trần Thông)

Câu 79: Cho tam giác ABC, có bao nhiêu điểm M thỏa $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=5$?

A. 1. **B.** 2.
C. vô số. **D.** Không có điểm nào.

Họ và tên: Võ Khánh Huyền Vân Fb: Vân Võ, Email: huyenvanqt050185@gmail.com

.

VẤN ĐỀ 4. TỈ LỆ

Câu 80: Cho ΔABC có $AB=3$; $AC=4$. Phân giác trong AD của góc $\widehat{BAC}$ cắt trung tuyến BM tại I. Tính $\dfrac{AD}{AI}$.

A. $\dfrac{AD}{AI}=\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{AD}{AI}=\dfrac{10}{7}$. **C.** $\dfrac{AD}{AI}=\dfrac{29}{20}$. **D.** $\dfrac{AD}{AI}=\dfrac{7}{5}$

Họ và Tên: Trần Quốc Đại, Email: quocdai1987@gmail.com

Câu 81: [Đề thi olympic 30/4 TPHCM khối không chuyên lần 2] Cho ΔABC gọi điểm D nằm trên cạnh BC sao cho $BD=2BC$, E là trung điểm của AD. Một đường thẳng bất kì qua E và cắt các cạnh $AB;AC$ lần lượt tại M,N. Tình tỉ số $\dfrac{AB}{AM}+2\dfrac{AC}{AN}$

A. $\dfrac{AB}{AM}+2\dfrac{AC}{AN}=6$. **B.** $\dfrac{AB}{AM}+2\dfrac{AC}{AN}=5$.
C. $\dfrac{AB}{AM}+2\dfrac{AC}{AN}=\dfrac{28}{5}$. **D.** $\dfrac{AB}{AM}+2\dfrac{AC}{AN}=\dfrac{29}{5}$

Họ và Tên: Trần Quốc Đại, Email: quocdai1987@gmail.com

Câu 82: Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD=2DB$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $CE=3EA$. Gọi M là trung điểm của DE. Tia AM cắt BC tại N. Tỉ số $\dfrac{BN}{CN}$ có giá trị là:

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{7}$.

Họ và tên tác giả: Đỗ Văn Đức Tên FB: Đỗ Văn Đức

Câu 83: *(Bài toán tổng quát của bài toán 1)*. Cho tam giác ABC. Gọi I là điểm chia BC theo tỉ số k. Trên các tia AB và AC lấy các điểm M,N. AI cắt MN tại P. Đặt $\dfrac{AB}{AM}=b$, $\dfrac{AC}{AN}=c$. Tỷ số $\dfrac{AI}{AP}$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{b+kc}{1+k}$. **B.** $\dfrac{b-kc}{1-k}$. **C.** $\dfrac{c+kb}{1+k}$. **D.** $\dfrac{c-kb}{1-k}$.

Câu 84: *(Hệ quả hay dùng của bài toán 2)*. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của **BC.** Trên các tia AB và AC lấy các điểm M,N. AI cắt MN tại P. Đặt $\dfrac{AB}{AM}=b$, $\dfrac{AC}{AN}=c$. Tỷ số $\dfrac{AI}{AP}$ có giá trị bằng

A. $\sqrt{bc}$.   **B.** $\frac{b+c}{2}$.   **C.** $\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}$.   **D.** $\frac{2bc}{b+c}$.

Câu 85: Cho tam giác ABC. Gọi D,E lần lượt là các các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Điểm K trên đoạn thẳng AD sao cho ba điểm B,K,E thẳng hàng. Tìm tỉ số $\frac{AD}{AK}$.

A. $\frac{AD}{AK}=\frac{1}{3}$.   **B.** $\frac{AD}{AK}=3$.   **C.** $\frac{AD}{AK}=\frac{2}{3}$.   **D.** $\frac{AD}{AK}=\frac{3}{2}$.

Tên: Nam Phương Tên FB: Nam Phương, Email:nguyentrietphuong@gmail.com

Câu 86: Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O thỏa mãn $\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OD}=-4\overrightarrow{OB}$. Qua trung điểm M của AB dựng đường thẳng MO cắt CD tại N. Tính tỉ số $\frac{CN}{ND}$.

A. $\frac{3}{4}$.   **B.** $\frac{1}{4}$.   **C.** $\frac{2}{3}$.   **D.** $\frac{1}{3}$.

Email: haivanxinh99@gmail.com Face Hải Vân

Câu 87: Cho tam giác ABC và điểm I thỏa mãn $23\overrightarrow{IA}+8\overrightarrow{IB}+2018\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Đường thẳng AI cắt đường thẳng BC tại J. Giá trị của tỉ số $\frac{JB}{JC}$ là:

A. $\frac{23}{8}$ **B.** $\frac{2018}{23}$ **C.** $\frac{2018}{8}$ **D.** $\frac{8}{23}$

(Họ và tên tác giả: Ngô Ngọc Hà, Tên FB: Ngô Ngọc Hà)

Câu 88: Cho tam giác ABC. Điểm K chia trung tuyến AD theo tỷ số $3:1$ kể từ đỉnh.

Đường thẳng BK chia diện tích tam giác ABC theo tỷ số $k=\frac{S_{ABF}}{S_{BCF}}$, giá trị của k bằng?

A. $k=\frac{5}{8}$ **B.** $k=\frac{3}{8}$ **C.** $k=\frac{3}{5}$ **D.** $k=\frac{3}{2}$

(Họ tên: Phạm Văn Bình, tên FB: Phạm văn Bình)

Câu 89: Cho tam giác ABC với K là trung điểm BC. Lấy các điểm M,N thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Gọi I là giao điểm của MN và AK. Đặt $\overrightarrow{MI}=x\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AI}=y\overrightarrow{AK}$. Hỏi $\frac{x}{y}$

A. $\frac{3}{2}$.   **B.** $\frac{4}{3}$.   **C.** 1.   **D.** $\frac{5}{3}$.

Họ và tên: Tăng Lâm Tường Vinh, Facebook: tanglamtuong.vinh

Câu 90: Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh BC lấy E, F sao cho $\frac{AD}{DB}=\frac{3}{2}$; $\frac{BE}{EC}=\frac{1}{3}$; $\frac{BF}{FC}=\frac{4}{1}$. Đường thẳng AE chia đoạn DF theo tỷ số $\frac{KD}{KF}=k$. Giá trị của k bằng?

A. $k=\frac{3}{11}$ **B.** $k=\frac{11}{3}$ **C.** $k=\frac{3}{14}$ **D.** $k=\frac{11}{14}$

(Họ tên: Phạm Văn Bình, tên FB: Phạm văn Bình)

Câu 91: Cho tam giác ABC. Kéo dài AB một đoạn $BE = AB$, gọi F là trung điểm của AC. Vẽ hình bình hành $EAFG$. Đường thẳng AG cắt BC tại K. Tính tỉ số $\dfrac{KB}{KC}$?

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{2}{7}$.

Câu 92: ***Họ và tên: Hoàng Ngọc Lâm,Email: hoangngoclammath1112@gmail.com***

Câu 93: Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$. Phân giác trong AD của góc BAC cắt trung tuyến BM tại I. Tính tỉ số $\dfrac{AD}{AI}$.

A. $\dfrac{13}{8}$. **B.** $\dfrac{11}{6}$. **C.** $\dfrac{10}{7}$. **D.** $\dfrac{10}{5}$.

(Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Phương Thảo, Tên FB: Nguyễn Thị Phương Thảo)

Câu 94: Cho hình bình hành $ABCD$, O là điểm bất kì trên đoạn AC, đường thẳng BO cắt cạnh CD tại E và đường thẳng AD tại F sao cho $EF = 2BO$. Tỷ số $\dfrac{AF}{AD}$ bằng

A. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **B.** 2. **C.** $1+\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Họ và tên: Nguyễn Văn Toản Tên FB: Dấu Vết Hát,Email: nguyenvantoannbk@gmail.com

Câu 95: Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$; gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCA_1, CAB_1, ABC_1. Gọi G, G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$. Tính tỉ số $\dfrac{GG_1}{GG_2}$ ta được kết quả :

A. $\dfrac{1}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** 3 **D.** 2

Họ và Tên : Nguyễn Văn Mạnh FB : Nguyễn Văn Mạnh, Email : manhluonghl4@gmail.com

VẤN ĐỀ 5. MIN,MAX

Câu 96: Cho ΔABC đều cạnh bằng 3, M là điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Đặt $P = MA^2 - MB^2 - MC^2$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của P. Khi đó, giá trị biểu thức $T = 4a + b$ là:

A. 3. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 12.

Họ và tên tác giả: Phùng Hằng Tên FB: Phùng Hằng

Câu 97: Cho ΔABC và 3 số dương x, y, z thay đổi có tổng bình phương: $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$, $k \in R$. Giá trị lớn nhất của $P = xy\cos C + yz\cos A + zx\cos B$ là:

A. $\dfrac{k}{2}$. **B.** $\dfrac{k^2}{2}$. **C.** $\dfrac{k}{3}$. **D.** $\dfrac{k^2}{3}$.

Họ và tên tác giả: Trần Văn Ngờ Tên FB: Tran Van Ngo Tth, Email: vanngodhqn@gmail.com

Câu 98: Cho hai điểm $A,B\in(I;6)$ và $M\in(I;3)$, thỏa mãn : $\widehat{AIB}=60^\circ$. Khi A,B,M thay đổi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$?

A. 9. **B.** $3+2\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{13}$. **D.** $6-\sqrt{3}$.

(Họ và tên tác giả : Đặng Mơ- Tư Duy Mở)

Câu 99: Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm tùy ý và các điểm *I, J, K* cố định sao cho đẳng thức thỏa mãn với mọi điểm *M*: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=k\overrightarrow{MK}$. Giá trị của k là

A. $k=3$ **B.** $k=4$ **C.** $k=5$ **D.** $k=6$

Câu 100: Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Gọi α là góc giữa hai đường trung tuyến *BD* và *CK*. Giá trị nhỏ nhất của $\cos\alpha$ bằng

A. $\frac{4}{5}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Câu 101: Cho hai điểm cố định *G* và G' là trọng tâm của tam giác *ABC* và tam giác $A'B'C'$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=AA'+BB'+CC'$ bằng

A. GG' **B.** $3GG'$ **C.** $2GG'$ **D.** $\frac{1}{3}GG'$

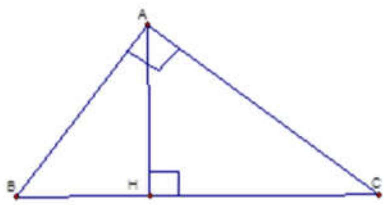
Họ và tên: Nguyễn Đức Hoạch – email: nguyenhoach95@gmail.com

Câu 102: Cho hình thang $A_1B_1C_1D_1$ có $A_1B_1//C_1D_1, A_1B_1=3a, C_1D_1=2a, \widehat{D_1A_1B_1}=\widehat{C_1B_1A_1}=60^0$. Với mỗi điểm G_1 di động trên cạnh A_1B_1 ta xác định điểm F_1 sao cho $\overrightarrow{G_1F_1}=\overrightarrow{G_1C_1}+\overrightarrow{G_1D_1}$. Tìm độ dài nhỏ nhất của $\overrightarrow{G_1F_1}$.

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3a}{2}$.

Mail: nguyennga82nvc@gmail.com, FB: Nguyễn Nga Nvc

Câu 103: Cho tam giác ABC vuông ở A; BC = 2; CA = b; AB = c và điểm M di động
Biểu thức F= $-8MA^2+b^2MB^2+c^2MC^2$ đạt giá trị lớn nhất bằng



A. 4 **B.** 12 **C.** 16 **D.** 24

Nguyễn Văn Công- Trường THPT Kinh Môn II, Gmail: nguyencongkm2@gmail.com

Câu 104: Cho ABC đều có cạnh bằng $2a$. Gọi d là đường thẳng qua A và song song BC, điểm M di động trên d. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

A. $2a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Họ và tên tác giả: Vũ Viên Tên FB: Vũ Viên, Email: tieplen@gmail.com

Câu 105: Trong mặt phẳng cho tam giác ABC và một điểm M bất kỳ. Đặt $a = BC, b = CA, c = AB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c}$.

A. $3\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Họ và tên tác giả: Phạm Khắc Thành, Email: phamkhacthanhkt@gmail.com

Câu 106: Cho tam giác ABC có trung tuyến $AA' \perp CC'$ $(A' \in BC, C' \in AB)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\cos B$.

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$

Mail: thuytrangmn@gmail.com

Câu 107: Cho tam giác ABC có các cạnh AB = c, AC = b, BC = a. Tìm điểm M để vecto $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất

A. M trùng với trọng tâm G của tam giác ABC.

B. M trùng với tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC.

C. M trùng với trực tâm H của tam giác ABC.

D. M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC.

Họ và tên tác giả: Vũ Thị Hồng Lê Tên FB: Hồng Lê, Email: hongle.ad@gmail.com

Câu 108: Cho tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng a, M là điểm di động trên đường thẳng AC. Khi đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| + 3\left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ là:

A. $MinT = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $MinT = 2a\sqrt{3}$. **C.** $MinT = a\sqrt{3}$. **D.** $MinT = \frac{5a\sqrt{3}}{2}$.

Họ và tên: Ngô Gia Khánh, Địa chỉ mail: ngkhanh4283@gmail.com

Câu 109: Cho ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có các trọng tâm G và G' cố định và $GG' = a$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của $T = AA' + BB' + CC'$ là:

A. $T = a$. **B.** $T = 2a$. **C.** $T = 3a$. **D.** $T = 4a$.

(Họ và tên tác giả: Phạm văn Tài, Tên FB: TaiPhamVan)

Câu 110: Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = x, AC = y$; $(x > y > 0)$. Gọi AD là đường phân giác trong của góc A. Biết biểu thị vectơ $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$. Tính $S = m + n$.

A. $S = -2$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 2$.

Mail: thongbui1987@gmail.com

Câu 111: Cho ΔABC có $AB = 3$; $AC = 4$. Phân giác trong AD của góc $\widehat{BAC}$ cắt trung tuyến BM tại I. Biết $\frac{AD}{AI} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = a + 2b$.

A. $S = 10$. **B.** $S = 14$. **C.** $S = 24$. **D.** $S = 27$.

Câu 112: Cho tứ giác $ABCD$ có AD và BC cùng vuông góc với AB, $AB = 8$, $AD = a$, $BC = b$. Gọi E là một điểm thuộc cạnh CD. Biết $\widehat{AEB} = 90°$, giá trị lớn nhất của $T = ab$ là

A. 4. **B.** 16. **C.** 8. **D.** 64.

Họ và tên tác giả: Lê Hồng Phi Tên FB: Lê Hồng Phi, Email: lehongphivts@gmail.com

Câu 113: Cho tứ giác $ABCD$ có AD và BC cùng vuông góc với AB, $AB=h$, $AD=a$, $BC=b$. Cho k là số thực dương thuộc $(0;1)$ và điểm E thỏa mãn $k\overrightarrow{EC}+(1-k)\overrightarrow{ED}=\vec{0}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, h, k để góc $\widehat{AEB}=90°$?

A. $(1-k)b+ka=h\sqrt{k(1-k)}$. **B.** $kb+(1-k)a=hk(1-k)$.

C. $kb+(1-k)a=h\sqrt{k(1-k)}$. **D.** $(1-k)b+ka=hk(1-k)$.

Câu 114: Cho tam giác có trọng tâm G, qua G dựng đường thẳng d cắt cách cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Đặt $\frac{AM}{AB}=x$, $\frac{AN}{AC}=y$, gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $T=x+y$. Tính $m+M$.

A. $\frac{10}{3}$. **B.** $\frac{17}{6}$. **C.** $\frac{11}{6}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

(Họ và tên tác giả: Hoàng Thị Thanh Nhàn, Tên FB: Hoàng Nhàn)

Câu 115: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm M di động trên BC sao cho $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Họ và tên: Nguyễn Thị Thu, Email: thutoan83@gmail.com, Facebook: Nguyễn Thị Thu

Câu 116: Cho tam giác ABC đều cạnh $2\sqrt{3}$, d là đường thẳng qua B và tạo với AB một góc 60^0 $(C\notin\Delta)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$?

A. $\frac{3}{5}$ **B.** $\frac{12}{5}$ **C.** $\frac{4}{5}$ **D.** 2

(Tác giả: Hoàng Thị Thúy - Facebook: Cỏ ba lá)

Câu 117: Cho tam giác ABC đều cạnh 1 nội tiếp đường tròn (O) và điểm M thay đổi trên O. Gọi s, i lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$. Tính $s+i$.

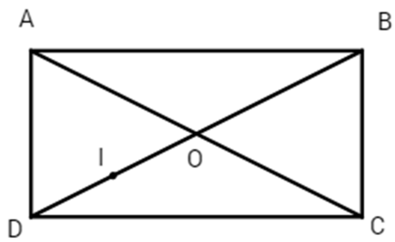
A. $s+i=\sqrt{3}$. **B.** $s+i=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **C.** $s+i=\frac{5\sqrt{3}}{3}$. **D.** $s+i=2\sqrt{3}$.

Câu 118: Cho lục giác đều $ABCDEF$ cạnh a. Trên đường chéo AC, CE lấy hai điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=k$ $(0<k<1)$. Độ dài BM^2+BN^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi k bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

(Bùi Duy Nam sưu tầm. FB: Bùi Duy Nam https://www.facebook.com/duynam.bui.1)

Câu 119: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD=a$, $AB=b$. O và I lần lượt là trung điểm DB và DO. N là điểm thỏa mãn $\left|2\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|2\overrightarrow{AD}\right|$ và NB lớn nhất. Tính NB.



A. $\dfrac{2a+3\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ **B.** $\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ **C.** $\dfrac{2a+3\sqrt{a^2+b^2}}{4}$ **D.** $\dfrac{2a+\sqrt{a^2+b^2}}{4}$.

Câu 120: Cho tam giác ABC, $AB=3(cm), BC=4(cm), CA=5(cm)$. Điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MB^2+MC^2-MA^2$ là

A. 0. **B.** $5-\dfrac{5\sqrt{97}}{2}$. **C.** $5+\dfrac{5\sqrt{97}}{2}$. **D.** $5-\dfrac{5\sqrt{97}}{4}$.

Phuongthao.nguyenmaths@gmail.com

Câu 121: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overrightarrow{BH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm M di động nằm trên BC sao cho $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho độ dài của vectơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\dfrac{4}{5}$.. **B.** $\dfrac{5}{6}$.. **C.** $\dfrac{6}{5}$.. **D.** $\dfrac{5}{4}$.

(Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Phương Thảo, Tên FB: Nguyễn Thị Phương Thảo)

Câu 122: Cho hình thang ABCD có đáy CD gấp đôi đáy AB. Lấy một điểm E sao cho $3\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{DE}$ và đồng thời thỏa mãn $CA=CE$. Giá trị nhỏ nhất của góc $\widehat{ABC}$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(95^\circ;100^\circ)$. **B.** $(100^\circ;106^\circ)$. **C.** $(106^\circ;115^\circ)$. **D.** $(115^\circ;120^\circ)$.

Họ tên tác giả: Đoàn Phú Như, Tên fb: Như Đoàn, Email: doanphunhu@gmail.com

Câu 123: Cho hình thang ABCD có $2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $AC=8, BD=6$, góc tạo bởi hai véc tơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ bằng 120°. Khi đó giá trị của $(AD+BC)$ bằng:

A. $\dfrac{13+2\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{14+4\sqrt{7}}{3}$. **C.** $\dfrac{15+2\sqrt{10}}{4}$. **D.** $6+4\sqrt{3}$.

(Tác giả: Thầy Nguyễn Đăng Ái, FB: Nguyễn Đăng Ái)

Câu 124: Cho hình thang ABCD có $2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $AC=9, BD=6$. Giá trị của biểu thức (BC^2-AD^2) bằng:

A. 15. **B.** $\dfrac{80}{3}$. **C.** 12. **D.** 14.

(Tác giả: Thầy Nguyễn Đăng Ái, FB: Nguyễn Đăng Ái)

Câu 125: Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=60^\circ$ và AB, AC đã biết. Biểu thức $P=k.MA+MB+MC$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $(AB+AC)$ với mọi giá trị thực $k\geq k_0$. Giá trị của k_0 nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(\frac{3}{2};2)$. **C.** $(1;\frac{3}{2})$. **D.** $(2;3)$.

(Tác giả: Thầy Nguyễn Đăng Ái, FB: Nguyễn Đăng Ái)

Câu 126: Cho tam giác ABC có các cạnh AB = c, AC = b, BC = a. Tìm điểm M để vecto $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất

A. M trùng với trọng tâm G của tam giác ABC.

B. M trùng với tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC.

C. M trùng với trực tâm H của tam giác ABC.

D. M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC.

Họ và tên tác giả: Vũ Thị Hồng Lê Tên FB: Hồng Lê

Câu 127: Cho tam giác ABC đều cạnh a và điểm M thay đổi. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2MA^2+3MB^2-4MC^2$ là:

A. $14a^2$ **B.** $-14a^2$ **C.** $-\frac{26a^2}{3}$ **D.** $\frac{26a^2}{3}$

Họ và tên: Nguyễn Thị Tuyết Lê FB: Nguyen Tuyet Le

Câu 128: Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau. Tính giá trị nhỏ nhất của $\cos A$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Họ và tên tác giả: Đặng Văn Tâm Tên FB: Đặng Văn Tâm, Email: dvtam0189@gmail.com

Câu 129: Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng a. Một điểm M di động sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$. Gọi H là hình chiếu của M lên AB. Tính độ dài lớn nhất của MH?

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** a. **D.** $2a$.

Họ và tên: Phương Xuân Trịnh Tên FB:: Phương Xuân Trịnh, Email: phuongtrinhlt1@gmail.com

Câu 130: Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi α là góc giữa hai trung tuyến BD và CK. Giá trị nhỏ nhất của $\cos\alpha$ là:.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 131: Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A sao cho $\overrightarrow{CH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$. Điểm M di động trên BC sao cho $\overrightarrow{CM}=x.\overrightarrow{CB}$. Tìm x sao cho độ dài vecto $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GB}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\frac{8}{5}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{6}{5}$. **D.** $\frac{5}{8}$.

(Họ và tên tác giả: Nguyễn Văn Phu, Tên FB Nguyễn Văn Phu)

Câu 132: Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng a. Một điểm M di động sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$. Gọi H là hình chiếu của M lên AB. Tính độ dài lớn nhất của MH?

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** a. **D.** $2a$.

Câu 133: Cho AD và BE là hai phân giác trong của tam giác ABC. Biết $AB=4$, $BC=5$ và $CA=6$. Khi đó $\overrightarrow{DE}$ bằng:

A. $\frac{5}{9}\overrightarrow{CA}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. **B.** $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}-\frac{5}{9}\overrightarrow{CB}$. **C.** $\frac{9}{5}\overrightarrow{CA}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. **D.** $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}-\frac{9}{5}\overrightarrow{CB}$.

Họ và tên: Nguyễn Thị Thanh Thảo Tên FB: Nguyễn Thanh Thảo

Câu 134: : Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng a. Một điểm M di động sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$. Gọi H là hình chiếu của M lên AB. Tính độ dài lớn nhất của MH?

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** a. **D.** $2a$.

Câu 135: Một miếng gỗ có hình tam giác có diện tích là S điểm I, O lần lượt thỏa mãn $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OI}=\vec{0}$. Cắt miếng gỗ theo một đường thẳng qua O, đường thẳng này đi qua M,N lần lượt trên các cạnh AB, AC. Khi đó diện tích miếng gỗ chứa điểm A thuộc đoạn:

A. $\left[\frac{S}{4};\frac{S}{3}\right]$. **B.** $\left[\frac{S}{3};\frac{S}{2}\right]$. **C.** $\left[\frac{3S}{8};\frac{S}{2}\right]$. **D.** $\left[\frac{S}{4};\frac{3S}{8}\right]$

Họ và tên tác giả: Hoàng Tiến Đông, Tên FB: tiendongpt, Email: *dongpt@c3phuctho.edu.vn*

Câu 136: Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R=2$. Tìm giá trị lớn nhất của $BC^2-AB^2-AC^2$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4

Đỗ Công Dũng, Email: congdung812@gmail.com

Câu 137: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi M là điểm nằm trên cạnh AB. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ theo a.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 138: Cho hình bình hành ABCD, M thuộc đường chéo AC, (M không trùng với các đỉnh A, C) Trên các đường thẳng AB, BC, lấy các điểm P và Q sao cho MP // BC, MQ // AB. Gọi N là giao hai đường thẳng AQ và CP. Giả sử $\overrightarrow{DN}=m\overrightarrow{DA}+n\overrightarrow{DC}$. Tìm giá trị lớn nhất của m + n

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 2

Email: themhaitotoanyp1@gmail.com, (Fb: Lưu Thêm)

Câu 139: : Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm M di động nằm trên BC sao cho $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho độ dài của vectơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{6}{5}$. **D.** $\frac{5}{4}$.

Họ và tên: Lê Thị Lan FB: Lê Lan, Email: lelanqx2@gmail.com

Câu 140: Cho tam giác ABC có $BC=a, AC=b, AB=c$ nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. M là điểm thuộc đường tròn (O). Gọi N, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA^2+MB^2+MC^2$. Khi đó giá trị của $N-n$ bằng

A. $12\mathrm{R}^2$. **B.** $4\mathrm{R}\sqrt{9\mathrm{R}^2-a^2-b^2-c^2}$.

C. $2\mathrm{R}\sqrt{9\mathrm{R}^2-a^2-b^2-c^2}$. **D.** $8\mathrm{R}\sqrt{9\mathrm{R}^2-a^2-b^2-c^2}$.

Tác giả: Nguyễn Văn Hưng Facebook: Nguyễn Hưng

Câu 141: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R, M là một điểm bất kì trên đường tròn. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S=MA^2+2MB^2-3MC^2$ là

A. $R^2\sqrt{21}$. **B.** $-R^2\sqrt{21}$. **C.** $2R^2\sqrt{21}$. **D.** $-2R^2\sqrt{21}$.

Họ và tên: Nguyễn Xuân Giao Tên FB: giaonguyen, Email: giaohh2@gmail.com

Câu 142: Cho tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{3}\cos 2A+2\cos 2B+2\sqrt{3}\cos 2C$

A. $P_{min}=-4$. **B.** $P_{min}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. **C.** $P_{min}=-2-3\sqrt{3}$. **D.** $P_{min}=-5$.

Họ và tên: Đồng Anh Tú Facebook: Anh Tú

VẤN ĐỀ 6 TÍCH VÔ HƯỚNG

Câu 143: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

A. $-\dfrac{3a^2}{2}$ **B.** $\dfrac{3a^2}{2}$ **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **D.** $-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Họ và tên: Nguyễn Văn Nho Facebook: Nguyễn Văn Nho

Câu 144: Cho tam giác ABC có AD là trung tuyến, G là trọng tâm. Một đường thẳng qua G cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC}$

B. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC}$

C. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC})$

D. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{2}(\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC})$

Email: ngvnho93@gmail.com

Câu 145: Cho các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$, $|\vec{c}|=c$ và $\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$. Tính $A=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$.

A. $\dfrac{3c^2-a^2-b^2}{2}$. **B.** $\dfrac{3a^2-c^2+b^2}{2}$.

C. $\dfrac{3b^2-a^2-c^2}{2}$. **D.** $\dfrac{3c^2-a^2+b^2}{2}$.

Tác giả: Quang Phi

Câu 146: Cho tam giác ABC vuông tại A có BC = 2a, M là điểm trên đoạn BC sao cho MB = 2MC. Biết rằng $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=a^2$. Độ dài cạnh AC là:

A. $AC=\dfrac{a\sqrt{33}}{3}$ **B.** $AC=a\sqrt{3}$ **C.** $AC=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $AC=a\sqrt{5}$

Họ và tên: Đoàn Thị Hường, Email: ngochuongdoan.6@gmail.com, Fb: Đoàn Thị Hường

Câu 147: Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=90^0$, $AB=1, AC=2$ .Dựng điểm M sao cho $AM\perp BC$, $AM=3$. Đặt $\overrightarrow{AM}=x.\overrightarrow{AB}+y.\overrightarrow{AC}$ .Tính $T=x^2+y^2$?

A. $T=\dfrac{153}{20}$. **B.** $T=\dfrac{151}{20}$. **C.** $T=\dfrac{157}{20}$. **D.** $x=\dfrac{159}{20}$.

Họ tên: Đào Hữu Nguyên FB: Đào Hữu Nguyên, Mail: huunguyen1979@gmail.com

Câu 148: Cho tam giác ABC vuông tại **A.** Quỹ tích điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+MA^2$ là

A. Đường thẳng A**C.** **B.** Đường thẳng A**B.**
C. Đường thẳng B**C.** **D.** Đường trung trực cạnh B**C.**

Họ và tên tác giả: Nguyễn Bá Trường Tên FB: thanhphobuon

Câu 149: Cho tam giác đều ABC cạnh $3a$, $(a>0)$. Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $BM=a$, $CN=2a$, $AP=x$ $(0<x<3a)$. Tìm x để $AM\perp PN$.

A. $x=\dfrac{3a}{5}$. **B.** $x=\dfrac{4a}{5}$.

C. $x=\dfrac{a}{5}$. **D.** $x=\dfrac{2a}{5}$

Họ và tên tác giả: Nguyễn Bá Trường Tên FB: thanhphobuon

Câu 150: Cho tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi M là trung điểm AB và I là điểm di động trên đường thẳng MC. Khi $\left|2\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{AC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính tỉ số $\dfrac{AC}{AI}$.

A. $\dfrac{AC}{AI}=1$. **B.** $\dfrac{AC}{AI}=\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{AC}{AI}=2$. **D.** $\dfrac{AC}{AI}=\dfrac{3}{2}$.

(Họ và tên tác giả: Nguyễn Đức Lợi, Tên FB: Nguyễn Đức Lợi)

Câu 151: Cho ΔABC có trọng tâm G, H là chân đường cao kẻ từ A sao cho $\overrightarrow{BH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm M di động trên BC sao cho $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|$ nhỏ nhất.

A. $\dfrac{6}{5}$ **B.** $\dfrac{5}{4}$ **C.** $\dfrac{4}{5}$ **D.** $\dfrac{5}{6}$

Họ tên: Vũ Thị Chuyền FB: Vũ Thị Chuyền

Câu 152: Cho tam giác *ABC*, nhọn, không cân và nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi *G* và *M* lần lượt là trọng tâm tam giác *ABC* và trung điểm cạnh *B**C.*** Cho đường thẳng *OG* vuông góc với đường thẳng *OM* tính giá trị biểu thức $AC^2+AB^2+2BC^2$ theo R.

A. $8R^2$. **B.** $10R^2$. **C.** $12R^2$. **D.** $14R^2$.

Lời giải

Họ và tên: Nguyễn Thị Trăng Fb: Trăng Nguyễn

Câu 153: Cho tam giác MNP có MN=4,MP=8, $\widehat{M}=60^0$ Lấy điểm E trên tia MP và đặt $\overrightarrow{ME}=k\overrightarrow{MP}$ .Tìm k để NE vuông góc với trung tuyến MF của tam giác MNP.

A. k=$\frac{2}{3}$. **B.** k=$\frac{2}{5}$. **C.** k=$\frac{1}{3}$. **D.** k=$\frac{1}{2}$.

Họ và tên tác giả: Phạm Hồng Quang Tên FB: Quang Phạm

Câu 154: Đẳng thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC}$ đúng với mọi điểm M. Khi đó tứ giác ABCD là hình gì.

A. Hình thang vuông. **B.** Hình chữ nhật.

C. Hình thoi. **D.** Tứ giác có hai đường chéo vuông góc.

Lời giải

(Họ và tên tác giả: Phạm Trung Khuê, Tên FB: Khoi Pham)

Câu 155: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng BC và AC sao cho $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{CN}=k\overrightarrow{AN}$ và $AM\perp DN$. Khi đó k thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(3;5)$. **B.** $(-5;-3)$. **C.** $(-4;-2)$. **D.** $(2;4)$.

Họ và tên: Nguyễn Đắc Giáp Facebook: dacgiap

Câu 156: Cho hai vector $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{7},\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2$, vector $(3\vec{a}+\vec{b})$ vuông góc với $(\vec{a}-\vec{b})$. Tính *cosin* của góc tạo bởi hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Họ và tên tác giả: Ngô Nguyễn Quốc Mẫn Tên FB: Ngonguyen Quocman

Câu 157: Giả sử O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh $BC=a;CA=b;AB=c$. Tìm giá trị biểu thức: $K=\frac{OA^2}{b.c}+\frac{OB^2}{c.a}+\frac{OC^2}{a.b}$

A. $K=\frac{1}{2}$ **B.** $K=\frac{1}{3}$ **C.** $K=1$ **D.** $K=\frac{1}{4}$

Câu 158: Cho hình vuông *ABC**D.*** *M*, *N* lần lượt nằm trên hai cạnh *BC* và *CD* sao cho $\frac{CM}{CB}=\frac{CN}{CD}=\frac{1}{3}$.

Gọi *E* là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AN}$. Khi $BE\perp AM$. Tính giá trị biểu thức $T=k^2-k+1$.

A. $\frac{13}{16}$ **B.** $\frac{7}{9}$ **C.** $\frac{8}{9}$ **D.** $\frac{5}{16}$

Họ và tên: Lê Thái Bình, Email: lebinhle80@gmail.com, Facebook: Lê Thái Bình

Câu 159: Cho hình vuông ABCD, điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM=\frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm C**D.** Tam giác BMN là

A. Tam giác đều. **B. Tam giác cân.**

C. Tam giác Vuông. **D.** Tam giác vuông cân

Huỳnh Kim Linh GV Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn Khánh Hòa

Câu 160: Cho tam giác ABC. Gọi H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, c sao cho OH vuông góc với trung tuyến vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC.

A. $2a^2 = b^2 + c^2$. **B.** $2b^2 = a^2 + c^2$. **C.** $2c^2 = a^2 + b^2$. **D.** $b^2 = 2a^2 + 2c^2$.

(Email): luongthanh80tm@gmail.com

Câu 161: Cho tam giác ABC có AD là trung tuyến, G là trọng tâm. Một đường thẳng qua G cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC}$

B. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC}$

C. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC})$

D. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC})$

(Sưu tầm, Họ và tên: Nguyễn Lương Thành, Tên FB:* luongthanh.nguyen.7*)

Câu 162: Cho hình chữ nhật ABCD có cạnh AB=2 và AD=4.Gọi M là trung điểm của cạnh AB và N là điểm trên cạnh AD sao cho $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AD}$,CM vuông góc với BN.Khi đó k thuộc vào khoảng nào sau đây

A. $\left(0;\frac{1}{16}\right)$ **B.** $\left(\frac{1}{16};\frac{1}{20}\right)$ **C.** $\left(\frac{1}{20};\frac{1}{9}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{6}\right)$

Họ và tên:Phan Thông, Email:quocthong1182@gmail.com, Facebook:Quocthongphan

Câu 163: Cho tam giác MNP có MN=4,MP=8, $\widehat{M} = 60^0$ Lấy điểm E trên tia MP và đặt $\overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{MP}$ .Tìm k để NE vuông góc với trung tuyến MF của tam giác MNP.

A. k=$\frac{2}{3}$. **B.** k=$\frac{2}{5}$. **C.** k=$\frac{1}{3}$. **D.** k=$\frac{1}{2}$.

Câu 164:* *Họ và tên: Phạm Hồng Quang Tên FB: Quang Phạm, Email: phamhongquangltv@gmail.com

Câu 165: Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. M là trung điểm của BC, D là chân đường phân giác trong góc A. Tính $\overrightarrow{AD}^2$

A. $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4c}{(b+c)^2}p(p-a)$. **B.** $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}(p-a)$.

C. $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b-c)^2}p(p-a)$. **D.** $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$

(Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Phương Thảo, Tên FB: Nguyễn Thị Phương Thảo)

Câu 166: Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$ và $\widehat{BAC} = 60^0$. Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NA}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa b và c để AM và CN vuông góc với nhau.

A. $6c^2 - 4b^2 - 5bc = 0$. **B.** $4c^2 - 5b^2 - 6bc = 0$.
C. $6c^2 - 5b^2 - 4bc = 0$. **D.** $4c^2 - 6b^2 - 5bc = 0$.

Họ và tên tác giả: Nguyễn Văn Toản Tên FB: Dấu Vết Hát

Câu 167: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi I là trung điểm của AC và M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}$. Biết rằng OM vuông góc với BI và $AC^2 = 3BC.BA$. Tính góc $\widehat{ABC}$.

A. $30°$. **B.** $45°$ **C.** $60°$. **D.** $120°$.

Họ tên: Trần Ngọc Tên FB: Ngọc Trần, Email: soantailieutoanhoc2018@gmail.com

Câu 168: Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AD = h, đáy AB = a, đáy CD = b. Gọi M là trung điểm của BC. Hệ thức giữa a, b, h để $AM \perp BD$ là

A. $a^2 - h^2 - ab = 0$. **B.** $h^2 - a^2 - ab = 0$ **C.** $h^2 - b^2 - ab = 0$. **D.** $b^2 - h^2 - ab = 0$.

Họ và tên tác giả: Đào Trung Kiên (st) Tên FB: kienyenthe, Email: kienyenthe@gmail.com

Câu 169: Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Gọi M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Gọi I là giao điểm của AM và CN. Tính diện tích của tam giác IBC theo a?

A. $S_{IBC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{7}$. **B.** $S_{IBC} = \frac{a^2\sqrt{7}}{7}$. **C.** $S_{IBC} = \frac{2a^2\sqrt{7}}{7}$. **D.** $S_{IBC} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{7}$.

Họ và tên: Vũ Huỳnh Đức, Email: vutoanpvd@gmail.com, Facebook: vuhuynhduc2017

Câu 170: Cho tam giác đều ABC và các điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = k\,\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{4}{15}\overrightarrow{AB}$. Tìm k để AM vuông góc với PN .

A. $k = \frac{1}{3}$ **B.** $k = \frac{1}{2}$ **C.** **D.** $k = \frac{3}{4}$

Họ và tên: Huỳnh Thanh Tịnh Tên FB: huynhthanhtinh, Email: huynhthanhtinhspt@gmail.com

Câu 171: : Giả sử O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh $BC = a; CA = b; AB = c$. Tìm giá trị biểu thức: $K = \frac{OA^2}{b.c} + \frac{OB^2}{c.a} + \frac{OC^2}{a.b}$

A. $K = \frac{1}{2}$ **B.** $K = \frac{1}{3}$ **C.** $K = 1$ **D.** $K = \frac{1}{4}$

Người sưu tầm: Tăng Duy Hùng. FB: Hùng Tăng

Câu 172: Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}| = \frac{1}{2}|\vec{b}| = 1,\ |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{15}.$ Đặt $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{v} = 2k\vec{a} - \vec{b},\ k \in \mathbb{R}.$ Tìm tất cả các giá trị của k sao cho $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 60^0.$

A. $k = 4 + \frac{3\sqrt{5}}{2}.$ **B.** $k = 4 \pm \frac{3\sqrt{5}}{2}.$ **C.** $k = 5 + \frac{\sqrt{17}}{2}.$ **D.** $k = 5 \pm \frac{\sqrt{17}}{2}.$

Họ và tên: Nguyễn Thị Huệ, FB: Nguyễn Thị Huệ, Gmail: nguyenthihue1611@gmail.com

Câu 173: Cho tứ giác $ABCD$, hai điểm M, N thỏa mãn $2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}; 2\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$ và $\dfrac{AD}{BC}=x.$

Tính $\dfrac{\cos\widehat{DBC}}{\cos\widehat{ADB}}$ theo x để $MN\perp BD.$

A. $\dfrac{x}{2}$. **B.** $-\dfrac{x}{2}$. **C.** $\dfrac{x}{\sqrt{3}}$. **D.** $x\sqrt{3}$.

Họ và tên tác giả: Lê Thị Nguyệt Tên FB: NguyệtLê, Email: Lenguyet150682@gmail.com

Câu 174: Cho tam giác ABC có $AB=6; BC=7; CA=5$. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AM=2MB$ và N là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AC}$ ($k\in\mathbb{R}$). Biết $k=-\dfrac{a}{b}$ ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, a,b là các số nguyên) sao cho đường thẳng CM vuông góc với đường thẳng $BN.$

Tính giá trị biểu thức $T=2018a-2019b+5$.

A. $T=2017.$ **B.** $T=-2020.$ **C.** $T=2030.$ **D.** $T=-2030.$

Họ và tên tác giả: Trần Thanh Hà Tên FB: Hatran, Email: tranthanhha484@gmail.com

Câu 175: Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$ và $\widehat{BAC}=60^0$. Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{NB}=-2\overrightarrow{NA}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa b và c để AM và CN vuông góc với nhau.

A. $6c^2-5b^2-4bc=0$ **B.** $c^2-6b^2-5bc=0$

C. $4c^2-6b^2-5bc=0$ **D.** $4c^2+6b^2-5bc=0$

Họ và tên tác giả: Đỗ Thế Nhất Tên FB: Đỗ Thế Nhất, Email: nhatks@gmail.com

Câu 176: Cho hình chữ nhật ABCD có AB= a, AD=2a. Gọi M là trung điểm AB, N là điểm trên cạnh AD sao cho $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AN}$. Tìm k để CM $\perp$ BN.

A. k=7,9 **B.** k=8 **C.** k=8,1 **D.** k=7.8

Câu 177: Cho hình bình hành $ABCD$ có đường chéo lớn là AC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên AB, AD. Biểu thức nào sau đây là đúng.

A. $AB.AH+AD.AF=AC^2$. **B.** $AB.AE+AD.AF=AC^2$.

C. $AB.AE+AD.AH=AC^2$. **D.** $AB.AE+AD.AF=AC.AH$.

Họ và tên tác giả: Nguyễn Ngọc Duy Tên FB: Ngọc Duy, Email: nguyenngocduyakgl@gmail.com

Câu 178: Cho hình thang vuông $ABCD$, đường cao $AD=h$, cạnh đáy $AB=a, CD=b$. Tìm hệ thức giữa a,b,h để BD vuông góc trung tuyến AM của tam giác ABC.

A. $h^2=a(a+b)$. **B.** $h^2=a(b-a)$.

C. $h(h+b)=a(a+b+h)$. **D.** $2h^2=a(a+b)$

Email: thuy.tranthithanhdb@gmail.com

Câu 179: Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O, R), M là điểm chính giữa cung BC (cung BC không chứa điểm A). Chọn đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau:

A. $MA = MB.\sin C + MC.\sin B$ **B.** $MA = MB.\cos C + MC.\cos B$

C. $MA = MB.\sin B + MC.\sin C$ **D.** $MA = MB.\cos B + MC.\cos C$

Họ và tên tác giả: Nguyễn Quang Nam Tên FB: Quang Nam, Email: quangnam68@gmail.com

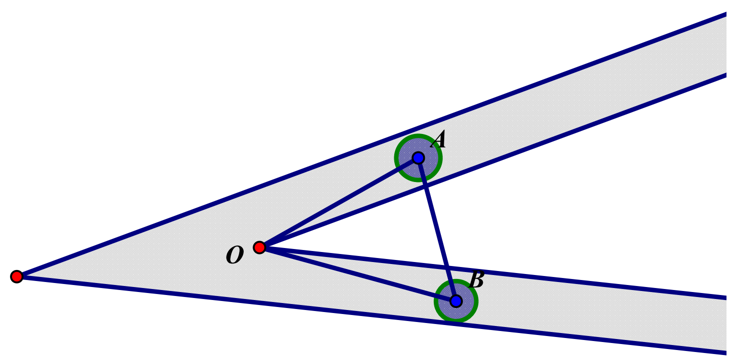
Câu 180: Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. M là trung điểm của BC, D là chân đường phân giác trong góc $\widehat{A}$. Tính $\overrightarrow{AD}^2$

A. $\overrightarrow{AD}^2 = \dfrac{4c}{(b+c)^2}p(p-a)$ **B.** $\overrightarrow{AD}^2 = \dfrac{4bc}{(b+c)^2}(p-a)$

C. $\overrightarrow{AD}^2 = \dfrac{4bc}{(b-c)^2}p(p-a)$ **D.** $\overrightarrow{AD}^2 = \dfrac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$

Họ Tên: Lương Thị Hương Liễu Tên FB: Hương Liễu Lương, Email: lieuluong.290983@gmail.com

Câu 181: Trong cuộc thi giải trí toán học tổ chức nhân dịp hoạt động chào mừng Ngày nhà giáo Việt Nam có một trò chơi như sau: Người ta thiết kế hai đường ray tạo với nhau một góc 30^0 như hình vẽ dưới đây. Trên các đường thẳng Ox và Oy người ta để hai vật nặng cùng trọng lượng. Buộc hai vật thể với nhau bằng một thanh cứng $AB = 1m$ sao cho mỗi vật đều có thể chuyển động được trên hai đường ray. Nối hai vật bằng một sợi giây vòng qua một cột có gốc tại O. Người tham dự cuộc thi sẽ đứng tại vị trí điểm B để kéo vật thể chuyển động trên Oy. Người thắng cuộc sẽ là người kéo được vật thể ra xa nhất so với điểm gốc O. Hãy dùng kiến thức toán học để tính toán vị trí xa nhất mà người tham dự cuộc thi có thể đạt được.



A. $1m$. **B.** $2m$. **C.** $\sqrt{3}m$. **D.** $\sqrt{2}m$.

Họ và tên: Phạm Thành Trung Tên FB: Phạm Thành Trung, Email: trungthuong2009@gmail.com

Câu 182: Cho tam giác ABC có $AB= c,BC=a,CA=b$. Trung tuyến CM vuông góc với phân giác trong AL và $\dfrac{CM}{AL} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Tính $\cos A$.

A. $\cos A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\cos A = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ **C.** $\cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\cos A = \dfrac{1}{2}$

Câu 183: Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 1; CD = 3$. Điểm M thuộc cạnh AD và N là trung điểm BC sao cho $MN \perp BD$. Phân số tối giản $\dfrac{m}{n} = \dfrac{BN}{NC}$ có $m+n$ bằng bao nhiêu

A. 29. **B.** 18. **C.** 16. **D.** 27.

(Họ và tên tác giả: Trần Văn Đoàn, Tên FB: Trần Văn Đoàn)

Câu 184: Cho tam giác ABC có $AB = c$; $BC = a$, $CA = b$. Gọi M là trung điểm của AB và D là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC. Biết rằng trung tuyến CM vuông góc với phân giác trong AD. Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $b = 2c$. **B.** $c = 2b$. **C.** $a = b + c$. **D.** $c = a + b$.

Họ và tên: Nguyễn Thị Thỏa Tên FB: Nguyễn Thị Thỏa, Email: phamquynhanhbaby56@gmail.com

Câu 185: Cho tam giác ABC đều nội tiếp (O;R). M là điểm bất kì trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Khi đó

A. $MA = MB + MC$ **B.** $MA > MB + MC$

C. $MA < MB + MC$ **D.** $MA = 2MB + MC$

CÁC PHẦN CHÍNH CỦA CHUYÊN ĐỀ

VẤN ĐỀ 1. BIỂU DIỄN VÉC TƠ
VẤN ĐỀ 2. BA ĐIỂM THẲNG HÀNG
VẤN ĐỀ 3. QUỸ TÍCH
VẤN ĐỀ 4. TỈ LỆ
VẤN ĐỀ 5. MIN,MAX
VẤN ĐỀ 6 TÍCH VÔ HƯỚNG

Phần II: Hướng Dẫn Giải

Trang: VĐ1-P35; VĐ2-P74; VĐ3-P88; VĐ4-P99; VĐ5-P110; VĐ6-P149

VẤN ĐỀ 1. BIỂU DIỄN VÉC TƠ

Email: daytoan2018@gmail.com

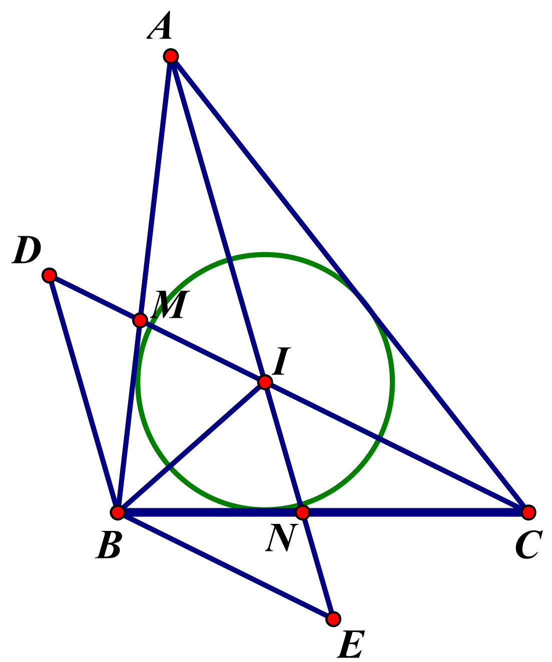
Câu 186: Cho tam giác ABC biết $AB = 3, BC = 4, AC = 6$, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .Gọi x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x.\overrightarrow{IA} + y.\overrightarrow{IB} + z.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .Tính $P = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$

A. $P = \dfrac{3}{4}$. **B.** $P = \dfrac{41}{12}$. **C.** $P = \dfrac{23}{12}$. **D.** $P = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Họ và tên tác giả: Vũ Ngọc Thành Tên FB: Vũ Ngọc Thành

Chọn B



Dựng hình bình hành $BDIE$ như hình vẽ. Khi đó $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{ID} = -\dfrac{IE}{IA}\overrightarrow{IA} - \dfrac{ID}{IC}\overrightarrow{IC}$

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác: $\dfrac{IE}{IA} = \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{BC}{AC}$, $\dfrac{ID}{IC} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{AB}{AC}$

Suy ra $\overrightarrow{IB} = -\dfrac{BC}{AC}\overrightarrow{IA} - \dfrac{AB}{AC}\overrightarrow{IC}$.

Từ $x.\overrightarrow{IA} + y.\overrightarrow{IB} + z.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{IB} = -\dfrac{x}{y}.\overrightarrow{IA} - \dfrac{z}{y}.\overrightarrow{IC}$.

Do $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}$ là hai véc tơ không cùng phương suy ra $x = 4t, y = 6t, z = 3t$ với $t > 0$.

Vậy $P = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} = \dfrac{41}{12}$.

Họ và tên tác giả: Nguyễn Thi Tiết Hạnh Tên FB: Hạnhtiettiet

Email: tiethanh.78@gmail.com

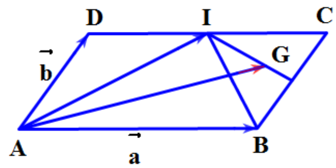
Câu 187: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của CD, G là trọng tâm tam giác BCI. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Hãy tìm đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau?

A. $\overrightarrow{AG} = \dfrac{5}{6}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b}$. **B.** $\overrightarrow{AG} = \dfrac{5}{6}\vec{a} + \vec{b}$.

C. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \dfrac{5}{6}\vec{b}$. **D.** $\overrightarrow{AG} = \dfrac{4}{3}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b}$.

Lời giải

Chọn A



* I là trung điểm của CD nên: $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

* G là trọng tâm tam giác BCI nên: $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$, thay $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ ta được $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

Họ và tên: Dương Bảo Trâm Facebook: Bảo Trâm

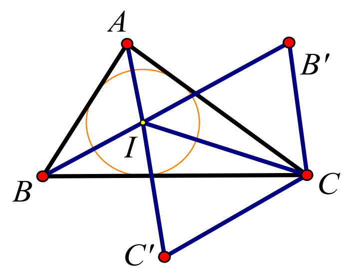
Email: ilovemath.ddt@gmail.com

Câu 188: Cho tam giác ABC với các cạnh $AB=c,\ BC=a,\ CA=b$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AB**C.** Đẳng thức nào sau đây đúng.

A. $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ **B.** $b\overrightarrow{IA}+c\overrightarrow{IB}+a\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

C. $c\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+a\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ **D.** $c\overrightarrow{IA}+a\overrightarrow{IB}+b\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Lời giải



Chọn A

Qua C dựng đường thẳng song song với AI cắt BI tai B';song song với BI cắt AI tại A'

Ta có $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}$ (*)

Theo định lý Talet và tính chất đường phân giác

trong ta có:

$\frac{IB}{IB'}=\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{c}{b}\Rightarrow\overrightarrow{IB'}=-\frac{b}{c}\overrightarrow{IB}$ (1)

Tương tự: $\overrightarrow{IA'}=-\frac{a}{c}\overrightarrow{IA}$ (2)

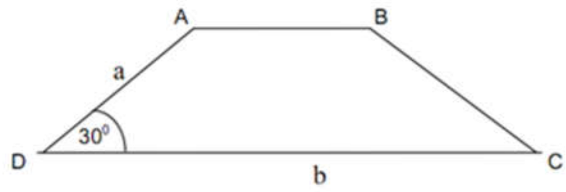
Từ (1) và (2) thay vào (*) ta có:

$\overrightarrow{IC} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{IA} - \frac{b}{c}\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Họ tên: Đỗ Thị Hồng Anh

Đ/c mail: honganh161079@gmail.com

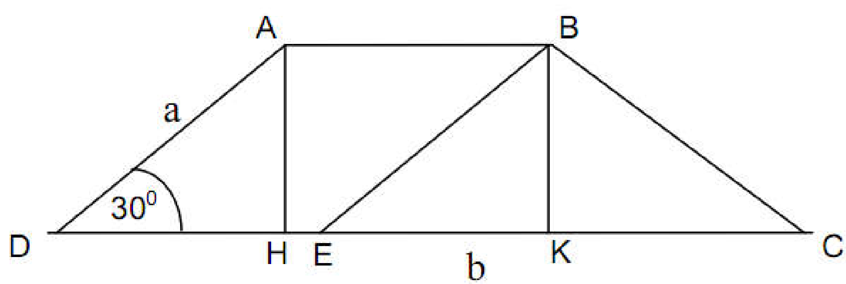
Câu 189: Cho hình thang cân ABCD có CD là đáy lớn, $\widehat{ADC} = 30^0$. Biết DA = a, DC = b, hãy biểu diễn $\overrightarrow{DB}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{DC}$.



A. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}.$ **B.** $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \frac{b - a\sqrt{3}}{b}\overrightarrow{DC}.$

C. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \frac{b-a}{b}\overrightarrow{DC}.$ **D.** $\overrightarrow{DB} = b\overrightarrow{DA} + a\overrightarrow{DC}.$

Lời giải



Kẻ BE // AD, E nằm trên cạnh CD. Ta có:

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \frac{DE}{DC}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \frac{DE}{DC}\overrightarrow{DC}$$
$$= \overrightarrow{DA} + \frac{DC - 2KC}{DC}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \frac{b - a\sqrt{3}}{b}\overrightarrow{DC}.$$

Vậy đáp án đúng là câu **B.**

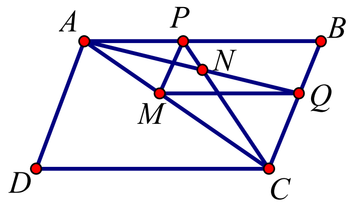
Email: kimduyenhtk@gmail.com

FB: Kim Duyên Nguyễn.

Câu 190: Cho hình bình hành $ABCD$, M là điểm thỏa mãn $5\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$. Trên các cạnh AB, BC lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $MP//BC$, $MQ//AB$. Gọi N là giao điểm của AQ và CP. Giá trị của tổng $\frac{AN}{AQ} + \frac{CN}{CP}$ bằng:

A. $\frac{21}{19}$ **B.** $\frac{24}{19}$ **C.** $\frac{23}{19}$ **D.** $\frac{25}{19}$

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{CN}=y\overrightarrow{CP}$

Vì $MQ//AB, MP//BC \Rightarrow \frac{BQ}{BC}=\frac{AP}{AB}=\frac{AM}{AC}=\frac{2}{5}$

Ta có: $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AP}$

Nên $\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{5}x\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}x\overrightarrow{AP}$ (1)

Do N, C, P thẳng hàng nên $\frac{2}{5}x+\frac{3}{2}x=1 \Rightarrow x=\frac{10}{19}$

Mặt khác $\overrightarrow{CN}=y\overrightarrow{CP} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}=y(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{AN}=(1-y)\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AP}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $y=\frac{3}{2}x=\frac{15}{19}$. Do đó $\frac{AN}{AQ}+\frac{CN}{CP}=x+y=\frac{25}{19}$. Đáp án D

Họ và tên tác giả: Phạm Thị Ngọc Tên FB: Giang Thao

Email: thuangiaoyen@gmail.com

Câu 191: Cho tứ giác ABCD, M là điểm tùy ý. K là điểm cố định thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=x\overrightarrow{MK}$. Tìm x:

A. 2. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Vì đẳng thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=x\overrightarrow{MK}$ (1) thỏa mãn với mọi M nên nó đúng khi M trùng với K. Khi đó ta có: $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+3\overrightarrow{KD}=x\overrightarrow{KK}=\vec{0}$ (2).

Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta có $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=3\overrightarrow{KG}$ (3).

Thay (3) vào (2) ta được $3\overrightarrow{KG}+3\overrightarrow{KD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KG}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}$, suy ra K là trung điểm của GD.

Từ (1) ta có:

$\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KC}\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{MK}+3\overrightarrow{KD}=(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+3\overrightarrow{KD})+6\overrightarrow{MK}=6\overrightarrow{MK}$

Vậy $6\overrightarrow{MK}=x\overrightarrow{MK}$ suy ra x = 6.

Họ và tên: Nguyễn Thanh Hoài

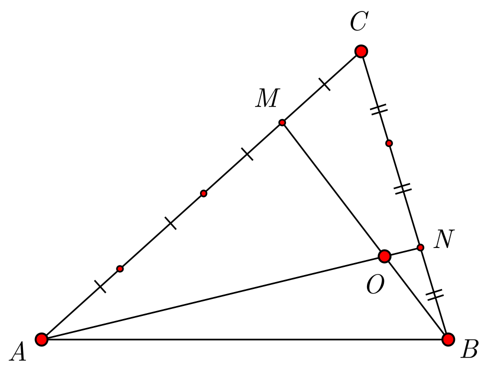
Email: ngthhoai1705@gmail.com

Facebook: https://www.facebook.com/hoaihappy

Câu 192: Cho tam giác ABC, trên cạnh AC lấy điểm M, trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $AM=3MC$, $NC=2NB$. Gọi O là giao điểm của AN và BM. Tính diện tích tam giác ABC biết diện tích tam giác OBN bằng 1.

A. 24. **B.** 20. **C.** 30. **D.** 45

Lời giải



Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{BO}=x\overrightarrow{BA}+(1-x)\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{AO}=y\overrightarrow{AM}+(1-y)\overrightarrow{AB}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=y\overrightarrow{AM}+(x-y+1)\overrightarrow{AB}+(x-1)\overrightarrow{BN} \Leftrightarrow (x-y)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AM}+(x-1)\overrightarrow{BN}=\vec{0}$

(1)

Đặt $\overrightarrow{CB}=\vec{a},\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ ta được $\overrightarrow{AB}=\vec{a}-\vec{b};\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{4}\vec{b};\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{3}\vec{a}$

Thay vào (1) và thu gọn ta được: $(x-y)\vec{a}-(x-y)\vec{b}=\frac{x-1}{3}\vec{a}+\frac{3}{4}y\vec{b}$

Suy ra $\begin{cases}x-y=\frac{x-1}{3}\\ y-x=\frac{3}{4}y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{10}\\ y=\frac{2}{5}\end{cases}$. Với $x=\frac{1}{10}$ ta được $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{10}\overrightarrow{BA}+\left(1-\frac{1}{10}\right)\overrightarrow{BN}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BN}=\frac{1}{10}\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BN}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{NO}=\frac{1}{10}\overrightarrow{NA} \Leftrightarrow \frac{NA}{NO}=10$

Vì $S_{ONB}=1 \Leftrightarrow S_{NAB}=10 \Rightarrow S_{ABC}=30$.

Họ và tên tác giả: Trần Ngọc Uyên Tên FB: Tran Ngoc Uyen

Email: ngocuyen203@gmail.com

Câu 193: Cho tam giác ABC, gọi I là điểm trên BC kéo dài sao cho $IB = 3IC$. Gọi J, K lần lượt là những điểm trên cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC; KB = 3KA$. Khi đó $\overrightarrow{BC} = m.\overrightarrow{AI} + n.\overrightarrow{JK}$. Tính tổng $P = m + n$?

A. $P = 34$. **B.** $P = -34$. **C.** $P = -14$. **D.** $P = 14$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (1)

$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} \overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{JK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AI} + 12\overrightarrow{JK} \\ \overrightarrow{AB} = 16\overrightarrow{AI} + 36\overrightarrow{JK} \end{cases}$

Ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -10\overrightarrow{AI} - 24\overrightarrow{JK} \Rightarrow m = -10; n = -24 \Rightarrow m + n = -34$. Chọn đáp án **B.**

Email: huanpv@dtdecopark.edu.vn

Câu 194: Cho hình bình hành ABCD, lấy M trên cạnh AB và N trên cạnh CD sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. Gọi I và J là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BI} = m\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AJ} = n\overrightarrow{AI}$.

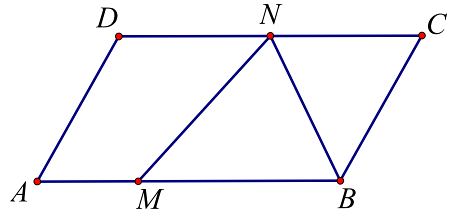
Khi J là trọng tâm tam giác BMN thì tích m.n bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{3}$ **B.** 3 **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 1

(Họ và tên tác giả: Phạm Văn Huấn, Tên FB: Pham Van Huan)

Lời giải

Chọn A



J là trọng tâm tam giác BMN khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AJ}$ (9)

Ta có

* $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

* $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

* $\overrightarrow{AJ}=n\overrightarrow{AI}=n\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\right)=n\left(\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{BC}\right)=n\left[\overrightarrow{AB}+m\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\right]=n(1-m)\overrightarrow{AB}+mn\overrightarrow{AC}$

Nên thay vào (9) ta có $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=3n(1-m)\overrightarrow{AB}+3mn\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow\left[\frac{5}{6}-3n(1-m)\right]\overrightarrow{AB}+\left(1-3mn\right)\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}\frac{5}{6}-3n(1-m)=0\\1-3mn=0\end{cases}\Rightarrow mn=\frac{1}{3}$

Họ và tên: Hứa Nguyễn Tường Vy

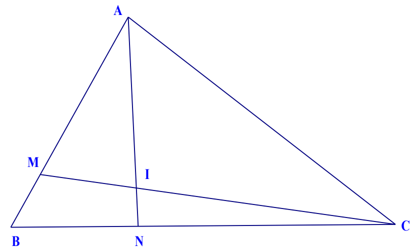
Email: namlongkontum@gmail.com FB: nguyennga

Câu 195: Cho tam giác ABC, trên cạnh AB lấ y điểm M, trên cạnh BC lấ y N sao cho AM=3MB, NC=2BN. Gọi I là giao điểm của AN với CM. Tính diện tích tam giác ABC biết diện tích tam giác ICN bằng 2.

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{33}{2}$ **C.** 11 **D.** $\frac{9}{11}$

Lời giải

Chọn đáp án B



Đặt $\overrightarrow{BC}=\vec{a};\ \overrightarrow{BA}=\vec{c}$.

Suy ra $\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{c}$; $\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{4}\vec{c};\ \overrightarrow{CN}=-\frac{2}{3}\vec{a}$

Do A, I, N thẳng hàng nên $\overrightarrow{CI}=x\overrightarrow{CA}+(1-x)\ \overrightarrow{CN}$

Và M, I, C thẳng hàng nên $\overrightarrow{AI}=y\overrightarrow{AC}+(1-y)\ \overrightarrow{AM}$

Mặt khác $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{CI}=y\overrightarrow{AC}+(1-y)\ \overrightarrow{AM}-(x\overrightarrow{CA}+(1-x)\ \overrightarrow{CN})$

$\Leftrightarrow\frac{3y+x-1}{3}\vec{a}+\frac{1-y-4x}{4}\vec{c}=\vec{0}$

Mà $\vec{a}; \vec{c}$ không cùng phương suy ra $\begin{cases} \dfrac{3y+x-1}{3}=0 \\ \dfrac{1-y-4x}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{11} \\ y=\dfrac{3}{11} \end{cases}$

Với $x=\dfrac{2}{11} \Rightarrow \overrightarrow{CI}=\dfrac{2}{11}\overrightarrow{CA}+\dfrac{9}{11}\overrightarrow{CN} \Rightarrow \overrightarrow{NI}=\dfrac{2}{11}\overrightarrow{NA}$

Hay $\dfrac{NI}{NA}=\dfrac{2}{11} \Rightarrow \dfrac{S_{NCI}}{S_{NCA}}=\dfrac{2}{11} \Rightarrow S_{NCA}=11$

Mà $\dfrac{S_{ABC}}{S_{ANC}}=\dfrac{BC}{NC}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{33}{2}$

congsondienan@gmail.com

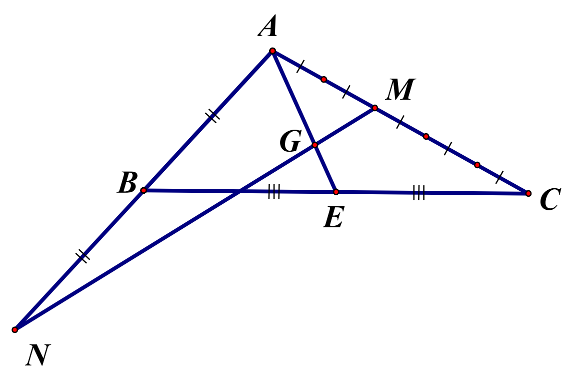
Câu 196: Cho ΔABC có trọng tâm G và hai điểm M, N thỏa mãn: $3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{CM}=\vec{0}$, $\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}=\vec{0}$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $\overrightarrow{NG}=4\overrightarrow{GM}$. **B.** $\overrightarrow{NG}=5\overrightarrow{GM}$. **C.** $\overrightarrow{NG}=6\overrightarrow{GM}$. **D.** $\overrightarrow{NG}=7\overrightarrow{GM}$.

(Họ và tên tác giả: Trần Công Sơn, Tên FB: Trần Công Sơn)

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm BC. M, N là các điểm như hình vẽ.

Ta có: $\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-2\overrightarrow{AB}=-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}-\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{15}\overrightarrow{AC}$.

Nên $\overrightarrow{NG}=-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=5\left(-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{15}\overrightarrow{AC}\right)=5\overrightarrow{GM}$.

Vậy $\overrightarrow{NG}=5\overrightarrow{GM}$.

(Email): **tranminhthao2011@gmail.com**

Câu 197: (Đẳng thức vec tơ) Cho tam giác ABC. Gọi A', B',C' là các điểm xác định bởi $2018\overrightarrow{A'B}+2019\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$, $2018\overrightarrow{B'C}+2019\overrightarrow{B'A}=\vec{0}$, $2018\overrightarrow{C'A}+2019\overrightarrow{C'B}=\vec{0}$. Khi đó, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

B. $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$.

C. $\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$.

D. ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trực tâm.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2018\overrightarrow{A'B}+2019\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2018\left(\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}\right)+2019\left(\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4037\overrightarrow{A'A}+2018\overrightarrow{AB}+2019\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ (1)

Tương tự ta có $4037\overrightarrow{B'B}+2018\overrightarrow{BC}+2019\overrightarrow{BA}=\vec{0}$; $4037\overrightarrow{C'C}+2018\overrightarrow{CA}+2019\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

Cộng vế với vế lại ta được

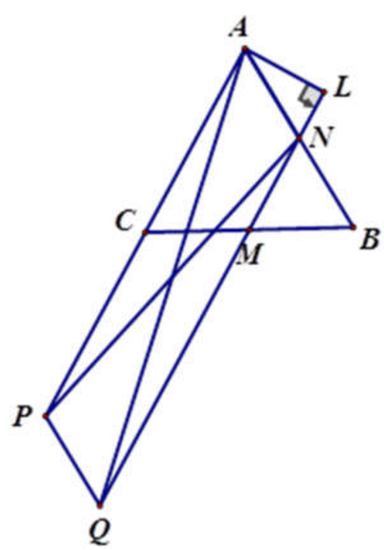
$4023\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right)+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

Vậy ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trọng tâm

Câu 198: (tính độ dài vec tơ) Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi điểm M là trung điểm BC. Tính độ dài của vec tơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải



Chọn B

Gọi N là trung điểm AB, Q là điểm đối xứng của A qua C và P là đỉnh của hình bình hành $AQPN$.

Khi đó ta có $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AN}, 2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AQ}$ suy ra theo quy tắc hình bình hành ta có

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}$

Gọi L là hình chiếu của A lên PN

Vì $MN//AC \Rightarrow \widehat{ANL}=\widehat{MNB}=\widehat{CAB}=60^0$

Xét tam giác vuông ANL ta có $\sin\widehat{ANL}=\frac{AL}{AN}\Rightarrow AL=AN.\sin\widehat{ANL}=\frac{a}{2}\sin 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

$\cos\widehat{ANL}=\frac{NL}{AN}\Rightarrow NL=AN.\cos\widehat{ANL}=\frac{a}{2}\cos 60^0=\frac{a}{4}$

Ta lại có $AQ=PN\Rightarrow PL=PN+NL=AQ+NL=2a+\frac{a}{4}=\frac{9a}{4}$

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác ALP ta có

$AP^2=AL^2+PL^2=\frac{3a^2}{16}+\frac{81a^2}{16}=\frac{21a^2}{4}\Rightarrow AP=\frac{a\sqrt{21}}{2}$

Vậy $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|=AP=\frac{a\sqrt{21}}{2}$

Họ và tên: Trần Quốc An

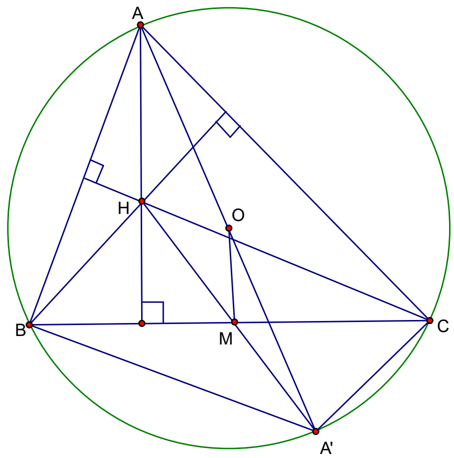
Email: tranquocan1980@gmail.com

Facebook: Tran Quoc An

Câu 199: Cho ΔABC có M là trung điểm của BC, H là trực tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Tìm x để $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=x\overrightarrow{HO}$.

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Lời giải



Chọn A

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} A'B \perp AB \\ CH \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow CH \parallel A'B \ (1)$$

Tương tự ta chứng minh được $BH \parallel A'C$ (2)

Từ (1),(2) suy ra tứ giác BHCA' là hình bình hành.

Do đó M là trung điểm của HA'.

Ta có: $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HA'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA'} = 2\overrightarrow{HO} \Rightarrow x = 2.$

buiduynam1993@gmail.com

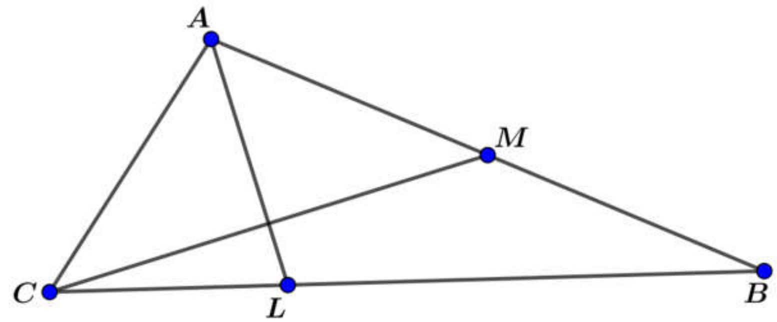
Câu 200: Cho tam giác ABC có đường trung tuyến CM vuông góc với phân giác trong AL. Giả sử ngoài ra còn có $CM = kAL$. Biết $\cos A = \dfrac{a+bk^2}{c+dk^2}$. Tính $a+b+c+d$

A. 18. **B.** 5. **C.** 26. **D.** 17.

(Bùi Duy Nam sưu tầm. FB: Bùi Duy Nam https://www.facebook.com/duynam.bui.1)

Lời giải

Chọn A



Ta có ΔACM cân tại $A \Rightarrow AC = AM = \frac{1}{2}AB \Rightarrow c = 2b$ với $b = AC$, $c = AB$.

Theo đề bài AL là phân giác trong của góc A nên: $\overrightarrow{AL} = \frac{b}{c+b}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{c+b}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}\right)$.

$\Rightarrow AL^2 = \frac{4}{9}\left(AM^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}\right) = \frac{4}{9}\left(2b^2 + 2b^2\cos A\right) = \frac{8}{9}b^2\left(1+\cos A\right)$.

Lai có $2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM} = AC^2 + AM^2 - CM^2 \Rightarrow 2b^2\cos A = 2b^2 - CM^2 \Rightarrow CM^2 = 2b^2\left(1-\cos A\right)$.

Từ $CM = kAL \Rightarrow 2b^2\left(1-\cos A\right) = k^2.\frac{8}{9}b^2\left(1+\cos A\right) \Leftrightarrow 9\left(1-\cos A\right) = 4k^2\left(1+\cos A\right)$

$\Leftrightarrow \cos A = \frac{9-4k^2}{9+4k^2}$.

Vậy $a+b+c+d = 18$.

Họ và tên: Phạm Thanh My

Email: phamthanhmy@gmail.com

Facebook: Pham Thanh My

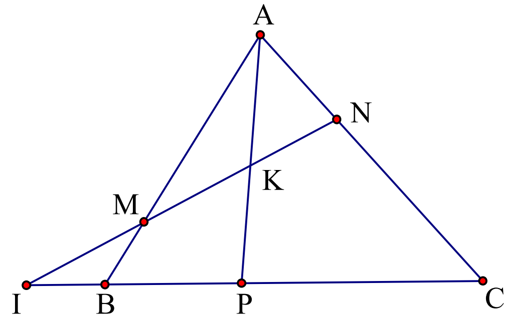
Câu 201: Cho tam giác ABC. Gọi M, N,P là các điểm lần lượt thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ Gọi K là giao điểm của AP và MN. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $4\overrightarrow{KA} + 5\overrightarrow{KP} = \vec{0}$. **B.** $3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KP} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KP} = \vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KP}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là giao điểm của MN và BC.

Áp dụng định lý Menelaus ta có $\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=1 \Rightarrow \overrightarrow{IB}=\frac{1}{6}\overrightarrow{IC}$ mà $2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ □□ P là trung điểm IC.

Áp dụng định lý Menelaus ta có $\frac{\overline{KA}}{\overline{KP}}.\frac{\overline{IP}}{\overline{IB}}.\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}}=1$

$\Rightarrow \frac{\overline{KA}}{\overline{KP}}=-1 \Rightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\vec{0}$

Câu 202: Cho hình thang $ABCD\,(AB//CD)$ có hai đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AB+CD=20cm.$ Tìm $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$.

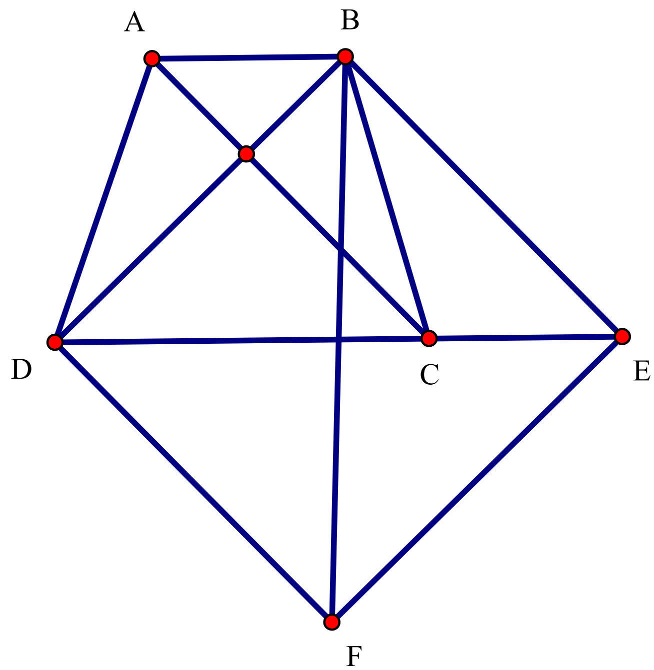
A. $40cm.$. **B.** $20cm.$. **C.** $30cm.$. **D.** $10cm.$.

Lời giải

Chọn B

Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Yến Tên FB: Nguyễn Yến

Email: ntyen.c3lqd@gmail.com



$\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{BF}\right|=DE=20cm.$

Họ và tên tác giả:Lê Thanh Lâm

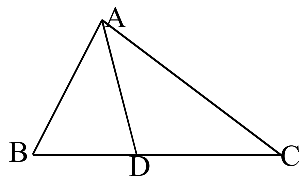
Mail:quyphucvn@gmail.com Fb:Thanh Lâm Lê

Câu 203: Cho tam giác ABC có $AB=3$; $AC=4$ .Gọi AD là đường phân giác trong của góc A .Biết $\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ .Khi đó tổng $m+n$ có giá trị là:

A. 1 **B.** -1 **C.** $\frac{1}{7}$ **D.** $-\frac{1}{7}$

Lời giải

Chọn A



Theo tính chất đường phân giác trong của góc A trong tam giác ABC ta có:

$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}\Rightarrow 3\overrightarrow{DC}=-4\overrightarrow{DB}\Rightarrow 3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=-4(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$

$\Leftrightarrow 7\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$ .Ta có $m=\frac{4}{7};n=\frac{3}{7}$.Vậy tổng $m+n=1$. Chọn A

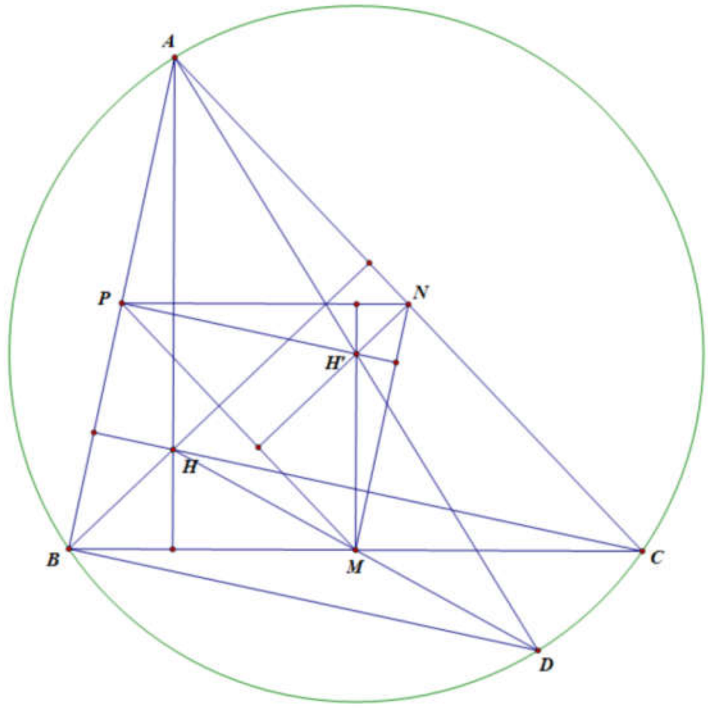
Câu 204: Cho tam giác ABC bất kỳ, gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh AB,BC,CA. H,H' lần lượt là trực tâm các tam giác ABC,MNP. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HH'}$. **B.** $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HH'}$.

C. $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{HM}+\overrightarrow{HN}+\overrightarrow{HP}=3\overrightarrow{HH'}$.

Lời giải

Chọn B



H' là trực tâm tam giác MNP nên H' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Gọi AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $BHCD$ là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HH'}$.

Mail: kimlinhlqd@gmail.com

Câu 205: Cho tam giác đều ABC tâm O. M là một điểm bất kì bên trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M lên BC, CA, A**B.** Với giá trị nào của k ta có hệ thức:

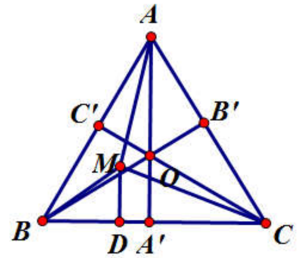
$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=k\overrightarrow{MO}$$

A. $k=\frac{1}{2}$. **B.** $k=1$. **C.** $k=\frac{3}{2}$. **D.** $k=2$

Lời giải

Huỳnh Kim Linh GV Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn Khánh Hòa

Chọn C



Gọi hình chiếu của M lên cạnh BC là **D.** Ta có

$$\frac{S_a}{S}=\frac{MD}{AA'}\Rightarrow \overrightarrow{MD}=\frac{S_a}{S}.\overrightarrow{AA'}=\frac{3S_a}{2S}\overrightarrow{AO}.$$

$$S_a=S_{MBC}$$

Tương tự cho các đánh giá khác.

Do đó:

$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2S}\left(S_a\overrightarrow{AO}+S_b\overrightarrow{BO}+S_c\overrightarrow{CO}\right)=$$

$$=\frac{3}{2S}\left(S_a\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MA}\right)+S_b\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MB}\right)+S_c\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MC}\right)\right)$$

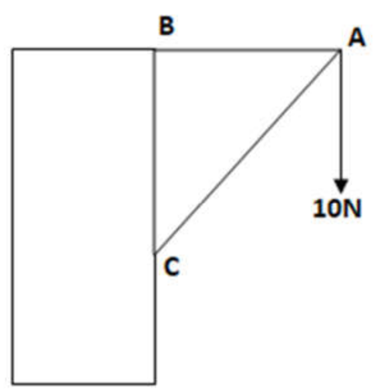
$$=\frac{3}{2S}\left(S_a+S_b+S_c\right).\overrightarrow{MO}-\frac{3}{2S}\left(S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$$

Cách Khác: Qua M kẻ các đường thẳng song song với các cạnh BC, CA, AB

Họ và tên tác giả: Nguyễn Thanh Dũng Tên FB: Nguyễn Thanh Dũng

Email: thanhdungtoan6@gmail.com

Câu 206: Một giá đỡ hình tam được gắn vào tường (như hình vẽ). Tam giác ABC vuông cân tại **B.** Người ta treo vào điểm A một vật nặng 10N. Tính độ lớn của các lực tác động vào tường tại B và C? (Bỏ qua khối lượng của giá đỡ)



A. $F_B=10\sqrt{2}N, F_C=10N$

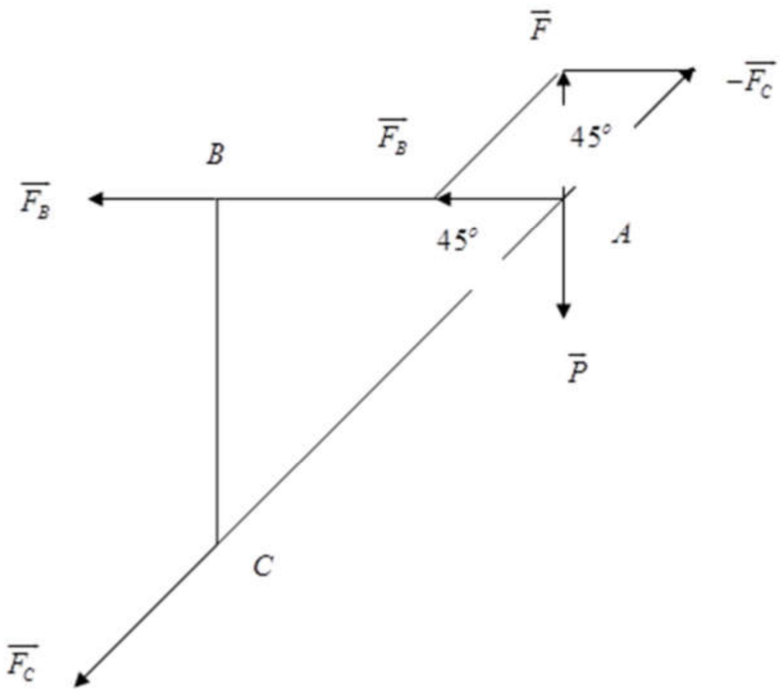
B. $F_B=10N, F_C=10\sqrt{2}$

C. $F_B=F_C=10N$

D. $F_B=10N, F_C=-10\sqrt{2}$

Lời giải

Đáp án: B



Hệ chất điểm cân bằng nên $\overrightarrow{F_B}+\left(-\overrightarrow{F_C}\right)+\overrightarrow{P}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{F}=-\overrightarrow{P}\Rightarrow \left|\overrightarrow{F}\right|=\left|\overrightarrow{P}\right|=10N$

Tam giác ABC vuông cân tại B suy ra $\begin{cases} F_B=\left|\overrightarrow{F_B}\right|=\left|\overrightarrow{F}\right|=\left|\overrightarrow{P}\right|=10N \\ F_C=\left|-\overrightarrow{F_C}\right|=\left|\overrightarrow{F}\right|\sqrt{2}=\left|\overrightarrow{P}\right|\sqrt{2}=10\sqrt{2}N \end{cases}$

Email: giachuan85@gmail.com

Câu 207: Cho ba điểm A, B, C thuộc đường tròn tâm O, thỏa mãn $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$. Tính góc $\widehat{AOB}$?

A. $\widehat{AOB}=120^0$. **B.** $\widehat{AOB}=90^0$. **C.** $\widehat{AOB}=150^0$. **D.** $\widehat{AOB}=30^0$.

Lời giải

Họ và tên: Trần Gia Chuân Tên facebook: Trần Gia Chuân

Chọn A

Do $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=0$ nên O là trọng tâm tam giác ABC.

Mà O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác nên tam giác ABC đều. Vậy góc $\widehat{AOB}=120^0$

Email: giachuan85@gmail.com

Câu 208: Cho tam giác ABC. Điểm M trên cạnh BC thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}.\overrightarrow{AC}$, khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

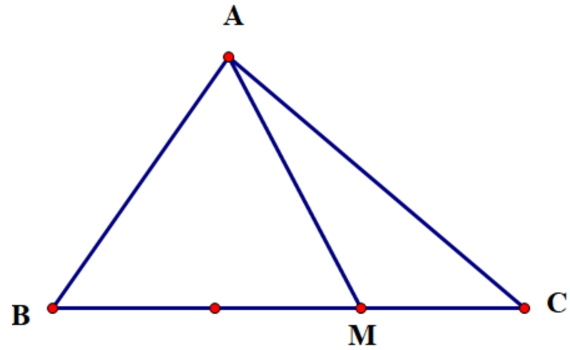
A. $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC}$. **B.** $MB=2MC$. **C.** $MC=2MB$. **D.** $\overrightarrow{MC}=-3\overrightarrow{MB}$.

Lời giải

Họ và tên: Trần Gia Chuân Tên facebook: Trần Gia Chuân

Chọn B

Cách 1: Giả sử $\overrightarrow{BM}=k.\overrightarrow{BC}$ khi đó



Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\\&=\overrightarrow{AB}+k.\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AB}+k.\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\\&=(1-k).\overrightarrow{AB}+k.\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Mà $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}.\overrightarrow{AC}\Rightarrow k=\frac{2}{3}$ suy ra $3.\overrightarrow{BM}=2.\overrightarrow{B}$

Cách 2:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3}.\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}.\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3}.\overrightarrow{MC}$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}.\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}.\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}+2.\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow MB=2MC$$

Email: cvtung.lg2@bacgiang.edu.vn

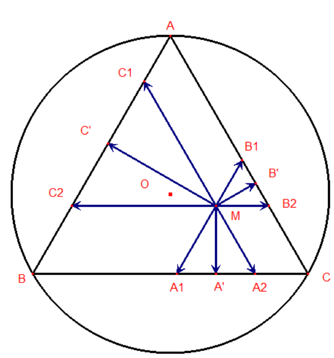
Câu 209: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O, M là một điểm tùy ý nằm bên trong tam giác đã cho; gọi $A';B';C'$ theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên các cạnh $BC;CA$ và AB. Khi đó ta có đẳng thức vectơ $k\left(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}\right)=l\overrightarrow{MO}$, $k.l\neq 0,\frac{k}{l}$ là phân số tối giản. Tính $2k^2-l^2$..

A. $2k^2-l^2=1$. **B.** $2k^2-l^2=-1$. **C.** $2k^2-l^2=14$. **D.** $2k^2-l^2=-5$.

Lời giải

Họ và tên tác giả: Cao Văn Tùng Tên FB: Cao Tung

Chọn B



Từ M kẻ các đường thẳng song song với các cạnh $BC;CA;AB$ và các đường thẳng này cắt các cạnh của tam giác ABC tại các điểm A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 như hình trên.

Xét tam giác MA_1A_2 do tam giác ABC đều và tính chất của góc đồng vị nên góc $\widehat{MA_1A_2}=\widehat{MA_2A_1}=60^0$ suy ra tam giác MA_1A_2 đều và A' là trung điểm của A_1A_2 từ đó ta có: $\overrightarrow{MA'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}\right)$

Chứng minh tương tự ta có $\overrightarrow{MB'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MB_2}\right);\overrightarrow{MC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MC_2}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MC_2}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MB_2}+\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1}\right)$, mặt khác các tứ giác $AB_1MC_1;BA_1MC_2;CA_2MB_2$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$ $\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}\right)=3\overrightarrow{MO}$.

Vậy $k=2;l=3\Rightarrow 2k^2-l^2=-1$.

Email: trang145@gmail.com

Câu 210: Cho hình vuông ABCD, E,F thõa mãn $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$; $AE\cap BF=I$

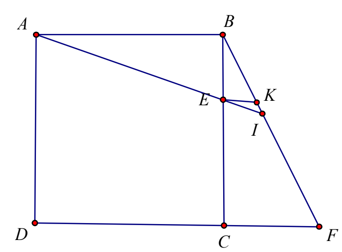
Ta có $\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AD}$. Khi đó tỉ số k,l thõa mãn cặp nào sau:

A. $k=\frac{3}{5};l=\frac{2}{5}$ **B.** $k=\frac{6}{5};l=\frac{2}{5}$ **C.** $k=\frac{5}{6};l=\frac{3}{6}$ **D.** $k=-\frac{6}{5};l=\frac{1}{3}$

Lời giải

Họ tên: Nguyễn Thị Trang Fb: Trang Nguyen

Chọn B



Kẻ EK//AB$\Rightarrow \frac{EK}{CF}=\frac{1}{3}\Rightarrow \frac{EI}{AI}=\frac{EK}{AB}=\frac{1}{6}$

Ta có: $\overrightarrow{AI}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AE}=\frac{6}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=\frac{6}{5}(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC})=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC})$

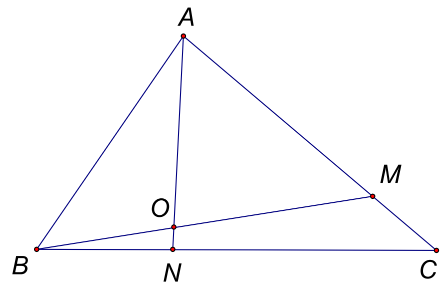
Câu 211: Cho tam giác ABC, trên cạnh AC lấy điểm M, trên cạnh BC lấy điểm N sao cho: $AM=3MC$, $NC=2NB$, gọi O là giao điểm của AN và BM .Tính diện tích ΔABC biết diện tích ΔOBN bằng 1.

A. 10. **B.** 20. **C.** 25. **D.** 30.

(Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Phương Thảo, Tên FB: Nguyễn Thị Phương Thảo)

Lời giải

Chọn D



Vì A,O,N thẳng hàng nên: $\overrightarrow{BO}=x\overrightarrow{BA}+$

Tương tự: $\overrightarrow{AO}=y\overrightarrow{AM}+(1-y)\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=y\overrightarrow{AM}+(x-y+1)\overrightarrow{AB}+(x-1)\overrightarrow{BN}$

hay $(x-y)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AM}+(x-1)\overrightarrow{BN}=\vec{0}$ (1)

Đặt $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}-\vec{b}$; $\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{4}\vec{b}$; $\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{3}\vec{a}$

Thay vào (1) ta có: $(x-y)(\vec{a}-\vec{b})-\frac{3}{4}y\vec{b}+(x-y)\left(-\frac{1}{3}\vec{a}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow (x-y)\vec{a}-(x-y)\vec{b}=\frac{x-1}{3}\vec{a}-\frac{3y}{4}\vec{b}$

Từ đó ta có: $\begin{cases} x-y=\frac{x-1}{3} \\ y-x=\frac{3}{4}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{10} \\ y=\frac{2}{5} \end{cases}$

Với $x=\frac{1}{10} \Rightarrow \overrightarrow{BO}=\frac{1}{10}\overrightarrow{BA}+(1-\frac{1}{10})\overrightarrow{BN}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BN}=\frac{1}{10}\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BN}\right)$ hay $\overrightarrow{NO}=\frac{1}{10}\overrightarrow{NA} \Rightarrow \frac{NA}{NO}=10$.

Vì $S_{ONB}=1 \Rightarrow S_{NAB}=10 \Rightarrow S_{ABC}=30$.

Họ và tên: Nguyễn Văn Quân Tên FB: Quân Nguyễn

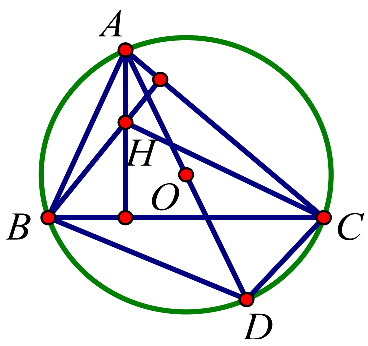
Email: Quanvan09@gmail.com

Câu 212: Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chọn khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=4\overrightarrow{HO}$. **B.** $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.

C. $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{HO}$. **D.** $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HO}$.

Lời giải



Dễ thấy: $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$ nếu tam giác ABC vuông.

Nếu tam giác ABC không vuông gọi D là điểm đối xứng của A qua O. Khi đó:

$BH//DC$ (vì cùng vuông góc với AC).

$BD//CH$ (vì cùng vuông góc với AB).

Suy ra $BDCH$ là hình bình hành, do đó theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$ (1).

Mặt khác vì O là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra. $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.

Tên facebook: NT AG

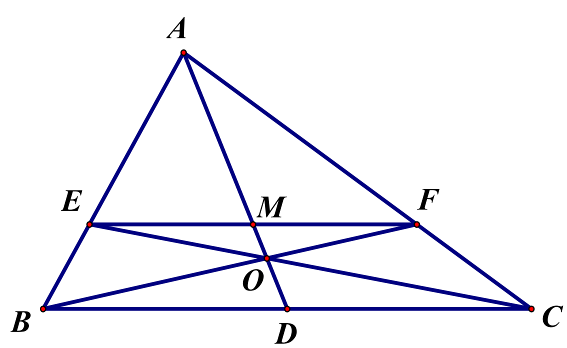
Câu 213: Cho tam giác ABC có D là trung điểm của BC, O là một điểm trên đoạn AD sao cho $AO=4OD$. Gọi $\{E\}=CO\cap AB$, $\{F\}=BO\cap AC$, $\{M\}=AD\cap EF$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{7}\overrightarrow{AD}$ **B.** $\overrightarrow{MO}=\frac{2}{15}\overrightarrow{AD}$ **C.** $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ **D.** $\overrightarrow{EM}=\frac{2}{7}\overrightarrow{BC}$

Lời giải

Họ và tên tác giả: Nguyễn Đặng

Chọn B



Đặt: $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC} = y\overrightarrow{AF}$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Theo bài ra ta có $\overrightarrow{AO} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{5}x\overrightarrow{AE} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}y\overrightarrow{AF}$

Do O, B, F thẳng hàng nên $\frac{2}{5} + \frac{2}{5}y = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

Do C, O, E thẳng hàng nên $\frac{2}{5}x + \frac{2}{5} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Từ đó: $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{3}{2} = \frac{AD}{AM}$, lại có $AO = \frac{4}{5}AD \Rightarrow \overrightarrow{MO} = \frac{2}{15}\overrightarrow{AD}$

Câu 214: Cho hình thang $ABCD$ có $AB//CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. Kẻ $NH \perp AD\ (H \in AD)$ và $ME \perp BC\ (E \in BC)$. Gọi $\{I\} = ME \cap NH$, kẻ $IK \perp DC\ (K \in DC)$. Khi đó trong tam giác MNK hệ thức nào sau đây đúng?

A. $MK.\overrightarrow{IN} + NK.\overrightarrow{IM} + MN.\overrightarrow{IK} = \vec{0}$

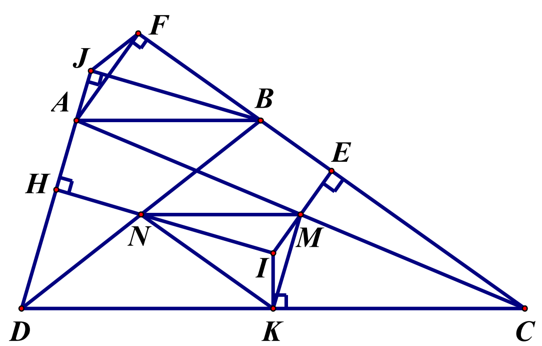
B. $\overrightarrow{IN}.\tan N + \overrightarrow{IM}.\tan M + \overrightarrow{IK}.\tan K = \vec{0}$

C. $\overrightarrow{IN}.\cot N + \overrightarrow{IM}.\cot M + \overrightarrow{IK}.\cot K = \vec{0}$

D. $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IK} = \vec{0}$

Lời giải

Chọn B



Ta chứng minh $ID = IC$

Kẻ $AF \perp BC, BJ \perp AD$. Tứ giác $ABFJ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABF} + \widehat{AJF} = 180^O$ $\Rightarrow \widehat{DCB} + \widehat{AJF} = 180^O$

Khi đó $\Rightarrow DCFJ$ là tứ giác nội tiếp.

NH, ME là các đường trung bình của các tam giác DBJ, CAF

IH, IE là các đường trung trực của DJ, CF nên $IJ = IF = ID = IC$. Vậy

$$ID = IC \Rightarrow KD = KC \Rightarrow \begin{cases} NH//BC \\ MK//AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NK \perp ME \\ MK \perp HN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NK \perp MI \\ MK \perp NI \end{cases}$$

Từ đó suy ra I là trực tâm tam giác MNK. Nên đáp án đúng là B

Họ và tên tác giả: Nguyễn Văn Toản Tên FB: Dấu Vết Hát

Email: nguyenvantoannbk@gmail.com

Câu 215: Cho ΔABC, điểm M thuộc cạnh BC sao cho $2018.S_{\Delta ABM}=2019.S_{\Delta ACM}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $2018.S_{\Delta ABC}=4037.S_{\Delta ACM}$. **B.** $2018.\overrightarrow{BM}+2019.\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{BC}=\dfrac{4037}{2018}.\overrightarrow{BM}$ **D.** $S_{\Delta ABM}=\dfrac{2019}{4037}.S_{\Delta ABC}$.

Lời giải

Chọn C

Kẻ đường cao AH của ΔABC.

Ta có $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABM}+S_{\Delta ACM}=\dfrac{2019}{2018}S_{\Delta ACM}+S_{\Delta ACM}=\dfrac{4037}{2018}S_{\Delta ACM}$, suy ra **A** đúng.

Tương tự **D** cũng đúng.

Từ giả thiết ta có $\dfrac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta ACM}}=\dfrac{\frac{1}{2}.AH.BM}{\frac{1}{2}.AH.CM}=\dfrac{BM}{CM}=\dfrac{2019}{2018}\Rightarrow \overrightarrow{BM}=-\dfrac{2019}{2018}\overrightarrow{CM}$, suy ra **B** đúng.

(**C** sai vì $\overrightarrow{BC}=\dfrac{4037}{2019}.\overrightarrow{BM}$).

(Tác giả: Nguyễn Văn Phùng,Gmail: nvpmaster0808@gmail.com)

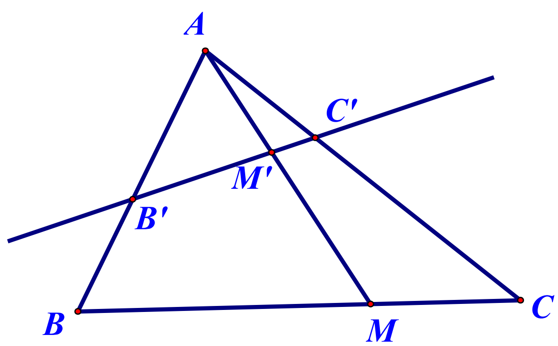
Câu 216: Cho tam giác ABC. M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $S_{ABC}=3S_{AMC}$. Một đường thẳng cắt các cạnh AB, AM, AC lần lượt tại B', M', C' phân biệt. Biết rằng $\dfrac{AB}{AB'}+2\dfrac{AC}{AC'}=k.\dfrac{AM}{AM'}$. Tìm số k.

A. $k=1$. **B.** $k=2$. **C.** $k=3$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

(Tác giả: Nguyễn Văn Phùng,Gmail: nvpmaster0808@gmail.com)

Lời giải

Chọn C



Ta có $S_{ABC}=3S_{AMC}\Rightarrow BC=3MC\Rightarrow \overrightarrow{BM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Đặt $\overrightarrow{AB'}=x\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC'}=y\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AM'}=z\overrightarrow{AM}$

Ta có $\overrightarrow{B'M'}=\overrightarrow{AM'}-\overrightarrow{AB'}=z\overrightarrow{AM}-x\overrightarrow{AB}$

$=z\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right)-x\overrightarrow{AB}=\left(z-x\right)\overrightarrow{AB}+\dfrac{2z}{3}\overrightarrow{BC}$

$=\left(z-x\right)\overrightarrow{AB}+\dfrac{2z}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\left(\dfrac{z}{3}-x\right)\overrightarrow{AB}+\dfrac{2z}{3}\overrightarrow{AC}$

Lại có: $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB'}=y\overrightarrow{AC}-x\overrightarrow{AB}$

Mặt khác $\overrightarrow{B'M'}$, $\overrightarrow{B'C'}$ cùng phương nên $\dfrac{\frac{z}{3}-x}{-x}=\dfrac{\frac{2z}{3}}{y}\Leftrightarrow \dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}$

Hay $\dfrac{AB}{AB'}+2\dfrac{AC}{AC'}=3\dfrac{AM}{AM'}$.

Từ đó suy ra $k=3$.

nguyenchitrung12@gmail.com

Câu 217: Cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là $A_1,A_2,...,A_n$. Bạn Bình kí hiệu chúng là $B_1,B_2,...,B_n$ ($A_1\not\equiv B_n$). Vectơ tổng $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+...+\overrightarrow{A_nB_n}$ bằng

A. $\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{A_1A_n}$. **C.** $\overrightarrow{B_1B_n}$. **D.** $\overrightarrow{A_1B_n}$.

(Sưu tầm, Tên FB: Trung Nguyễn Chí)

Lời giải

Chọn A

Lấy điểm O bất kì. Khi đó

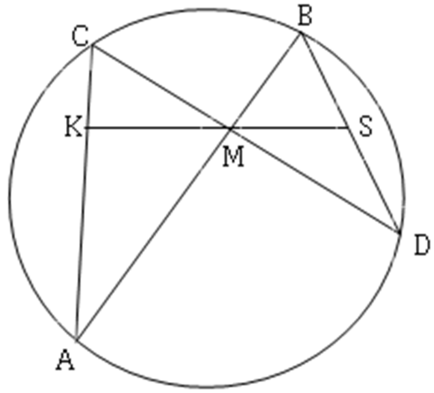
$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+...+\overrightarrow{A_nB_n}=\left(\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{A_2O}+...+\overrightarrow{A_nO}\right)+\left(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+...+\overrightarrow{OB_n}\right)$

Vì $\left\{B_1,B_2,...,B_n\right\}=\left\{A_1,A_2,...,A_n\right\}$ nên

$\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+...+\overrightarrow{OB_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}$

Do đó $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+...+\overrightarrow{A_nB_n}=\left(\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{OA_1}\right)+\left(\overrightarrow{A_2O}+\overrightarrow{OA_2}\right)+...+\left(\overrightarrow{A_nO}+\overrightarrow{OA_n}\right)=\vec{0}$.

Câu 218: Trong đường tròn (O) với hai dây cung AB và CD cắt nhau tại M. Qua trung điểm S của BD kẻ SM cắt AC tại K sao cho $\dfrac{AK}{CK}=a$ .Tính: $\dfrac{AM^2}{CM^2}$



A. 2a **B.** a^2 **C.** $\frac{1}{a^2}$ **D.** a

Lời giải

$\frac{AK}{CK} = a > 0$

Ta có: $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{1+a}.\overrightarrow{MA} + \frac{a}{1+a}.\overrightarrow{MC}$ (1)

Do $\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MS}$ cùng phương nên: $\overrightarrow{MK} = l\overrightarrow{MS} = \frac{l}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})$

Mặt khác

$$MA.MB = MC.MD = b > 0 \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MB} = -\frac{b}{MA^2}\overrightarrow{MA} \\ \overrightarrow{MD} = -\frac{b}{MC^2}\overrightarrow{MC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MK} = -\frac{bl}{2MA^2}\overrightarrow{MA} - \frac{bl}{2MC^2}\overrightarrow{MC}(2)$$

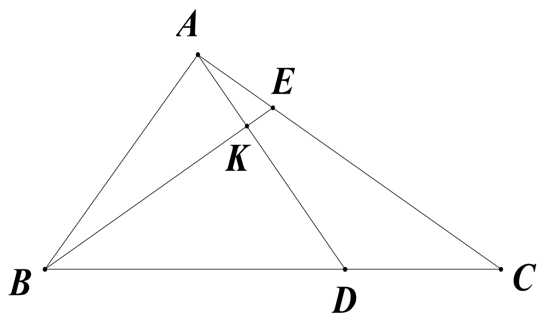
Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} \frac{1}{1+a} = -\frac{bl}{2MA^2} \\ \frac{a}{1+a} = -\frac{bl}{2MC^2} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{MA^2}{MC^2}$

Câu 219: Cho tam giác ABC. Gọi D, E lần lượt là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Điểm K trên AD sao cho 3 điểm B, K,E thẳng hàng. Xác định tỷ số $\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{AD}}$

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{5}$

Lời giải



Ba điểm K, B, E thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại α sao cho:

$\overrightarrow{AK} = \alpha\overrightarrow{AB} + (1-\alpha)\overrightarrow{AE}$ (1)

Đặt $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AD} = x(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AK} = x(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}) = \frac{x}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2x}{3}\overrightarrow{AC}$ (2)

Áp dụng hệ quả 5 thì từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{x}{3} \\ \frac{1}{4}(1-\alpha) = \frac{2x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \alpha = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Vậy $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{AD}} = \frac{1}{3}$

Facebook: Lê Văn Kỳ

Email: lethithuy@thpthv.vn

Câu 220: Cho tam giác ABC vuông tại C, có $AC = b, BC = a$, D là chân đường cao kẻ từ **C.** Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{CD} = \frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CA} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CB}$.

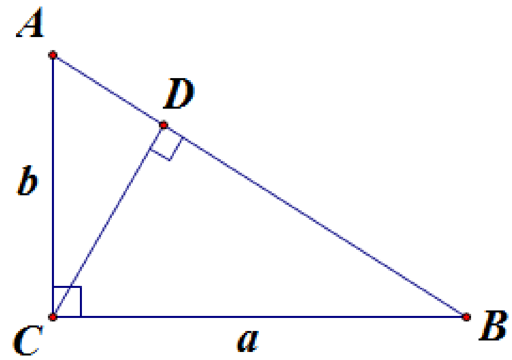
B. $\overrightarrow{CD} = \frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CA} - \frac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{CD} = \frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{AC} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{BC}$

D. $\overrightarrow{CD} = \frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{AC} - \frac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $BC^2 = BD.BA \Rightarrow BD = \dfrac{CB^2}{BA} \Rightarrow \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{CB^2}{BA^2} = \dfrac{a^2}{a^2+b^2} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \dfrac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{BA}$.

Lại có: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \dfrac{a^2}{a^2+b^2}\left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right)$.

Vậy $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \dfrac{a^2}{a^2+b^2}\left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right) = \dfrac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CA} + \dfrac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CB}$

Email: huyenbla81@gmail.com

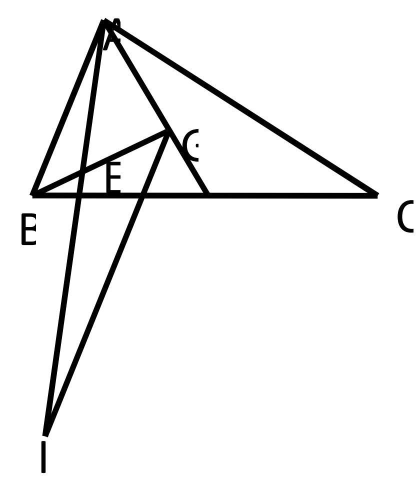
Câu 221: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là điểm xác định bởi $5\overrightarrow{IA} - 7\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Gọi E là giao điểm của AI và BG. Tính tỷ số $\dfrac{EA}{EI}$.

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

(Họ tên tác giả: Nguyễn Thị Thu Huyền. Tên FB: Thu Huyen Nguyen)

Lời giải

Chọn B



Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có:

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}$.

Mà: $5\overrightarrow{IA}-7\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$

Vậy ta có: $6\overrightarrow{IA}-6\overrightarrow{IB}=3\overrightarrow{IG}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{IG}$

$\Rightarrow \begin{cases} IG//AB \\ IG=2AB \end{cases}$ (hình vẽ)

$\Rightarrow \dfrac{EA}{EI}=\dfrac{AB}{IG}=\dfrac{1}{2}.$

Email: nghiepbt3@gmail.com

Câu 222: Cho 2 tia Ox, Oy vuông góc. Trên tia Ox lấy các điểm A,B sao cho OA = OB = 1. C là điểm thuộc đoạn OA, N là một điểm thuộc đoạn OB và dựng hình vuông OCMN. Trên đoạn CM lấy điểm Q và dựng hình vuông ACQP. Gọi S là giao điểm của AM và PN. Giả sử $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AS}=x\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NS}=y\overrightarrow{NP}$, $k\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$

Khi x + y = $\dfrac{13}{10}$ thì k = $\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in \mathbb{N}$ và a, b nguyên tố cùng nhau thì a.b bằng

A. 7 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 12

Lời giải

FB: Ngô Quang Nghiệp

Ta có: $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+x\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}\right)=(1-x)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OM}$

$=(1-x)\overrightarrow{OA}+x\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{ON}\right)=(1-x)\overrightarrow{OA}+xk\overrightarrow{OA}+xk\overrightarrow{OB}$

$=(1-x+kx)\overrightarrow{OA}+xk\overrightarrow{OB}$, (1).

Mặt khác: $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NS}=k\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{NP}=k\overrightarrow{OB}+y\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{ON}\right)=k\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{AP}-yk\overrightarrow{OB}$

$=k(1-y)\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OA}+y(1-k)\overrightarrow{OB}$, (vì AP = CA = 1 - k nên $\overrightarrow{AP}=(1-k)\overrightarrow{OB}$)

$=y\overrightarrow{OA}+(k+y-2ky)\overrightarrow{OB}$, (2).

Từ (1) và (2), ta có $\begin{cases} 1-x+kx=y \\ kx=k+y-2ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-k}{2k^2-2k+1} \\ y=\dfrac{k^2}{2k^2-2k+1} \end{cases}$

Ta có: $x+y=\dfrac{13}{10}\Leftrightarrow \dfrac{1-k}{2k^2-2k+1}+\dfrac{k^2}{2k^2-2k+1}=\dfrac{13}{10}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=\dfrac{3}{4}\\ k=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện, ta chọn $k=\dfrac{3}{4}$. ĐÁP ÁN **D.**

Họ Tên: Lê Duy Tên FB: Duy Lê Email: Duyleag@gmail.com

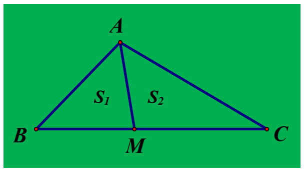
Câu 223: Cho tam giác ABC. Giả sử điểm M nằm trên cạnh BC thỏa các tam giác MAB, MAC lần lượt có diện tích là S_1, S_2. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(S_1+S_2)\overrightarrow{AM}=S_2\overrightarrow{AB}+S_1\overrightarrow{AC}$. **B.** $(S_1+S_2)\overrightarrow{AM}=S_1\overrightarrow{AB}+S_2\overrightarrow{AC}$.

C. $(S_2-S_1)\overrightarrow{AM}=S_2\overrightarrow{AB}-S_1\overrightarrow{AC}$. **D.** $(S_2-S_1)\overrightarrow{AM}=S_1\overrightarrow{AB}-S_2\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $h=d(A,BC)$.

Ta có $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\frac{1}{2}d(A,BC).BM}{\frac{1}{2}d(A,BC).CM}=\dfrac{BM}{CM}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM}=\dfrac{S_1}{S_2}\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow S_2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)=S_1\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$\Leftrightarrow (S_2+S_1)\overrightarrow{AM}=S_2\overrightarrow{AB}+S_1\overrightarrow{AC}$

Họ và tên tác giả: Nguyễn Đức Duẩn Tên FB: Duan Nguyen Duc

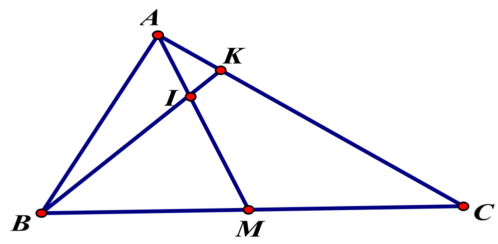
Email: Duanquy@gmail.com

Câu 224: Cho tam giác ABC có có M là trung điểm của BC, $\overrightarrow{AI}=\dfrac{-1}{2}\overrightarrow{MI}$. Điểm K thuộc cạnh AC sao cho B,I,K thẳng hàng. Khi đó $\overrightarrow{KA}=\dfrac{m}{n}\overrightarrow{CK}$. Tính $S=25m+6n+2019$

A. $S=2019$. **B.** $S=2068$. **C.** $S=2018$. **D.** $S=2020$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Gọi điểm K thuộc cạnh AC sao cho $\overrightarrow{AK} = x.\overrightarrow{AC}$.

Ta có $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + x.\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}.\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} = \frac{-5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

Để B,I,K thẳng hàng thì $\frac{-1}{\frac{-5}{6}} = \frac{x}{\frac{1}{6}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \Rightarrow \overrightarrow{KA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CK} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 4 \end{cases}$

Vậy $S = 25.1 + 6.4 + 2019 = 2068$

Họ và tên: Nguyễn Quang Huy Fb: Nguyễn Quang Huy
Email: boigiabao98@gmail.com

Câu 225: Cho tam giác ABC có trọng tâm G, lấy các điểm I, J sao cho $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$ và $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$ và thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{IG}$. Giá trị của biểu thức $P = (25k^2 - 36)(k^2 + k + 1)^{500}$ là:

A. $P = 1235$ **B.** $P = 0$ **C.** $P = \frac{5}{6}$ **D.** $P = \frac{6}{5}$

Lời giải

Thật vậy nếu ta gọi M là trung điểm của BC ta có:
$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - 2\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$

Mặt khác ta lại có $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = \frac{6}{5}(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}) = \frac{6}{5}\overrightarrow{IG}$

Do đó $k = \frac{6}{5}$

Nhận thấy $25k^2 - 36 = 25.\frac{36}{25} - 36 = 36 - 36 = 0$ do đó $P = 0$ .vậy chọn B

(Email): nguyenmy181@gmail.com

Câu 226: Cho tam giác ABC. M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $S_{ABC} = 3S_{AMC}$. Một đường thẳng cắt các cạnh AB, AM, AC lần lượt tại B', M', C' phân biệt. Biết $\frac{AB}{AB'} + m\frac{AC}{AC'} = n\frac{AM}{AM'}$. Tính $m + n$.

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $S_{ABC} = 3S_{AMC} \Rightarrow BC = 3MC \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Đặt $\overrightarrow{AB'} = x\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC'}=y\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AM'} = z\overrightarrow{AM}$

Ta có $\overrightarrow{B'M'} = \overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{AB'} = z\overrightarrow{AM} - x\overrightarrow{AB}$

$= z\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right) - x\overrightarrow{AB} = \left(z - x\right)\overrightarrow{AB} + \dfrac{2z}{3}\overrightarrow{BC}$

$= \left(z - x\right)\overrightarrow{AB} + \dfrac{2z}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \left(\dfrac{z}{3} - x\right)\overrightarrow{AB} + \dfrac{2z}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'} = y\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AB}$

Mặt khác $\overrightarrow{B'M'}$, $\overrightarrow{B'C'}$ cùng phương nên $\dfrac{\dfrac{z}{3} - x}{-x} = \dfrac{\dfrac{2z}{3}}{y} \Leftrightarrow \dfrac{3}{z} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y}$

Hay $\dfrac{AB}{AB'} + 2\dfrac{AC}{AC'} = 3\dfrac{AM}{AM'}$

(Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Trà My, Tên FB: Nguyễn My)

Họ và tên tác giả: Nguyễn Đặng

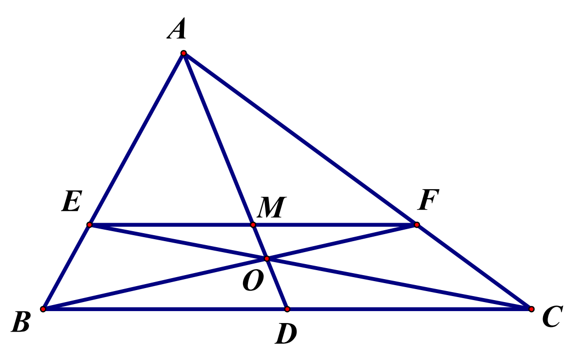
Tên facebook: NT AG

Câu 227: **Cho tam giác** ABC **có** D **là trung điểm của** BC**,** O **là một điểm trên đoạn** AD **sao cho** $AO = 4OD$**. Gọi** $\{E\} = CO \cap AB$**,** $\{F\} = BO \cap AC$**,** $\{M\} = AD \cap EF$**. Khẳng định nào sau đây đúng?**

A. $\overrightarrow{MO} = \dfrac{1}{7}\overrightarrow{AD}$ **<u>B</u>.** $\overrightarrow{MO} = \dfrac{2}{15}\overrightarrow{AD}$ **C.** $\overrightarrow{MO} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ **D.** $\overrightarrow{EM} = \dfrac{2}{7}\overrightarrow{BC}$

Lời giải

Chọn B



Đặt: $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC} = y\overrightarrow{AF}$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Theo bài ra ta có $\overrightarrow{AO}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{5}x\overrightarrow{AE}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}y\overrightarrow{AF}$

Do O,B,F thẳng hàng nên $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}y=1\Rightarrow y=\frac{3}{2}$

Do C,O,E thẳng hàng nên $\frac{2}{5}x+\frac{2}{5}=1\Rightarrow x=\frac{3}{2}$

Từ đó: $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}=\frac{3}{2}=\frac{AD}{AM}$, lại có $AO=\frac{4}{5}AD\Rightarrow\overrightarrow{MO}=\frac{2}{15}\overrightarrow{AD}$

Câu 228: Cho hình thang $ABCD$ có $AB//CD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AC,BD. Kẻ $NH\perp AD\,(H\in AD)$ và $ME\perp BC\,(E\in BC)$. Gọi $\{I\}=ME\cap NH$, kẻ $IK\perp DC\,(K\in DC)$. Khi đó trong tam giác MNK hệ thức nào sau đây đúng?

A. $MK.\overrightarrow{IN}+NK.\overrightarrow{IM}+MN.\overrightarrow{IK}=\vec{0}$

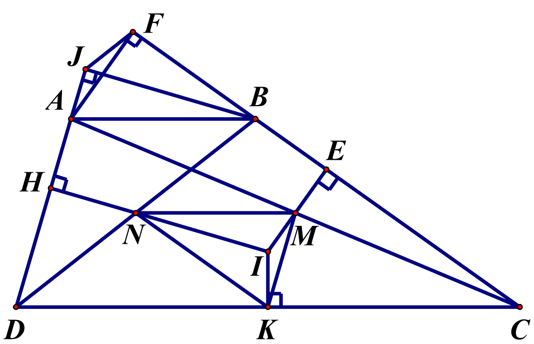
B. $\overrightarrow{IN}.\tan N+\overrightarrow{IM}.\tan M+\overrightarrow{IK}.\tan K=\vec{0}$

C. $\overrightarrow{IN}.\cot N+\overrightarrow{IM}.\cot M+\overrightarrow{IK}.\cot K=\vec{0}$

D. $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{IK}=\vec{0}$

Lời giải

Chọn B



Ta chứng minh $ID=IC$

Kẻ $AF\perp BC, BJ\perp AD$. Tứ giác $ABFJ$ nội tiếp $\Rightarrow\widehat{ABF}+\widehat{AJF}=180^O$ $\Rightarrow\widehat{DCB}+\widehat{AJF}=180^O$

Khi đó $\Rightarrow DCFJ$ là tứ giác nội tiếp.

NH,ME là các đường trung bình của các tam giác DBJ,CAF

IH,IE là các đường trung trực của DJ,CF nên $IJ=IF=ID=IC$. Vậy

$ID=IC\Rightarrow KD=KC\Rightarrow\begin{cases}NH//BC\\MK//AD\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}NK\perp ME\\MK\perp HN\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}NK\perp MI\\MK\perp NI\end{cases}$

Từ đó suy ra I là trực tâm tam giác MNK. Nên đáp án đúng là B

Họ và tên tác giả: Nguyễn Thi Tiết Hạnh Tên FB: Hạnhtiettiet

Email: tiethanh.78@gmail.com

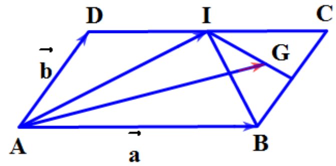
Câu 229: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của CD, G là trọng tâm tam giác BCI. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{AD}$. Hãy tìm đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$. **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{6}\vec{a}+\vec{b}$.

C. $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}$. **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$.

Lời giải

Chọn A



* I là trung điểm của CD nên: $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

* G là trọng tâm tam giác BCI nên: $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$, thay $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ ta được $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

(Email): locleduc10@gmail.com

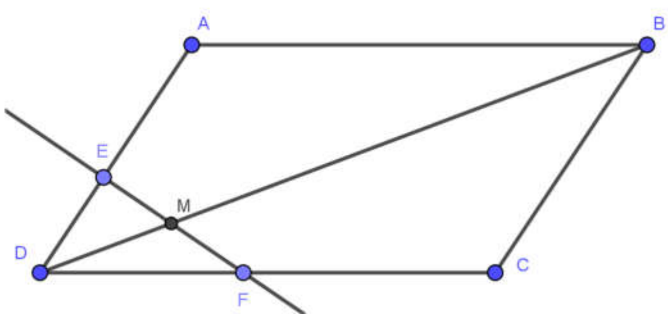
Câu 230: Một đường thẳng cắt các cạnh DA, DC và đường chéo DB của hình bình hành $ABCD$ lần lượt tại các điểm E, F và M. Biết $\overrightarrow{DE}=m.\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DF}=n.\overrightarrow{DC}$ $(m,\ n>0)$. Khẳng định đúng là:

A. $\overrightarrow{DM}=\frac{m+n}{m.n}\overrightarrow{DB}$. **B.** $\overrightarrow{DM}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{DB}$.

C. $\overrightarrow{DM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{DB}$. **D.** $\overrightarrow{DM}=\frac{m.n}{m+n}\overrightarrow{DB}$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $\overrightarrow{DM}=x.\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{EM}=y\overrightarrow{FM}$.

Khi đó:

$\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{DE}=(x-m)\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DF} = x\overrightarrow{DA} + (x-n)\overrightarrow{DC}$

Ta có:

$\overrightarrow{EM} = y\overrightarrow{FM} \Leftrightarrow (x-m)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} = xy\overrightarrow{DA} + y(x-n)\overrightarrow{DC}$.

Do $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{DC}$ không cùng phương nên $\begin{cases} x-m = xy \\ x = y(x-n) \end{cases}$

Giải hệ được $y = -\dfrac{m}{n}$ và $x = \dfrac{mn}{m+n}$.

Vậy $\overrightarrow{DM} = \dfrac{m.n}{m+n}\overrightarrow{DB}$

(Họ và tên tác giả: Lê Đức Lộc, Tên FB: Lê Đức Lộc)

Email: phuogthu081980@gmail.com

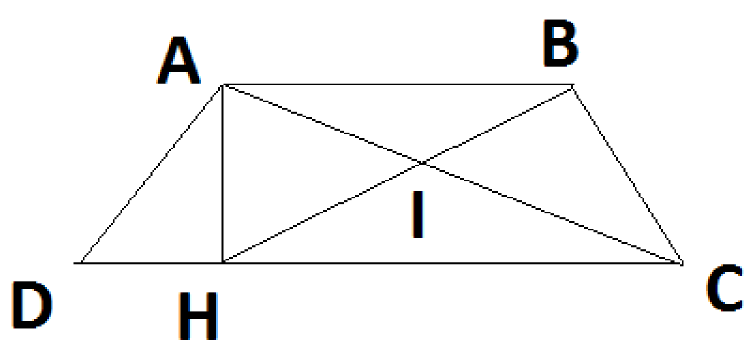
Câu 231: Hình thang cân ABCD có độ dài đường cao $AH = a; AB//CD, AB = a\sqrt{3}; AD = a\sqrt{2}; AB < DC$ AC cắt BH tại I. Biết $\overrightarrow{AI} = \dfrac{x + y\sqrt{z}}{m}\overrightarrow{AC}; x; y; z; m \in N$.

Tính tổng $T = x + y + z + m$

A. 20 **B.** 18 **C.** 17 **<u>D</u>.** 21

Lời giải

Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Phương Thu FB: Buisonca Bui



$+)\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AB} + k\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AH}\right) = \left(1+k\right)\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AH}$

$+)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AH} + \dfrac{HC}{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{AB}.$

$+)I \in AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = m\overrightarrow{AC}$

Mà $\overrightarrow{AH}; \overrightarrow{AB}$ không cùng phương

$$\Rightarrow \begin{cases} k+1=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}m \\ k=-m \end{cases} \Rightarrow m=\frac{6+\sqrt{3}}{11} \Rightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{6+\sqrt{3}}{11}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow T=6+1+3+11=21$$

tambc3vl@gmail.com

Câu 232: Cho hình thang ABCD với O là giao điểm của hai đường chéo AC và B**D.** Qua O vẽ đường thẳng song song với đáy hình thang, đường thẳng này cắt các cạnh bên AD và BC theo thứ tự tại M và N. Với $AB=a$, $CD=b$, khi đó $\overrightarrow{MN}$ bằng:

A. $\dfrac{a.\overrightarrow{AB}+b.\overrightarrow{DC}}{a+b}$. **B.** $\dfrac{b.\overrightarrow{AB}+a.\overrightarrow{DC}}{a+b}$. **C.** $\dfrac{a.\overrightarrow{AB}-b.\overrightarrow{DC}}{a+b}$. **D.** $\dfrac{b.\overrightarrow{AB}-a.\overrightarrow{DC}}{a+b}$.

Lời giải

Họ và tên: Nguyễn Thanh Tâm Tên FB: **Tâm Nguyễn**

Chọn B

Do $MN//AB//CD$ nên: $\dfrac{MA}{MD}=\dfrac{NB}{NC}=\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{AB}{DC}=\dfrac{a}{b}$.

Do đó $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{a}{b}.\overrightarrow{MD}$;

$\overrightarrow{NB}=-\dfrac{a}{b}.\overrightarrow{NC}$, nên:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\frac{a}{b}.\overrightarrow{OD}}{1+\frac{a}{b}};\ \overrightarrow{ON}=\frac{\overrightarrow{OB}+\frac{a}{b}.\overrightarrow{OC}}{1+\frac{a}{b}}$$

Có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\frac{a}{b}.\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\right)}{1+\frac{a}{b}}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\frac{a}{b}.\overrightarrow{DC}}{1+\frac{a}{b}}=\dfrac{b.\overrightarrow{AB}+a.\overrightarrow{DC}}{a+b}$

Câu 233: Cho tam giác ABC đều tâm O; điểm M thuộc miền trong tam giác OBC; D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CA, AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

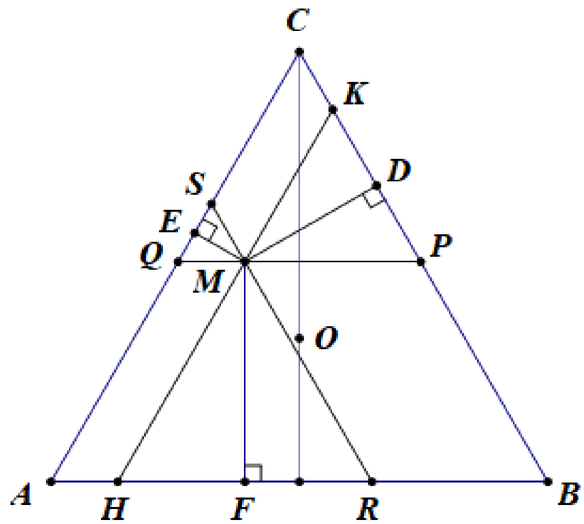
A. $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MO}$. **B.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MO}$.

C. $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=3\overrightarrow{MO}$. **D.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Lời giải.

Phan Minh Tâm

Chọn D



Từ M kẻ đường thẳng $Mx \parallel AC$ cắt AB, BC tại H, K;

Từ M kẻ đường thẳng $My \parallel AB$ cắt BC, CA tại P, Q;

Từ M kẻ đường thẳng $Mz \parallel BC$ cắt AB, AC tại R, S;

Suy ra ΔHMR, ΔPMK, ΔQMS là các tam giác đều nên MD, ME, MF là các đường cao đồng thời cũng là đường trung tuyến. Khi đó

$$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MK}\right);$$

$$\overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MQ}\right);$$

$$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MR}\right).$$

Ta được $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MK}\right)$.

Hay $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right)$.

Mặt khác ta có tam giác ABC đều nên tâm O cũng là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$;

Vậy $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

VẤN ĐỀ 2. BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Email: phunghang10ph5s@gmail.com

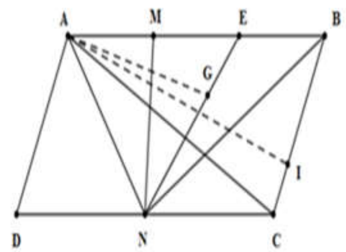
Câu 234: Cho hình bình hành $ABCD$ có các điểm M, I, N lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD sao cho $AM = \frac{1}{3}AB,\ BI = kBC,\ CN = \frac{1}{2}CD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BMN. Xác định k để AI đi qua G.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{9}{13}$. **C.** $\frac{6}{11}$. **D.** $\frac{12}{13}$.

Lời giải

Họ và tên tác giả: Phùng Hằng Tên FB: Phùng Hằng

Chọn C



Gọi E là trung điểm của MB. Khi đó:

$AM = ME = EB$

Ta có: $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EN}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}\right) = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Do $BI = kBC$ **và điểm** I **nằm trên đoạn** BC **nên** $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = k\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$$

Do AI đi qua G nên A, I, G thẳng hàng $\Leftrightarrow \frac{1-k}{\frac{5}{18}} = \frac{k}{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{18}{5}(1-k) = 3k \Leftrightarrow k = \frac{6}{11}$.

Câu 235: Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB, N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AB,\ AN = \frac{3}{4}AC$. Gọi O là giao điểm của CM và BN. Trên đường thẳng BC lấy E. Đặt $\overrightarrow{BE} = x\overrightarrow{BC}$.
Tìm x để A, O, E thẳng hàng.

Chọn C

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{8}{9}$ **C.** $\frac{9}{13}$ **D.** $\frac{8}{11}$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE}=(1-x)\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}$

A, E, O thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AO}$

$\Leftrightarrow (1-x)\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}=\frac{k}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{4}\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow k=\frac{36}{13};\ x=\frac{9}{13}$

Vậy $x=\frac{9}{13}$ là giá trị cần tìm.

Họ và tên tác giả: Nguyễn Thanh Dũng Tên FB: Nguyễn Thanh Dũng

Email: thanhdungtoan6@gmail.com

Ý tưởng: Cho tam giác ABC, I là trung điểm của BC. Gọi $P,\ Q,\ R$ là các điểm xác định bởi:

$$\overrightarrow{AP}=p\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AQ}=q\overrightarrow{AI},\ \overrightarrow{AR}=r\overrightarrow{AC} \text{ với } pqr\neq 0.$$

Chứng minh rằng: $P,\ Q,\ R$ thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{2}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}$.

Chứng minh

Ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=q\overrightarrow{AI}-p\overrightarrow{AB}=q\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-p\overrightarrow{AB}=\frac{q-2p}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{q}{2}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=r\overrightarrow{AC}-p\overrightarrow{AB}\end{cases}$$

Do đó, $P,\ Q,\ R$ thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại số thực m sao cho $\overrightarrow{PQ}=m\overrightarrow{PR}$

$$\Leftrightarrow \frac{q-2p}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{q}{2}\overrightarrow{AC}=m\left(r\overrightarrow{AC}-p\overrightarrow{AB}\right)\Leftrightarrow \frac{q-2p+2mp}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{q-2mr}{2}\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{q-2p+2mp}{2}=0\\ \frac{q-2mr}{2}=0\end{cases} \text{ (vì } \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC} \text{ không cùng phương)}$$

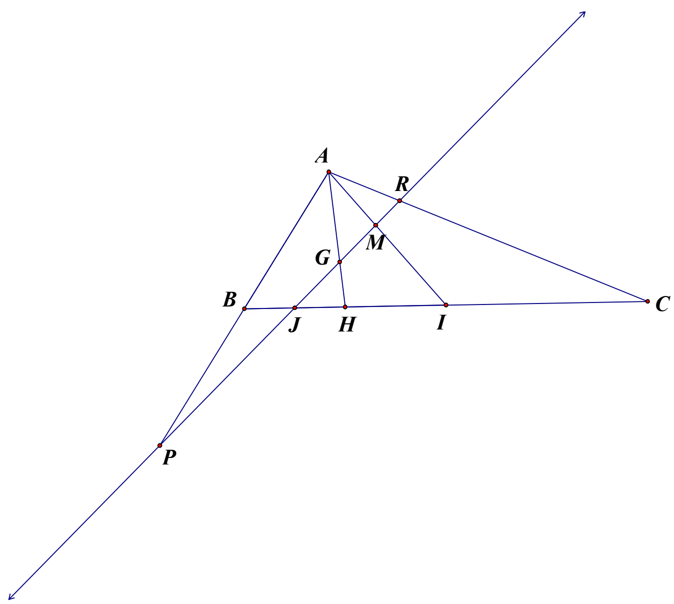
$$\Leftrightarrow \begin{cases}m=1-\frac{q}{2p}\\ m=\frac{q}{2r}\end{cases}\Leftrightarrow 1-\frac{q}{2p}=\frac{q}{2r}\Leftrightarrow \frac{2}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}$$

Câu 236: Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm BC; P là điểm đối xứng với A qua B; R là điểm trên cạnh AC sao cho $AR = \frac{2}{5}AC$. Khi đó đường thẳng AR đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?

A. Trọng tâm tam giác ABC. **B.** Trọng tâm tam giác ABI.
C. Trung điểm AI. **D.** Trung điểm BI.

Lời giải

Đáp án: B



Theo đề bài, $\begin{cases} \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}\,(p = 2) \\ \overrightarrow{AR} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\left(r = \frac{2}{5}\right) \end{cases}$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABI, ta được $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AH}\left(q = \frac{2}{3}\right)$

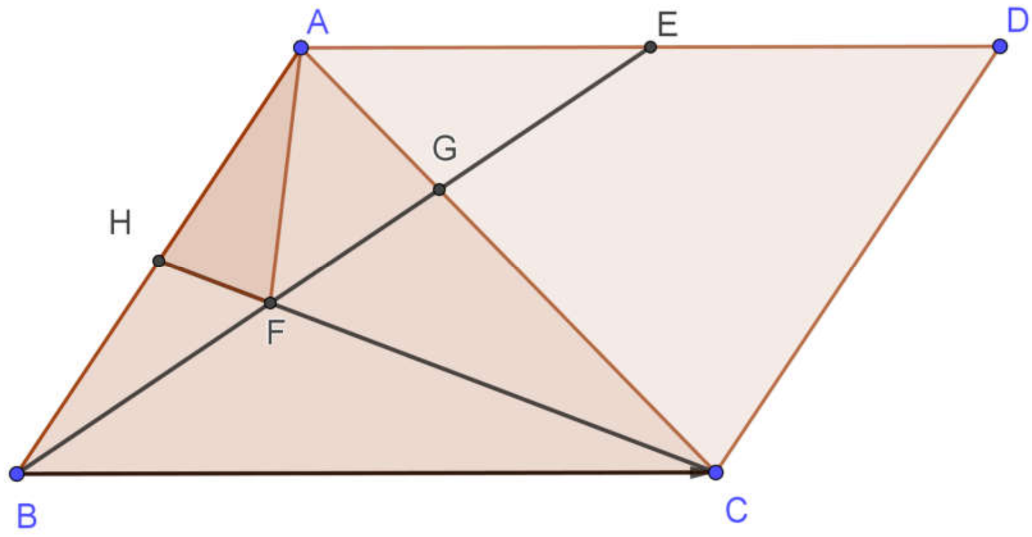
Ta có $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 3 = \frac{2}{q}$ suy ra $P,\ G,\ R$ thẳng hàng.

(có thể phát triển P, J, G, M, R thẳng hàng với J – có lẽ là trung điểm BH, còn M chia AI theo tỷ số tính được)

Câu 237: Cho ΔABC có H là trung điểm của AB và $G \in AC : GC = 2AG$. Gọi F là giao điểm của CH và BG. Tìm điểm I trên BC sao cho I, F, A thẳng hàng

A. $\overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{IB}$. **B.** $\overrightarrow{IB} = -2\overrightarrow{IC}$. **C.** $IB = IC$. **D.** $\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB}$.

Lời giải



Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$ và E là trung điểm của AD. Khi đó, ta có: $\overrightarrow{FH}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{FC}$

Vận dụng định lý Menelauyt trong ΔHBC có A,F,I thẳng hàng

$\Leftrightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}.\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}}.\frac{\overline{FC}}{\overline{FH}}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}}.(-4)=1$

$\Leftrightarrow \frac{\overline{IB}}{\overline{IC}}=-\frac{1}{2}$

Vậy $\overrightarrow{IC}=-2\overrightarrow{IB}$.

Họ và tên tác giả: Hoàng Thị Trà FB: Hoàng Trà

Câu 238: Cho tam giác ABC. I là trung điểm của BC. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AP}=p\overrightarrow{AC}$, với $mnp\neq 0$. Tìm điều kiện của m,n,p để M, N, P thẳng hàng.

A. $mp=mn+np$ **B.** $2mp=mn+np$ **C.** $2np=mn+mp$ **D.** $2mn=mp+np$

Lời giải

Ta có $\begin{matrix}\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=p\overrightarrow{AC}-m\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=n\overrightarrow{AI}-m\overrightarrow{AB}\end{matrix}$. Mà $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{MN}=\frac{n}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-m\overrightarrow{AB}=(\frac{n}{2}-m)\overrightarrow{AB}+\frac{n}{2}\overrightarrow{AC}$

Do $mnp\neq 0$ nên M, N, Q thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{\frac{n}{2}-m}{-m}=\frac{\frac{n}{2}}{p}\Leftrightarrow 2mp=mn+np$

Chọn đáp án **B.**

Nhận xét: Với bài toán trên thì việc cụ thể hóa bộ ba số m,n,p sao cho thỏa mãn điều kiện trên ta đều ra được bài toán chứng minh ba điểm thẳng hàng. Kết quả trên chúng ta có thể vận dụng vào để giải nhanh bài toán sau:

Câu 239: Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác, I là trung điểm của BC, M và N là các điểm được xác định bởi $\begin{cases}\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ 3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}\end{cases}$. Gọi P là giao điểm của AC và MN. Tính tỉ số diện tích tam giác ANP và tam giác CNP.

A. 3 **B.** $\frac{7}{2}$ **C.** 4 **D.** 2

Lời giải.

Ta có $\frac{S_{ANP}}{S_{CNP}}=\frac{PA}{PC}$. Yêu cầu bài toán dẫn đến tìm tỉ số $\frac{PA}{PC}$.

Ta dễ dàng chứng minh được M, N, G thẳng hàng.

$$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\Rightarrow 2\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{GN}-\overrightarrow{GN})=\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}$$

Ta có $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GN}=3\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}=-3\overrightarrow{GA}-4\overrightarrow{GB}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GN}=-3\overrightarrow{GA}-4\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}(vi3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0})$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GN}=7\overrightarrow{GM}$

Vậy G, M, N thẳng hàng. Mặt khác MN cắt AC tại P, nên M, G, P thẳng hàng.

Áp dụng kết quả G, M, P thẳng hàng theo câu 1 vào ta có $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}\Rightarrow m=\frac{4}{7}$

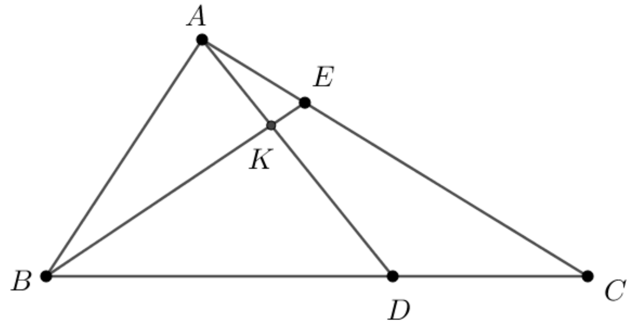
$\overrightarrow{AG}=n\overrightarrow{AI}\Rightarrow n=\frac{2}{3}$, $\overrightarrow{AP}=p\overrightarrow{AC}$. Khi đó $2mp=mn+np\Leftrightarrow 2.\frac{4}{7}.p=\frac{4}{7}.\frac{2}{3}+\frac{2}{3}.p\Leftrightarrow p=\frac{4}{5}$, khi đó $\frac{PA}{PB}=4$. Vậy $\frac{S_{ANP}}{S_{CNP}}=4$

Câu 240: Cho tam giác ABC. Gọi D,E lần lượt là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Điểm K trên AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=\frac{a}{b}\overrightarrow{AD}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) sao cho 3 điểm B,K,E thẳng hàng. Tính $P=a^2+b^2$.

A. $P=10$. **B.** $P=13$. **C.** $P=29$. **D.** $P=5$.

Lời giải

Chọn A



Vì $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}(1)$

Giả sử $\overrightarrow{AK}=x.\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{BK}=x.\overrightarrow{BD}+(1-x)\overrightarrow{BA}$

Mà $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{AK}=x.\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{BK}=\frac{2x}{3}\overrightarrow{BD}+(1-x)\overrightarrow{BA}$

Vì B,K,E thẳng hàng ($B\neq E$)nên có m sao cho $\overrightarrow{BK}=m\overrightarrow{BE}$

Do đó có: $\frac{m}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{3m}{4}\overrightarrow{BA}=\frac{2x}{3}\overrightarrow{BC}+(1-x)\overrightarrow{BA}$

Hay $\left(\frac{m}{4}-\frac{2x}{3}\right)\overrightarrow{BC}+\left(1-x-\frac{3m}{4}\right)\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

Do $\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}$ không cùng phương nên

$\frac{m}{4}-\frac{2x}{3}=0;1-x-\frac{3m}{4}=0$ Từ đó suy ra $x=\frac{1}{3};m=\frac{8}{9}$

Vậy $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

Email: themhaitotoanyp1@gmail.com

Câu 241: Cho tam giác *ABC, I* là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}$
K là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

P là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

Có bao nhiêu cặp (m,n), $m,n\in Z$, $m,n\in[-10;10]$ sao cho I,K,P thẳng hàng.

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{PA}=-m\overrightarrow{PB}-n\overrightarrow{PC}$

Có: $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PI}\right)-\left(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PI}\right)+4\left(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PI}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{PI}=2\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{PI}=(-2m-1)\overrightarrow{PB}+(-2n+4)\overrightarrow{PC}$

Có:

$\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PK}\right)+2\left(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PK}\right)+3\left(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PK}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{PK}=\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{PK}=(-m+2)\overrightarrow{PB}+(-n+3)\overrightarrow{PC}$

I,K,P thẳng hàng khi và chỉ khi $5\overrightarrow{PI},6\overrightarrow{PK}$ cùng phương

$\Leftrightarrow (2m+1)(n-3)=(m+2)(2n-4) \Leftrightarrow 2m-5n=11$

Do (m,n), $m,n\in Z$, $m,n\in[-10;10]$ nên $(m,n)\in\{(-8;-1),(-3,-1),(2,3),(5,7)\}$

(Fb: Lưu Thêm)

Email : boyhanam@gmail.com

Bài em sưu tầm ạ !

Câu 242: Cho tam giác ABC, M và N là hai điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$. Xác định x để A, M, N thẳng hàng.

A. 3. **B.** $-\frac{1}{3}$. **C.** 2. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}. \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}=(x+1)\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$

Để A, M, N thẳng hàng thì $\exists k\neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AN}$

Hay $(x+1)\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=k\left(-\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}\right) \Leftrightarrow \begin{cases}x+1=-k\\-1=2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\dfrac{-1}{2}\\x=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$

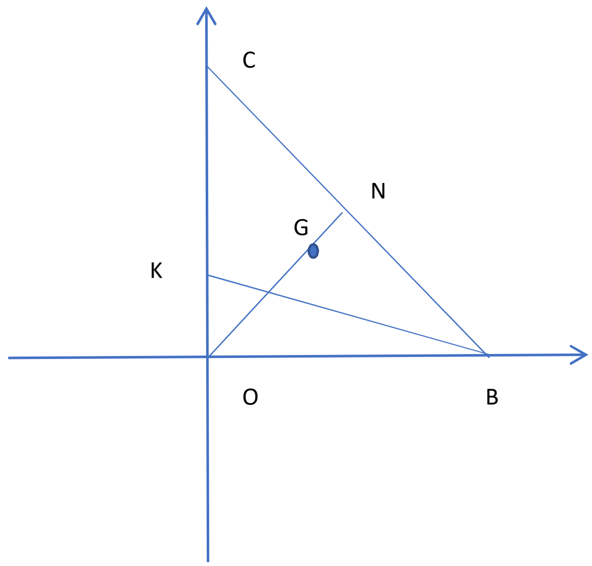
Huonghungc3@gmail.com

Câu 243: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm AG, lấy K thuộc cạnh AC sao cho $\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\mathrm{k}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. Nếu $\mathrm{B,I,K}$ thẳng hàng thì giá trị của k nằm trong khoảng?

A. $\left[0;\frac{1}{6}\right]$ **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ **C.** $\left(\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{5};1\right)$

Lời giải

(Họ tên: Nguyễn Thu Hương. Tên FB: Thu Hương)



Chọn **B**

Không giảm tính tổng quát: giả sử tam giác ABC có: $A(0;0);B\left(6;0\right);C\left(0;6\right)$ thì $G\left(2;2\right);I\left(1;1\right)$

Gọi $K\left(0;m\right)$ Khi đó: $\overrightarrow{IB}\left(5;-1\right);\overrightarrow{KB}\left(6;-m\right)$. Để B,I,K thẳng hàng: $5m=6\Leftrightarrow m=\dfrac{6}{5}$

suy ra $k=\dfrac{1}{5}$

Họ và tên: Trần Văn Luật

Email: Tvluatc3tt@gmail.com

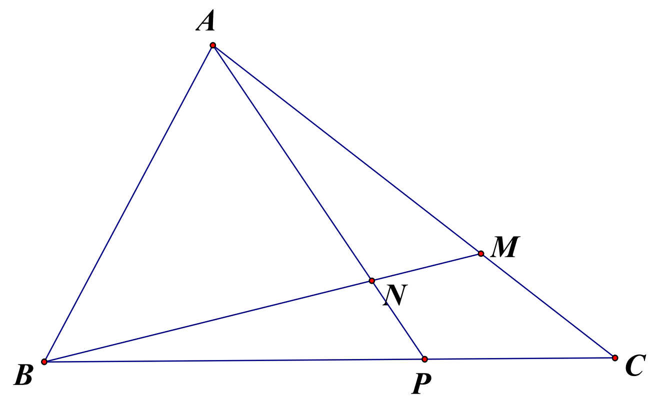
FB: Trần Luật

Câu 244: Cho tam giác ABC, M là điểm thuộc cạnh AC sao cho $\overrightarrow{MA}=-2.\overrightarrow{MC}$, N thuộc BM sao cho $\overrightarrow{NB}=-3\overrightarrow{NM}$, P là điểm thuộc BC. Biết rằng ba điểm A,N,P thẳng hàng khi $\overrightarrow{PB}=k\overrightarrow{PC}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $k\in\left(-3;-\dfrac{5}{2}\right)$. **B.** $k\in\left(-\dfrac{5}{2};-1\right)$. **C.** $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Lời giải

Chọn B



Ta có

$\overrightarrow{NB}=-3\overrightarrow{NM}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AN}=-3\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AM}=4\overrightarrow{AN}\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Do P là điểm thuộc BC nên $\overrightarrow{PB}=k\overrightarrow{PC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}=k\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC}=(1-k)\overrightarrow{AP}\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=\frac{1}{k-1}\overrightarrow{AB}-\frac{k}{1-k}\overrightarrow{AC}$.

Ba điểm A,N,P thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AP}=h\overrightarrow{AN}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{1-k}=\frac{h}{4}\\-\frac{1}{1-k}=\frac{h}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-2\\h=\frac{4}{3}\end{cases}$.

Vậy $k=-2$.

Họ và tên: Hoàng Thị Kim Liên

Email: lientiencl@gmail.com

Facebook: Kim Liên

Câu 245: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt nằm trên đường thẳng BC, CA, AB sao cho $\overrightarrow{MB}=m\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC}=n\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PB}$. Tính tích mnk để M, N, P thẳng hàng?

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Ta có :

$\overrightarrow{MB}=\frac{m}{1-m}\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BP}=\frac{1}{k-1}\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{BC}=(1-m)\overrightarrow{MC};\ \overrightarrow{CN}=\frac{n}{1-n}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MN}=\frac{-1}{1-m}\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{1-m}+\frac{n}{1-n}\right)\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{MP}=\left(\frac{-m}{1-m}-\frac{1}{1-k}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{m}{1-m}\overrightarrow{AC}$$

Để M, N, P thẳng hàng thì ta có :

Câu 246: $\dfrac{\dfrac{-m}{1-m}-\dfrac{1}{1-k}}{\dfrac{-1}{1-m}}=\dfrac{\dfrac{m}{1-m}}{\dfrac{1}{1-m}+\dfrac{n}{1-n}}\Leftrightarrow mnk=1$

(Email): thuhangnvx@gmail.com

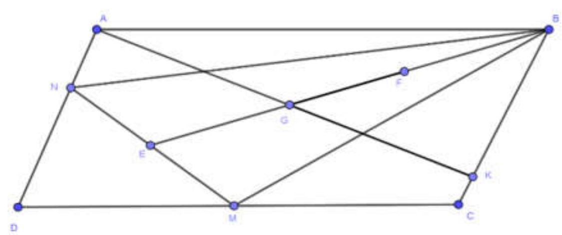
Câu 247: Cho hình bình hành $ABCD$ gọi M là trung điểm của cạnh CD, N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN=\frac{1}{3}AD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BMN, đường thẳng AG cắt BC tại K. Khi đó $\overrightarrow{BK}=\frac{m}{n}\overrightarrow{BC}$ ($\frac{m}{n}$ là tối giản). Tính $S=m+n$

A. $S=16$. **B.** $S=17$. **C.** $S=18$. **D.** $S=19$.

Lời giải

(Tên FB: Phùng Hằng)

Chọn B



Ta có

$$2\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AM}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AB}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{AB}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AD}.$$

Đặt $\overrightarrow{BK}=x.\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AD}$.

Do A,G,K thẳng hàng thì $\overrightarrow{AK}=k\overrightarrow{AG}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AD}=\frac{k}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{4k}{9}\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\begin{cases}k=2\\ x=\frac{8}{9}\end{cases}$

Suy ra $\frac{m}{n}=\frac{8}{9}$

Vậy $S=17$

Email: **builoiyka@gmail.com**

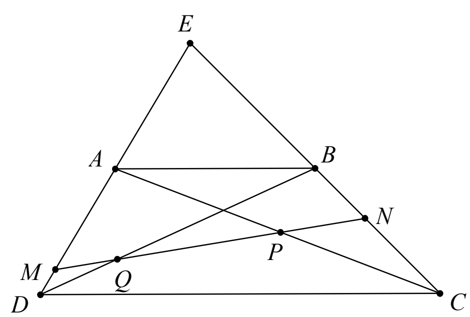
Câu 248: Cho hình thang $ABCD$ có đáy AB, CD, $CD=2AB$. M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AD và BC sao cho $AM=5MD$, $3BN=2NC$. Gọi P là giao điểm của AC và MN; Q là giao điểm của BD và MN; Khi đó $\frac{PM}{PN}+\frac{QN}{QM}=\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a+b$ bằng

A. 386. **B.** 385. **C.** 287. **D.** 288.

Lời giải

Họ tên: Bùi Thị Lợi Facebook: LoiBui

Chọn A



Gọi E là giao điểm của AD và BC. Ta có A, lần lượt là trung điểm của EC, ED.

Giả sử $\overrightarrow{PM}=x\overrightarrow{PN}$; $\overrightarrow{QN}=y\overrightarrow{QM}$.

Ta có $\overrightarrow{EP}=\frac{\overrightarrow{EM}-x\overrightarrow{EN}}{1-x}=\frac{\frac{11}{6}\overrightarrow{EA}-\frac{7x}{10}\overrightarrow{EC}}{1-x}=\frac{11}{6(1-x)}\overrightarrow{EA}-\frac{7x}{10(1-x)}\overrightarrow{EC}$

Do P, A, C thẳng hàng nên $\frac{11}{6(1-x)}-\frac{7x}{10(1-x)}=1\Leftrightarrow 55-21x=30-30x\Leftrightarrow x=-\frac{25}{9}$.

Vậy $\frac{PM}{PN}=\frac{25}{9}$.

Ta có $\overrightarrow{EQ}=\frac{\overrightarrow{EN}-y\overrightarrow{EM}}{1-y}=\frac{\frac{7}{5}\overrightarrow{EB}-\frac{11y}{12}\overrightarrow{ED}}{1-y}=\frac{7}{5(1-y)}\overrightarrow{EB}-\frac{11y}{12(1-y)}\overrightarrow{ED}$

Do Q, B, D thẳng hàng nên $\frac{7}{5(1-y)}-\frac{11y}{12(1-y)}=1\Leftrightarrow 84-55y=60-60y\Leftrightarrow y=-\frac{24}{5}$.

Vậy $\frac{QN}{QM}=\frac{24}{5}$.

Suy ra $\frac{PM}{PN}+\frac{QN}{QM}=\frac{341}{45}\Rightarrow a=341;b=45\Rightarrow a+b=386$.

Cách 2:

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AMN với ba điểm thẳng hàng là A,P,C, ta có

$\frac{PM}{PN}.\frac{CN}{CE}.\frac{AE}{AM}=1 \Leftrightarrow \frac{PM}{PN}.\frac{3}{10}.\frac{6}{5}=1\Leftrightarrow \frac{PM}{PN}=\frac{25}{9}$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác EMN với ba điểm thẳng hàng là B,Q,D, ta có

$\frac{QN}{QM}.\frac{DM}{DE}.\frac{BE}{BN}=1 \Leftrightarrow \frac{QN}{QM}.\frac{1}{12}.\frac{5}{2}=1\Leftrightarrow \frac{QN}{QM}=\frac{24}{5}$.

Vậy $\frac{PM}{PN}+\frac{QN}{QM}=\frac{341}{45}\Rightarrow a=341;b=45\Rightarrow a+b=386$.

Email: datltt09@gmail.com

Câu 249: Cho tam giác *ABC*, trên cạnh *AC* lấy điểm *M*, trên cạnh *BC* lấy điểm *N* sao cho *AM = 3MC*, *NC = 2BN*. Gọi *I* là giao điểm của *AN* và *BN*. Tính diện tích tam giác *ABC* biết diện tích tam giác *ABN* bằng 4.

A. $S_{ABC}=110$. **B.** $S_{ABC}=115$. **C.** $S_{ABC}=125$. **D.** $S_{ABC}=120$.

Lời giải

Họ và tên tác giả: Vũ Thị Hằng Tên FB: Đạt Lâm Huy

Chọn D

Giả sử $\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AN}$ ta có

$\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{BA}=k\overrightarrow{BN}-k\overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BI}=\left(1-k\right)\overrightarrow{BA}+\frac{k}{3}\overrightarrow{BC}(1)$

Tương tự $4\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AC}\Rightarrow \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}(2)$

Vì *B,I,M* thẳng hàng nên từ(1) và(2) ta có $\frac{1-k}{1}=\frac{\frac{k}{3}}{3}\Leftrightarrow k=\frac{9}{10}$

Suy ra $S_{ABN}=10S_{BNI}=40$

$S_{ABC}=3S_{ABN}=120$

(Có thể dùng định lý Menelauyt để tính tỷ số)

Email: samnk.thptnhuthanh@gmail.com

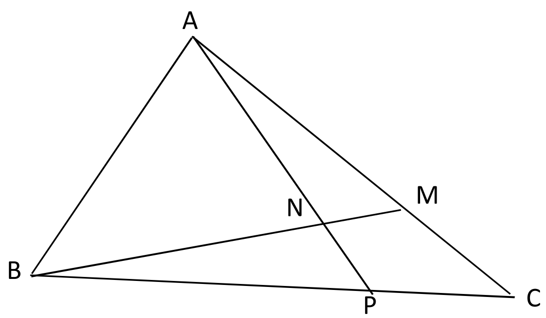
Câu 250: Cho tam giác ABC M thuộc cạnh AC sao cho $\overrightarrow{MA}=-2.\overrightarrow{MC}$, N thuộc BM sao cho $\overrightarrow{NB}=-3.\overrightarrow{NM}$, P thuộc BC sao cho $\overrightarrow{PB}=k.\overrightarrow{PC}$. Tìm giá trị k để ba điểm A, N, P thẳng hàng.

A. $k=\frac{1}{2}$. **B.** $k=-2$. **C.** $k=-\frac{1}{2}$. **D.** $k=2$.

Lời giải

Họ và tên: Nguyễn Khắc Sâm Facebook: Nguyễn Khắc Sâm

Chọn B



Ta có:

$\overrightarrow{NB}=-3.\overrightarrow{NM}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AN}=-3.\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+3.\overrightarrow{AM}=4.\overrightarrow{AN}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{AC}\quad (1)$

$\overrightarrow{PB}=k.\overrightarrow{PC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}=k\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-k.\overrightarrow{AC}=(1-k)\overrightarrow{AP}\quad (k\neq 1)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=\frac{1}{1-k}\overrightarrow{AB}-\frac{k}{1-k}\overrightarrow{AC}\quad (2)$

Ba điểm A, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{AP}=h.\overrightarrow{AN}\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{1-k}=\frac{h}{4}\\ -\frac{k}{1-k}=\frac{h}{2}\end{cases}\Rightarrow k=-2.$$

VẤN ĐỀ 3. QUỸ TÍCH

Nguyễn Văn Dũng ***Fb: Nguyễn Văn Dũng***

Email: dungtoanc3hbt@gmail.com

Câu 251: Cho tam giác ABC với J là điểm thoả mãn $2\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$, gọi E là điểm thuộc AB và thoả mãn $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AB}$. Xác định k để C, E, J thẳng hàng.

A. $k\in(-2;-1)$. **B.** $k\in(-1;0)$. **C.** $k\in(0;1)$. **D.** $k\in(1;2)$

Lời giải

Ta có

$2\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JE}+2\overrightarrow{EA}+5\overrightarrow{JE}+5\overrightarrow{EB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Leftrightarrow 7\overrightarrow{JE}+3\overrightarrow{JC}+2\overrightarrow{EA}+5\overrightarrow{EB}=\vec{0}$

Để C, E, J thẳng hàng thì $2\overrightarrow{EA}+5\overrightarrow{EB}=\vec{0}\Leftrightarrow 7\overrightarrow{EA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AE}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}\Rightarrow k=\frac{5}{7}$.

Chọn C

Leminh0310@gmail.com

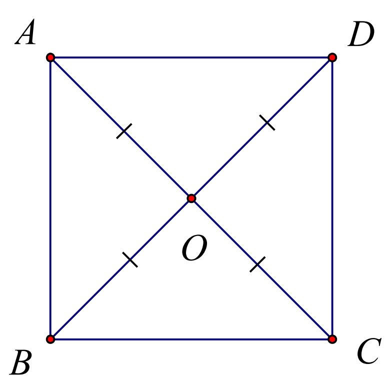
Câu 252: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh 1. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn $2MA^2+MB^2+2MC^2+MD^2=9$ là một đường tròn có bán kính R. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $R\in(0;1)$. **B.** $R\in(1;2)$. **C.** $R\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $R\in\left(\frac{3}{2};2\right)$.

(Sưu tầm: Lê Hồ Quang Minh – FB: Lê Minh)

Lời giải

Chọn C



Vì $ABCD$ là hình vuông tâm O nên ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\\ \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\end{cases}$

Theo giải thiết: $2MA^2+MB^2+2MC^2+MD^2=9$

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}\right)^2=9$

$\Leftrightarrow 6MO^2+2OA^2+OB^2+2OC^2+OD^2+2\overrightarrow{MO}\underbrace{\left(2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)}_{\vec{0}}=9$

$\Leftrightarrow 6MO^2+3=9\Leftrightarrow MO=1$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O bán kính $R=1$.

Email: *thuyhung8587@gmail.com*

Câu 253: Cho tam giác ABC. Tập hợp những điểm M thỏa mãn:

$\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ là:

A. Đường thẳng đi qua A **B.** Đường thẳng qua B và C
C. Đường tròn **D.** Một điểm duy nhất.

Lời giải

$\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MA}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MI}\right|$, ($I$: là trung điểm BC)

$\Leftrightarrow\left|3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MA}\right)\right|=2\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MI}\right|$, ($G$: trọng tâm $\triangle ABC$)

$\Leftrightarrow 6\left|\overrightarrow{MJ}\right|=2\left|\overrightarrow{IA}\right|\Leftrightarrow MJ=\frac{1}{3}IA$,(J là trung điểm của AG)

$\Leftrightarrow JM=\frac{1}{2}AG$ (không đổi). Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm J , bán kính $R=\frac{AG}{2}$.

Chọn đáp án **C.**

(***Họ và tên tác giả: Cấn Việt Hưng, Tên FB: Viet Hung)***

ngoletao@gmail.com

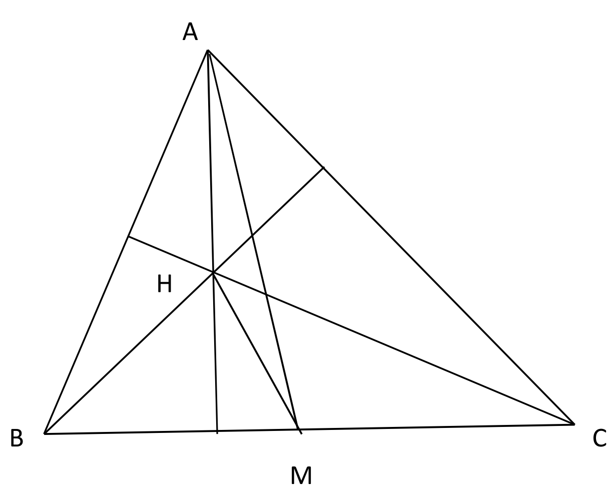
Câu 254: Cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định với $BC=2a$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của đoạn BC. Nếu đỉnh A thay đổi nhưng luôn thỏa $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MH}+MA^2=4a^2$ thì điểm A luôn thuộc một đường tròn cố định có bán kính bằng

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** a.

(Họ và tên tác giả: Ngô Lê Tạo, Tên FB: Ngô Lê Tạo)

Lời giải

Chọn B



Ta có

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MH}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}\right).$$

$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CH}\right)$ (do $BA\perp CH, CA\perp BH$

$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CH}\right)$ (định lý chiếu vectơ)

$=\frac{1}{4}BC^2$

Suy ra

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MH}+MA^2=4a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}.4a^2+MA^2=4a^2 \Leftrightarrow AM=a\sqrt{3}$.

Câu 255: Cho hai điểm A và B cố định. Tìm giá trị $k>0$ để tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện $MA^2+MB^2=k$ là một đường tròn.

A. $k<\frac{2}{3}AB^2$. **B.** $k=\frac{2}{3}AB^2$. **C.** $k\le\frac{2}{3}AB^2$. **D.** $k>\frac{2}{3}AB^2$.

Lời giải

Chọn D

Gọi E là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}=\vec{0}$ ta có

$\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}=\vec{0}$ ta có:

$MA^2+MB^2=k \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2+\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2=k \Leftrightarrow 3ME^2=k-EA^2-2EB^2 \ (*)$

Mà $EA+2EB=0 \Rightarrow EA=\frac{2}{3}AB\,;EB=\frac{1}{3}AB$ nên $(*)\Leftrightarrow 3ME^2=k-\frac{2}{3}AB^2$

$\Leftrightarrow ME^2=\frac{1}{3}\left(k-\frac{2}{3}AB^2\right)$

Nếu $k<\frac{2}{3}AB^2$: Quỹ tích điểm M là rỗng.

Nếu $k=\frac{2}{3}AB^2$: Quỹ tích điểm M là điểm E.

Nếu $k>\frac{2}{3}AB^2$: Quỹ tích điểm M là đường tròn tâm E bán kính $R=\sqrt{\frac{1}{3}\left(k-\frac{2}{3}AB^2\right)}$.

PHẠM THANH LIÊM FB: Liêm Phạm
Email: Phamthanhliem1@gmail.com

Câu 256: Cho tam giác vuông ABC tại A. Tìm tập hợp M sao cho $MB^2+MC^2=MA^2$.

A. Đường thẳng. **B.** Đường tròn. **C.** Đoạn thẳng. **D.** Một điểm.

Lời giải

Chọn D

$MB^2+MC^2=MA^2 \Leftrightarrow MB^2+MC^2-MA^2=0$. Gọi E là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EA}=0$. (E là điểm thứ tư của hình bình hành $ABEC$).

Ta có: $MB^2+MC^2-MA^2=\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2+\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EC}\right)^2-\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2$

$=ME^2+EB^2+EC^2-EA^2$

$=ME^2+EB^2+EC^2-\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}\right)^2=ME^2-2\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC}=ME^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=ME^2$. Vậy $ME^2=0$.
Nên tập hợp điểm M là điểm E.

(Cách chứng minh trên phục vụ cho cả tam giác ABC là tam giác thường và khi đó các tập hợp điểm là khác nhau)

Email: thachtv.tc3@nghean.edu.vn

Câu 257: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB=5cm$. Gọi (S) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=25$. Gọi I là trung điểm của BC. Kết luận nào sau đây **đúng**?

A. (S) là đường thẳng trung trực của đoạn thẳng AI.

B. (S) là đoạn thẳng AI.

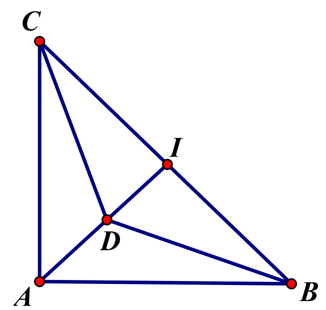
C. (S) là đường tròn cố định bán kính $R=\dfrac{5\sqrt{10}}{4}$.

D. (S) là đường tròn tâm I bán kính $R=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$

(Họ và tên tác giả: Trịnh Văn Thạch, FB: www.facebook.com/thachtv.tc3)

Lời giải

Chọn C



Từ giả thiết: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(MA^2+MB^2-AB^2\right)+\dfrac{1}{2}\left(MA^2+MC^2-AC^2\right)=25$

$\Leftrightarrow 2MA^2+MB^2+MC^2=50+50 \Leftrightarrow 2MA^2+MB^2+MC^2=100$

Gọi D là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DI}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DI}=\vec{0}$

$\Rightarrow$ D là trung điểm của đoạn thẳng AI

Ta có $2MA^2+MB^2+MC^2=4MD^2+2DA^2+DB^2+DC^2$

Và $DA=\frac{1}{2}AI=\frac{1}{4}BC=\frac{5\sqrt{2}}{4}$, $DB=DC=\sqrt{IB^2+ID^2}=\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{125}{8}}$.

Suy ra

$2MA^2+MB^2+MC^2=4MD^2+2DA^2+DB^2+DC^2=4MD^2+2.\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2+2.\left(\sqrt{\frac{125}{8}}\right)^2=4MD^2+\frac{75}{2}$

Ta có kết quả: $4MD^2+\frac{75}{2}=100\Rightarrow MD^2=\frac{125}{8}$

Như vậy (S) là đường tròn tâm D bán kính $R=\frac{5\sqrt{10}}{4}$.

Câu 258: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $4MA^2+MB^2+MC^2=\frac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính là:

A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi M lần lượt là trung điểm của BC.

Gọi I là điểm thỏa mãn điều kiện: $4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Khi đó, ta có: $4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IM}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AM}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$.

Suy ra: $IA=\frac{a\sqrt{3}}{6}$; $IB=IC=\sqrt{IM^2+BM^2}=\frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Ta lại có: $4MA^2+MB^2+MC^2=\frac{5a^2}{2}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=\frac{5a^2}{2}$

$\Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=\frac{5a^2}{2}$

$\Leftrightarrow 6MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(4\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) + 4IA^2 + IB^2 + IC^2 = \dfrac{5a^2}{2}$

$\Leftrightarrow MI = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

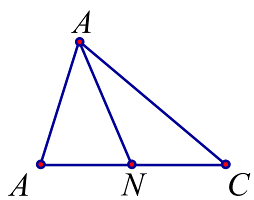
Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Câu 259: Cho ΔABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho: $\left|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right| = \left|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$.

A. Tập hợp các điểm M là một đường tròn.
B. Tập hợp của các điểm M là một đường thẳng.
C. Tập hợp các điểm M là tập rỗng.
D. Tập hợp các điểm M chỉ là một điểm trùng với A.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$\left|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right| = \left|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right| \Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC}\right| = \left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\right|$ (1).

Gọi N là trung điểm BC. Ta được: $(1) \Leftrightarrow 2\left|\overrightarrow{MI}\right| = 2\left|-\overrightarrow{AN}\right| \Leftrightarrow IM = AN$.

I, A, N cố định nên tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I, bán kính AN.

Câu 260: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \dfrac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính là:

A. $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi M lần lượt là trung điểm của BC.

Gọi I là điểm thỏa mãn điều kiện: $4\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Khi đó, ta có: $4\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IM}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AM}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$.

Suy ra: $IA=\frac{a\sqrt{3}}{6}$; $IB=IC=\sqrt{IM^2+BM^2}=\frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Ta lại có: $4MA^2+MB^2+MC^2=\frac{5a^2}{2}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=\frac{5a^2}{2}$

$\Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=\frac{5a^2}{2}$

$\Leftrightarrow 6MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)+4IA^2+IB^2+IC^2=\frac{5a^2}{2}$

$\Leftrightarrow MI=\frac{a}{\sqrt{6}}$.

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R=\frac{a}{\sqrt{6}}$.

Họ và tên tác giả: Vũ Thị Nga Tên FB: Linh Nga

Email: linhnga.tvb@gmail.com

Câu 261: Cho $\triangle ABC$ đều, có cạnh bằng a. Khi đó tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=\frac{a^2}{6}$ là:

A. Đường tròn có bán kính $R=\frac{a}{3}$.

B. Đường tròn có bán kính $R=\frac{a}{2}$.

C. Đường tròn có bán kính $R=\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. Đường tròn có bán kính $R=\frac{a\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và G cố định.

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2=9\left(\overrightarrow{MG}\right)^2$

$\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2+2\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}\right)=9MG^2$

Mà $MA^2+MB^2+MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$

$=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$

$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2.\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)$

$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2.\overrightarrow{MG}.\vec{0}$

$=3MG^2+3GA^2$

$=3MG^2+3\left(\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$=3MG^2+a^2$

Ta có $3MG^2+a^2+2\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}\right)=9MG^2$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}\right)=3MG^2-\dfrac{a^2}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{6}+\dfrac{a^2}{2}=3MG^2$

$\Rightarrow MG^2=\dfrac{2a^2}{9}$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm G bán kính $R=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Họ và tên tác giả: Tô Quốc An Tên FB: Tô Quốc An

Email: antq4949@gmail.com

Câu 262: Cho ΔABC tìm tập hợp điểm M : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=AM^2$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của BC , ta có: $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=AM^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)=MA^2$

$\Leftrightarrow MI^2+\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}\right)=MA^2 \Leftrightarrow MI^2-MA^2=-\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IB}=\dfrac{BC^2}{4}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MA}\right)=\dfrac{BC^2}{4} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MA}\right)=\dfrac{BC^2}{4} \quad (*)$

Gọi O là trung điểm của AI , suy ra: $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MO}$

Suy ra: $(*) \quad \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{MO}=\dfrac{BC^2}{4} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{MO}=\dfrac{BC^2}{4} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OM}=-\dfrac{BC^2}{16}$

Trên tia đối của tia OI lấy điểm H sao cho $OI.OH=\dfrac{BC^2}{16}$ hay $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OH}=-\dfrac{BC^2}{16}$, suy ra điểm H xác định duy nhất.

Dựng đường thẳng Δ đi qua H và vuông góc với OI, khi đó với mọi điểm M nằm trên Δ ta có:

$$\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OI}.\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HM}\right)=\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{HM}=\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OH}=-\frac{BC^2}{16}.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng Δ

Email: Bichhai1975@gmail.com

Câu 263: Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 3. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$ là đường tròn cố định có bán kính bằng:

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

(Họ tên: Lê Thị Bích Hải, Tên face: Bich Hai Le)

Lời giải

Họ tên: Lê Thị Bích Hải. Tên face: Bich Hai Le

Chọn B

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)$.

Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IA}=\vec{0}$.

Mà G là trọng tâm của tam giác $ABC\Rightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{IG}$.

Khi đó $9\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IA}=\vec{0}\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{CA}$ $\quad(*)$.

Do đó $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|\Leftrightarrow\left|9\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|\Leftrightarrow 9MI=AB$.

Vì I là điểm cố định thỏa mãn $(*)$ nên tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn tâm I, bán kính $r=\dfrac{AB}{9}=\dfrac{1}{3}$.

thongqna@gmail.com

Câu 264: Cho tam giác ABC có là trọng tâm G. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MG}\right)^2=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}\right)^2$.

A. Đường tròn đường kính AB. **B.** Đường trung trực đoạn thẳng AB.
C. Đường tròn đường kính AC. **D.** Đường trung trực đoạn thẳng AC.

(Họ và tên tác giả: Trần Văn Thông, Tên FB: Trần Thông)

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MA}$.

Gọi điểm I là trung điểm cạnh AC.

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{MI}-3\overrightarrow{MG}=2\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BI}\right)-3\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BG}\right)$

$=-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{BI}-3.\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BI}=-\overrightarrow{MB}$.

Do đó $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MG}\right)^2=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}\right)^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2+\left(-\overrightarrow{MB}\right)^2=AB^2 \Leftrightarrow MA^2+MB^2=AB^2$.

Từ đó suy ra tam giác MAB vuông tại M hay tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB.

Câu 265: Cho đoạn thẳng $AB=\sqrt{5}$. Biết rằng tập hợp điểm M thỏa mãn $MA^2+MB^2=3\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ là một đường tròn có bán kính R. Tìm giá trị của R.

A. $R=\dfrac{5}{2}$. **B.** $R=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $R=\dfrac{3}{2}$. **D.** $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(Họ và tên tác giả: Trần Văn Thông, Tên FB: Trần Thông)

Lời giải

Chọn A

Ta có $MA^2+MB^2=3\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow MA^2+MB^2-2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)^2=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow AB^2=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

Gọi điểm I là trung điểm cạnh AB.

Ta có $AB^2=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow AB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right) \Leftrightarrow AB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)$

$\Leftrightarrow AB^2=MI^2-IB^2 \Leftrightarrow MI^2=AB^2+IB^2 \Leftrightarrow MI^2=\dfrac{5}{4}AB^2$

$\Leftrightarrow MI=\dfrac{\sqrt{5}}{2}AB=\dfrac{\sqrt{5}}{2}.\sqrt{5}=\dfrac{5}{2}$.

Vậy tập hợp điểm M thỏa mãn $MA^2+MB^2=3\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ là đường tròn tâm I có bán kính $R=\dfrac{5}{2}$.

Họ và tên: Võ Khánh Huyền Vân Fb: Vân Võ

Email: huyenvangt050185@gmail.com

Câu 266: Cho tam giác ABC, có bao nhiêu điểm M thỏa $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=5$?

A. 1. **B.** 2.
C. vô số. **D.** Không có điểm nào.

Lời giải.

Chọn C

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Thay vào ta được: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=5\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{MG}\right|=5\Leftrightarrow MG=\frac{5}{3}$, hay tập hợp các điểm M là đường tròn có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng $\frac{5}{3}$.

VẤN ĐỀ 4. TỈ LỆ

Họ và Tên: Trần Quốc Đại

Email: quocdai1987@gmail.com

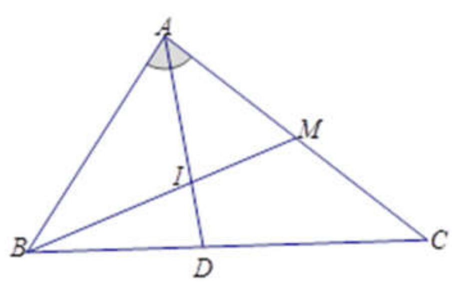
Facebook: https://www.facebook.com/tqd1671987

Câu 267: Cho ΔABC có $AB=3$; $AC=4$. Phân giác trong AD của góc $\widehat{BAC}$ cắt trung tuyến BM tại I. Tính $\frac{AD}{AI}$.

A. $\frac{AD}{AI}=\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{AD}{AI}=\frac{10}{7}$. **C.** $\frac{AD}{AI}=\frac{29}{20}$. **D.** $\frac{AD}{AI}=\frac{7}{5}$.

Lời giải

Chọn B



** Phân tích $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.*

Ta có: $\frac{IB}{IM}=\frac{AB}{AM}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IM}=\vec{0}\Rightarrow 2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AM}=5\overrightarrow{AI}\,(1)$.

$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}\Rightarrow 4\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=7\overrightarrow{AD}(2)$.

Lấy $(2)-2.(1)\Rightarrow$ suy ra: $3\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AM}=7\overrightarrow{AD}-10\overrightarrow{AI}$ $\Rightarrow 7\overrightarrow{AD}-10\overrightarrow{AI}=\vec{0}$ $\Rightarrow 7AD=10AI$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AI}=\dfrac{10}{7}$.

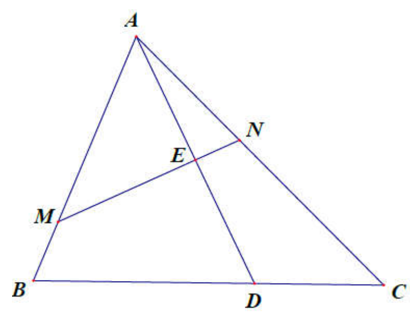
Câu 268: [Đề thi olympic 30/4 TPHCM khối không chuyên lần 2] Cho ΔABC gọi điểm D nằm trên cạnh BC sao cho $BD=2BC$, E là trung điểm của AD. Một đường thẳng bất kì qua E và cắt các cạnh $AB;AC$ lần lượt tại M,N. Tình tỉ số $\dfrac{AB}{AM}+2\dfrac{AC}{AN}$

A. $\dfrac{AB}{AM}+2\dfrac{AC}{AN}=6$. **B.** $\dfrac{AB}{AM}+2\dfrac{AC}{AN}=5$.

C. $\dfrac{AB}{AM}+2\dfrac{AC}{AN}=\dfrac{28}{5}$. **D.** $\dfrac{AB}{AM}+2\dfrac{AC}{AN}=\dfrac{29}{5}$

Lời giải

Chọn A



Do M nằm trên cạnh AB nên ta có $\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AM}$ $(k>1)$

Do N nằm trên cạnh AC nên ta có $\overrightarrow{AC}=l\,\overrightarrow{AN}$ $(l>1)$

Ta có $\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{DC}\Rightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=-2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)\Rightarrow \overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AD}$

Suy ra $k.\overrightarrow{AM}+2l.\overrightarrow{AN}=6.\overrightarrow{AE}\Rightarrow k\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ME}\right)+2l\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EN}\right)=6\overrightarrow{AE}$

Suy ra $(k+2l-6)\overrightarrow{AE}=-k\overrightarrow{EM}-2l\overrightarrow{EN}$

Do hai vecto $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{MN}$ không cùng phương nên suy ra

$k+2l-6=0\Leftrightarrow k+2l=6\Leftrightarrow \dfrac{AB}{AM}+2\dfrac{AC}{AN}=6$

Họ và tên tác giả: Đỗ Văn Đức Tên FB: Đỗ Văn Đức

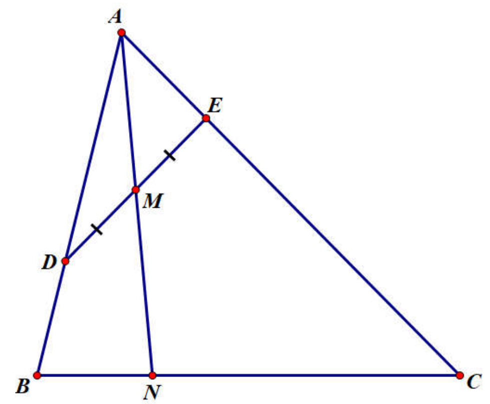
Email: hoctoancunganhduc@gmail.com

Câu 269: Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = 2DB$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $CE = 3EA$. Gọi M là trung điểm của DE. Tia AM cắt BC tại N. Tỉ số $\dfrac{BN}{CN}$ có giá trị là:

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử N chia BC theo tỉ số x. Ta có: $\overrightarrow{AN} = \dfrac{\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AC}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}\overrightarrow{AB} + \dfrac{x}{x-1}\overrightarrow{AC}$ (1).

Lại có: $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AC}$ (2).

Vì $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$ là 2 vectơ cùng phương nên $\dfrac{3}{1-x} = \dfrac{8x}{x-1} \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{8}$.

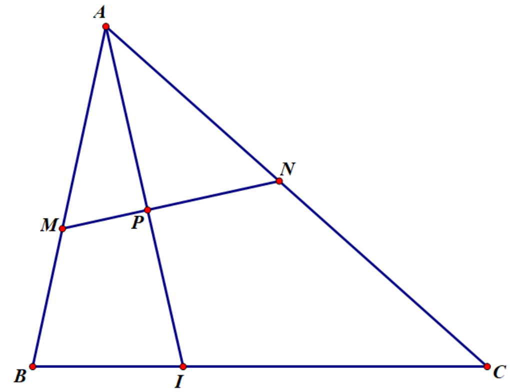
Do đó $\overrightarrow{NB} = -\dfrac{3}{8}\overrightarrow{NC} \Rightarrow \dfrac{NB}{NC} = \dfrac{3}{8}$.

Câu 270: *(Bài toán tổng quát của bài toán 1)*. Cho tam giác ABC. Gọi I là điểm chia BC theo tỉ số k. Trên các tia AB và AC lấy các điểm M, N. AI cắt MN tại P. Đặt $\dfrac{AB}{AM} = b$, $\dfrac{AC}{AN} = c$. Tỷ số $\dfrac{AI}{AP}$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{b+kc}{1+k}$. **B.** $\dfrac{b-kc}{1-k}$. **C.** $\dfrac{c+kb}{1+k}$. **D.** $\dfrac{c-kb}{1-k}$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử P chia MN theo tỉ số x. Ta có $\overrightarrow{AP}=\dfrac{\overrightarrow{AM}-x\overrightarrow{AN}}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}.\dfrac{\overrightarrow{AB}}{b}+\dfrac{x}{x-1}.\dfrac{\overrightarrow{AC}}{c}$.

Lại có: $\overrightarrow{AI}=\dfrac{\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC}}{1-k}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{1-k}+\dfrac{k}{k-1}\overrightarrow{AC}$ (1).

Vì $\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{AI}$ đồng phương nên $\dfrac{1-k}{b(1-x)}=\dfrac{x(k-1)}{kc(x-1)}\Leftrightarrow\dfrac{1}{b}=\dfrac{x}{kc}\Leftrightarrow x=k\dfrac{c}{b}$.

Do đó $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{b-kc}\overrightarrow{AB}-\dfrac{k}{b-kc}\overrightarrow{AC}$ (2).

Từ (1) và (2), ta có $\dfrac{AI}{AP}=\dfrac{b-kc}{1-k}$.

Câu 271: *(Hệ quả hay dùng của bài toán 2)*. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC. Trên các tia AB và AC lấy các điểm M,N. AI cắt MN tại P. Đặt $\dfrac{AB}{AM}=b$, $\dfrac{AC}{AN}=c$. Tỷ số $\dfrac{AI}{AP}$ có giá trị bằng

A. $\sqrt{bc}$. **B.** $\dfrac{b+c}{2}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2}}$. **D.** $\dfrac{2bc}{b+c}$.

Lời giải

Chọn B

I là trung điểm của BC nên I chia BC theo tỷ số $k=-1$. Áp dụng kết quả ở bài 2, ta có:

$\dfrac{AI}{AP}=\dfrac{b-(-1)c}{1-(-1)}=\dfrac{b+c}{2}$.

Tên: Nam Phương Tên FB: Nam Phương

Email:nguyentrietphuong@gmail.com

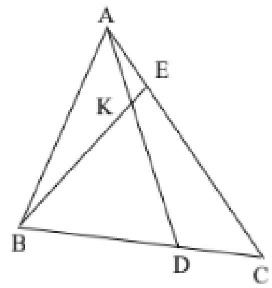
Câu 272: Cho tam giác ABC. Gọi D,E lần lượt là các các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Điểm K trên đoạn thẳng AD sao cho ba điểm B,K,E thẳng hàng. Tìm tỉ số $\dfrac{AD}{AK}$.

A. $\dfrac{AD}{AK}=\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{AD}{AK}=3$. **C.** $\dfrac{AD}{AK}=\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{AD}{AK}=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ nên $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BA}$

Giả sử $\begin{cases}\overrightarrow{AK}=x\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{BK}=x\overrightarrow{BD}+(1-x)\overrightarrow{BA}\\ \overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{BK}=\dfrac{2x}{3}\overrightarrow{BC}+(1-x)\overrightarrow{BA}$

Do B,K,E thẳng hàng ta có: $m\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BE}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{m}{4}-\dfrac{2x}{3}=0\\ 1-x-\dfrac{3m}{4}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{8}{9}\\ x=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

Vậy $\dfrac{AD}{AK}=3$

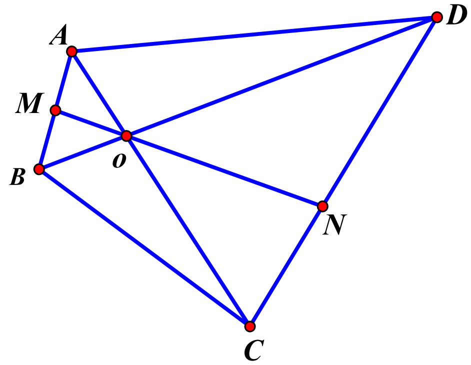
Email: haivanxinh99@gmail.com **Face Hải Vân**

Câu 273: Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O thỏa mãn $\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD}=-4\overrightarrow{OB}$. Qua trung điểm M của AB dựng đường thẳng MO cắt CD tại N. Tính tỉ số $\dfrac{CN}{ND}$.

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OD}=-4\overrightarrow{OB}$

Đặt $\dfrac{CN}{ND}=k,\ k>0$, ta có $\overrightarrow{CN}=k\overrightarrow{ND}\Rightarrow\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{ON}=k\left(\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OD}\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{ON}=\dfrac{-1}{1+k}\overrightarrow{CO}-\dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{OD}\Rightarrow\overrightarrow{ON}=-\dfrac{3}{1+k}\overrightarrow{OA}-\dfrac{4k}{k+1}\overrightarrow{OB}$

Vì $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}$ cùng phương nên có số thực k sao cho $\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}\Rightarrow\overrightarrow{ON}=\dfrac{k}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

Suy ra $-\dfrac{6}{k(1+k)}=-\dfrac{8k}{k(k+1)}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=\dfrac{3}{4}\\k=-1\end{array}\right.\Rightarrow k=\dfrac{3}{4}$.

(Email): hatoanlgm@gmail.com

Câu 274: Cho tam giác ABC và điểm I thỏa mãn $23\overrightarrow{IA}+8\overrightarrow{IB}+2018\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Đường thẳng AI cắt đường thẳng BC tại J. Giá trị của tỉ số $\dfrac{JB}{JC}$ là:

A. $\dfrac{23}{8}$ **B.** $\dfrac{2018}{23}$ **C.** $\dfrac{2018}{8}$ **D.** $\dfrac{8}{23}$

Lời giải

Chọn C

(Họ và tên tác giả: Ngô Ngọc Hà, Tên FB: Ngô Ngọc Hà)

Giả sử $\overrightarrow{JB}=k\overrightarrow{JC}\,(k\neq1)\ \Rightarrow\overrightarrow{AJ}=\dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{AB}-\dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{AC}$.

Từ giả thiết suy ra:

$-23\overrightarrow{AI}+8\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}\right)+2018\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AI}\right)=\vec{0}\ \Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\dfrac{8}{2049}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2018}{2049}\overrightarrow{AC}$.

Do A,I,J thẳng hàng nên $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}$ cùng phương

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{1-k}}{\frac{8}{2049}} = \frac{-\frac{k}{1-k}}{\frac{2018}{2049}} \Leftrightarrow k = -\frac{2018}{8}.$$

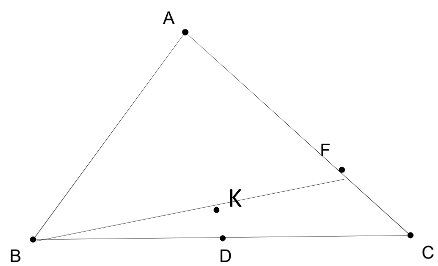
Gmail: Binh.thpthauloc2@gmail.com

Câu 275: Cho tam giác ABC. Điểm K chia trung tuyến AD theo tỷ số $3:1$ kể từ đỉnh. Đường thẳng BK chia diện tích tam giác ABC theo tỷ số $k = \frac{S_{ABF}}{S_{BCF}}$, giá trị của k bằng?

A. $k = \frac{5}{8}$ **B.** $k = \frac{3}{8}$ **C.** $k = \frac{3}{5}$ **D.** $k = \frac{3}{2}$

Lời giải

Đáp án D



Do D là trung điểm của BC thiết: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (1)

Gọi F là giao điểm của BK và AC.

Mà $A;F;C$ thẳng hàng: $\overrightarrow{AF} = m\overrightarrow{AC}$ (2) $B;K;F$ thẳng hàng:
$\overrightarrow{AK} = n\overrightarrow{AF} + (1-n)\overrightarrow{AB}$ (3)

$A;K;D$ thẳng hàng và $\frac{KD}{KA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ (4)

Từ $(2);(3)$ suy ra: $\overrightarrow{AK} = n.m.\overrightarrow{AC} + (1-n)\overrightarrow{AB}$ (5)

Từ $(1);(4)$ suy ra: $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$ (6)

Do hai véctơ $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên từ $(5);(6)$ ta có: $\begin{cases} m.n = \frac{3}{8} \\ 1-n = \frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = \frac{5}{8} \\ m = \frac{3}{5} \end{cases}$

Do đó: $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow \frac{FA}{FC} = \frac{3}{2}$

Vậy $k = \frac{S_{ABF}}{S_{BCF}} = \frac{FA}{FC} = \frac{3}{2}$

(Họ tên: Phạm Văn Bình, tên FB: Phạm văn Bình)

Họ và tên: Tăng Lâm Tường Vinh

Email: tanglamtuongvinh@gmail.com

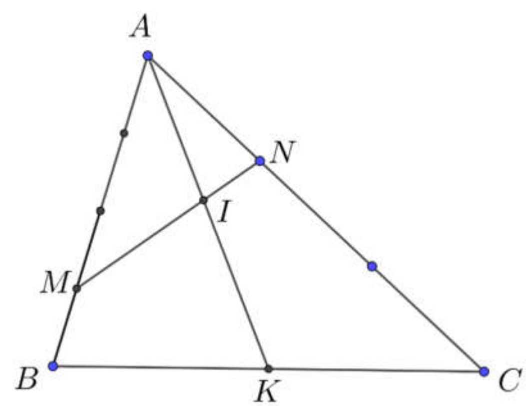
Facebook: tanglamtuong.vinh

Câu 276: Cho tam giác ABC với K là trung điểm BC. Lấy các điểm M,N thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Gọi I là giao điểm của MN và AK. Đặt $\overrightarrow{MI}=x\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AI}=y\overrightarrow{AK}$. Hỏi $\frac{x}{y}$

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MI}=x\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AM}=x\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{x}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{3x}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}=\frac{x}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{3-3x}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AI}=y\overrightarrow{AK}=y\left(\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{2}\right)=\frac{y}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{y}{2}\overrightarrow{AC}$

Mà $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ là 2 vector không cùng phương nên ta có $\begin{cases}\frac{3-3x}{4}=\frac{y}{2}\\ \frac{x}{3}=\frac{y}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{9}{13}\\ y=\frac{6}{13}\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$

Gmail: **B**inh.thpthauloc2@gmail.com

Câu 277: Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh BC lấy E, F sao cho $\frac{AD}{DB}=\frac{3}{2}$; $\frac{BE}{EC}=\frac{1}{3}$; $\frac{BF}{FC}=\frac{4}{1}$. Đường thẳng AE chia đoạn DF theo tỷ số $\frac{KD}{KF}=k$. Giá trị của k bằng?

A. $k=\frac{3}{11}$ **B.** $k=\frac{11}{3}$ **C.** $k=\frac{3}{14}$ **D.** $k=\frac{11}{14}$

Lời giải

Đáp án A

Theo giả thiết: $\frac{AD}{DB}=\frac{3}{2}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}\quad(1)$ $\frac{BE}{EC}=\frac{1}{3}\Rightarrow\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\quad(2)$

$\frac{BF}{FC}=\frac{4}{1}\Rightarrow\overrightarrow{AF}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}\quad(3)$

Mà $A;K;E$ thẳng hàng: $\overrightarrow{AK}=m\overrightarrow{AE}\quad(4)$ $D;K;F$ thẳng hàng:

$\overrightarrow{AK}=n\overrightarrow{AF}+(1-n)\overrightarrow{AD}\quad(5)$

Từ $(2);(4)$ suy ra: $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{4}m\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}m\overrightarrow{AC}\quad(6)$

Từ $(1);(3);(5)$ suy ra: $\overrightarrow{AK}=n\left[\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}\right]+(1-n)\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AK}=\left(\frac{3}{5}-\frac{2n}{5}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{4n}{5}\overrightarrow{AC}\quad(7)$

Do hai véctơ $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên từ $(6);(7)$ ta có: $\begin{cases}\frac{3m}{4}=\frac{3}{5}-\frac{2n}{5}\\ \frac{m}{4}=\frac{4n}{5}\end{cases}$

$\Rightarrow\frac{1}{5}-\frac{2n}{15}=\frac{4n}{5}\Leftrightarrow n=\frac{3}{14}$

Vậy $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{14}\overrightarrow{AB}+\frac{11}{14}\overrightarrow{AC}\quad\Rightarrow\frac{KD}{KF}=k=\frac{3}{11}$

(Họ tên: Phạm Văn Bình, tên FB: Phạm văn Bình)

Họ và tên: Hoàng Ngọc Lâm

Email: hoangngoclammath1112@gmail.com

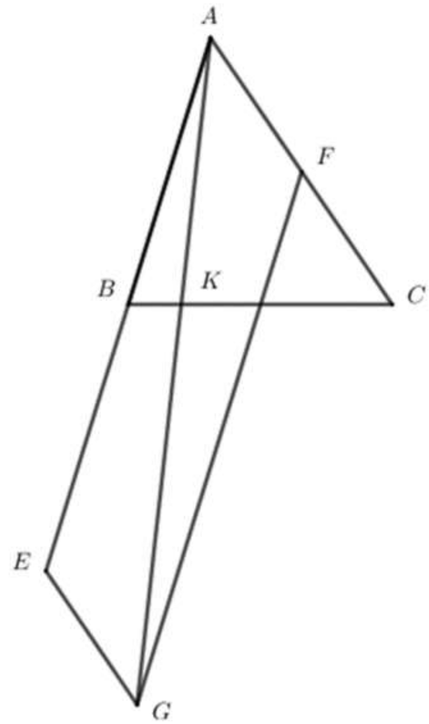
Facebook: Hoàng Ngọc Lâm

Câu 278: Cho tam giác ABC. Kéo dài AB một đoạn $BE=AB$, gọi F là trung điểm của AC. Vẽ hình bình hành $EAFG$. Đường thẳng AG cắt BC tại K. Tính tỉ số $\frac{KB}{KC}$?

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Để xác định giao điểm K của AG và BC, ta tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Ta có: $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

AG cắt BC tại điểm K mà $2\overrightarrow{KB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

Suy ra $\dfrac{KB}{KC}=\dfrac{1}{4}$.

Câu 279: Cho tam giác ABC có $AB=3$, $AC=4$. Phân giác trong AD của góc BAC cắt trung tuyến BM tại I. Tính tỉ số $\dfrac{AD}{AI}$.

A. $\dfrac{13}{8}$. **B.** $\dfrac{11}{6}$. **C.** $\dfrac{10}{7}$. **D.** $\dfrac{10}{5}$.

(Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Phương Thảo, Tên FB: Nguyễn Thị Phương Thảo)

Lời giải

Chọn C

Theo tính chất đường phân giác ta có $\dfrac{IB}{IM}=\dfrac{AB}{AM}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow 2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IM}=\vec{0}$

Và $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow 4\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

Vậy ta có $\begin{cases} 2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IM}=\vec{0} \\ 4\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DC}=\vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AM}=5\overrightarrow{AI} \\ 4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=7\overrightarrow{AD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AM}=10\overrightarrow{AI} \\ 4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=7\overrightarrow{AD} \end{cases}$

Suy ra $3\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AM}=7\overrightarrow{AD}-10\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{AD}-10\overrightarrow{AI}=\vec{0} \Rightarrow \dfrac{AD}{AI}=\dfrac{10}{7}$.

Hoặc ta có thể giải như sau:

Ta có $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4} \Rightarrow BD=\dfrac{3}{4}DC=\dfrac{3}{4}\left(BC-BD\right) \Leftrightarrow \dfrac{7}{4}\text{BD}=\dfrac{3}{4}BC \Rightarrow \overrightarrow{\text{BD}}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{BC}$

Ta lại có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}$.

Theo tính chất phân giác, ta lại có $\dfrac{BI}{IM}=\dfrac{AB}{AM}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow \overrightarrow{BI}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{IM}$

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}\right)=3\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AM}\right) \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{10}\overrightarrow{AC}=\dfrac{7}{10}\left(\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{7}{10}\overrightarrow{AD}$

Vậy $\dfrac{AD}{AI}=\dfrac{10}{7}$.

Họ và tên tác giả: Nguyễn Văn Toản Tên FB: Dấu Vết Hát

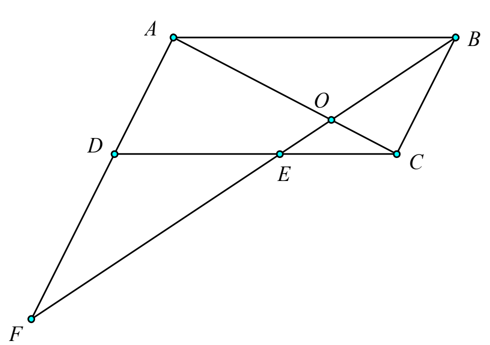
Email: nguyenvantoannbk@gmail.com *Nhờ thầy cô góp ý!*

Câu 280: Cho hình bình hành $ABCD$, O là điểm bất kì trên đoạn AC, đường thẳng BO cắt cạnh CD tại E và đường thẳng AD tại F sao cho $EF=2BO$. Tỷ số $\dfrac{AF}{AD}$ bằng

A. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **B.** 2. **C.** $1+\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt: $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AD}\ (x>1)$ và $\overrightarrow{AO}=y\overrightarrow{AC}\ (0<y<1)$.

Theo định lý talet: $\frac{DE}{CE}=\frac{DF}{BC}\longrightarrow\frac{DE}{DC}=\frac{DF}{AF}=\frac{x-1}{x}\longrightarrow\overrightarrow{DE}=\frac{x-1}{x}\overrightarrow{AB}$.

Ta có: $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{AC}=(y-1)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DE}=(x-1)\overrightarrow{AD}-\frac{x-1}{x}\overrightarrow{AB}$.

Theo đề bài: $\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{BO}\longrightarrow\begin{cases}x-1=2y\\ \frac{1-x}{x}=2(y-1)\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$.

Họ và Tên : Nguyễn Văn Mạnh FB : Nguyễn Văn Mạnh

Email : manhluonghl4@gmail.com

Câu 281: Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$; gọi A_2,B_2,C_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác $BCA_1,\ CAB_1,\ ABC_1$. Gọi G,G_1,G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC,\ A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$. Tính tỉ số $\frac{GG_1}{GG_2}$ ta được kết quả :

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 3 **D.** 2

Lời giải

Chọn C

Vì $G,\ G_1$ là trọng tâm tam giác $ABC,\ A_1B_1C_1$ suy ra $3\overrightarrow{GG_1}=\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG_1}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}$

Tương tự $G,\ G_2$ là trọng tâm tam giác $ABC,\ A_2B_2C_2$ suy ra $3\overrightarrow{GG_2}=\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GB_2}+\overrightarrow{GC_2}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG_2}=\overrightarrow{AA_2}+\overrightarrow{BB_2}+\overrightarrow{CC_2}$

Mặt khác $\overrightarrow{AA_2}+\overrightarrow{BB_2}+\overrightarrow{CC_2}=\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}\right)+\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}\right)$

Mà A_2,B_2,C_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác $BCA_1,\ CAB_1,\ ABC_1$

Suy ra $3\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}\right)=\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{B_1C}+\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{C_1A}+\overrightarrow{C_1B}$

$=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CB}$
$=-2\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}\right)$

Do đó $\overrightarrow{AA_2}+\overrightarrow{BB_2}+\overrightarrow{CC_2}=\frac{-2}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}\right)+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}$

$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}\right)$. Vậy $\overrightarrow{GG_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{GG_1}\Rightarrow\frac{GG_1}{GG_2}=3$.

VẤN ĐỀ 5. MIN,MAX

Email: phunghang10ph5s@gmail.com

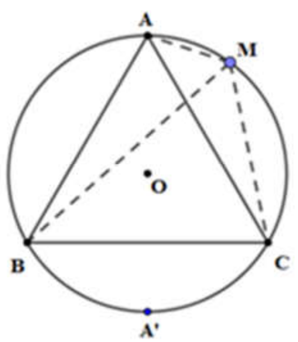
Câu 282: Cho ΔABC đều cạnh bằng 3, M là điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Đặt $P=MA^2-MB^2-MC^2$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của P. Khi đó, giá trị biểu thức $T=4a+b$ là:

A. 3. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 12.

Lời giải

Họ và tên tác giả: Phùng Hằng Tên FB: Phùng Hằng

Chọn B.



Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta có:

$P=MA^2-MB^2-MC^2$

$=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2-\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2$

$=-MO^2+2.\overrightarrow{MO}.\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)+OA^2-OB^2-OC^2$

$=-2R^2+2.\overrightarrow{MO}.\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA'}\right)=-2R^2+2\overrightarrow{MO}.2\overrightarrow{OA}$

$=-2R^2-4.\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}=-2R^2-4R^2.\cos\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}\right)$

$P_{\min}=-6R^2$ khi và chỉ khi $\cos\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}\right)=1\Leftrightarrow M$ trùng A

$P_{max}=2R^2$ khi và chỉ khi $\cos\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}\right)=-1\Leftrightarrow M$ trùng A' là điểm đối xứng của A qua O

$\Rightarrow T=4a+b=4.2R^2+\left(-6R^2\right)=2R^2$

ΔABC đều cạnh bằng 3 $\Rightarrow R=\sqrt{3}\Rightarrow T=2R^2=6$.

Họ và tên tác giả: Trần Văn Ngờ Tên FB: Tran Van Ngo Tth

Email: vanngodhqn@gmail.com

Câu 283: Cho ΔABC và 3 số dương x, y, z thay đổi có tổng bình phương: $x^2+y^2+z^2=k^2$, $k\in R$. Giá trị lớn nhất của $P=xy\cos C+yz\cos A+zx\cos B$ là:

A. $\frac{k}{2}$. **B.** $\frac{k^2}{2}$. **C.** $\frac{k}{3}$. **D.** $\frac{k^2}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt 3 vectơ $\overrightarrow{BX}$, $\overrightarrow{CY}$, $\overrightarrow{AZ}$ tương ứng là $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ như hình vẽ.

Ta có: $\left(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2\vec{x}\vec{y}+2\vec{y}\vec{z}+2\vec{x}\vec{z}\ge 0$

$\Leftrightarrow k^2+2xy\cos\left(180^0-C\right)+2yz\cos\left(180^0-A\right)+2xz\cos\left(180^0-B\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow k^2-2xy\cos C-2yz\cos A-2zx\cos B\ge 0\Leftrightarrow xy\cos C+yz\cos A+zx\cos B\le\frac{k^2}{2}$

Vậy Max $P=\frac{k^2}{2}$

Câu 284: Cho hai điểm $A,B\in(I;6)$ và $M\in(I;3)$, thỏa mãn : $\widehat{AIB}=60^\circ$. Khi A,B,M thay đổi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$?

A. 9. **B.** $3+2\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{13}$. **D.** $6-\sqrt{3}$.

(Họ và tên tác giả : Đặng Mơ- Tư Duy Mở)

Lời giải

Bổ đề : Cho hai véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác véc tơ $\vec{0}$, ta luôn có : $|\vec{u}-\vec{v}|=\left|\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}.\vec{u}-\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}.\vec{v}\right|$

Chứng minh : Bình phương vô hướng vế phải ta được :

$$\left(\left|\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}.\vec{u}-\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}.\vec{v}\right|\right)^2=\left(\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}.\vec{u}\right)^2+\left(\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}.\vec{v}\right)^2-2.\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}.\vec{u}.\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}.\vec{v}=\left(\vec{v}\right)^2+\left(\vec{u}\right)^2-2.\vec{u}\,\vec{v}=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2$$

Từ đó suy ra : $\left|\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}.\vec{u}-\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}.\vec{v}\right|=|\vec{u}-\vec{v}|$ (đpcm).

Áp dụng vào bài toán cân bằng hệ số : Chúng ta có thể ghi nhớ công thức để áp dụng nhanh vào các bài toán cân bằng hệ số đối với đường tròn và mặt cầu như sau :

Ta có : $P=MA+2MB=|\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}|+2|\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}|$ và $IA=IB=6,\ IM=3$

Trong đó : $|\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}|=\left|\frac{IA}{IM}.\overrightarrow{IM}-\frac{IM}{IA}.\overrightarrow{IA}\right|=\left|2\overrightarrow{IM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{IA}\right|=2\left|\overrightarrow{IM}-\frac{1}{4}\overrightarrow{IA}\right|$

Suy ra : $P=2\left|\overrightarrow{IM}-\frac{1}{4}\overrightarrow{IA}\right|+2|\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}|\ge 2\left|\overrightarrow{IM}-\frac{1}{4}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right|=\left|2\overrightarrow{IB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{IA}\right|$

Có :

$\left(|2\overrightarrow{IB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{IA}|\right)^2=4IB^2+\frac{1}{4}IA^2-2IA.IB.\cos 60^\circ=4.6^2+\frac{1}{4}.6^2-2.6.6.\frac{1}{2}=117\to|2\overrightarrow{IB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{IA}|=3\sqrt{13}$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $P_{\min}=3\sqrt{13}\to$ **chọn đáp án C.**

Câu 285: Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm tùy ý và các điểm I, J, K cố định sao cho đẳng thức thỏa mãn với mọi điểm M: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=k\overrightarrow{MK}$. Giá trị của k là

A. $k=3$ **B.** $k=4$ **C.** $k=5$ **D.** $k=6$

Lời giải

Chọn D

Vì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=k\overrightarrow{MK}$ thỏa mãn với mọi M.

Do đó, đẳng thức cũng đúng với $M\equiv K$

Tức là: $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+3\overrightarrow{KD}=k\overrightarrow{KK}=\vec{0}$

Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC\Rightarrow\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=3\overrightarrow{KG}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{KG}+3\overrightarrow{KD}=\vec{0}\Rightarrow K$ là trung điểm GD.

Mặt khác:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA})+(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB})+(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KC})+3(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KD})$

$=(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+3\overrightarrow{KD})+6\overrightarrow{MK}$

$=6\overrightarrow{MK}$

$\Rightarrow k=6$

Câu 286: Cho tam giác ABC vuông tại *A*. Gọi α là góc giữa hai đường trung tuyến BD và CK. Giá trị nhỏ nhất của $\cos\alpha$ bằng

A. $\frac{4}{5}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CK}|}{BD.CK}=\frac{\left|\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}).\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\right|}{BD.CK}$

$=\frac{|\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CB}|}{4.BD.CK}=\frac{|\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA})-\overrightarrow{BC}^2)|}{4.BD.CK}$

$=\dfrac{\left|-2\overrightarrow{BC}^2\right|}{4.BD.CK}=\dfrac{BC^2}{2.BD.CK}$ (Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}=0$)

Mặt khác,

$$2.BD.CK\overset{Cauchy}{\leq}BD^2+CK^2=\left(\frac{AB^2+BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}\right)+\left(\frac{AC^2+BC^2}{2}-\frac{AB^2}{4}\right)$$

$$=BC^2+\frac{AB^2+AC^2}{4}=BC^2+\frac{BC^2}{4}=\frac{5BC^2}{4}$$

Suy ra, $\cos\alpha\geq\dfrac{BC^2}{\dfrac{5BC^2}{4}}=\dfrac{4}{5}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $BD=CK$ hay ΔABC vuông cân tại A

Câu 287: Cho hai điểm cố định G và G' là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=AA'+BB'+CC'$ bằng

A. GG' **B.** $3GG'$ **C.** $2GG'$ **D.** $\dfrac{1}{3}GG'$

Lời giải

Chọn B

Do G và G' là trọng tâm $\Delta ABC,\Delta A'B'C'$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=\vec{0}$.

Ta có:

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'})+(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'})+(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'})$$

$$=3\overrightarrow{GG'}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'})$$

$$=3\overrightarrow{GG'}$$

Mặt khác, $P=AA'+BB'+CC'=\left|\overrightarrow{AA'}\right|+\left|\overrightarrow{BB'}\right|+\left|\overrightarrow{CC'}\right|\geq\left|\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right|$

$$=3\left|\overrightarrow{GG'}\right|=3GG'$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{AA'},\ \overrightarrow{BB'},\ \overrightarrow{CC'}$ cùng hướng

Họ và tên: Nguyễn Đức Hoạch – email: nguyenhoach95@gmail.com

Mail: nguyennga82nvc@gmail.com

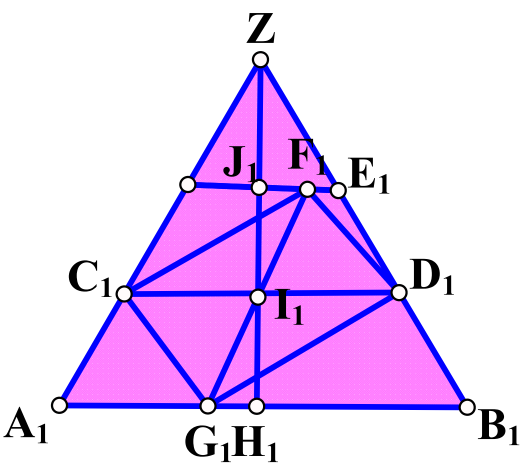
FB: Nguyễn Nga Nvc

Câu 288: Cho hình thang $A_1B_1C_1D_1$ có $A_1B_1//C_1D_1, A_1B_1=3a, C_1D_1=2a, \widehat{D_1A_1B_1}=\widehat{C_1B_1A_1}=60^0$. Với mỗi điểm G_1 di động trên cạnh A_1B_1 ta xác định điểm F_1 sao cho $\overrightarrow{G_1F_1}=\overrightarrow{G_1C_1}+\overrightarrow{G_1D_1}$. Tìm độ dài nhỏ nhất của $\overrightarrow{G_1F_1}$.

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $Z=A_1B_1\cap C_1D_1$, từ giả thiết suy ra tam giác ZA_1B_1 đều cạnh $3a$. Gọi H_1,I_1 lần lượt là trung điểm của A_1B_1,C_1D_1, suy ra H_1,I_1 cố định và $H_1I_1=\frac{1}{3}ZH_1=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

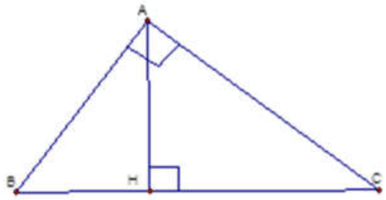
Từ giả thiết ta có tứ giác $G_1D_1F_1C_1$ là hình bình hành, nên $G_1F_1=2G_1I_1\ge 2H_1I_1=a\sqrt{3}$.

Vậy độ dài nhỏ nhất của $\overrightarrow{G_1F_1}$ bằng $a\sqrt{3}$.

Nguyễn Văn Công- Trường THPT Kinh Môn II

Gmail: nguyencongkm2@gmail.com

Câu 289: Cho tam giác ABC vuông ở A; BC = 2; CA = b; AB = c và điểm M di động
Biểu thức F= $-8MA^2+b^2MB^2+c^2MC^2$ đạt giá trị lớn nhất bằng



A. 4 **B.** 12 **C.** 16 **D.** 24

Lời giải

Xét điểm I thỏa mãn: $-8\overrightarrow{IA}+b^2\overrightarrow{IB}+c^2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ (1)

(Dựng đường cao AH, dựng I sao cho A là trung điểm IH; I thỏa (1))

Bình phương hai vế của (1) chú ý rằng

$$2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=IA^2+IB^2-AB^2;$$
$$2\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}=IB^2+IC^2-BC^2$$
$$2\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}=IC^2+IA^2-AC^2$$

rồi biến đổi ta được kết quả $-8.IA^2+b^2.IB^2+c^2.IC^2=3b^2c^2$.

$$F=-8MA^2+b^2MB^2+c^2MC^2=-8\overrightarrow{MA}^2+b^2\overrightarrow{MB}^2+c^2\overrightarrow{MC}^2$$
$$=-8(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+b^2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2+c^2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC})^2$$
$$=-4MI^2-8.IA^2+b^2IB^2+c^2IC^2=-4MI^2+3b^2c^2$$
$$\le 3b^2c^2\le 3\left(\frac{b^2+c^2}{2}\right)^2=12$$

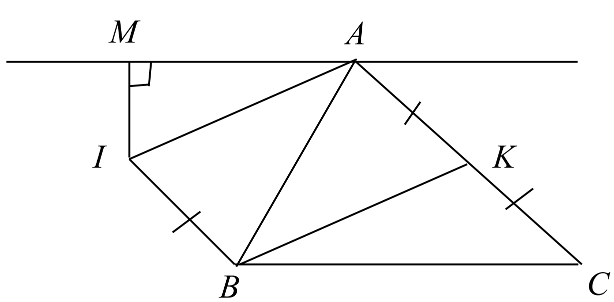
Họ và tên tác giả: Vũ Viên Tên FB: Vũ Viên

Email: tieplen@gmail.com

Câu 290: Cho ABC đều có cạnh bằng $2a$. Gọi d là đường thẳng qua A và song song BC, điểm M di động trên d. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

A. $2a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Chọn B.

Xét điểm I sao cho: $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \dfrac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2} = \overrightarrow{BK}$ (với K là trung điểm AC).

$\Rightarrow I$ là điểm thứ 4 của hình bình hành $AIBK$.

Ta có: $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right| = \left|\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)\right|$

$\left|2\overrightarrow{MI} + \left(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}\right)\right| = \left|2\overrightarrow{MI}\right| = 2MI$.

$M \in d \Rightarrow$ Min đạt được khi $LM \perp d$. Khi đó:

$\widehat{MAI} = \widehat{MAB} - \widehat{IAB} = 60^\circ - \widehat{ABK} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

$2IM = 2IA \cdot \sin 30^\circ = 2.BK \cdot \sin 30^\circ = 2\sin 30^\circ \cdot \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Họ và tên tác giả: Phạm Khắc Thành

Email: phamkhacthanhkt@gmail.com

Câu 291: Trong mặt phẳng cho tam giác ABC và một điểm M bất kỳ. Đặt $a = BC,\ b = CA,\ c = AB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \dfrac{MA}{a} + \dfrac{MB}{b} + \dfrac{MC}{c}$.

A. $3\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Theo công thức độ dài đường trung tuyến ta có:

$$4m_a^2 = 2\left(b^2 + c^2\right) - a^2 \Rightarrow 2\left(b^2 + c^2 + a^2\right) = 4m_a^2 + 3a^2 \geq 4\sqrt{3}am_a \Rightarrow am_a \leq \frac{b^2 + c^2 + a^2}{2\sqrt{3}}$$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC khi đó:

$$\frac{MA}{a} = \frac{MA.GA}{a.GA} \geq \frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GA}}{\frac{2}{3}.\frac{b^2 + c^2 + a^2}{2\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{b^2 + c^2 + a^2}\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right).\overrightarrow{GA} = \frac{3\sqrt{3}}{b^2 + c^2 + a^2}\left(\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + GA^2\right)$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{b^2 + c^2 + a^2}\left[\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2\right]$$

Lại có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \dfrac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

Do đó $\dfrac{MA}{a} + \dfrac{MB}{b} + \dfrac{MC}{c} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{b^2 + c^2 + a^2}\left[0 + \dfrac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\right] = \sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều đồng thời M trùng với trọng tâm của tam giác ABC.

Mail: thuytrangmn@gmail.com

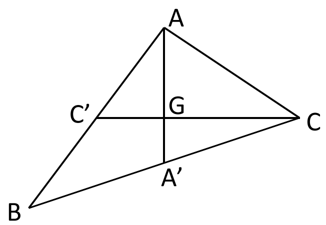
Chủ đề: Vectơ.

Câu 292: Cho tam giác ABC có trung tuyến $AA' \perp CC'$ $\left(A' \in BC, C' \in AB\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\cos B$.

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$

Lời giải:

Chọn. **A.**



Đặt $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$ ta có:

$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}$ và $\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}$

Do $AA' \perp CC'$ nên $\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right) = 0$

$\Rightarrow \quad \vec{a}\vec{c} = \frac{2}{5}\left(\vec{a}^2 + \vec{c}^2\right) = \frac{2}{5}\left(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2\right) \geq \frac{4}{5}\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{c}\right|$

+ Nếu $\vec{a}\vec{c} = 0$ thì $\cos B = 1$

+ Nếu $\vec{a}\vec{c} \neq 0$ thì $\cos B = \frac{\vec{a}.\vec{c}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{c}\right|} \geq \frac{4}{5}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{c}\right|$

Vậy giá trị nhỏ nhất của cosB là $\frac{4}{5}$, đạt được khi tam giác ABC cân tại B.

Họ và tên tác giả: Vũ Thị Hồng Lê Tên FB: Hồng Lê

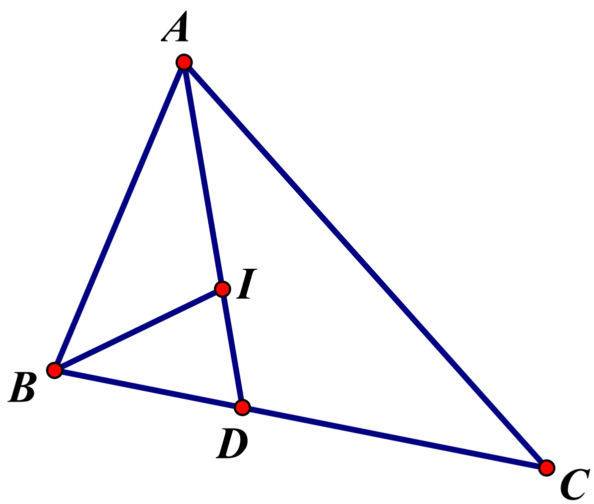
Email: hongle.ad@gmail.com

Câu 293: Cho tam giác ABC có các cạnh AB = c, AC = b, BC = a. Tìm điểm M để vecto $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất

A. M trùng với trọng tâm G của tam giác ABC.
B. M trùng với tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC.
C. M trùng với trực tâm H của tam giác ABC.
D. M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC.

Lời giải

Chọn B.



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC

Theo tính chất phân giác trong: $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}\Leftrightarrow DB=\frac{c}{b}.DC$, mà hai vecto $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DB}$ ngược hướng nên ta có $\overrightarrow{DB}=-\frac{c}{b}\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow b\overrightarrow{DB}+c\overrightarrow{DC}=\vec{0}\Leftrightarrow b\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{ID}\right)+c\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{ID}\right)=\vec{0}$

hay $b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}-(b+c)\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ (*)

Mặt khác $\frac{DB}{DC}=\frac{c}{b}\Leftrightarrow\frac{DB}{BC}=\frac{c}{b+c}\Leftrightarrow DB=\frac{ac}{b+c}$

$\frac{IA}{ID}=\frac{BA}{BD}=\frac{c(b+c)}{ac}=\frac{b+c}{a}\Leftrightarrow aIA=(b+c)ID$

Mà $\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID}$ ngược hướng nên $a\overrightarrow{IA}=-(b+c)\overrightarrow{ID}$

Thay vào (*) ta có $b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}+a\overrightarrow{IA}=\vec{0}$

Vậy độ dài của $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}$ nhỏ nhất bằng 0 khi M trùng I

Họ và tên: Ngô Gia Khánh

Địa chỉ mail: ngkhanh4283@gmail.com

Câu 294: Cho tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng a, M là điểm di động trên đường thẳng AC. Khi đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+3\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ là:

A. $MinT=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $MinT=2a\sqrt{3}$. **C.** $MinT=a\sqrt{3}$. **D.** $MinT=\frac{5a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

+, Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$.

+, Dựng hình bình hành $ABCD$, ta được:

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$

+, Khi đó $T = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| + 3\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right| = 3\left(MG + MD\right) \geq 3GD$

(Vì G,D nằm khác phía với đường thẳng AC)

Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của GD và đường thẳng AC hay M là trung điểm của AC

+ Nhận xét $GD = \frac{4}{3}BM = \frac{4}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $MinT = 2a\sqrt{3}$..

Email: vntip3@gmail.com

Câu 295: Cho ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có các trọng tâm G và G' cố định và $GG' = a$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của $T = \text{AA}' + BB' + CC'$ là:

A. $T = a$. **B.** $T = 2a$. **C.** $T = 3a$. **D.** $T = 4a$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có:

$T = \overrightarrow{\text{AA}'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$

$= \overrightarrow{\text{AG}} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{\text{G'A'}} + \overrightarrow{\text{BG}} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{\text{G'B'}} + \overrightarrow{\text{CG}} + +\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{\text{G'C'}}$

$= 3\overrightarrow{GG'}$

Vậy

$T = \text{AA}' + BB' + CC'$

$= \left|\overrightarrow{\text{AA}'}\right| + \left|\overrightarrow{BB'}\right| + \left|\overrightarrow{CC'}\right| \geq \left|\overrightarrow{\text{AA}'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}\right| = 3\left|\overrightarrow{GG'}\right| = 3GG' = 3a$

Giá trị nhỏ nhất của T là 3a khi $\overrightarrow{\text{AA}'}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}$ cùng phương.

(Họ và tên tác giả: Phạm văn Tài, Tên FB: TaiPhamVan)

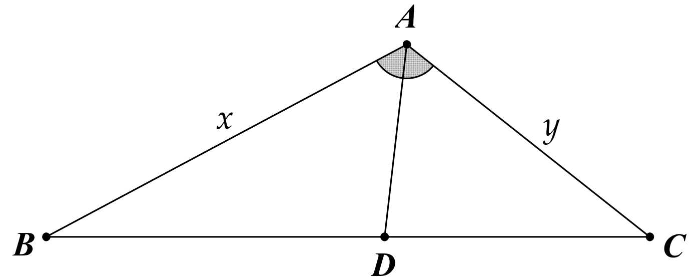
Mail: thongbui1987@gmail.com

Câu 296: Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = x, AC = y$; $\left(x > y > 0\right)$. Gọi AD là đường phân giác trong của góc A. Biết biểu thị vectơ $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$. Tính $S = m + n$.

A. $S = -2$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 2$.

Lời giải

Chọn C.



Theo tính chất đường phân giác trong của tam giác ta có

$\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{x}{y}\to\dfrac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}}=-\dfrac{x}{y}\to$ điểm D chia đoạn thẳng BC theo tỉ số $k=-\dfrac{x}{y}$

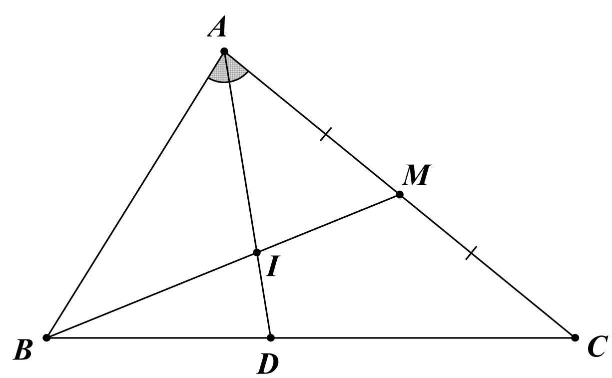
Nên ta có: $\overrightarrow{AD}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\dfrac{x}{y}\overrightarrow{AC}}{1+\dfrac{x}{y}}=\dfrac{y}{x+y}\overrightarrow{AB}+\dfrac{x}{x+y}\overrightarrow{AC}\to m+n=\dfrac{y+x}{x+y}=1$.

Câu 297: Cho ΔABC có $AB=3$; $AC=4$. Phân giác trong AD của góc $\widehat{BAC}$ cắt trung tuyến BM tại I. Biết $\dfrac{AD}{AI}=\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ tối giãn. Tính $S=a+2b$.

A. $S=10$. **B.** $S=14$. **C.** $S=24$. **D.** $S=27$.

Lời giải:

Chọn C.



Ta có: $\dfrac{IB}{IM}=\dfrac{AB}{AM}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow 2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IM}=\vec{0}\Rightarrow 2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AM}=5\overrightarrow{AI}\,(1)$.

$\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow 4\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DC}=\vec{0}\Rightarrow 4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=7\overrightarrow{AD}\,(2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases}2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AM}=5\overrightarrow{AI}\\4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=7\overrightarrow{AD}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AM}=10\overrightarrow{AI}\\4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=7\overrightarrow{AD}\end{cases}$

$\rightarrow 6\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{AC}=10\overrightarrow{AI}-7\overrightarrow{AD} \Rightarrow 7\overrightarrow{AD}=10\overrightarrow{AI} \Rightarrow 7AD=10AI \Rightarrow \dfrac{AD}{AI}=\dfrac{10}{7}$

$\rightarrow a=10, b=7 \rightarrow S=10+2.7=24$

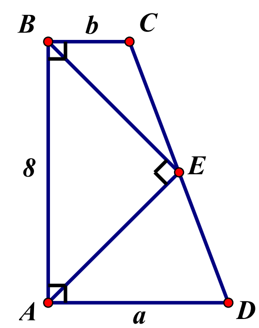
Họ và tên tác giả: Lê Hồng Phi Tên FB: Lê Hồng Phi

Email: lehongphivts@gmail.com

Câu 298: Cho tứ giác $ABCD$ có AD và BC cùng vuông góc với AB, $AB=8$, $AD=a$, $BC=b$. Gọi E là một điểm thuộc cạnh CD. Biết $\widehat{AEB}=90^\circ$, giá trị lớn nhất của $T=ab$ là

A. 4. **B.** 16. **C.** 8. **D.** 64.

Lời giải



Chọn B.

Vì E là một điểm thuộc cạnh CD nên tồn tại $k\in(0;1)$ sao cho

$k\overrightarrow{EC}+(1-k)\overrightarrow{ED}=\vec{0}$.

Khi đó, $k\overrightarrow{BC}+(1-k)\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}$ và $k\overrightarrow{AC}+(1-k)\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AE}&=k^2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}+k(1-k)\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+k(1-k)\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}+(1-k)^2\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AD}\\&=k^2\overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+k(1-k)ab+k(1-k)\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+(1-k)^2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)\overrightarrow{AD}\\&=k^2b^2+k(1-k)ab+k(1-k)\left(-8^2+ab\right)+(1-k)^2a^2\\&=\left(kb+(1-k)a\right)^2-64k(1-k).\end{aligned}$$

Do $\widehat{AEB}=90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AE}=0 \Leftrightarrow kb+(1-k)a=8\sqrt{k(1-k)} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{k}{1-k}}b+\sqrt{\dfrac{1-k}{k}}a=8$.

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có $8=\sqrt{\dfrac{k}{1-k}}b+\sqrt{\dfrac{1-k}{k}}a\ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab\le 16$.

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $a=b=4$ và $k=0,5$.

Vậy $\max T=16$.

Câu 299: Cho tứ giác $ABCD$ có AD và BC cùng vuông góc với AB, $AB=h$, $AD=a$, $BC=b$. Cho k là số thực dương thuộc $(0;1)$ và điểm E thỏa mãn $k\overrightarrow{EC}+(1-k)\overrightarrow{ED}=\vec{0}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, h, k để góc $\widehat{AEB}=90^\circ$?

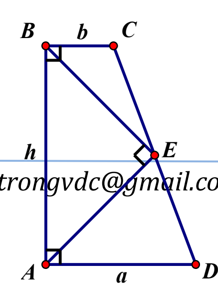
A. $(1-k)b+ka=h\sqrt{k(1-k)}$. **B.** $kb+(1-k)a=hk(1-k)$.

C. $kb+(1-k)a=h\sqrt{k(1-k)}$. **D.** $(1-k)b+ka=hk(1-k)$.

Lời giải

Chọn C.

Từ $k\overrightarrow{EC}+(1-k)\overrightarrow{ED}=\vec{0}$ suy ra



$k\overrightarrow{BC}+(1-k)\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}$ và $k\overrightarrow{AC}+(1-k)\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}$.

Khi đó,

$$\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AE}=k^2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}+k(1-k)\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+k(1-k)\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}+(1-k)^2\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AD}$$

$$=k^2\overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+k(1-k)ab+k(1-k)\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+(1-k)^2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)\overrightarrow{AD}$$

$$=k^2b^2+k(1-k)ab+k(1-k)\left(-h^2+ab\right)+(1-k)^2a^2$$

$$=\left(kb+(1-k)a\right)^2-k(1-k)h^2.$$

Do $\widehat{AEB}=90^\circ$ nên $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AE}=0\Leftrightarrow kb+(1-k)a=h\sqrt{k(1-k)}$.

Vậy hệ thức liên hệ giữa a, b, h, k để góc $\widehat{AEB}=90^\circ$ là $kb+(1-k)a=h\sqrt{k(1-k)}$.

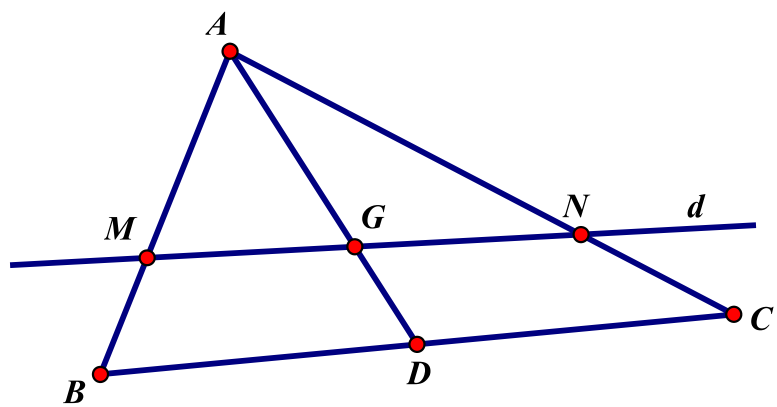
Câu 300: Cho tam giác có trọng tâm G, qua G dựng đường thẳng d cắt cách cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Đặt $\dfrac{AM}{AB}=x$, $\dfrac{AN}{AC}=y$, gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $T=x+y$. Tính $m+M$.

A. $\dfrac{10}{3}$. **B.** $\dfrac{17}{6}$. **C.** $\dfrac{11}{6}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

(Họ và tên tác giả: Hoàng Thị Thanh Nhàn, Tên FB: Hoàng Nhàn)

Lời giải

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

$\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=-x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{MG}=\left(\dfrac{1}{3}-x\right)\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Do M, N, G thẳng hàng nên $\overrightarrow{MG}=k\overrightarrow{MN}$ $\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}-x=-kx\\ \frac{1}{3}=ky\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}=(1-k)x\\ \frac{1}{3}=ky\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{3x}=1-k\\ \frac{1}{3y}=k\end{cases}$

$\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$.

$\Rightarrow y=\frac{x}{3x-1}$.

Do M, N lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC nên $\frac{1}{2}\le x,y\le 1$.

$3=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{2}{\sqrt{xy}}$ $\Rightarrow xy\ge\frac{4}{9}$ $\Rightarrow T=x+y=3xy\ge\frac{4}{3}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{2}{3}$.

$\Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất $m=\frac{4}{3}$.

Ta có $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ $\Leftrightarrow(2x-1)(x-1)\le 0$ $\Leftrightarrow 2x^2-3x+1\le 0$ $\Leftrightarrow 2x^2\le 3x-1$ $\Leftrightarrow\frac{2x^2}{3x-1}\le 1$

$\Leftrightarrow\frac{3x^2}{3x-1}\le\frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ x=1\end{array}\right.$

Ta có $T=x+y=3xy=\frac{3x^2}{3x-1}\le\frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ giá trị lớn nhất là $M=\frac{3}{2}$.

Vậy $m+M=\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=\frac{17}{6}$.

Họ và tên: Nguyễn Thị Thu

Email: thutoan83@gmail.com

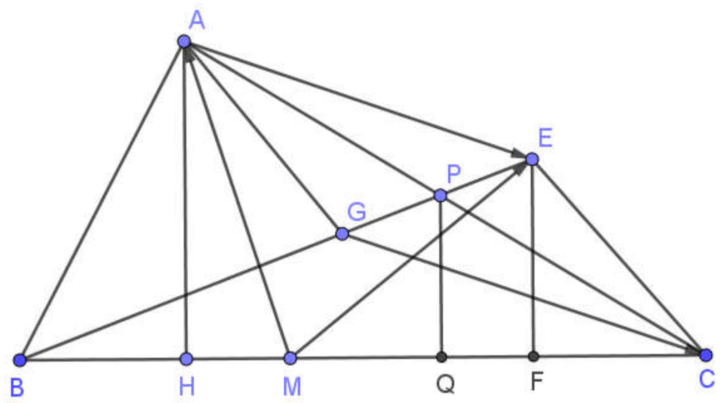
Facebook: Nguyễn Thị Thu

Câu 301: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm M di động trên BC sao cho $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Lời giải

Chọn B.



Dựng hình bình hành AGCE. Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}\right|=\left|\overrightarrow{ME}\right|=ME\geq FE$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|$ nhỏ nhất khi $M\equiv F$.

Gọi P là trung điểm của AC; Q, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P, E trên BC.

Ta có ΔBPQ và ΔBEF đồng dạng nên $\frac{BQ}{BF}=\frac{BP}{BE}=\frac{3}{4}$ hay $\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BQ}$.

Có PQ là đường trung bình của ΔAHC nên Q là trung điểm của HC hay $\overrightarrow{HQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$.

$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}=\frac{5}{6}\overrightarrow{HC}=\frac{5}{6}.\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{5}{8}\overrightarrow{BC}$.

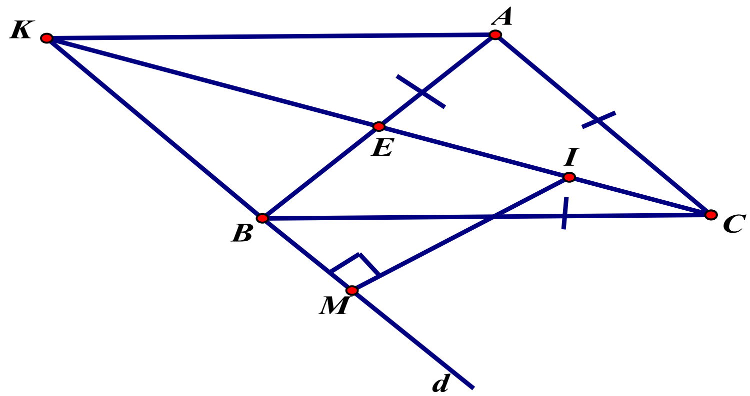
Do đó $\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BQ}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$. Vậy $x=\frac{5}{6}$.

gmail: hoangthuyvinhuni@gmail.com

Câu 302: Cho tam giác ABC đều cạnh $2\sqrt{3}$, d là đường thẳng qua B và tạo với AB một góc 60^0 $(C\notin\Delta)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$?

A. $\frac{3}{5}$ **B.** $\frac{12}{5}$ **C.** $\frac{4}{5}$ **D.** 2

Hướng dẫn giải



Gọi E là trung điểm A**B.**

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IE}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Rightarrow I$ nằm giữa đoạn EC và $EI=\dfrac{3}{5}EC$

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{MI}+3\overrightarrow{IC} = 5\overrightarrow{MI}$

Vậy $A=\left|5\overrightarrow{MI}\right|$ min $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I trên đường thẳng d.

Đường thẳng d qua B và tạo với AB 1 góc 60^0 nên d song song AC và cắt EC tại K.

$\Rightarrow \Delta KEB=\Delta CEA\left(g.c.g\right)$ nên E là trung điêm KC

$EC=a\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3 \Rightarrow EI=\dfrac{3}{5}.3=\dfrac{9}{5}$

$KI=\dfrac{9}{5}+3=\dfrac{24}{5}$

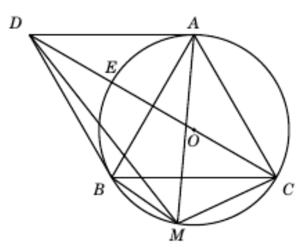
$\Delta EKB \sim \Delta MKI \Rightarrow \dfrac{EB}{MI}=\dfrac{KB}{KI} \Rightarrow MI=\dfrac{EB.KI}{KB}=\dfrac{12}{5}$

(Tác giả: Hoàng Thị Thúy - Facebook: Cỏ ba lá)

Câu 303: Cho tam giác ABC đều cạnh 1 nội tiếp đường tròn (O) và điểm M thay đổi trên O. Gọi s, i lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$. Tính $s+i$.

A. $s+i=\sqrt{3}$. **B.** $s+i=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **C.** $s+i=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. **D.** $s+i=2\sqrt{3}$.

Lời giải



Dựng hình bình hành $DBCA$. Ta có

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{MD}\right|=MD.$$

Gọi E là giao điểm khác C của DC với (O). Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có

$MD \geq DO-OM=DO-OE=DE$ và $MD \leq DO+OM=DO+OC=DC$

Dấu bằng xảy ra lần lượt khi M trùng E và M trùng C.

Vậy $s+i=DE+DC=DC-CE+DC=2DC-2OC=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

buiduynam1993@gmail.com

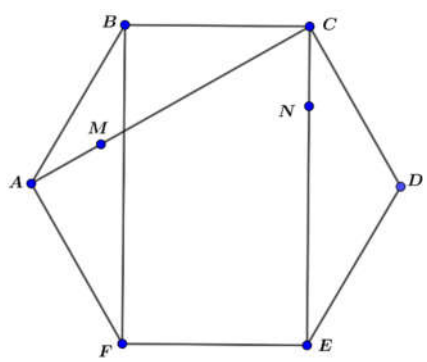
Câu 304: Cho lục giác đều $ABCDEF$ cạnh a. Trên đường chéo AC, CE lấy hai điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=k\ (0<k<1)$. Độ dài BM^2+BN^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi k bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

(Bùi Duy Nam sưu tầm. FB: Bùi Duy Nam https://www.facebook.com/duynam.bui.1)

Lời giải

Chọn B.



Ta có $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}$ mà $\frac{AM}{AC}=k \Rightarrow \overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC}=k\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)$.

Vậy $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+k\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{BC}+(1-k)\overrightarrow{BA}$.

Lại có $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$ mà $\frac{CN}{CE}=k \Rightarrow \overrightarrow{CN}=k\overrightarrow{CE}=k\left(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FE}\right)=k\left(2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$.

Vậy $\overrightarrow{BN}=(k+1)\overrightarrow{BC}+2k\overrightarrow{BA}$.

Khi đó $BM^2+BN^2=\left[k\overrightarrow{BC}+(1-k)\overrightarrow{BA}\right]^2+\left[(k+1)\overrightarrow{BC}+2k\overrightarrow{BA}\right]^2$

$= k^2BC^2 + (1-k)^2 BA^2 + 2k(1-k)\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} + (k+1)^2 BC^2 + 4k^2BA^2 + 4k(k+1)\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.

Mà $BC^2 = BA^2 = a^2$ và $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \dfrac{BC^2 + BA^2 - AC^2}{2} = -\dfrac{a^2}{2}$.

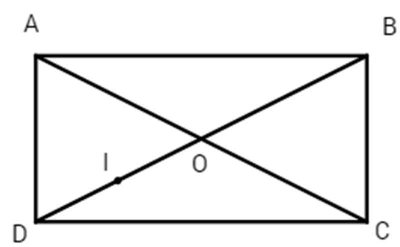
Vậy $BM^2 + BN^2 = a^2(6k^2 - 3k + 2)$ $(0 < k < 1)$.

$\Rightarrow \min(BM^2 + BN^2) = a^2 \min\limits_{0<k<1}(6k^2 - 3k + 2)$.

Xét $f(k) = 6k^2 - 3k + 2$ $(0 < k < 1)$, ta có $\min\limits_{0<k<1} f(k) = f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{13}{8}$.

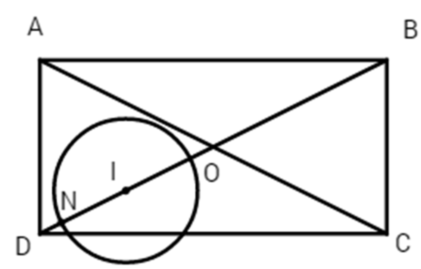
Vậy $\min(BM^2 + BN^2) = \dfrac{13a^2}{8}$ khi $k = \dfrac{1}{4}$.

Câu 305: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = a$, $AB = b$. O và I lần lượt là trung điểm DB và DO. N là điểm thỏa mãn $\left|2\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|2\overrightarrow{AD}\right|$ và NB lớn nhất. Tính NB.



A. $\dfrac{2a + 3\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ **B.** $\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ **C.** $\dfrac{2a + 3\sqrt{a^2 + b^2}}{4}$ **D.** $\dfrac{2a + \sqrt{a^2 + b^2}}{4}$.

Lời giải



$2\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{NO} + 4\overrightarrow{OI} = 4\overrightarrow{NI}$

Suy ra $NI = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{a}{2}$

Để NB lớn nhất thì N là giao điểm của đường tròn tâm I bán kính $\dfrac{a}{2}$ với BD (N và B khác phía so với I).

Do đó $NB = NI + IB = \frac{a}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{2a+3\sqrt{a^2+b^2}}{4}$

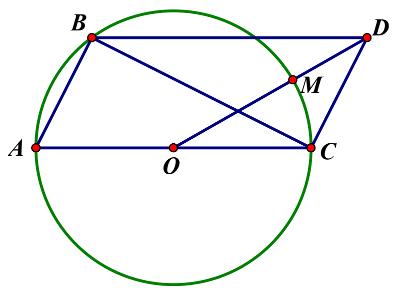
Họ tên tác giả: Đoàn Phú Như Tên fb: Như Đoàn

Email: doanphunhu@gmail.com

Câu 306: Cho tam giác ABC, $AB = 3(cm), BC = 4(cm), CA = 5(cm)$. Điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MB^2 + MC^2 - MA^2$ là

A. 0. **B.** $5 - \frac{5\sqrt{97}}{2}$. **C.** $5 + \frac{5\sqrt{97}}{2}$. **D.** $5 - \frac{5\sqrt{97}}{4}$.

Lời giải:



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì O là trung điểm AC.

Gọi D đỉnh thứ tư của hình bình hành ABDC thì $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

Ta có

$$P = MB^2 + MC^2 - MA^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 - \overrightarrow{MA}^2 = \left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}\right)^2$$

$$P = MD^2 + DB^2 + DC^2 - DA^2 + 2\overrightarrow{MD}\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}\right) = MD^2 + DB^2 + DC^2 - DA^2 = MD^2 - 18$$

Do đó P nhỏ nhất khi và chỉ khi DM nhỏ nhất.

Vì M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên DM nhỏ nhất khi và chỉ khi O,M,D theo thứ tự thẳng hàng.

Ta có $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow OD^2 = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}AC^2 + AB^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$$OD^2 = \frac{25}{4} + 9 + 5.3.\frac{3}{5} = \frac{97}{4} \Rightarrow MD = OD - OM = \frac{\sqrt{97}}{2} - \frac{5}{2}$$

Vậy $MinP = \left(\frac{\sqrt{97}}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 - 18 = 5 - \frac{5\sqrt{97}}{2}$.

Chọn đáp án B

Phuongthao.nguyenmaths@gmail.com

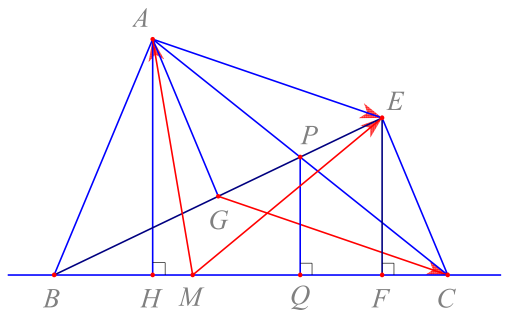
Câu 307: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm M di động nằm trên BC sao cho $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho độ dài của vectơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\frac{4}{5}$.. **B.** $\frac{5}{6}$.. **C.** $\frac{6}{5}$.. **D.** $\frac{5}{4}$.

(Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Phương Thảo, Tên FB: Nguyễn Thị Phương Thảo)

Lời giải

Chọn B.



Dựng hình bình hành $AGCE$. Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ME}$.

Kẻ $EF\perp BC$ $(F\in BC)$. Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|\overrightarrow{ME}\right|=ME\geq EF$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|$ nhỏ nhất khi $M\equiv F$.

Gọi P là trung điểm AC, Q là hình chiếu vuông góc của P lên BC $(Q\in BC)$.

Khi đó P là trung điểm GE nên $BP=\frac{3}{4}BE$.

Ta có ΔBPQ và ΔBEF đồng dạng nên $\frac{BQ}{BF}=\frac{BP}{BE}=\frac{3}{4}$ hay $\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BQ}$.

Mặt khác, $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$.

PQ là đường trung bình ΔAHC nên Q là trung điểm HC hay $\overrightarrow{HQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$.

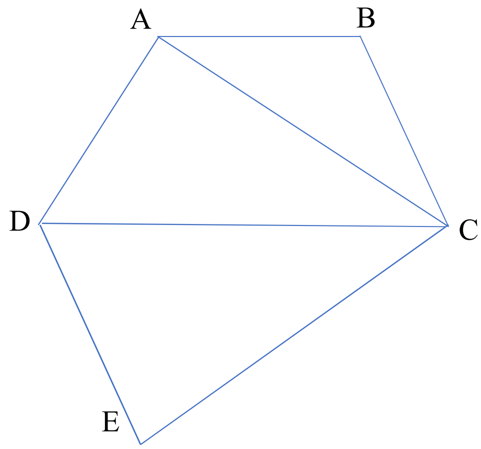
Suy ra $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}=\frac{5}{6}\overrightarrow{HC}=\frac{5}{6}.\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{5}{8}\overrightarrow{BC}.$

Do đó $\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BQ}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.

Câu 308: Cho hình thang ABCD có đáy CD gấp đôi đáy AB. Lấy một điểm E sao cho $3\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{DE}$ và đồng thời thỏa mãn $CA=CE$. Giá trị nhỏ nhất của góc $\widehat{ABC}$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(95^\circ;100^\circ)$. **B.** $(100^\circ;106^\circ)$. **C.** $(106^\circ;115^\circ)$. **D.** $(115^\circ;120^\circ)$.

Lời giải:



Gọi $\alpha = \widehat{ABC}$. Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \to AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos\alpha$ (1)

Lại có: $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \to CE^2 = AC^2 = 4AB^2 + \frac{9}{4}BC^2 + 6AB.BC.\cos\alpha$ (2)

Lấy (2) – (1) vế theo vế ta được :

$$0 = 3AB^2 + \frac{5}{4}BC^2 + 8AB.BC.\cos\alpha \to \cos\alpha = -\left(\frac{3AB}{8BC} + \frac{5BC}{32AB}\right) \le -2.\sqrt{\frac{3AB}{8BC}.\frac{5BC}{32AB}} = -\frac{\sqrt{15}}{8}$$

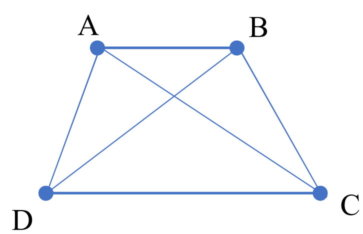
Suy ra: $\alpha \ge 118,96^\circ \to GTNN$ của α nằm trong khoảng $(115^\circ;120^\circ) \to$ **chọn đáp án D.**

Câu 309: Cho hình thang ABCD có $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $AC = 8, BD = 6$, góc tạo bởi hai véc tơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ bằng 120°. Khi đó giá trị của $(AD + BC)$ bằng:

A. $\frac{13+2\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{14+4\sqrt{7}}{3}$. **C.** $\frac{15+2\sqrt{10}}{4}$. **D.** $6+4\sqrt{3}$.

(Tác giả: Thầy Nguyễn Đăng Ái, FB: Nguyễn Đăng Ái)

Lời giải:



Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$. Suy ra: $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + 3\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC}$

Bình phương vô hướng hai vế ta được:

$$9BC^2 = 4AC^2 + BD^2 + 4AC.BD.\cos 120^\circ = 4.8^2 + 6^2 + 4.8.6.\cos 120^\circ \to BC = \frac{14}{3}$$

Tương tự ta có:

Ta có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$. Suy ra: $\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BD}=(2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})+3\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AD}$

Bình phương vô hướng hai vế ta được:

$9AD^2=AC^2+4BD^2+4AC.BD.\cos 120^\circ=8^2+4.6^2+4.8.6.\cos 120^\circ\rightarrow AD=\dfrac{4\sqrt{7}}{3}$

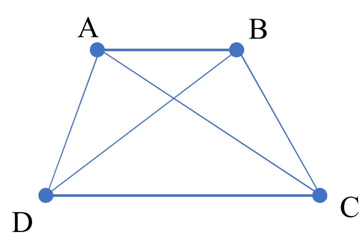
Suy ra: $(AD+BC)=\dfrac{14+4\sqrt{7}}{3}\rightarrow$ **chọn đáp án B.**

Câu 310: Cho hình thang ABCD có $2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $AC=9, BD=6$. Giá trị của biểu thức (BC^2-AD^2) bằng:

A. 15. **B.** $\dfrac{80}{3}$. **C.** 12. **D.** 14.

(Tác giả: Thầy Nguyễn Đăng Ái, FB: Nguyễn Đăng Ái)

Lời giải:



Ta có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$. Suy ra: $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+3\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BC}$

Bình phương vô hướng hai vế ta được:

$9BC^2=4AC^2+BD^2+4\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ (1)

Tương tự ta có:

Ta có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$. Suy ra: $\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BD}=(2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})+3\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AD}$

Bình phương vô hướng hai vế ta được:

$9AD^2=AC^2+4BD^2+4\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ (2)

Lấy (1) trừ đi (2) vế theo vế, ta được : $BC^2-AD^2=\dfrac{AC^2-BD^2}{3}=\dfrac{9^2-6^2}{3}=15\rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Suy ra: $(AD+BC)=\dfrac{14+4\sqrt{7}}{3}\rightarrow$ **chọn đáp án B.**

Câu 311: Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=60^\circ$ và AB, AC đã biết. Biểu thức $P=k.MA+MB+MC$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $(AB+AC)$ với mọi giá trị thực $k\ge k_0$. Giá trị của k_0 nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(\frac{3}{2};2)$. **C.** $(1;\frac{3}{2})$. **D.** $(2;3)$.

(Tác giả: Thầy Nguyễn Đăng Ái, FB: Nguyễn Đăng Ái)

Lời giải:

Ta có: $|\vec{u}|.|\vec{v}|\ge\vec{u}.\vec{v}\leftrightarrow|\vec{u}|\ge\vec{u}.\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ và: $\vec{u}.\vec{v}\ge-|\vec{u}|.|\vec{v}|$. Áp dụng vào bài này, ta có :

$$P=k.MA+MB+MC\ge k.MA+\overrightarrow{MB}.\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\overrightarrow{MC}.\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}=k.MA+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}).\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}).\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$$

$$\Leftrightarrow\ P\ge k.MA+AB+AC+\overrightarrow{MA}(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC})\ge k.MA+AB+AC-MA.|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}|$$

$\Leftrightarrow\ P\ge MA\left(k-|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}|\right)+AB+AC$. Giả thiết cho biết:

$$P\ge MA\left(k-|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}|\right)+AB+AC\ge AB+AC$$

Suy ra: $\left(k-|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}|\right)\ge0\to k\ge|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}|$

Sử dụng bình phương vô hướng để tính:

$$|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}|^2=\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}\right)^2+\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right)^2+2\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}.\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}=1+1+2.\cos60^\circ=3$$

Suy ra: $k\ge|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}|=\sqrt{3}=k_0$. Vậy ta **chọn đáp án** **B.**

Email: hongle.ad@gmail.com

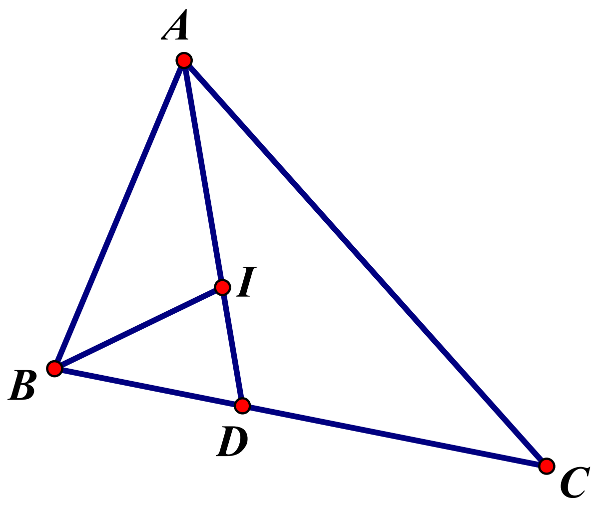
Câu 312: Cho tam giác ABC có các cạnh AB = c, AC = b, BC = a. Tìm điểm M để vecto $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất

A. M trùng với trọng tâm G của tam giác ABC.
B. M trùng với tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC.
C. M trùng với trực tâm H của tam giác ABC.
D. M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC.

Lời giải

Họ và tên tác giả: Vũ Thị Hồng Lê Tên FB: Hồng Lê

Chọn B.



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC

Theo tính chất phân giác trong: $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}\Leftrightarrow DB=\frac{c}{b}.DC$, mà hai vecto $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DB}$ ngược hướng nên ta có $\overrightarrow{DB}=-\frac{c}{b}\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow b\overrightarrow{DB}+c\overrightarrow{DC}=\vec{0}\Leftrightarrow b\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{ID}\right)+c\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{ID}\right)=\vec{0}$

hay $b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}-\left(b+c\right)\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ (*)

Mặt khác $\frac{DB}{DC}=\frac{c}{b}\Leftrightarrow\frac{DB}{BC}=\frac{c}{b+c}\Leftrightarrow DB=\frac{ac}{b+c}$

$\frac{IA}{ID}=\frac{BA}{BD}=\frac{c\left(b+c\right)}{ac}=\frac{b+c}{a}\Leftrightarrow aIA=\left(b+c\right)ID$

Mà $\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID}$ ngược hướng nên $a\overrightarrow{IA}=-\left(b+c\right)\overrightarrow{ID}$

Thay vào (*) ta có $b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}+a\overrightarrow{IA}=\vec{0}$

Vậy độ dài của $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}$ nhỏ nhất bằng 0 khi M trùng I

Email: nguyentuyetle77@gmail.com

Câu 313: Cho tam giác ABC đều cạnh a và điểm M thay đổi. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2MA^2+3MB^2-4MC^2$ là:

A. $14a^2$ **B.** $-14a^2$ **C.** $-\frac{26a^2}{3}$ **D.** $\frac{26a^2}{3}$

Lời giải

Họ và tên: Nguyễn Thị Tuyết Lê FB: Nguyen Tuyet Le

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có: $P=2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2-4(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})$

$=MG^2+2\overrightarrow{MG}(2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}-4\overrightarrow{GC})$

$=MG^2+2\overrightarrow{MG}(2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GB}-6\overrightarrow{GC})$

$= MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{CB} - 5\overrightarrow{GC}) + GC^2$

$= MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{CB} - 5\overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{CB} - 5\overrightarrow{GC})^2 - 42GC^2$

(Vì $(\overrightarrow{CB} - 5\overrightarrow{GC})^2 = CB^2 - 10\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{GC} + 25GC^2 = 43.\dfrac{a^2}{3} = 43GC^2$)

$p = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{CB} - 5\overrightarrow{GC})^2 - 42GC^2 \geq -42GC^2 = -14a^2$.

Dấu "="xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} = 5\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{CB}$.

Vậy min $P = -14a^2$ khi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MG} = 5\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{CB}$

Họ và tên tác giả: Đặng Văn Tâm Tên FB: Đặng Văn Tâm

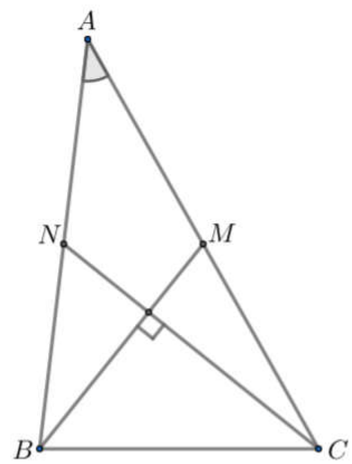
Email: dvtam0189@gmail.com

Câu 314: Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau. Tính giá trị nhỏ nhất của $\cos A$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $AC, AB.$ Ta có:

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}.$$

Theo giả thiết $BM \perp CN$ nên ta có $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CN} = 0$ hay

$$\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Mà $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ nên suy ra

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\left(AB^2 + AC^2\right).$$

Áp dụng định nghĩa tích vô hướng, kết hợp Bất đẳng thức Cosi ta có

$$\cos A=\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=\frac{2}{5}\frac{AB^2+AC^2}{AB.AC}\geq\frac{2}{5}.\frac{2\sqrt{AB^2.AC^2}}{AB.AC}=\frac{4}{5}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $AB=AC$ hay tam giác ABC cân tại A. Vậy $\min(\cos A)=\frac{4}{5}$.

Họ và tên: Cấn Việt Hưng

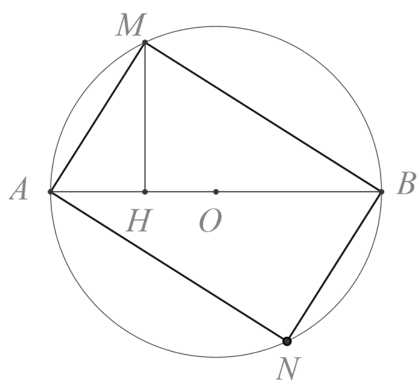
Email: thuyhung8587@gmail.com

FB: Viet Hung

Câu 315: Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng a. Một điểm M di động sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$. Gọi H là hình chiếu của M lên AB. Tính độ dài lớn nhất của MH ?

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** a. **D.** $2a$.

Lời giải:



Chọn A.

Gọi N là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $MANB$. Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MN}$.

Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MN}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|$ hay $MN=AB$.

Suy ra $MANB$ là hình chữ nhật nên $\widehat{AMB}=90^o$.

Do đó M nằm trên đường tròn tâm O đường kính AB.

MH lớn nhất khi H trùng với tâm O hay $\max MH=MO=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$.

Họ và tên tác giả: Phương Xuân Trịnh Tên FB:: Phương Xuân Trịnh

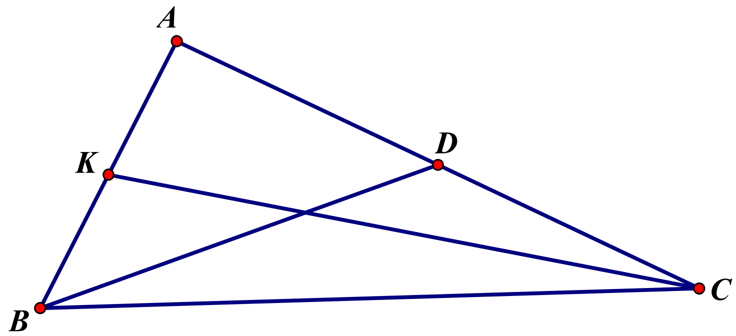
Email: phuongtrinhlt1@gmail.com

Câu 316: Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi α là góc giữa hai trung tuyến BD và CK. Giá trị nhỏ nhất của $\cos\alpha$ là:.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B.



Ta có:

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CK}=\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AC}\right)=-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AB}$ (do $AB\perp AC$)

$=-\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2\right)=-\frac{1}{2}BC^2$.

Mặt khác:

$2BD.CK\le BD^2+CK^2=\frac{\left(2BA^2+2BC^2-AC^2\right)+\left(2CA^2+2CB^2-AB^2\right)}{4}$

$=\frac{AB^2+AC^2+4BC^2}{4}=\frac{5BC^2}{4}$.

Do đó:

$\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CK}\right|}{BD.CK}=\frac{BC^2}{2BD.CK}\ge\frac{4BC^2}{5BC^2}=\frac{4}{5}$.

$\cos\alpha=\frac{4}{5}\Leftrightarrow BD=CK\Leftrightarrow\Delta ABC$ vuông cân tại A.

Vậy $\min\left(\cos\alpha\right)=\frac{4}{5}$.

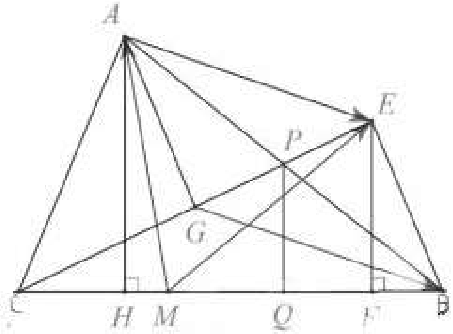
vanphu.mc@gmail.com

Câu 317: Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A sao cho $\overrightarrow{CH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$. Điểm M di động trên BC sao cho $\overrightarrow{CM}=x.\overrightarrow{CB}$. Tìm x sao cho độ dài vecto $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GB}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\frac{8}{5}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{6}{5}$. **D.** $\frac{5}{8}$.

Lời giải

Chọn B.



Dựng hình bình hành AGBE. Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ME}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GB}\right|=\left|\overrightarrow{ME}\right|=ME\ge EF \Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GB}\right|_{\min}=EF \Leftrightarrow M\equiv F$.

Gọi P là trung điểm của AB. Khi đó P cũng là trung điểm của GE và $CP=\frac{3}{4}CE$

Gọi Q là hình chiếu vuông góc của P trên BC.

Ta có ΔCPQ và ΔCEF đồng dạng nên $\frac{CQ}{CF}=\frac{CP}{CE}=\frac{3}{4}\Rightarrow \overrightarrow{CF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CQ}$.

Mặt khác PQ là đường trung bình của ΔAHB nên $\overrightarrow{HQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$. Theo giả thiết $\overrightarrow{CH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$

Suy ra $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HB}=\frac{5}{6}\overrightarrow{HB}$

Từ giả thiết $\overrightarrow{HB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$. Do đó $\overrightarrow{CQ}=\frac{5}{6}\overrightarrow{HB}=\frac{5}{6}.\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}=\frac{5}{8}\overrightarrow{CB}\Rightarrow \overrightarrow{CF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CQ}=\frac{4}{3}.\frac{5}{8}\overrightarrow{CB}=\frac{5}{6}\overrightarrow{CB}$

(Họ và tên tác giả: Nguyễn Văn Phu, Tên FB Nguyễn Văn Phu)

Họ và tên tác giả: Trần Tuyết Mai Tên FB: Mai Mai

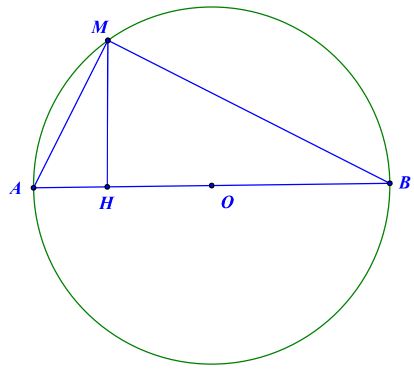
Email: maimai1.hn@gmail.com

Câu 318: Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng a. Một điểm M di động sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$. Gọi H là hình chiếu của M lên AB. Tính độ dài lớn nhất của MH?

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** a. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là trung điểm của AB. Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MO}$.

Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right| \Leftrightarrow 2\left|\overrightarrow{MO}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|$ hay $MO=\frac{1}{2}AB$ Suy ra ΔMAB vuông tại M nên $\widehat{AMB}=90^o$. Do đó M nằm trên đường tròn tâm O đường kính AB.

MH lớn nhất khi H trùng với tâm O hay $\max MH = MO=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$.

Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Thanh Thảo Tên FB: Nguyễn Thanh Thảo

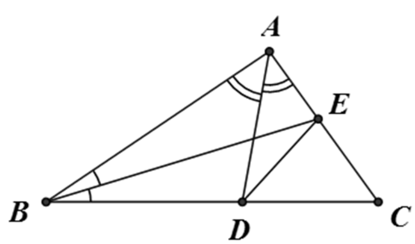
Email: nghianguyennhan78@gmail.com

Câu 319: Cho AD và BE là hai phân giác trong của tam giác ABC. Biết $AB=4$, $BC=5$ và $CA=6$. Khi đó $\overrightarrow{DE}$ bằng:

A. $\frac{5}{9}\overrightarrow{CA}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. **B.** $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}-\frac{5}{9}\overrightarrow{CB}$. **C.** $\frac{9}{5}\overrightarrow{CA}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. **D.** $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}-\frac{9}{5}\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn A.



AD là phân giác trong của tam giác ABC nên $\frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB}=\frac{6}{4}\Rightarrow\frac{CD}{CD+DB}=\frac{6}{6+4}$

$\Rightarrow\frac{CD}{CB}=\frac{6}{10}\Rightarrow\overrightarrow{CD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$.

Tương tự: $\frac{CE}{CA}=\frac{5}{9}\Rightarrow\overrightarrow{CE}=\frac{5}{9}\overrightarrow{CA}$.

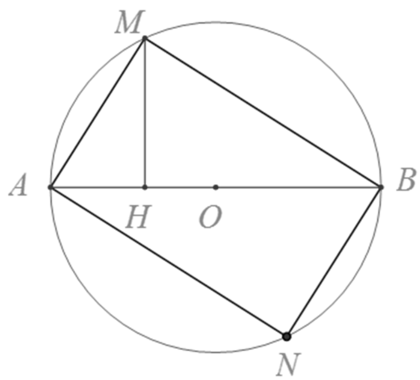
Vậy $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CD}=\frac{5}{9}\overrightarrow{CA}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$.

Câu 320: **:** Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng a. Một điểm M di động sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$. Gọi H là hình chiếu của M lên AB. Tính độ dài lớn nhất của MH?

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** a. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi N là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $MANB$. Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MN}$.

Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|$ hay $MN=AB$.

Suy ra $MANB$ là hình chữ nhật nên $\widehat{AMB}=90^o$.

Do đó M nằm trên đường tròn tâm O đường kính AB.

MH lớn nhất khi H trùng với tâm O hay $\max MH=MO=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$.

Họ và tên tác giả: Hoàng Tiến Đông Tên FB: tiendongpt

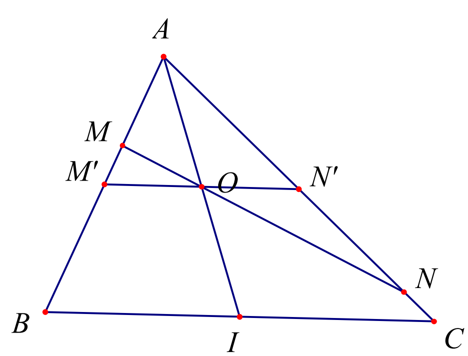
Email: dongpt@c3phuctho.edu.vn

Câu 321: Một miếng gỗ có hình tam giác có diện tích là S điểm I, O lần lượt thỏa mãn $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OI}=\vec{0}$. Cắt miếng gỗ theo một đường thẳng qua O, đường thẳng này đi qua M,N lần lượt trên các cạnh AB,AC. Khi đó diện tích miếng gỗ chứa điểm A thuộc đoạn:

A. $\left[\frac{S}{4};\frac{S}{3}\right]$. **B.** $\left[\frac{S}{3};\frac{S}{2}\right]$. **C.** $\left[\frac{3S}{8};\frac{S}{2}\right]$. **D.** $\left[\frac{S}{4};\frac{3S}{8}\right]$.

Lời giải

Chọn A



Từ O kẻ $M'N'//BC$, suy ra: O là trung điểm $M'N'$.

Ta có: $\frac{NN'}{NA}.\frac{MA}{MM'}.\frac{OM'}{ON'}=1 \Rightarrow \frac{NN'}{NA}=\frac{MM'}{MA}=x, \quad \left(0\le x\le\frac{1}{2}\right)$.

$NN' = xNA \Leftrightarrow AN - AN' = xNA \Rightarrow NA = \dfrac{1}{1-x}AN'$.

$MM' = xMA \Leftrightarrow M'A - MA = xMA \Rightarrow MA = \dfrac{1}{1+x}M'A$.

Ta có: $\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \dfrac{AM}{AB}.\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AM.AN}{4.AM'.AN'} = \dfrac{1}{4\left(1-x^2\right)}$.

Xét hàm số: $f\left(x\right) = 4\left(1-x^2\right)$ trên $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$. suy ra: $3 \le f\left(x\right) \le 4 \Rightarrow \dfrac{S}{4} \le S_{AMN} \le \dfrac{S}{3}$.

Đỗ Công Dũng

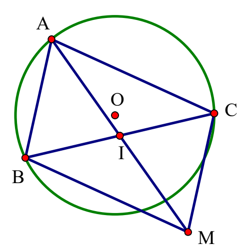
Email: congdung812@gmail.com

Câu 322: Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $BC^2 - AB^2 - AC^2$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4

Giải

Chọn D



Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Dựng hình bình hành $ABMC$

Ta có $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} \Rightarrow OA^2 = OM^2 + MA^2 + 2\overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{MA}$ (1)

Tương tự ta có: $OB^2 = OM^2 + MB^2 + 2\overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{MB}$ (2)

$OC^2 = OM^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{MC}$ (3)

Lấy $(2)+(3)-(1)$ từng vế ta có:

$R^2 = OM^2 + MB^2 + MC^2 - MA^2 + 2\overrightarrow{OM}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\right)$ (do tứ giác $ABMC$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}$)

Khi đó $R^2 = OM^2 + MB^2 + MC^2 - MA^2 = OM^2 + MB^2 + MC^2 - 4MI^2$

$= OM^2 + MB^2 + MC^2 - 4\left(\dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}\right)$

$= OM^2 + MB^2 + MC^2 - 2\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$ mà $MB = AC$, $MC = AB$

nên $R^2 = OM^2 - AB^2 - AC^2 + BC^2 \Leftrightarrow BC^2 - AB^2 - AC^2 = R^2 - OM^2 \le R^2 = 4$

Vậy giá trị lớn nhất của $BC^2 - AB^2 - AC^2$ là 4.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv O \Rightarrow AB = AC = R \Rightarrow BC^2 = 3R^2$. Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^0$. Hay là tam giác ABC cân tại A và có $\widehat{BAC} = 120^0$.

Họ và tên tác giả: Nguyễn Tân Quang Tên FB: Nguyễn Tân Quang

Email: quangmath@gmail.com

Câu 323: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi M là điểm nằm trên cạnh AB. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ theo a.

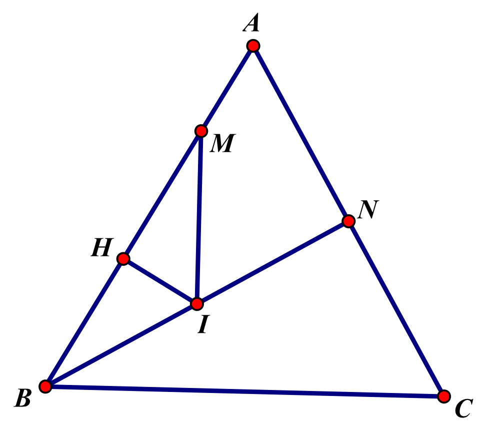
A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \left|\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) + 2\overrightarrow{MB}\right| = \left|2\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{MB}\right| = 4\left|\overrightarrow{MI}\right| = 4MI$,

trong đó N, I lần lượt là trung điểm của AC, BN. Do đó I cố định.



Kẽ IH vuông góc với AB. Ta có $MI \ge HI$.

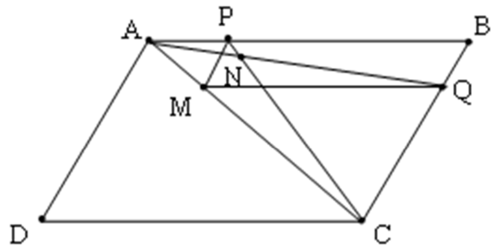
Tính được $BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow IH = BI.\sin 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{8}$.

Email: themhaitotoanyp1@gmail.com

Câu 324: Cho hình bình hành ABCD, M thuộc đường chéo AC, (M không trùng với các đỉnh A, C) Trên các đường thẳng AB, BC, lấy các điểm P và Q sao cho MP // BC, MQ // A**B.** Gọi N là giao hai đường thẳng AQ và CP. Giả sử $\overrightarrow{DN} = m\overrightarrow{DA} + n\overrightarrow{DC}$. Tìm giá trị lớn nhất của m + n

A. $\dfrac{4}{3}$ **B.** $\dfrac{3}{4}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** 2

Lời giải



Đặt $\dfrac{AM}{AC}=k\ \Rightarrow \dfrac{BQ}{BC}=k$ và $\dfrac{BP}{AB}=1-k$, $k\in(0;1)$

Có $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{DA}+x\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}\right)$

$=\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{DC}-kx\overrightarrow{DA}=(1-kx)\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{DC}$, (1)

Mặt khác $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{DC}+y\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{DC}+y\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}\right)$

$=\overrightarrow{DC}+y\overrightarrow{DA}+y(k-1)\overrightarrow{DC}\ =y\overrightarrow{DA}+(1+yk-y)\overrightarrow{DC}$, (2)

Từ (1) và (2), ta có $\begin{cases} y=1-kx \\ 1+ky-y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{k}{k^2-k+1} \\ y=\dfrac{1-k}{k^2-k+1} \end{cases}$

Do đó $\overrightarrow{DN}=\dfrac{1-k}{k^2-k+1}\overrightarrow{DA}+\dfrac{k}{k^2-k+1}\overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow m+n=\dfrac{1}{k^2-k+1}=\dfrac{1}{\left(k-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}\le\dfrac{4}{3},\forall k\in(0;1)$

$\Rightarrow \max(m+n)=\dfrac{4}{3}$, đạt được khi k = $\dfrac{1}{2}$ hay M là trung điểm AC.

(Fb: Lưu Thêm)

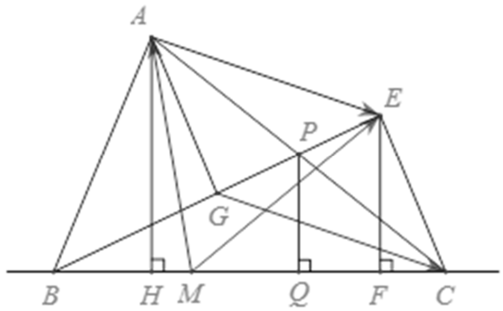
Họ và tên: Lê Thị Lan FB: Lê Lan

Email: lelanqx2@gmail.com

Câu 325: : Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overrightarrow{BH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm M di động nằm trên BC sao cho $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho độ dài của vectơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\dfrac{4}{5}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $\dfrac{6}{5}$. **D.** $\dfrac{5}{4}$.

Lời giải



Chọn B.

Dựng hình bình hành $AGCE$. Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ME}$.

Kẻ $EF\perp BC$ $(F\in BC)$. Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|\overrightarrow{ME}\right|=ME\geq EF$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|$ nhỏ nhất khi $M\equiv F$.

Gọi P là trung điểm AC, Q là hình chiếu vuông góc của P lên BC $(Q\in BC)$.

Khi đó P là trung điểm GE nên $BP=\frac{3}{4}BE$.

Ta có ΔBPQ và ΔBEF đồng dạng nên $\frac{BQ}{BF}=\frac{BP}{BE}=\frac{3}{4}$ hay $\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BQ}$.

Mặt khác, $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$.

PQ là đường trung bình ΔAHC nên Q là trung điểm HC hay $\overrightarrow{HQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$.

Suy ra $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}=\frac{5}{6}\overrightarrow{HC}=\frac{5}{6}.\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{5}{8}\overrightarrow{BC}.$

Do đó $\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BQ}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.

Tác giả: Nguyễn Văn Hưng Facebook: Nguyễn Hưng

Câu 326: Cho tam giác ABC có $BC=a, AC=b, AB=c$ nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. M là điểm thuộc đường tròn (O). Gọi N,n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA^2+MB^2+MC^2$. Khi đó giá trị của $N-n$ bằng

A. 12R^2.
B. $4\text{R}\sqrt{9\text{R}^2-a^2-b^2-c^2}$.
C. $2\text{R}\sqrt{9\text{R}^2-a^2-b^2-c^2}$.
D. $8\text{R}\sqrt{9\text{R}^2-a^2-b^2-c^2}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có:

$$P=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2$$

$$=6\text{R}^2+2\overrightarrow{MO}.\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=6\text{R}^2+2\left|\overrightarrow{MO}\right|.\left|\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\right|.\cos\alpha$$

$$=6\text{R}^2+2R.\left|\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\right|.\cos\alpha$$

Vậy:

` $6R^2 - 2R.\left|\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\right| \le P \le 6R^2 + 2R.\left|\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\right|$

$\Rightarrow N - n = 4R.\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|$

Mà: $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|^2 = 3R^2 + 2\left(\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OC}\right)$

$= 3R^2 + 2.\sum \dfrac{OA^2 + OB^2 - (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})^2}{2} = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$

$\Rightarrow N - n = 4R.\sqrt{9R^2 - a^2 - b^2 - c^2}$

Họ và tên tác giả: Nguyễn Xuân Giao Tên FB: giaonguyen

Email: giaohh2@gmail.com

Câu 327: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O,bán kính R, M là một điểm bất kì trên đường tròn. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2$ là

A. $R^2\sqrt{21}$. **B.** $-R^2\sqrt{21}$. **C.** $2R^2\sqrt{21}$. **D.** $-2R^2\sqrt{21}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $S = \overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 - 3\overrightarrow{MC}^2 = \left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2 - 3\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2$

$S = 2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}\right) = 2\left|\overrightarrow{MO}\right|\left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}\right|.\cos\alpha$

$S = 2R\left|\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}\right|.\cos\alpha$

Trong đó $\alpha = \left(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}\right)$

Do tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn bán kính R nên có cạnh là $R\sqrt{3}$

$\left(\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}\right)^2 = \overrightarrow{CA}^2 + 4\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} + 4\overrightarrow{CB}^2 = 15R^2 + 4.CA.CB.\cos 60^0 = 21R^2 \Rightarrow \left|\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}\right| = R\sqrt{21}$

$S = 2R^2\sqrt{21}.\cos\alpha \Rightarrow S \le 2R^2\sqrt{21}$

Dấu bằng xảy ra khi $\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MO}, \overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$ cùng chiều.

Vậy $MaxS = 2R^2\sqrt{21}$

Email: anhtu82t@gmail.com

Câu 328: Cho tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{3}\cos 2A + 2\cos 2B + 2\sqrt{3}\cos 2C$

A. $P_{min} = -4$. **B.** $P_{min} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. **C.** $P_{min} = -2-3\sqrt{3}$. **D.** $P_{min} = -5$.

Lời giải

Họ và tên: Đồng Anh Tú Facebook: Anh Tú

Chọn A

Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Ta có: $(2\overrightarrow{OA}+\sqrt{3}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow 4OA^2+3OB^2+OC^2+4\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}+4\sqrt{3}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+2\sqrt{3}\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}\ge 0$

$\Leftrightarrow 8R^2+4OA.OC.\cos 2B+4\sqrt{3}OA.OB.\cos 2C+2\sqrt{3}OB.OC.\cos 2A\ge 0$

$\Leftrightarrow 8R^2+4R^2\cos 2B+4\sqrt{3}R^2\cos 2C+2\sqrt{3}R^2\cos 2A\ge 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2A+2\cos 2B+2\sqrt{3}\cos 2C\ge -4$. Dấu bằng xãy ra khi $\widehat{A}=45^0, \widehat{B}=60^0, \widehat{C}=75^0$.

Vậy $P_{min}=-4$.

VẤN ĐỀ 6 TÍCH VÔ HƯỚNG

Email: ngvnho93@gmail.com

Câu 329: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

A. $-\frac{3a^2}{2}$ **B.** $\frac{3a^2}{2}$ **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **D.** $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Họ và tên: Nguyễn Văn Nho Facebook: Nguyễn Văn Nho

Chọn A

Cách 1

Nhận xét: Với mọi điểm M bất kỳ, ta luôn có $AB^2=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)^2=AM^2+MB^2+2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\left(AB^2-AM^2-MB^2\right)$

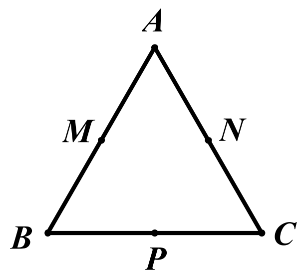
Do đó $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(AC^2-AB^2-BC^2\right)=-\frac{a^2}{2}\\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\left(BA^2-BC^2-CA^2\right)=-\frac{a^2}{2}\\ \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(CB^2-CA^2-AB^2\right)=-\frac{a^2}{2}\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=-\frac{3a^2}{2}$.

Cách 2

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC. Do tam giác ABC đều nên $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{AN}$ lần lượt là các hình chiếu của $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ lên các cạnh BA, CB, AB.

Áp dụng công thức chiếu, ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MB}=-AB.MB=-a.\dfrac{a}{2}=-\dfrac{a^2}{2} \\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CP}=-\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{PC}=-BC.PC=-a.\dfrac{a}{2}=-\dfrac{a^2}{2} \\ \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{NA}=-CA.NA=-a.\dfrac{a}{2}=-\dfrac{a^2}{2} \end{cases}$$



Cộng vế theo vế ta được $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=-\dfrac{3a^2}{2}$.

Cách 3. Vì tam giác ABC đều nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=120^0$.

Do đó $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=AB.BC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=a.a.\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{2} \\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=BC.CA.\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=a.a.\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{2} \\ \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=CA.AB.\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=a.a.\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=-\dfrac{3a^2}{2}$

Câu 330: Cho tam giác ABC có AD là trung tuyến, G là trọng tâm. Một đường thẳng qua G cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC}$

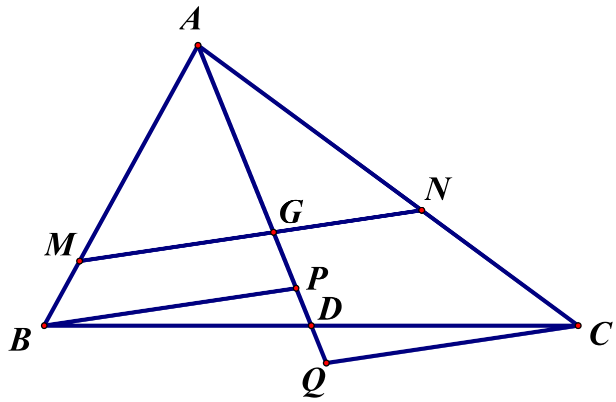
B. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC}$

C. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC})$

D. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{2}(\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC})$

Lời giải

Chọn B



Trước hết ta chứng minh $\frac{BM}{AM}+\frac{CN}{AN}=1(1)$

Thật vậy, kẻ $\begin{cases} BP//MN \\ CQ//MN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{BM}{AM}=\frac{PG}{AG} \\ \frac{CN}{AN}=\frac{QG}{AG} \end{cases}$

Do đó $(1) \Leftrightarrow \frac{PG}{AG}+\frac{QG}{AG}=1 \Leftrightarrow PG+QG=AG \Leftrightarrow (GD-PD)+(GD+DQ)=AG$

$\Leftrightarrow 2GD=AG$ **(luôn đúng)**

Vậy ta có $\frac{BM}{AM}+\frac{CN}{AN}=1$

$BM.AN+CN.AM=AM.AN$

$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB}}{\cos A}+\frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC}}{\cos A}=\frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}}{\cos A}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC}$ **(Do** $\cos A \neq 0$ **)**

Câu 331: Cho các véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$, $|\vec{c}|=c$ và $\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$. Tính $A=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$.

A. $\frac{3c^2-a^2-b^2}{2}$. **B.** $\frac{3a^2-c^2+b^2}{2}$.

C. $\frac{3b^2-a^2-c^2}{2}$. **D.** $\frac{3c^2-a^2+b^2}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Quang Phi

Chọn A

Ta có $\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}+\vec{b}=-3\vec{c} \Leftrightarrow \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=9\vec{c}^2$

$\Leftrightarrow \vec{a}^2+\vec{b}^2+2.\vec{a}.\vec{b}=9\vec{c}^2 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=\frac{9c^2-a^2-b^2}{2}$

Tương tự ta có $\vec{b}+3\vec{c}=-\vec{a} \Leftrightarrow \left(\vec{b}+3\vec{c}\right)^2=\vec{a}^2 \Leftrightarrow \vec{b}^2+9\vec{c}^2+6\vec{b}.\vec{c}=\vec{a}^2 \Leftrightarrow \vec{b}.\vec{c}=\dfrac{a^2-b^2-9c^2}{6}$.

Và ta lại có $\vec{a}+3\vec{c}=-\vec{b} \Leftrightarrow \left(\vec{a}+3\vec{c}\right)^2=\vec{b}^2 \Leftrightarrow \vec{a}^2+9\vec{c}^2+6\vec{a}.\vec{c}=\vec{b}^2 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{c}=\dfrac{b^2-a^2-9c^2}{6}$.

Suy ra $A=\dfrac{9c^2-a^2-b^2}{2}+\dfrac{a^2-b^2-9c^2}{6}+\dfrac{b^2-a^2-9c^2}{6}=\dfrac{3c^2-a^2-b^2}{2}$.

Họ và tên: Đoàn Thị Hường

Email: ngochuongdoan.6@gmail.com Fb: Đoàn Thị Hường

Câu 332: Cho tam giác ABC vuông tại A có BC = 2a, M là điểm trên đoạn BC sao cho MB = 2MC. Biết rằng $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=a^2$. Độ dài cạnh AC là:

A. $AC=\dfrac{a\sqrt{33}}{3}$ **B.** $AC=a\sqrt{3}$ **C.** $AC=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $AC=a\sqrt{5}$

Bài giải

Từ giả thiết M là điểm trên đoạn BC sao cho MB = 2MC nên ta có $\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Đặt AB = x; AC = y ta có $x^2+y^2=4a^2$ (1) (Tam giác ABC vuông tại A)

Mặt khác từ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Nên có $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=a^2 \Leftrightarrow (\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=a^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2=a^2$ (Do $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$)

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}y^2-\dfrac{2}{3}x^2=a^2\,(2)$

Từ (1) và (2) ta có $y=\dfrac{a\sqrt{33}}{3}$ Chọn đáp án **A**

Họ tên: Đào Hữu Nguyên FB: Đào Hữu Nguyên

Mail: huunguyen1979@gmail.com

Câu 333: Cho tam giác ABC **có** $\widehat{BAC}=90^0$, $AB=1, AC=2$ **.Dựng điểm M sao cho** $AM\perp BC$, $AM=3$ **. Đặt** $\overrightarrow{AM}=x.\overrightarrow{AB}+y.\overrightarrow{AC}$ **.Tính** $T=x^2+y^2$?

A. $T=\dfrac{153}{20}$. **B.** $T=\dfrac{151}{20}$. **C.** $T=\dfrac{157}{20}$. **D.** $x=\dfrac{159}{20}$.

Lời giải

Chọn A

Từ $\overrightarrow{AM}=x.\overrightarrow{AB}+y.\overrightarrow{AC}\Rightarrow AM^2=x^2AB^2+y^2AC^2\Rightarrow 9=x^2+4y^2$

Và $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=x.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+y.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}\Rightarrow 0=x.\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+y.\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\Rightarrow 9=-x+4y$

Ta có hệ: $\begin{cases}x^2+4y^2=9\\-x+4y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{144}{20}\\x=4y\end{cases}$. Suy ra $T=x^2+y^2=\dfrac{153}{20}$.

Email: truongthanhha9083@gmail.com

Câu 334: Cho tam giác ABC vuông tại **A.** Quỹ tích điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+MA^2$ là

A. Đường thẳng A**C.** **B.** Đường thẳng A**B.**
C. Đường thẳng B**C.** **D.** Đường trung trực cạnh B**C.**

Lời giải

Họ và tên tác giả: Nguyễn Bá Trường Tên FB: thanhphobuon

Chọn B

Yêu cầu bài toán trở thành

$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+MA^2$

$\Leftrightarrow MA^2+\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+MA^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ (*)

Gọi E là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật ABE**C.** Hệ thức (*) trở thành

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BC})=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC})=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CE}=0\Leftrightarrow MA\perp AC$

Vậy điểm M thuộc đường thẳng A**B.**

Câu 335: Cho tam giác đều ABC cạnh $3a$, $(a>0)$. Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $BM=a$, $CN=2a$, $AP=x$ $(0<x<3a)$. Tìm x để $AM\perp PN$.

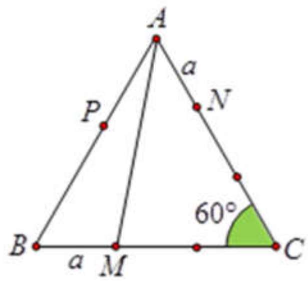
A. $x=\dfrac{3a}{5}$. **B.** $x=\dfrac{4a}{5}$.

C. $x=\dfrac{a}{5}$. **D.** $x=\dfrac{2a}{5}$

Lời giải

Họ và tên tác giả: Nguyễn Bá Trường Tên FB: thanhphobuon

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Ta có $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{x}{3a}\overrightarrow{AB}$.

Để $AM\perp PN$ thì $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{PN}=0\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{x}{3a}\overrightarrow{AB}\right)=0$

$\Leftrightarrow\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-\frac{2x}{9a}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2-\frac{x}{9a}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$.

$\Leftrightarrow\frac{2}{9}AB.AC.\cos60^\circ-\frac{2x}{9a}(3a)^2+\frac{1}{9}(3a)^2-\frac{x}{9a}AB.AC.\cos60^\circ=0$

$\Leftrightarrow\frac{2}{9}\cdot3a\cdot3a\cdot\frac{1}{2}-\frac{2x}{9a}\cdot9a^2+\frac{1}{9}9a^2-\frac{x}{9a}\cdot3a\cdot3a\cdot\frac{1}{2}=0$.

$\Leftrightarrow2a^2-\frac{5}{2}ax=0\Leftrightarrow x=\frac{4a}{5}$. Vậy $x=\frac{4a}{5}$ thì $AM\perp PN$.

Nguyenducloi qv2@gmail.com

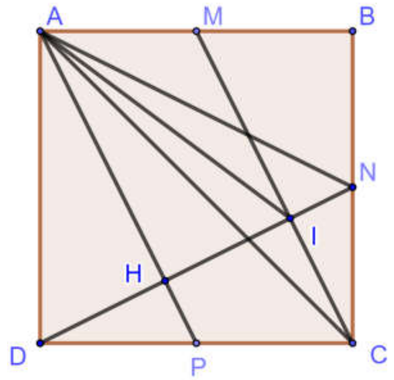
Câu 336: Cho tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi M là trung điểm AB và I là điểm di động trên đường thẳng MC. Khi $\left|2\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{AC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính tỉ số $\frac{AC}{AI}$.

A. $\frac{AC}{AI}=1$. **B.** $\frac{AC}{AI}=\sqrt{2}$. **C.** $\frac{AC}{AI}=2$. **D.** $\frac{AC}{AI}=\frac{3}{2}$.

(Họ và tên tác giả: Nguyễn Đức Lợi, Tên FB: Nguyễn Đức Lợi)

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm BC.

Có $\left|2\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IA}\right|=\left|\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right|=2IN.$

Do đó $\left|2\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{AC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi I là hình chiếu vuông góc của N trên MC.

Dựng hình vuông $ABCD$. Gọi P là trung điểm CD và H là giao điểm của AP với DN.

Dễ dàng chứng minh được $DN \perp CM \Rightarrow I \in DN$.

Lại có tứ giác $AMCP$ là hình bình hành, suy ra $AP//CM$.

Do đó $AP \perp DI$ và H là trung điểm DI. Suy ra tam giác AID cân tại A.

Vậy $\dfrac{AC}{AI}=\dfrac{AC}{AD}=\sqrt{2}.$

Email: buivuongphung@gmail.com

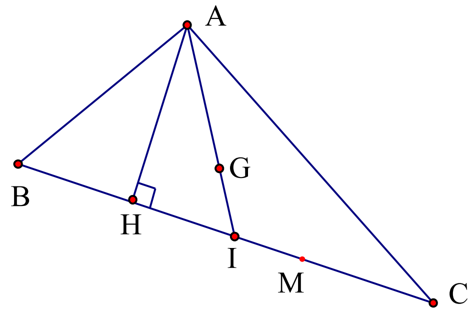
Câu 337: Cho ΔABC có trọng tâm G, H là chân đường cao kẻ từ A sao cho $\overrightarrow{BH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm M di động trên BC sao cho $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|$ nhỏ nhất.

A. $\dfrac{6}{5}$ **B.** $\dfrac{5}{4}$ **C.** $\dfrac{4}{5}$ **D.** $\dfrac{5}{6}$

Lời giải

Họ tên: Vũ Thị Chuyền FB: Vũ Thị Chuyền

Chọn **D**



Gọi I là trung điểm cạnh BC.

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{MC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{IA}$$

$$=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HA}\right)$$

$$=\overrightarrow{BC}-x\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}.\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{HA}$$

$$=\left(\frac{5}{6}-x\right)\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{HA}$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|^2=\left(\frac{5}{6}-x\right)^2BC^2+\frac{4}{9}HA^2\geq\frac{4}{9}HA^2$

Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{5}{6}$.

Email: nguyenthitrangtnh@gmail.com

Câu 338: Cho tam giác ABC, nhọn, không cân và nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi G và M lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và trung điểm cạnh BC. Cho đường thẳng OG vuông góc với đường thẳng OM tính giá trị biểu thức $AC^2+AB^2+2BC^2$ theo R.

A. $8R^2$. **B.** $10R^2$. **C.** $12R^2$. **D.** $14R^2$.

Lời giải

Họ và tên: Nguyễn Thị Trăng Fb: Trăng Nguyễn

Áp dụng quy tắc trọng tâm và quy tắc trung điểm ta có:

$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$, $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$. Khi đó

$$OG\perp OM\Rightarrow\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OM}=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+2R^2=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(2R^2-AB^2\right)+\frac{1}{2}\left(2R^2-AC^2\right)+2R^2-BC^2+2R^2=0$$

(chú ý $\vec{a}.\vec{b} = \dfrac{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2}{2}$)

$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 + 2BC^2 = 12R^2$

Email: phamhongquangltv@gmail.com

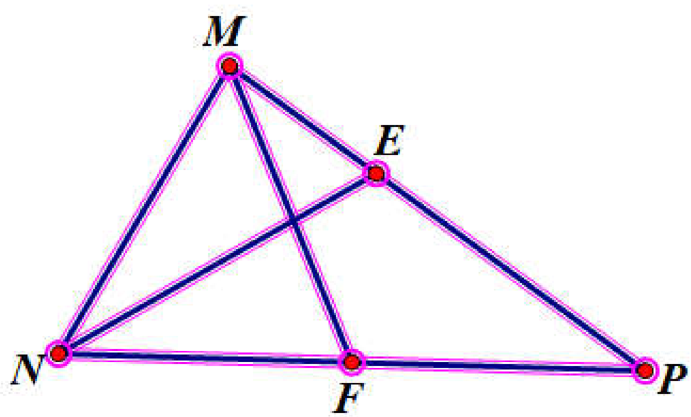
Câu 339: Cho tam giác MNP có MN=4,MP=8, $\widehat{M} = 60^0$ Lấy điểm E trên tia MP và đặt $\overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{MP}$.Tìm k để NE vuông góc với trung tuyến MF của tam giác MNP.

A. k=$\dfrac{2}{3}$. **B.** k=$\dfrac{2}{5}$. **C.** k=$\dfrac{1}{3}$. **D.** k=$\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Họ và tên tác giả: Phạm Hồng Quang Tên FB: Quang Phạm

Chọn B



Ta có: $\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{MF} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN})$

$NE \perp MF \Leftrightarrow (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}).(k\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}) = 0$

$\Leftrightarrow . k = \dfrac{\overrightarrow{MN}.(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN})}{\overrightarrow{MP}.(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN})} = \dfrac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}^2}{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MP}^2} = \dfrac{16+16}{64+16} = \dfrac{2}{5}$.

(Email): Khueninhbinh2004@gmail.com

Câu 340: Đẳng thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC}$ đúng với mọi điểm M. Khi đó tứ giác ABCD là hình gì.

A. Hình thang vuông. **B.** Hình chữ nhật.
C. Hình thoi. **D.** Tứ giác có hai đường chéo vuông góc.

Lời giải

(Họ và tên tác giả: Phạm Trung Khuê, Tên FB: Khoi Pham)

Chọn B

Đẳng thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC}$ đúng với mọi điểm M

Cho M trùng với A,B ta được $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AB\perp BC\\ AB\perp AD\end{cases}$

Cho M trùng với C ta được

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BC}\Rightarrow\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right).\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$ (vì $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$)

$\Rightarrow\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0\Rightarrow\overrightarrow{CB}.\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\right)=0\Rightarrow\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow CB\perp CD$

Vậy tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

Email: dacgiap@gmail.com

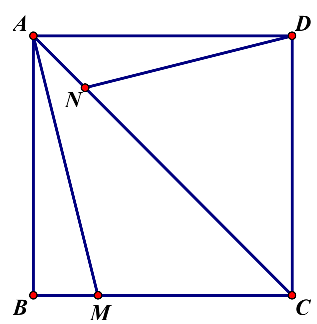
Câu 341: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi M,N lần lượt thuộc các đoạn thẳng BC và AC sao cho $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{CN}=k\overrightarrow{AN}$ và $AM\perp DN$. Khi đó k thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(3;5)$. **B.** $(-5;-3)$. **C.** $(-4;-2)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Họ và tên: Nguyễn Đắc Giáp Facebook: dacgiap

Chọn B



Ta có: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$;

Từ $\overrightarrow{CN}=k\overrightarrow{AN}$ và N nằm giữa hai điểm A,C nên suy ra $k<0$ và $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{1-k}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{1-k}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$

$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{1-k}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$

$AM\perp DN\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DN}=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{DA}+\frac{1}{1-k}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\right)=0$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA}+\frac{1}{1-k}\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\right)+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}+\frac{1}{4(1-k)}\left(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5a^2}{4(1-k)}-\frac{a^2}{4}=0 \Leftrightarrow k=-4.$$

Email: nnqman235@gmail.com

Câu 342: Cho hai vector $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{7},\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2$, vector $(3\vec{a}+\vec{b})$ vuông góc với $(\vec{a}-\vec{b})$. Tính *cosin* của góc tạo bởi hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Họ và tên tác giả: Ngô Nguyễn Quốc Mẫn Tên FB: Ngonguyen Quocman

Chọn B

Ta có $\begin{cases}\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{7}\\ \left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2\\ (3\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{a}^2+4\vec{b}^2-4\vec{a}.\vec{b}=7\\ \vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}.\vec{b}=4\\ 3\vec{a}^2-\vec{b}^2-2\vec{a}.\vec{b}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{a}^2=1\\ \vec{b}^2=2\\ \vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\end{cases}$.

Suy ra $\cos(\vec{a};\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 343: Giả sử O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh $BC=a;CA=b;AB=c$. Tìm giá trị biểu thức: $K=\frac{OA^2}{b.c}+\frac{OB^2}{c.a}+\frac{OC^2}{a.b}$

A. $K=\frac{1}{2}$ **B.** $K=\frac{1}{3}$ **C.** $K=1$ **D.** $K=\frac{1}{4}$

Lời giải

Áp dụng tính chất đường phân giác vào các phân giác OA,OB,OC ta luôn có:

$a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC}=0$. Từ đó

$\left(a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow a^2OA^2+b^2OB^2+c^2OC^2+2.a.b\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+2b.c.\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+2.c.a.\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}=0$

Vì $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}\Rightarrow\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)^2=c^2\Rightarrow 2.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OA^2+OB^2-c^2$

Tương tự ta có:

$a^2OA^2+b^2OB^2+c^2OC^2+ab\left(OA^2+OB^2-c^2\right)+bc\left(OB^2+OC^2-a^2\right)+ca\left(OC^2+OA^2-b^2=0\right)$

$\Leftrightarrow\left(a+b+c\right)\left(aOA^2+bOB^2+cOC^2\right)=abc\left(a+b+c\right)$

$\Leftrightarrow\dfrac{OA^2}{bc}+\dfrac{OB^2}{ac}+\dfrac{OC^2}{ab}=1$

Chọn đáp án **C.** $K=1$

Họ và tên: Lê Thái Bình

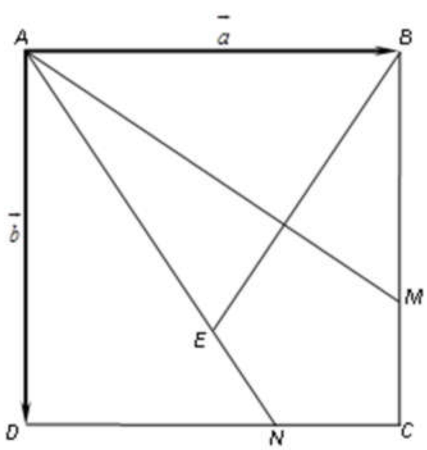
Email: lebinhle80@gmail.com

Facebook: Lê Thái Bình

Câu 344: Cho hình vuông *ABCD*. *M*, *N* lần lượt nằm trên hai cạnh *BC* và *CD* sao cho $\dfrac{CM}{CB}=\dfrac{CN}{CD}=\dfrac{1}{3}$. Gọi *E* là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AN}$. Khi $BE\perp AM$. Tính giá trị biểu thức $T=k^2-k+1$.

A. $\dfrac{13}{16}$ **B.** $\dfrac{7}{9}$ **C.** $\dfrac{8}{9}$ **D.** $\dfrac{5}{16}$

Lời giải.



Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a};\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

Ta có

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}+k\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BA}+k\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\right)$

$=-\vec{a}+k\left(\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{a}\right)=\dfrac{2k-3}{3}\vec{a}+k\vec{b}$

và $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$.

Khi đó $BE\perp AM\Leftrightarrow\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow\dfrac{2k-3}{3}+\dfrac{2}{3}k=0\Leftrightarrow k=\dfrac{3}{4}$.

Câu 345: Cho hình vuông ABCD, điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \dfrac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm CD. Tam giác BMN là

A. **Tam giác đều.** **B.** **Tam giác cân.**
C. **Tam giác Vuông.** **D.** **Tam giác vuông cân**

Lời giải

Huỳnh Kim Linh GV Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn Khánh Hòa

Chọn D

Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

Khi đó: $\overrightarrow{MB} = \dfrac{1}{4}\left(-\vec{a} + 3\vec{b}\right)$

$\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}); \quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \vec{a} + \dfrac{\vec{b}}{2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{4}(3\vec{a} + \vec{b})$

Ta có: $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{16}(-\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} + \vec{b})$

$= \dfrac{1}{16}(-3\vec{a}^2 + 3\vec{b}^2 + 8\vec{a}.\vec{b}) = 0 \Rightarrow MB \perp MN \quad (1)$

$\overrightarrow{MB}^2 = \dfrac{1}{16}(-\vec{a} + 3\vec{b})^2 = \dfrac{1}{16}(\vec{a}^2 + 9\vec{b}^2 - 6\vec{a}.\vec{b}) = \dfrac{5}{8}\vec{a}^2$

$\overrightarrow{MN}^2 = \dfrac{1}{16}(3\vec{a} + \vec{b})^2 = \dfrac{1}{16}(9\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 6\vec{a}.\vec{b}) = \dfrac{5}{8}\vec{a}^2$

Suy ra $MB = MN \quad (2)$

Vậy MB vuông góc với MN và MB =MN, tam giác BMN vuông cân tại đỉnh M

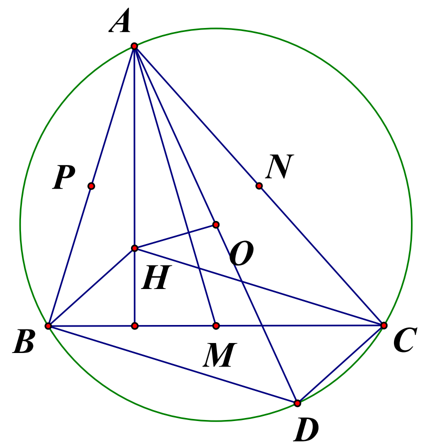
(Email): luongthanh80tm@gmail.com

Câu 346: Cho tam giác ABC. Gọi H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, c sao cho OH vuông góc với trung tuyến vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC.

A. $2a^2 = b^2 + c^2$. **B.** $2b^2 = a^2 + c^2$. **C.** $2c^2 = a^2 + b^2$. **D.** $b^2 = 2a^2 + 2c^2$.

Lời giải

Chọn A



Gọi AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Chứng minh được tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.

Nên $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$

Ta có O là trung điểm của đoạn AD nên $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$

Suy ra $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

Ta có: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AH}$; tương tự $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BH};\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CH}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC , CA và AB .

$OH\perp AM \Leftrightarrow \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AM}=0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$

$\Leftrightarrow (3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=0$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=0$

$\Leftrightarrow -3AB.AP-3AC.AN+AB^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+AC^2=0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{3c^2}{2}-\dfrac{3b^2}{2}+c^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+b^2=0$

Lại có: $a^2=\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=b^2+c^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=b^2+c^2-a^2$

Suy ra: $2a^2=b^2+c^2$.

(Sưu tầm, Họ và tên: Nguyễn Lương Thành, Tên FB:* luongthanh.nguyen.7*)

Câu 347: Cho tam giác ABC có AD là trung tuyến, G là trọng tâm. Một đường thẳng qua G cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC}$

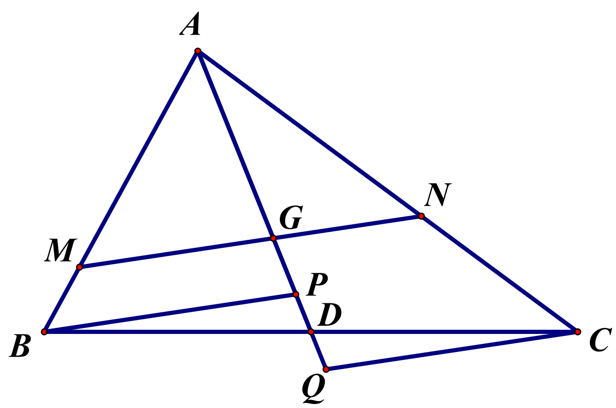
B. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC}$

C. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC})$

D. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC})$

Lời giải

Chọn B



Trước hết ta chứng minh $\frac{BM}{AM}+\frac{CN}{AN}=1(1)$

Thật vậy, kẻ $\begin{cases} BP//MN \\ CQ//MN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{BM}{AM}=\frac{PG}{AG} \\ \frac{CN}{AN}=\frac{QG}{AG} \end{cases}$

Do đó $(1) \Leftrightarrow \frac{PG}{AG}+\frac{QG}{AG}=1 \Leftrightarrow PG+QG=AG \Leftrightarrow (GD-PD)+(GD+DQ)=AG$

$\Leftrightarrow 2GD=AG$ **(luôn đúng)**

Vậy ta có $\frac{BM}{AM}+\frac{CN}{AN}=1$

$BM.AN+CN.AM=AM.AN$

$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB}}{\cos A}+\frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC}}{\cos A}=\frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}}{\cos A}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC}$ **(Do** $\cos A\neq 0$ **)**

Họ và tên:Phan Thông

Email:quocthong1182@gmail.com

Facebook:Quocthongphan

Câu 348: Cho hình chữ nhật ABCD có cạnh AB=2 và AD=4.Gọi M là trung điểm của cạnh AB và N là điểm trên cạnh AD sao cho $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AD}$,CM vuông góc với BN.Khi đó k thuộc vào khoảng nào sau đây

A. $\left(0;\frac{1}{16}\right)$ **B.** $\left(\frac{1}{16};\frac{1}{20}\right)$ **C.** $\left(\frac{1}{20};\frac{1}{9}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{6}\right)$

Giải: Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$

Ta có $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}=-\vec{a}+k\vec{b}$

Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BN}=0 \Leftrightarrow \left(-\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right).\left(-\vec{a}+k\vec{b}\right)=0 \Leftrightarrow -16k+\frac{1}{2}.4=0 \Leftrightarrow k=\frac{1}{8}$

Họ và tên tác giả: Phạm Hồng Quang Tên FB: Quang Phạm

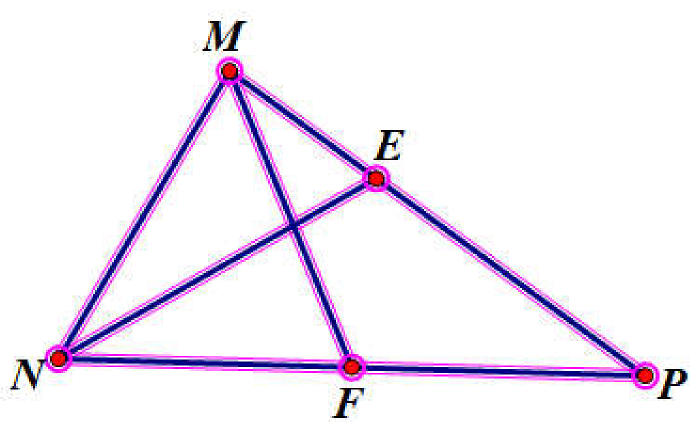
Email: phamhongquangltv@gmail.com

Câu 349: Cho tam giác MNP có MN=4,MP=8, $\widehat{M}=60^0$ Lấy điểm E trên tia MP và đặt $\overrightarrow{ME}=k\overrightarrow{MP}$.Tìm k để NE vuông góc với trung tuyến MF của tam giác MNP.

A. k=$\frac{2}{3}$. **B.** k=$\frac{2}{5}$. **C.** k=$\frac{1}{3}$. **D.** k=$\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{ME}=k\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MN})$

$NE\perp MF \Leftrightarrow (\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MN}).(k\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{MN})=0$

$$\Leftrightarrow .\,\mathrm{k} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{MN}}.(\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MN}})}{\overrightarrow{\mathrm{MP}}.(\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MN}})} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{MN}}.\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MN}}^2}{\overrightarrow{\mathrm{MN}}.\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}}^2} = \frac{16+16}{64+16} = \frac{2}{5}.$$

Câu 350: Cho tam giác ABC có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. M là trung điểm của BC, D là chân đường phân giác trong góc A. Tính $\overrightarrow{AD}^2$

A. $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4c}{(b+c)^2}p(p-a)$.

B. $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}(p-a)$.

C. $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b-c)^2}p(p-a)$.

D. $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$

(Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Phương Thảo, Tên FB: Nguyễn Thị Phương Thảo)

Lời giải

Chọn D

Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2\right)$

Ta lại có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)$ nên

$$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(c^2 + 2.\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)+b^2\right) = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$$

Theo tính chất đường phân giác thì $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$

Suy ra $\overrightarrow{BD} = \frac{BD}{DC}\overrightarrow{DC} = \frac{b}{c}\overrightarrow{DC}$ (*)

Mặt khác $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$ thay vào (*) ta được

$$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB} = \frac{b}{c}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right) \Leftrightarrow (b+c)\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2\overrightarrow{AD}^2 = \left(b\overrightarrow{AB}\right)^2 + 2bc\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} + \left(c\overrightarrow{AC}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2\overrightarrow{AD}^2 = b^2c^2 + 2bc.\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)+c^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c-a)(b+c+a)$$

Hay $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$

Họ và tên tác giả: Nguyễn Văn Toản Tên FB: Dấu Vết Hát

Email: nguyenvantoannbk@gmail.com *Bài ở mức độ VD, nhờ thầy cô góp ý!*

Câu 351: Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$ và $\widehat{BAC} = 60^0$. Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NA}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa b và c để AM và CN vuông góc với nhau.

A. $6c^2 - 4b^2 - 5bc = 0$. **B.** $4c^2 - 5b^2 - 6bc = 0$.

C. $6c^2 - 5b^2 - 4bc = 0$. **D.** $4c^2 - 6b^2 - 5bc = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = -2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Tương tự ta cũng có: $3\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

Vậy:

$$AM \perp CN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CN} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow 2AB^2 - 3AC^2 - 5\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0.$$

$$\Leftrightarrow 2c^2 - 3b^2 - \frac{5bc}{2} = 0 \Leftrightarrow 4c^2 - 6b^2 - 5bc = 0.$$

Họ tên: Trần Ngọc Tên FB: Ngọc Trần

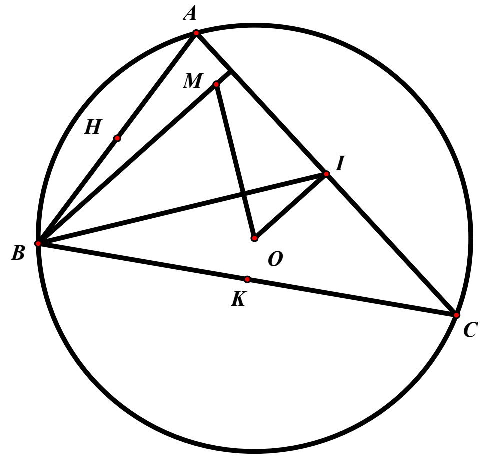
Email: soantailieutoanhoc2018@gmail.com

Câu 352: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi I là trung điểm của AC và M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}$. Biết rằng OM vuông góc với BI và $AC^2 = 3BC.BA$. Tính góc $\widehat{ABC}$.

A. $30°$. **B.** $45°$ **C.** $60°$. **D.** $120°$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $OM \perp BI \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BI}=0 \Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(5\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}\right)=0 \Leftrightarrow 5\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{BA}+5\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{BC}+2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)^2=0$

Gọi H,K tương ứng là trung điểm của đoạn AB,BC

Khi đó $5\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{BA}+5\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{BC}+2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)^2=0 \Leftrightarrow$

$5\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}\right).\overrightarrow{BA}+5\left(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KB}\right).\overrightarrow{BC}+2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}BC^2-\frac{5}{2}BC^2+2BA^2+2BC^2+2.2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}BA^2-\frac{1}{2}BC^2+\left(AB^2+BC^2-AC^2\right)=0 \Leftrightarrow AC^2=\frac{3}{4}\left(AB^2+BC^2\right).$

Do đó $\cos\widehat{ABC}=\dfrac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA.BC}=\dfrac{\frac{4}{3}AC^2-AC^2}{\frac{2}{3}AC^2}$. Suy ra $\widehat{ABC}=60°$.

Họ và tên tác giả: Đào Trung Kiên (st) Tên FB: kienyenthe

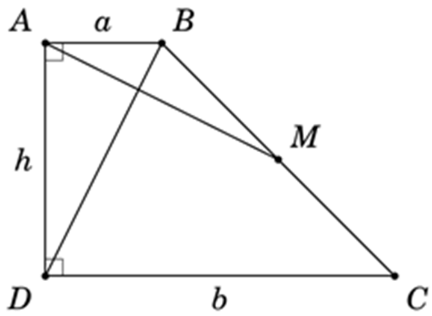
Email: kienyenthe@gmail.com

Câu 353: Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AD = h, đáy AB = a, đáy CD = b. Gọi M là trung điểm của B**C.** Hệ thức giữa a, b, h để $AM \perp BD$ là

A. $a^2-h^2-ab=0$. **B.** $h^2-a^2-ab=0$ **C.** $h^2-b^2-ab=0$. **D.** $b^2-h^2-ab=0$.

Lời giải

Chọn B



Ta có

$AM \perp BD \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{BD} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right)\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = 0$

$\Leftrightarrow -AB^2 + AD^2 - \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow h^2 - a^2 - ab = 0$

Họ và tên: Vũ Huỳnh Đức

Email: vutoanpvd@gmail.com

Facebook: vuhuynhduc2017

Câu 354: Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Gọi M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Gọi I là giao điểm của AM và CN. Tính diện tích của tam giác IBC theo a?

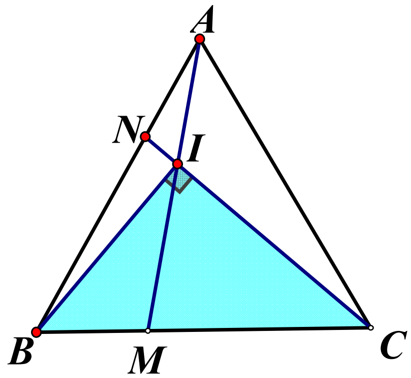
A. $S_{IBC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{7}$. **B.** $S_{IBC} = \frac{a^2\sqrt{7}}{7}$. **C.** $S_{IBC} = \frac{2a^2\sqrt{7}}{7}$. **D.** $S_{IBC} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

Chọn A

$\bullet I \in CN \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{R} : \overrightarrow{BI} = x\overrightarrow{BN} + y\overrightarrow{BC}$, x+y=1 $\Rightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{2x}{3}\overrightarrow{BN} + 3y\overrightarrow{BC}$, x+y=1

và do $I \in AM$ nên từ $\overrightarrow{BI} = \frac{2x}{3}\overrightarrow{BA} + 3y\overrightarrow{BC}$ ta cũng có $\frac{2x}{3} + 3y = 1$.



$\bullet \begin{cases} x+y=1 \\ \dfrac{2x}{3}+3y=1 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{6}{7},\ y=\dfrac{1}{7} \Rightarrow \overrightarrow{BI}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{7}\overrightarrow{BC}$ -

Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{CN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

- $\overrightarrow{CN}.\overrightarrow{BI}=\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right).\left(\dfrac{4}{7}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{7}\overrightarrow{BC}\right)$

$$=\frac{8}{21}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}+\frac{4}{21}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB}+\frac{2}{21}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\frac{1}{21}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CB}=0$$

$\Rightarrow \Delta BIC$ vuông tại I.

$\bullet \overrightarrow{BI}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{7}\overrightarrow{BC} \Rightarrow BI^2=\left(\dfrac{4}{7}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{7}\overrightarrow{BC}\right)^2=\dfrac{21}{49}a^2$

$\bullet IC^2=BC^2-BI^2=a^2-\dfrac{21}{49}a^2=\dfrac{28}{49}a^2 \Rightarrow IC=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}a$

Vậy $S_{IBC}=\dfrac{1}{2}BI.IC=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{7}$.

Họ và tên tác giả: Huỳnh Thanh Tịnh Tên FB: huynhthanhtinh

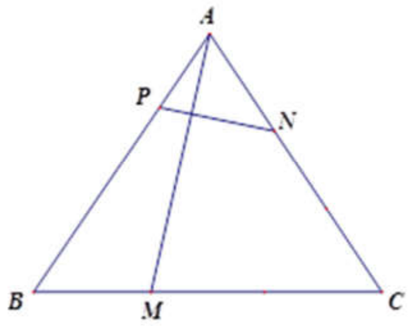
Email: huynhthanhtinhspt@gmail.com

Câu 355: Cho tam giác đều ABC và các điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{BM}=k\,\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP}=\dfrac{4}{15}\overrightarrow{AB}$. Tìm k để AM vuông góc với PN.

A. $k=\dfrac{1}{3}$ **B.** $k=\dfrac{1}{2}$ **C.** **D.** $k=\dfrac{3}{4}$

Lời giải

Chọn A



$\overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=k(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$

+) $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AP}=-\frac{4}{15}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Để AM vuông góc với PN thì $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{PN}=0$

$$\Leftrightarrow\left[(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}\right]\left(-\frac{4}{15}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{-4(1-k)}{15}AB^2+\frac{k}{3}AC^2+\left(\frac{1-k}{3}-\frac{4k}{15}\right)\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{-4(1-k)}{15}+\frac{k}{3}+\left(\frac{1-k}{3}-\frac{4k}{15}\right)\cos60^0=0$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{1}{3}$$

Email: duyhung2501@gmail.com

Câu 356: : Giả sử O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh $BC=a;CA=b;AB=c$. Tìm giá trị biểu thức: $K=\frac{OA^2}{b.c}+\frac{OB^2}{c.a}+\frac{OC^2}{a.b}$

A. $K=\frac{1}{2}$ **B.** $K=\frac{1}{3}$ **C.** $K=1$ **D.** $K=\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn C

Áp dụng tính chất đường phân giác vào các phân giác OA,OB,OC ta luôn có:

$a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC}=0$. Từ đó

$\left(a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow a^2OA^2+b^2OB^2+c^2OC^2+2.a.b\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+2b.c.\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+2.c.a.\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}=0$

Vì $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}\Rightarrow\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)^2=c^2\Rightarrow 2.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OA^2+OB^2-c^2$

Tương tự ta có:

$$a^2OA^2+b^2OB^2+c^2OC^2+ab\left(OA^2+OB^2-c^2\right)+bc\left(OB^2+OC^2-a^2\right)+ca\left(OC^2+OA^2-b^2=0\right)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(aOA^2+bOB^2+cOC^2\right)=abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{OA^2}{bc}+\frac{OB^2}{ac}+\frac{OC^2}{ab}=1$$

Chọn đáp án **C.** $K=1$

Người sưu tầm: Tăng Duy Hùng. FB: Hùng Tăng

Họ và tên: Nguyễn Thị Huệ FB: Nguyễn Thị Huệ

Gmail: nguyenthihue1611@gmail.com

Câu 357: Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn các điều kiện $\left|\vec{a}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{b}\right|=1$, $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{15}$. Đặt $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{v}=2k\vec{a}-\vec{b},\ k\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của k sao cho $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=60^0$.

A. $k=4+\frac{3\sqrt{5}}{2}$. **B.** $k=4\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}$. **C.** $k=5+\frac{\sqrt{17}}{2}$. **D.** $k=5\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Lời giải. Chọn A

Từ giả thiết $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{15}\Leftrightarrow\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)^2=15\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}$.

$$\vec{u}.\vec{v}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(2k\vec{a}-\vec{b}\right)=3k-\frac{9}{2},\ \left|\vec{u}\right|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{6},\left|\vec{v}\right|=\sqrt{\vec{v}^2}=\sqrt{4k^2-2k+4}$$

$$\left(\vec{u},\vec{v}\right)=60^0\Leftrightarrow\frac{3k-\frac{9}{2}}{\sqrt{6}.\sqrt{4k^2-2k+4}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=4+\frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

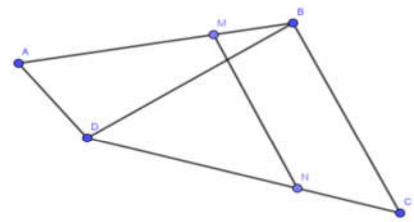
Họ và tên tác giả: Lê Thị Nguyệt Tên FB: NguyệtLê

Email: Lenguyet150682@gmail.com

Câu 358: Cho tứ giác $ABCD$, hai điểm M,N thỏa mãn $2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}=\vec{0};2\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$ và $\frac{AD}{BC}=x$. Tính $\frac{\cos\widehat{DBC}}{\cos\widehat{ADB}}$ theo x để $MN\perp BD$.

A. $\frac{x}{2}$. **B.** $-\frac{x}{2}$. **C.** $\frac{x}{\sqrt{3}}$. **D.** $x\sqrt{3}$.

Lời giải



Phân tích: Ta thấy $\begin{matrix} MN \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD} = 0; \\ \widehat{DBC} = \left(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BC}\right); \widehat{ADC} = \left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BD}\right) \end{matrix}$ nên cần phân tích $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Giải. Ta có biểu diễn

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NA}\right) + \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AN}$$
$$= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}\right) + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

Vậy $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Do đó

$MN \perp BD \Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow 2BC.\cos\widehat{DBC} + AD.\cos\widehat{ADB} = 0$.

Suy ra $\dfrac{\cos\widehat{DBC}}{\cos\widehat{ADB}} = -\dfrac{AD}{2BC} = -\dfrac{x}{2}$. Đáp án **B.**

Họ và tên tác giả: Trần Thanh Hà Tên FB: Hatran

Email: tranthanhha484@gmail.com

Câu 359: Cho tam giác ABC có $AB = 6; BC = 7; CA = 5$. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AM = 2MB$ và N là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$ $(k \in \mathbb{R})$. Biết $k = -\dfrac{a}{b}$ ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, a,b là các số nguyên) sao cho đường thẳng CM vuông góc với đường thẳng BN.

Tính giá trị biểu thức $T = 2018a - 2019b + 5$.

A. $T = 2017$. **B.** $T = -2020$. **C.** $T = 2030$. **D.** $T = -2030$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Suy ra: $\overrightarrow{CM}\,\overrightarrow{BN} = \dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})(k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \dfrac{2k}{3}\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2 - k\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}$

$\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{CB}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = 6$

$BN \perp CM \Leftrightarrow k = -\dfrac{6}{7}$

Theo giả thiết, ta có: $a = 6;\ b = 7 \Rightarrow T = 2018.6 - 2019.7 + 5 = -2020$.

Họ và tên tác giả: Đỗ Thế Nhất Tên FB: Đỗ Thế Nhất

Email: nhatks@gmail.com

Câu 360: Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$ và $\widehat{BAC} = 60^0$. Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NA}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa b và c để AM và CN vuông góc với nhau.

A. $6c^2 - 5b^2 - 4bc = 0$ **B.** $c^2 - 6b^2 - 5bc = 0$

C. $4c^2 - 6b^2 - 5bc = 0$ **D.** $4c^2 + 6b^2 - 5bc = 0$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = -2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Tương tự ta cũng có: $3\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

Vậy: $AM \perp CN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = 0$

$\Leftrightarrow (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow 2AB^2 - 3AC^2 - 5\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow 2c^2 - 3b^2 - \dfrac{5bc}{2} = 0 \Leftrightarrow 4c^2 - 6b^2 - 5bc = 0$

Câu 361: Cho hình chữ nhật ABCD có AB= a, AD=2a. Gọi M là trung điểm AB, N là điểm trên cạnh AD sao cho $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AN}$. Tìm k để CM $\perp$ BN.

A. k=7,9 **B.** k=8 **C.** k=8,1 **D.** k=7.8

Lời giải

Chọn B

giải: Ta có $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AD} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{k}\overrightarrow{AD}$$

Để CM⊥BN thì $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BN} = 0$

$$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BN} = \left(-\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{k}\overrightarrow{AD}\right)$$

Mà $= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} - \frac{1}{k}\overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{2k}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$= -\frac{1}{k}\overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = -\frac{1}{k}(2a)^2 + \frac{1}{2}a^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BN} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{k}(2a)^2 + \frac{1}{2}a^2 = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{4}{k} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 8$

Vậy $k = 8$ thì $CM \perp BN$

Họ và tên tác giả: Nguyễn Ngọc Duy Tên FB: Ngọc Duy

Email: nguyenngocduyakgl@gmail.com

Câu 362: Cho hình bình hành $ABCD$ có đường chéo lớn là AC. Gọi E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên AB,AD. Biểu thức nào sau đây là đúng.

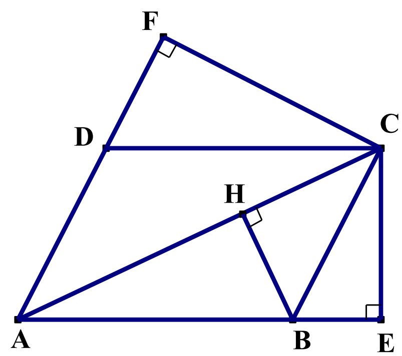
A. $AB.AH + AD.AF = AC^2$. **B.** $AB.AE + AD.AF = AC^2$.

C. $AB.AE + AD.AH = AC^2$. **D.** $AB.AE + AD.AF = AC.AH$.

Lời giải

Chọn B

Vì E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên AB,AD nên ta có:



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

Suy ra: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AC}^2$ (*)

Do AC là đường chéo lớn nên $\widehat{ABC} \geq 90^0$ và B nằm giữa hai điểm A,E. Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = AB.AE$

Tương tự ta có: D nằm giữa hai điểm A,F. Suy ra $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AF} = AD.AF$

Vậy đẳng thức (*) trở thành: $AB.AE + AD.AF = AC^2$.

Email: thuy.tranthithanhdb@gmail.com

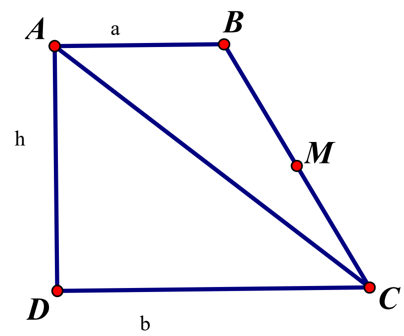
Câu 363: Cho hình thang vuông $ABCD$, đường cao $AD = h$, cạnh đáy $AB = a, CD = b$. Tìm hệ thức giữa a, b, h để BD vuông góc trung tuyến AM của tam giác ABC.

A. $h^2 = a(a+b)$. **B.** $h^2 = a(b-a)$.

C. $h(h+b) = a(a+b+h)$. **D.** $2h^2 = a(a+b)$

Lời giải

Chọn A



Thay $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}.\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$, ta có:

$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$ (1)

mà $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = -\overrightarrow{AB}^2 = -a^2$

và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right)\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = h^2 - ab$

nên: $(1) \Leftrightarrow h^2 = a(a+b)$.

Họ và tên tác giả: Nguyễn Quang Nam Tên FB: Quang Nam

Email: quangnam68@gmail.com

Câu 364: Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O, R), M là điểm chính giữa cung BC (cung BC không chứa điểm A). Chọn đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau:

A. $MA = MB.\sin C + MC.\sin B$ **B.** $MA = MB.\cos C + MC.\cos B$

C. $MA = MB.\sin B + MC.\sin C$ **D.** $MA = MB.\cos B + MC.\cos C$

Lời giải:

Chọn C

Ta có $2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MA} = MA^2 \Rightarrow 2\overrightarrow{MO}.\frac{\overrightarrow{MA}}{MA} = MA \Rightarrow 2\sin A.\overrightarrow{MO}.\frac{\overrightarrow{MA}}{MA} = \sin A.MA$ (1)

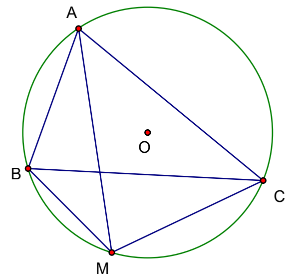
Tương tự $2\sin B.\overrightarrow{MO}.\frac{\overrightarrow{MB}}{MB} = \sin B.MB$ (2), $2\sin C.\overrightarrow{MO}.\frac{\overrightarrow{MC}}{MC} = \sin C.MC$ (3)

Từ (1), (2) và (3):

$-\sin A.MA+\sin B.MB+\sin C.MC=$

$=2\overrightarrow{MO}(-\sin A.\dfrac{\overrightarrow{MA}}{MA}+\sin B.\dfrac{\overrightarrow{MB}}{MB}+\sin C.\dfrac{\overrightarrow{MC}}{MC})=$

$=2\overrightarrow{MO}.\vec{0}=0$



Ta sẽ chứng minh $-\sin A.\dfrac{\overrightarrow{MA}}{MA}+\sin B.\dfrac{\overrightarrow{MB}}{MB}+\sin C.\dfrac{\overrightarrow{MC}}{MC}=\vec{0}$ (*)

Thật vậy, (*) $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}MB.MC.\sin A.\overrightarrow{MA}+\dfrac{1}{2}MA.MC.\sin B.\overrightarrow{MB}+\dfrac{1}{2}MB.MA.\sin C.\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow -S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ (đúng)

(với S_a, S_b, S_c lần lượt là diện tích các tam giác MBC, MAC, MAB)

Vậy $-MA.\sin A+MB.\sin B+MC.\sin C=0 \Leftrightarrow MA.\sin A=MB.\sin B+MC.\sin C$ (*)

Theo bài ra: $\sin A=\sin 90^0=1$ thay vào (*): $MA=MB.\sin B+MC.\sin C$

Họ Tên: Lương Thị Hương Liễu Tên FB: Hương Liễu Lương

Email: lieuluong.290983@gmail.com

Câu 365: Cho tam giác ABC có $BC=a,\ CA=b,\ AB=c$. M là trung điểm của BC, D là chân đường phân giác trong góc $\widehat{A}$. Tính $\overrightarrow{AD}^2$

A. $\overrightarrow{AD}^2=\dfrac{4c}{(b+c)^2}p(p-a)$

B. $\overrightarrow{AD}^2=\dfrac{4bc}{(b+c)^2}(p-a)$

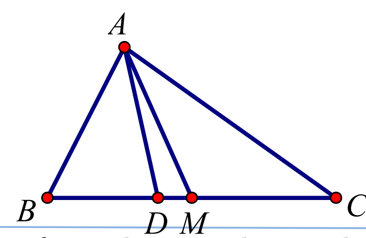
C. $\overrightarrow{AD}^2=\dfrac{4bc}{(b-c)^2}p(p-a)$

D. $\overrightarrow{AD}^2=\dfrac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$

Lời giải

Chọn D

* Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$



Hình 2.3

Suy ra $\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2\right)$

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2\right]$

$= \frac{1}{2}\left[AB^2 + AC^2 - CB^2\right] = \frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)$ nên

$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(c^2 + 2.\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)+b^2\right) = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$

* Theo tính chất đường phân giác thì $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$

Suy ra $\overrightarrow{BD} = \frac{BD}{DC}\overrightarrow{DC} = \frac{c}{b}\overrightarrow{DC}$ (*)

Mặt khác $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ thay vào (*) ta được

$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{c}{b}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right) \Leftrightarrow \left(b+c\right)\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \left(b+c\right)^2\overrightarrow{AD}^2 = \left(b\overrightarrow{AB}\right)^2 + 2bc\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} + \left(c\overrightarrow{AC}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(b+c\right)^2\overrightarrow{AD}^2 = b^2c^2 + 2bc.\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right) + c^2b^2$

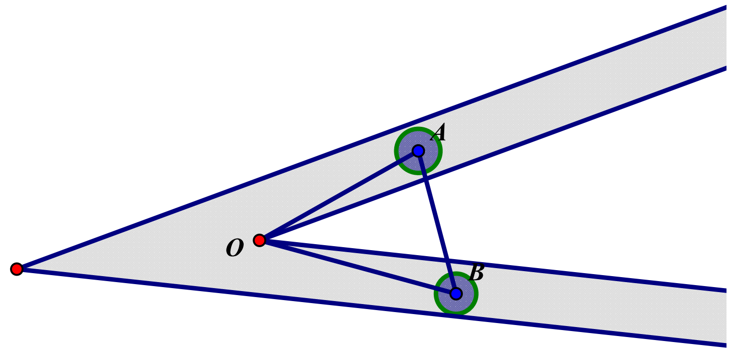
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \frac{bc}{\left(b+c\right)^2}\left(b+c-a\right)\left(b+c+a\right)$

Hay $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{\left(b+c\right)^2}p\left(p-a\right)$

Họ và tên tác giả: Phạm Thành Trung Tên FB: Phạm Thành Trung

Email: trungthuong2009@gmail.com

Câu 366: Trong cuộc thi giải trí toán học tổ chức nhân dịp hoạt động chào mừng Ngày nhà giáo Việt Nam có một trò chơi như sau: Người ta thiết kế hai đường ray tạo với nhau một góc 30^0 như hình vẽ dưới đây. Trên các đường thẳng Ox và Oy người ta để hai vật nặng cùng trọng lượng. Buộc hai vật thể với nhau bằng một thanh cứng $AB = 1m$ sao cho mỗi vật đều có thể chuyển động được trên hai đường ray. Nối hai vật bằng một sợi giây vòng qua một cột có gốc tại O. Người tham dự cuộc thi sẽ đứng tại vị trí điểm B để kéo vật thể chuyển động trên Oy. Người thắng cuộc sẽ là người kéo được vật thể ra xa nhất so với điểm gốc O. Hãy dùng kiến thức toán học để tính toán vị trí xa nhất mà người tham dự cuộc thi có thể đạt được.



A. $1m$. **B.** $2m$. **C.** $\sqrt{3}m$. **D.** $\sqrt{2}m$.

Lời giải

Chọn B

+ Đặt $OB = x; OA = y(x, y > 0)$. Khi đó theo định lý cosin ta có:

$AB^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 30^0 = x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy$

Do đó ta có hệ thức: $x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy = 1$

Xét phương trình bậc hai: $y^2 - \sqrt{3}xy + x^2 - 1 = 0$

Phương trình có nghiệm y khi $\Delta = 3x^2 - 4(x^2 - 1) \ge 0 \Leftrightarrow 0 < x \le 2$

Vậy học vị trí xa nhất mà học sinh có thể đạt được cách O một khoảng là $2m$

Câu 367: Cho tam giác ABC có $AB= c, BC=a, CA=b$. Trung tuyến CM vuông góc với phân giác trong AL và $\dfrac{CM}{AL} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Tính $\cos A$.

A. $\cos A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\cos A = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ **C.** $\cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\cos A = \dfrac{1}{2}$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AL} = \dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{CM} = \dfrac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}}{2}$

Theo giả thiết: $AL \perp CM \Leftrightarrow \overrightarrow{AL}.\overrightarrow{CM} = 0$

$\Leftrightarrow \left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}\right) = 0 \Leftrightarrow bc^2 + bc^2\cos A - 2cb^2\cos A - 2cb^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(c - 2b\right)\left(1 + \cos A\right) = 0 \Rightarrow c = 2b \; (do \cos A > -1)$

Khi đó: $CM^2 = \dfrac{b^2 + a^2}{2} - \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{a^2 - b^2}{2}$

$$AL^2=\frac{1}{9}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{9}\left(AB^2+AC^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{9}\left(9b^2-a^2\right)$$

$$\frac{CM}{AL}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\frac{CM^2}{AL^2}=\frac{9}{4}.\frac{a^2-b^2}{9b^2-a^2}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow a^2=3b^2$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5b^2-a^2}{4b^2}=\frac{1}{2}$$

doantv.toan@gmail.com

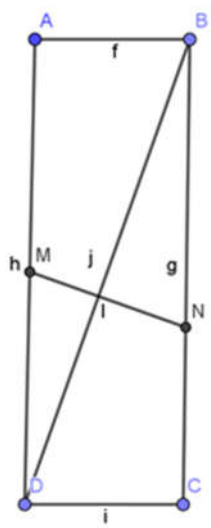
Câu 368: Cho hình chữ nhật ABCD có $AB=1;CD=3$. Điểm M thuộc cạnh AD và N là trung điểm BC sao cho $MN\perp BD$. Phân số tối giản $\frac{m}{n}=\frac{BN}{NC}$ có $m+n$ bằng bao nhiêu

A. 29. **B.** 18. **C.** 16. **D.** 27.

(Họ và tên tác giả: Trần Văn Đoàn, Tên FB: Trần Văn Đoàn)

Lời giải

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$

$$\frac{m}{n}=\frac{BN}{NC}\Leftrightarrow\frac{BN}{BC}=\frac{m}{m+n}\Leftrightarrow\overrightarrow{BN}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\left(k-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{MN}=0$ nên $-1+9\left(k-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow k=\frac{11}{18}=\frac{11}{11+7}\Leftrightarrow m=11,n=7$

Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Thỏa Tên FB: Nguyễn Thị Thỏa

Email: phamquynhanhbaby56@gmail.com

Câu 369: Cho tam giác ABC có $AB = c$; $BC = a$, $CA = b$. Gọi M là trung điểm của AB và D là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC. Biết rằng trung tuyến CM vuông góc với phân giác trong AD. Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $b = 2c$. **B.** $c = 2b$. **C.** $a = b + c$. **D.** $c = a + b$.

Lời giải

Chọn B

Ta có D là chân đường phân giác trong góc A nên $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{b}$

và $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{DB} = -\dfrac{c}{b}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow b.\overrightarrow{DB} + c.\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

Ta có: $\overrightarrow{AD} = \dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$.

Vì CM là trung tuyến nên $\overrightarrow{CM} = \dfrac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}}{2}$.

Theo giả thiết: $AL \perp CM \Leftrightarrow \overrightarrow{AL}.\overrightarrow{CM} = 0$

$\Leftrightarrow \left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}\right) = 0 \Leftrightarrow bc^2 + bc^2\cos A - 2cb^2\cos A - 2cb^2 = 0$

$\Leftrightarrow (c - 2b)(1 + \cos A) = 0 \Rightarrow c = 2b$ ($do \cos A > -1$)

Vậy $c = 2b$.

Câu 370: Cho tam giác ABC đều nội tiếp (O;R). M là điểm bất kì trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Khi đó

A. $MA = MB + MC$ **B.** $MA > MB + MC$

C. $MA < MB + MC$ **D.** $MA = 2MB + MC$

Lời giải

Chọn A

Ta có
$$R^2 = OA^2 = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA})^2 = R^2 + MA^2 + 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}$$
$$\Rightarrow MA^2 + 2.\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MA} = 0 \Rightarrow MA + 2.\overrightarrow{OM}.\frac{\overrightarrow{MA}}{MA} = 0$$

Tương tự

$$MB + 2.\overrightarrow{OM}.\frac{\overrightarrow{MB}}{MB} = 0$$

$$MC + 2.\overrightarrow{OM}.\frac{\overrightarrow{MC}}{MC} = 0$$

Suy ra $-MA + MB + MC + 2\overrightarrow{OM}(-\dfrac{\overrightarrow{MA}}{MA} + \dfrac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \dfrac{\overrightarrow{MC}}{MC}) = 0$

Vì $-\frac{\overrightarrow{MA}}{MA};\frac{\overrightarrow{MB}}{MB};\frac{\overrightarrow{MC}}{MC}$ là các véc tơ đơn vị và đôi một tạo với nhau một góc 120^0 nên

$-\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}+\frac{\overrightarrow{MB}}{MB}+\frac{\overrightarrow{MC}}{MC}=\vec{0}$, do đó $-MA+MB+MC=0$