

**UBND TỈNH THÁI NGUYÊN
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

TOANMATH.com

Đề thi gồm có 01 trang

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 12

NĂM HỌC: 2020 – 2021

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (6,0 điểm)

- a) Tìm cực trị của hàm số $y = x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}$.
- b) Cho hàm số $y = -x^7 + m(2m - 3)x^4 + m(2m^2 - 5m + 3)x^2 + 2020$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 2. (6,0 điểm)

- a) Giải bất phương trình $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} \geq \frac{6x-4}{5\sqrt{x^2+1}}$.
- b) Giải phương trình $32 \cos^6\left(\frac{x}{2}\right) + \sin 3x = 3 \sin x$.

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $AD = 3a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = 4a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh SD và AD .

- a) Tính góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (BMN) .
- b) Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm B , M và song song với AC . Biết mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA , SC lần lượt tại hai điểm E , F . Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(BEMF)$.

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$ (tam giác ABC không cân). Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác ABC . $AD (D \in BC)$ là đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm $E (E \neq A)$. Đường thẳng d đi qua điểm I và vuông góc với AE cắt đường thẳng BC tại điểm K . Đường thẳng KA, KE cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm $M, N (M \neq A; N \neq E)$. Đường thẳng ND, NI cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm $P, Q (P \neq N; Q \neq N)$. Chứng minh rằng EQ là đường trung trực của đoạn thẳng MP .

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2020 \\ u_{n+1} = u_n^{2021} + 2020u_n^{2020} + u_n \end{cases} (*)$.

- a) Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.
- b) Tính $\lim \left(\frac{u_1^{2020}}{u_2 + 2020} + \frac{u_2^{2020}}{u_3 + 2020} + \dots + \frac{u_n^{2020}}{u_{n+1} + 2020} \right)$.

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi thỏa mãn: $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 3.$$

_____ **HẾT** _____

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1:

- a) Tìm cực trị của hàm số $y = x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}$.
- b) Cho hàm số $y = -x^7 + m(2m - 3)x^4 + m(2m^2 - 5m + 3)x^2 + 2020$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

- a) Tìm cực trị của hàm số $y = x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}$.

$$y = x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}.$$

$$y' = 1 + \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{\sqrt{x^2+x+1} + 2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1} + 2x+1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1} = -(2x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} -(2x+1) \geq 0 \\ x^2+x+1 = (2x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ 3x^2+3x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ x=0 \vee x=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 1.$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$, $y_{\text{CT}} = 1$.

- b) Cho hàm số $y = -x^7 + m(2m - 3)x^4 + m(2m^2 - 5m + 3)x^2 + 2020$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$$y = -x^7 + m(2m - 3)x^4 + m(2m^2 - 5m + 3)x^2 + 2020$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}.$$

$$y' = -7x^6 + 4m(2m - 3)x^3 + 2m(2m^2 - 5m + 3)x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -7x^6 + 4m(2m - 3)x^3 + 2m(2m^2 - 5m + 3)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x[-7x^5 + 4m(2m - 3)x^2 + 2m(2m^2 - 5m + 3)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -7x^5 + 4m(2m - 3)x^2 + 2m(2m^2 - 5m + 3) = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm).

$\Rightarrow (1)$ có nghiệm bằng $x = 0$

$$\Rightarrow 2m(2m^2 - 5m + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 2m^2 - 5m + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Thử lại:

□ Với $m = 0$: $y = -x^7 + 2020 \Rightarrow y' = -7x^6 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

□ Với $m = 1$: $y = -x^7 - x^4 \Rightarrow y' = -7x^6 - 4x^3$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -7x^6 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow -x^3(7x^3 + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{\sqrt[3]{196}}{7} \end{cases}$$

Đặt $x_1 = -\frac{\sqrt[3]{196}}{7}$ và $x_2 = 0$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y							

Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{\sqrt[3]{196}}{7}; 0\right)$.

□ Với $m = \frac{3}{2}$: $y = -x^7 + 2020 \Rightarrow y' = -7x^6 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $m = 0, m = \frac{3}{2}$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 2:

a) Giải bất phương trình $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} \geq \frac{6x-4}{5\sqrt{x^2+1}}$.

b) Giải phương trình $32 \cos^6\left(\frac{x}{2}\right) + \sin 3x = 3 \sin x$.

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $-2 \leq x \leq 2$.

Do $\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x} > 0, \forall x \in [-2; 2]$ nên bất phương trình đã cho tương đương với bất

$$\text{phương trình } \frac{2x+4-4(2-x)}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} \geq \frac{6x-4}{5\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow \frac{6x-4}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} \geq \frac{6x-4}{5\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow (6x-4)(5\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}) \geq 0 \quad (*).$$

$$\text{Ta có } (\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x})^2 = (\sqrt{2x+4}+\sqrt{2}\sqrt{4-2x})^2 \leq (1+2)(2x+4+4-2x) = 24$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x} \leq \sqrt{24} < 5, \forall x \in [-2; 2]$$

$$\text{Mặt khác } 5\sqrt{x^2+1} \geq 5, \forall x \in [-2; 2], \text{ do đó } 5\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x} > 0, \forall x \in [-2; 2].$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow 6x-4 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}.$$

$$\text{Đối chiếu với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: } S = \left[-2; \frac{2}{3}\right).$$

b) Giải phương trình: $32\cos^6\left(\frac{x}{2}\right) + \sin 3x = 3\sin x.$

$$\text{Ta có } 32\cos^6\left(\frac{x}{2}\right) + \sin 3x = 3\sin x \Leftrightarrow 32\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3 + 3\sin x - 4\sin^3 x = 3\sin x$$

$$\Leftrightarrow 4(1+\cos x)^3 - 4\sin^3 x = 0 \Leftrightarrow 1+\cos x = \sin x \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

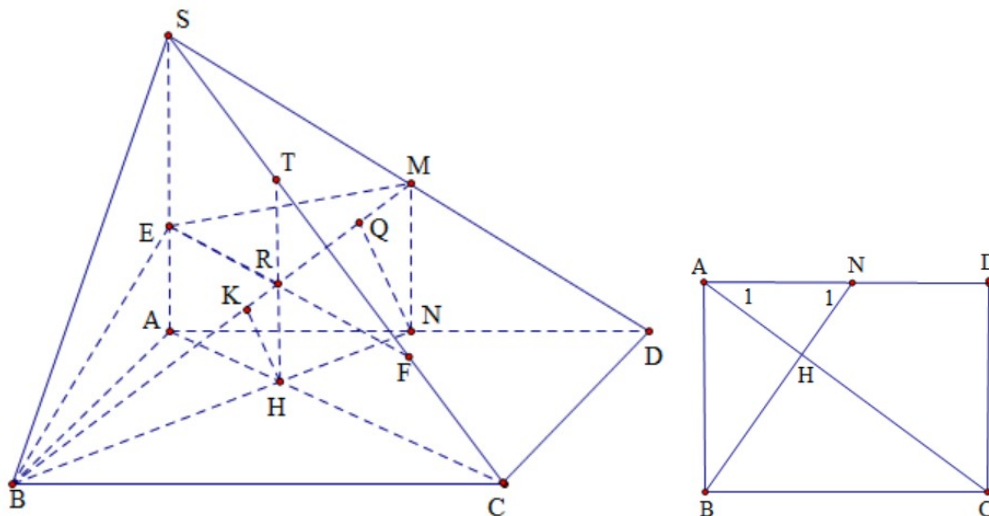
Câu 3:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $AD = 3a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = 4a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SD và AD.

3. Tính góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (BMN).

4. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm B, M và song song với AC. Biết mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SC lần lượt tại hai điểm E, F. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (BEMF).

Lời giải



1. Tính góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (BMN) .

$$\tan \widehat{A_1} = \frac{DC}{AD} = \frac{3a}{3a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \tan \widehat{N_1} = \frac{AB}{AN} = \frac{3a.2}{3a\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \tan \widehat{A_1} \cdot \tan \widehat{N_1} = 1 \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{N_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{N_1} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BN.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AC \perp BN \\ AC \perp MN \text{ (MN // SA)} \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BMN) \Rightarrow (AC, (BMN)) = 90^\circ.$$

2. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm B, M và song song với AC . Biết mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SC lần lượt tại hai điểm E, F . Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(BEMF)$.

Trong (SAC) qua H kẻ đường thẳng song song với SA cắt SC tại T.

Vì $HT \parallel MN$ ($\parallel SA$) $\Rightarrow T \in (\alpha)$.

Trong (BMN) gọi $R = HT \cap EF$.

Trong (SAC) qua R kẻ đường thẳng song song với AC cắt SA, SC theo thứ tự tại E, F.

$$\Rightarrow (\alpha) \equiv (BEMF).$$

$$\text{Kẻ } HK \perp BM, NQ \perp BM \Rightarrow HK \parallel NQ.$$

$$\text{Vì } \Rightarrow AC \parallel EF, EF \subset (\alpha) \Rightarrow d(C, (\alpha)) = d(H, (\alpha))$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} HK \perp BM \\ HQ \perp EF \text{ (HQ } \perp AC, AC \parallel EF) \end{cases}$$

$$\Rightarrow NQ \perp (BEMF) \Rightarrow d(H, (\alpha)) = HK \Rightarrow d(C, (\alpha)) = HK$$

$$BN = \sqrt{AB^2 + AN^2} = \sqrt{9a^2 + \frac{9a^2}{2}} = \frac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$AB^2 = BH.BN \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BN} = \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = a\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{NQ^2} = \frac{1}{NB^2} + \frac{1}{NM^2} = \frac{2}{27a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{35}{108a^2} \Rightarrow NQ = \frac{6a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$$

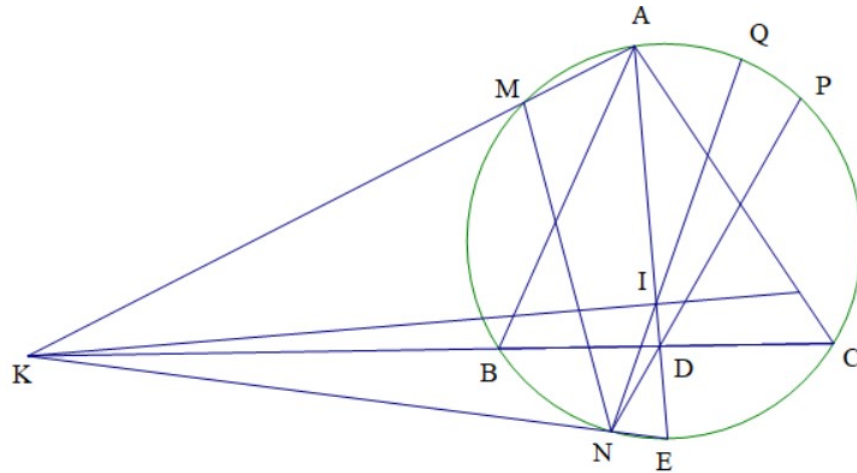
$$\text{Ta có: } \frac{HK}{NQ} = \frac{BH}{BN} \Rightarrow HK = \frac{NQ.BH}{BN}$$

$$\Rightarrow d(C, (\alpha)) = HK = \frac{4a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}.$$

Câu 4:

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$ (tam giác ABC không cân). Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác ABC . AD ($D \in BC$) là đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm E ($E \neq A$). Đường thẳng d đi qua điểm I và vuông góc với AE cắt đường thẳng BC tại điểm K . Đường thẳng KA, KE cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm M, N ($M \neq A; N \neq E$). Đường thẳng ND, NI cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm P, Q ($P \neq N; Q \neq N$). Chứng minh rằng EQ là đường trung trực của đoạn thẳng MP .

Lời giải



Từ bài toán, chú ý $AB, AC \perp AI \Rightarrow NI$ là phân giác góc $\widehat{BNC}$

$\Rightarrow P$ là điểm chính giữa $\widehat{BAC} \Rightarrow EQ$ là đường kính của (O)

$\Rightarrow IN \perp KE \Rightarrow KM.KA = KN.KE = KI^2 \Rightarrow IM \perp KA \Rightarrow IMKN \text{ nt}(KI)$

$\Rightarrow \widehat{QNM} = \widehat{AKI}$

Có $\widehat{BKN} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{CE} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{BN} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{NE} = \widehat{BAN}$

$\Rightarrow ADN \text{ nt} \Rightarrow \widehat{AKD} = \widehat{AND}$

Lại có $\widehat{IKD} = 90^\circ - \widehat{IDK} = 90^\circ - \widehat{IAC} - \widehat{ACB}$

$$= \frac{1}{2} \widehat{QBE} - \frac{1}{2} \widehat{CE} - \frac{1}{2} \widehat{AE} = \frac{1}{2} \widehat{QBE} - \frac{1}{2} \widehat{BE} - \frac{1}{2} \widehat{AB} = \frac{1}{2} \widehat{AQ} = \widehat{ANQ}$$

$\Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{INQ} \Rightarrow \widehat{MNI} = \widehat{INP} \Rightarrow Q$ là điểm chính giữa MP

Mà QE là đường kính

$\Rightarrow EQ$ là đường trung trực của đoạn thẳng MP .

Câu 5: Cho dãy số (u_n) với
$$\begin{cases} u_1 = 2020 \\ u_{n+1} = u_n^{2021} + 2020u_n^{2020} + u_n \end{cases} (*)$$

c. Chứng minh $\lim u_n = +\infty$.

d. Tính $\lim \left(\frac{u_1^{2020}}{u_2 + 2020} + \frac{u_2^{2020}}{u_3 + 2020} + \dots + \frac{u_n^{2020}}{u_{n+1} + 2020} \right)$.

Lời giải

a. Từ giả thiết dễ dàng suy ra $u_n > 0$ với mọi $n \geq 1$. Do đó ta có $u_{n+1} > u_n \geq 2020$ với mọi $n \geq 1$. Hay ta có dãy (u_n) đơn điệu tăng. Suy ra

$$\begin{cases} \lim u_n = +\infty \\ \lim u_n = a > 2020 \end{cases}$$

Giả sử $\lim u_n = a > 2020$. Qua giới hạn hai vế của (*) ta được

$$a = a^{2021} + 2020a^{2020} + a. \text{ Điều này tương đương } a = 0 \text{ hoặc } a = -2020 \text{ (Vô lý)}$$

Vậy $\lim u_n = +\infty$.

b. Từ điều kiện (*) ta có với mọi $k \geq 1$

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k^{2021} + 2020u_k^{2020} + u_k \\ \Leftrightarrow u_k^{2020}(u_k + 2020) &= u_{k+1} - u_k. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \frac{u_k^{2020}}{u_{k+1} + 2020} &= \frac{u_k^{2020}(u_k + 2020)}{(u_{k+1} + 2020)(u_k + 2020)} = \frac{u_{k+1} - u_k}{(u_{k+1} + 2020)(u_k + 2020)} \\ &= \frac{1}{u_k + 2020} - \frac{1}{u_{k+1} + 2020} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \lim \left(\frac{u_1^{2020}}{u_2 + 2020} + \frac{u_2^{2020}}{u_3 + 2020} + \dots + \frac{u_n^{2020}}{u_{n+1} + 2020} \right) \\ = \lim \left(\frac{1}{u_1 + 2020} - \frac{1}{u_2 + 2020} + \frac{1}{u_2 + 2020} - \frac{1}{u_3 + 2020} + \dots + \frac{1}{u_n + 2020} - \frac{1}{u_{n+1} + 2020} \right) \end{aligned}$$

$$= \lim \left(\frac{1}{u_1 + 2020} - \frac{1}{u_{n+1} + 2020} \right) = \frac{1}{4040}.$$

Câu 6: Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi thỏa mãn: $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 3.$$

Lời giải

Vì x, y, z vai trò như nhau, không mất tính tổng quát giả sử $x \leq y \leq z$.

Suy ra $x + y + z \geq 3x \Leftrightarrow 3 \geq 3x \Rightarrow x \leq 1$ (*).

Ta có $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 3$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3(y^2 + z^2) - 2x^2(y^2 + z^2) - 2y^2z^2 - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2 + z^2)(3 - 2x^2) - 2y^2z^2 + 3x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (y + z)^2(3 - 2x^2) - 2yz(3 - 2x^2) - 2y^2z^2 + 3x^2 - 3 \geq 0 \quad (1)$$

Áp dụng BĐT AM-GM cho 2 số dương y và z ta được:

$$yz \leq \left(\frac{y+z}{2} \right)^2 = \left(\frac{3-x}{2} \right)^2 \Rightarrow -yz \geq -\left(\frac{3-x}{2} \right)^2$$

$$VT(1) \geq (3-x)^2(3-2x^2) - 2\left(\frac{3-x}{2} \right)^2(3-2x^2) - 2\left(\frac{3-x}{2} \right)^4 + 3x^2 - 3 = f(x)$$

$$\text{Xét } f(x) = (3-x)^2(3-2x^2) - 2\left(\frac{3-x}{2} \right)^2(3-2x^2) - 2\left(\frac{3-x}{2} \right)^4 + 3x^2 - 3$$

$$= \frac{1}{2}(3-x)^2(3-2x^2) - \frac{1}{8}(3-x)^4 + 3x^2 - 3 = \frac{1}{2}(3-x)^2 \left(3-2x^2 - \frac{9}{4} + \frac{6}{4}x - \frac{1}{4}x^2 \right) + 3x^2 - 3$$

$$= \frac{1}{2}(3-x)^2 \left(-\frac{9}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \right) + 3x^2 - 3 = \frac{1}{2}(3-x)^2 \cdot \frac{3}{4}(1-x)(3x+1) + 3(x-1)(x+1)$$

$$= (1-x) \left[\frac{3}{8}(9-6x+x^2)(3x+1) - 3(1+x) \right] = \frac{3}{8}(1-x)(3x^3 - 17x^2 + 13x + 1) = \frac{3}{8}(1-x)^2(-3x^2 + 14x + 1)$$

$$\text{Mà } -3x^2 + 14x + 1 = 3x(1-x) + 11x + 1 > 0 \text{ với } \forall x \in (0; 1]$$

$$\text{Vậy } \frac{3}{8}(1-x)^2(-3x^2 + 14x + 1) \geq 0 \text{ với } \forall x \in (0; 1].$$

Từ đó suy ra $f(x) \geq 0$ với $\forall x \in (0; 1]$, hay $VT(1) \geq 0$ với $\forall x \in (0; 1]$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

HẾT