

CHỦ ĐỀ 2: PHƯƠNG PHÁP VI PHÂN TÌM NGUYÊN HÀM

I. Vi phân của hàm số

Vi phân của hàm số $y = f(x)$ được ký hiệu là dy và cho bởi $dy = df(x) = y'dx = f'(x)dx$

Ví dụ: $d(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)' dx = (\cos x - \sin x)dx$

II. Một số công thức vi phân quan trọng

$$(1). dx = \frac{1}{a} d(ax \pm b) = \frac{-1}{a} d(b \pm ax)$$

$$(2). xdx = \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2a} d(ax^2 \pm b) = -\frac{1}{2a} d(b \pm ax^2)$$

$$(3). x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3) = \frac{1}{3a} d(ax^3 \pm b) = \frac{-1}{3a} d(b \pm ax^3)$$

$$(4). \sin x = -d(\cos x) = \frac{-1}{a} d(a \cos x \pm b)$$

$$(5). \cos x dx = d(\sin x) = \frac{1}{a} d(a \sin x \pm b)$$

$$(6). \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x) = \frac{1}{a} d(a \tan x \pm b)$$

$$(7). \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\cot x) = \frac{-1}{a} d(a \cot x \pm b)$$

$$(8). \frac{dx}{2\sqrt{x}} = d(\sqrt{x}) = \frac{1}{a} d(a\sqrt{x} \pm b) = \frac{-1}{a} d(b \pm a\sqrt{x})$$

$$(9). e^x dx = d(e^x) = \frac{1}{a} d(ae^x \pm b) = \frac{-1}{a} d(b \pm ae^x)$$

$$(10). \frac{dx}{x} = d(\ln x) = \frac{1}{a} d(a \ln x \pm b) = \frac{-1}{a} d(b \pm a \ln x)$$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$.

A. $\frac{1}{\sin x + \cos x} + C$.

B. $\frac{-1}{\sin x + \cos x} + C$.

C. $\ln|\sin x + \cos x| + C$.

D. $-\ln|\sin x + \cos x| + C$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = -\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = -\int \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= -\int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = -\ln|\sin x + \cos x| + C. \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{x+1}{(x^2+2x)^2} dx$.

- A. $-\frac{1}{2} \ln|x^2+2x| + C$. B. $\frac{-1}{2x^2+4x} + C$. C. $\frac{1}{x^2+2x} + C$. D. $\frac{-2}{(x^2+2x)^3} + C$.

Lời giải:

Ta có: $\int \frac{x+1}{(x^2+2x)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2x)}{(x^2+2x)^2}$

Áp dụng $\int \frac{du}{u^2} = \frac{-1}{u} + C \Rightarrow I = \frac{-1}{2(x^2+2x)} + C$. **Chọn B.**

Ví dụ 3: Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$.

- A. $\frac{3}{2} \sqrt{x^2+1} + C$ B. $\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2+1} + C$. C. $\frac{2}{3} \sqrt[3]{x^2+1} + C$. D. $\frac{3}{2} \sqrt[3]{(x^2+1)^2} + C$.

Lời giải:

Ta có: $I = \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} = \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{-\frac{2}{3}} d(x^2+1)$

$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{3}} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2+1} + C$. **Chọn B.**

Ví dụ 4: Hàm số nào sau đây không phải nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1+\sin x}{x-\cos x}$.

- A. $\ln|2x-2\cos x|$. B. $\ln|x-\cos x|+1$. C. $\frac{1}{2} \ln(x-\cos x)^2$. D. $\ln(2x-2\cos x)^2$.

Lời giải:

Ta có: $F(x) = \frac{1+\sin x}{x-\cos x} dx = \int \frac{(x-\cos x)'}{x-\cos x} dx = \int \frac{d(x-\cos x)}{x-\cos x} = \ln|x-\cos x| + C$

Với $C = \ln 2$ ta được $F(x) = \ln|2x-2\cos x|$.

Với $C = 1$ ta được $F(x) = \ln|x-\cos x|+1$.

Với $C = 0$ ta được $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x-\cos x)^2 = \ln|x-\cos x|$.

Đáp án sai là **D. Chọn D.**

Ví dụ 5: Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{4 \sin x - 3}}$. Biết rằng $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4 \sin x - 3} + \frac{1}{2}$.

B. $F(x) = \sqrt{4 \sin x - 3}$.

C. $F(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{4 \sin x - 3} + \frac{3}{2}$.

D. $F(x) = -\sqrt{4 \sin x - 3} + 2$.

Lời giải:

Ta có: $F(x) = \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{4 \sin x - 3}} = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{4 \sin x - 3}} = \frac{1}{4} \int \frac{d(4 \sin x - 3)}{\sqrt{4 \sin x - 3}}$

Áp dụng $\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4 \sin x - 3} + C$

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4 \sin x - 3} + \frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x(2+3 \ln x)^2}$. Biết rằng $F\left(\frac{1}{e}\right) = 1$.

Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = \frac{1}{9 \ln x + 6} + \frac{4}{3}$.

B. $F(x) = \frac{-1}{9 \ln x + 6} + \frac{2}{3}$.

C. $F(x) = \frac{1}{3 \ln x + 2} + 2$.

D. $F(x) = \frac{-1}{3 \ln x + 2}$.

Lời giải:

Ta có: $F(x) = \int \frac{dx}{x(2+3 \ln x)^2} = \int \frac{d(\ln x)}{(2+3 \ln x)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3 \ln x + 2)}{(2+3 \ln x)^2} = \frac{-1}{3(3 \ln x + 2)} + C$

Do $F\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-1}{-3} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{2}{3} \Rightarrow F(x) = \frac{-1}{9 \ln x + 6} + \frac{2}{3}$. **Chọn B.**

Ví dụ 7: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x \sin x + (x+1) \cos x}{x \sin x + \cos x}$.

A. $x^2 + \ln|x \sin x + \cos x| + C$.

B. $x + \ln|x \sin x + \cos x| + C$.

C. $x + \frac{(x \sin x + \cos x)^2}{2} + C$.

D. $x + |x \sin x + \cos x|$.

Lời giải:

Nhận xét $(x \sin x + \cos x)' = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$

Ta có: $\int \frac{x \sin x + (x+1) \cos x}{x \sin x + \cos x} dx = \int \left(1 + \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} \right) dx = \int dx + \int \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} dx$

$x + \int \frac{d(x \sin x + \cos x)}{x \sin x + \cos x} = x + \ln|x \sin x + \cos x| + C$. **Chọn B.**

Ví dụ 8: Cho hàm số $f(x)$ luôn dương và thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)\sqrt{f(x)}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $f(2) = 16$. Giá trị của $f(1)$ bằng:

- A. 2. B. $\frac{5}{2}$. C. 4. D. 5.

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = (2x+1)\sqrt{f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2x+1$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta có: $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int (2x+1) dx \Leftrightarrow \int \frac{df'(x)}{\sqrt{f(x)}} = x^2 + x + C$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)} = x^2 + x + C$$

Thay $x = 2$ ta có: $2\sqrt{6} = 2^2 + 2 + C \Rightarrow C = 2$

Thay $x = 1$ ta có: $2\sqrt{f(1)} = 1^2 + 1 + 2 \Rightarrow f(1) = 4$. **Chọn C.**

Ví dụ 9: [Đề thi THPT Quốc gia năm 2008] Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng:

- A. $-\frac{35}{36}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $-\frac{19}{36}$. D. $-\frac{2}{15}$.

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = 2x[f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 2x$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta có: $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int 2x dx \Leftrightarrow \int \frac{d[f(x)]}{[f(x)]^2} = x^2 + C \Leftrightarrow \frac{-1}{f(x)} = x^2 + C$.

Mặt khác $f(2) = -\frac{2}{9} \Rightarrow \frac{9}{2} = 2^2 + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{f(x)} = x^2 + \frac{1}{2}$

Thay $x = 1$ ta được $-\frac{1}{f(1)} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow f(1) = -\frac{2}{3}$. **Chọn B.**

Ví dụ 10: Cho hàm số $f(x)$ luôn dương và thỏa mãn $f'(x) = 3x^2 \cdot f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $f(0) = 1$.

Giá trị của $f(1)$ bằng:

A. 1.

B. e .

C. e^2 .

D. e^3 .

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = 3x^2 \cdot f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 3x^2$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta có: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 3x^2 dx \Leftrightarrow \int \frac{df'(x)}{f(x)} = x^3 + C$

$\Leftrightarrow \ln[f(x)] = x^3 + C$ (Do $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$)

Suy ra $f(x) = e^{x^3+C}$. Do $f(0) = e^C = 1 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(1) = e$. **Chọn B.**

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) \cdot f'(x) = 3x^5 + 6x^2$. Biết $f(0) = 2$.

Tính giá trị $f^2(2)$.

A. $f^2(2) = 144$.

B. $f^2(2) = 100$.

C. $f^2(2) = 64$.

D. $f^2(2) = 81$.

Lời giải:

Ta có $f(x) \cdot f'(x) = 3x^5 + 6x^2 \Leftrightarrow \int f(x) \cdot f'(x) dx = \int (3x^5 + 6x^2) dx$

$\Leftrightarrow \int f(x) d(f(x)) = \frac{x^6}{2} + 2x^3 + C \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^6}{2} + 2x^3 + C \Leftrightarrow f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2C$.

Mà $f(0) = 2 \Rightarrow f^2(0) = 4 \Rightarrow 2C = 4 \Rightarrow f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 4$.

Vậy $f^2(2) = (x^6 + 4x^3 + 4) \Big|_{x=2} = 2^6 + 4 \cdot 2^3 + 4 = 100$. **Chọn B.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ và $F(0) = 1$. Tính $F(1)$.

- A. $\ln 2 + 1$. B. $\frac{1}{2} \ln 2 + 1$. C. 0. D. $\ln 2 + 2$.

Câu 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$.

- A. $\frac{1}{2}x^2\sqrt{1+x^2} + C$. B. $\frac{1}{3}(x^2\sqrt{1+x^2})^3 + C$. C. $\frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^3 + C$. D. $\frac{1}{3}x^2\sqrt{1+x^2} + C$.

Câu 3: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^5 x \sin x$.

- A. $-\frac{1}{6}\cos^6 x + C$. B. $-\frac{1}{6}\sin^6 x + C$. C. $\frac{1}{6}\cos^6 x + C$. D. $-\frac{1}{4}\cos^4 x + C$.

Câu 4: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x(x^2+1)^4$ thỏa mãn $F(1) = 6$.

- A. $F(x) = \frac{x^2(x^2+1)^5}{5} - \frac{2}{5}$. B. $F(x) = \frac{(x^2+1)^5}{5} - \frac{2}{5}$.
C. $F(x) = \frac{x^2(x^2+1)^5}{5} + \frac{2}{5}$. D. $F(x) = \frac{(x^2+1)^4}{5} - \frac{2}{5}$.

Câu 5: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x(x^2+1)^9$ thỏa mãn $F(0) = \frac{21}{20}$.

- A. $F(x) = -\frac{1}{20}(x^2+1)^{10} + 1$. B. $F(x) = \frac{1}{20}(x^2+1)^{10} + 1$.
C. $F(x) = 2(x^2+1)^{10} - 1$. D. $F(x) = (x^2+1)^{10} + 2$.

Câu 6: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3\cos x} \cdot \sin x$.

- A. $\frac{1}{3}e^{3\cos x} \cos x + C$. B. $-\frac{1}{3}e^{3\cos x} + C$. C. $3e^{3\cos x} + C$. D. $3e^{3\cos x} \cos x + C$.

Câu 7: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x \sqrt{\sin x + 1}$.

- A. $\frac{2}{3}\sqrt{(\sin x + 1)^3} + C$. B. $-\frac{2}{3}\sqrt{(\sin x + 1)^3} + C$.
C. $\frac{2}{3}\sqrt{\sin x + 1} + C$. D. $\frac{2}{3}(\sin x + 1)^3 + C$.

Câu 8: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x^2-1) \cdot e^{x^3-3x}$, biết rằng đồ thị của hàm số $F(x)$ có điểm cực tiểu nằm trên trục hoành.

- A. $F(x) = e^{x^3-3x} - e^2$. B. $F(x) = \frac{e^{x^3-3x+2} - 1}{3e^2}$. C. $F(x) = \frac{e^{x^3-3x} - e^2}{3}$. D. $F(x) = \frac{e^{x^3-3x} - 1}{3}$.

Câu 9: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{x^2+1}$.

- A. $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$. B. $-\frac{1}{2}e^{x^2} + C$. C. $\frac{1}{2}e^{x^2+1} + C$. D. $\frac{1}{2}e^{x^2-1} + C$.

Câu 10: Hàm số $f(x) = xe^{x^2}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F(0) = \frac{1}{2}$. Tìm nghiệm của phương trình

$$2F(x) = e^{x+2}.$$

- A. $x = -1$ hoặc $x = 2$. B. $x = 0$ hoặc $x = -2$.
C. $x = -1$ hoặc $x = 0$. D. $x = 0$ hoặc $x = 2$.

Câu 11: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{2x}$.

- A. $\frac{\ln^2 x}{4} + C$. B. $\frac{\ln^2 x}{2} + C$. C. $\frac{\ln^2 x}{4x} + C$. D. $\frac{1}{2x^2} + C$.

Câu 12: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{\ln x}\right) \ln x$.

- A. $\ln^2 x + x^2 + C$. B. $\frac{\ln^2 x + x^2}{2} + C$.
C. $\frac{\ln^2 x}{2} + x^2 + C$. D. $\left(\ln x + \frac{x^2}{2 \ln x}\right) \ln^2 x + C$.

Câu 13: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- A. $\ln^2 x + C$. B. $\frac{1}{2} \ln x + C$. C. $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$. D. $\frac{1}{x^2} + C$.

Câu 14: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ thỏa $F(0) = 1$. Tính $\log_2[F(-1)]$.

- A. $\log_2[F(-1)] = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\log_2[F(-1)] = \frac{1}{2}$. C. $\log_2[F(-1)] = \sqrt{2}$. D. $\log_2[F(-1)] = 2$.

Câu 15: Tìm hàm số $f(x)$. Biết rằng $f'(x) = x\sqrt{1+x^2}$ và $2f(-1) = 3$.

- A. $f(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2})^3}{3} + 1$. B. $f(x) = \frac{1+x^2}{3} + 1$.
C. $f(x) = \frac{x^2(\sqrt{1+x^2})^2}{2} - 1$. D. $f(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2})^3}{2} - 1$.

Câu 16: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ thỏa mãn $F(1) = 2017$.

- A. $F(x) = \sqrt{x^2-2x+5} + 2015$. B. $F(x) = 2\sqrt{x^2-2x+5} + 2017$.

C. $F(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}{2} + 2016.$

D. $F(x) = \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} + 2016.$

Câu 17: Hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F(1) = \frac{3}{2} \ln 3$. Tính $e^{F(\sqrt{7})}$.

A. $e^{F(\sqrt{7})} = 3.$

B. $e^{F(\sqrt{7})} = 9.$

C. $e^{F(\sqrt{7})} = 27.$

D. $e^{F(\sqrt{7})} = 81.$

Câu 18: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x \ln x + x}$.

A. $\ln|\ln x + 1| + C.$

B. $\ln|\ln x - 1| + C.$

C. $-\ln|\ln x + 1| + C.$

D. $-\ln|\ln x - 1| + C.$

Câu 19: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2 + 2}}$.

A. $\frac{1}{3} \sqrt{3x^2 + 2} + C.$

B. $C - \frac{1}{3} \sqrt{3x^2 + 2}.$

C. $\frac{1}{6} \sqrt{3x^2 + 2} + C.$

D. $\frac{2\sqrt{3x^2 + 2}}{3} + C.$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: $F(x) = \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$ mà $F(0) = 1 \Rightarrow C = 1$

Do đó $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 1 \Rightarrow F(1) = \frac{1}{2} \ln 2 + 1$. **Chọn B.**

Câu 2: $\int x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{1+x^2} d(1+x^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} + C$. **Chọn C.**

Câu 3: $\int \cos^5 x \sin x dx = -\int \cos^5 x d(\cos x) = -\frac{1}{6} \cos^6 x + C$. **Chọn A.**

Câu 4: $F(x) = \int 2x(x^2+1)^4 dx = \int (x^2+1)^4 d(x^2+1) = \frac{1}{5} (x^2+1)^5 + C$

Mà $F(1) = 6 \Rightarrow C = -\frac{2}{5} \Rightarrow F(x) = \frac{(x^2+1)^5}{5} - \frac{2}{5}$. **Chọn B.**

Câu 5: $F(x) = \int x(x^2+1)^9 dx = \frac{1}{2} \int (x^2+1)^9 d(x^2+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} (x^2+1)^{10} + C = \frac{1}{20} (x^2+1)^{10} + C$

Mà $F(0) = \frac{21}{20} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{20} (x^2+1)^{10} + 1$. **Chọn B.**

Câu 6: $\int e^{3\cos x} \sin x dx = -\frac{1}{3} \int e^{3\cos x} d(3\cos x) = -\frac{1}{3} e^{3\cos x} + C$. **Chọn B.**

Câu 7: $\int \cos x \sqrt{\sin x + 1} dx = \int \sqrt{\sin x + 1} d(\sin x + 1) = \frac{2}{3} \sqrt{(\sin x + 1)^3} + C$. **Chọn A.**

Câu 8: $F(x) = \int (x^2-1)e^{x^3-3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3-3x} d(x^3-3x) = \frac{1}{3} e^{x^3-3x} + C$. Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Do hàm số có cực tiểu nằm trên trục hoành nên $F(1) = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{3e^2} \Rightarrow F(x) = \frac{e^{x^3-3x+2}-1}{3e^2}$.

Chọn B.

Câu 9: $\int x e^{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2+1} d(x^2+1) = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + C$. **Chọn C.**

Câu 10: $F(x) = \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$. Mà $F(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$

Ta có $2F(x) = e^{x^2} \Leftrightarrow e^{x^2} = e^{x+2} \Leftrightarrow x^2 = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 11: $\int \frac{\ln x}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{4} \ln^2 x + C$. **Chọn A.**

Câu 12: $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{\ln x} \right) \ln x dx = \int \frac{\ln x}{x} dx + \int x dx = \int \ln x d(\ln x) + \int x dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + \frac{1}{2} x^2 + C$. **Chọn B.**

Câu 13: $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$. **Chọn C.**

Câu 14: $F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + C$ mà

$$F(0)=1 \Rightarrow C=0 \Rightarrow F(x)=\sqrt{x^2+1}$$

Ta có $F(-1)=\sqrt{2} \Rightarrow \log_2[F(-1)]=\log_2 \sqrt{2}=\frac{1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 15: $f(x) = \int x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{1+x^2} d(1+x^2) = \frac{1}{3} \sqrt{(1+x^2)^3} + C$

Mà $2f(-1)=3 \Leftrightarrow f(-1)=\frac{3}{2} \Rightarrow C=1 \Rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3}+1$. **Chọn A.**

Câu 16: $F(x) = \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx = \int \frac{d(x^2-2x+5)}{2\sqrt{x^2-2x+5}} = \sqrt{x^2-2x+5} + C$.

Mà $F(1)=2017 \Rightarrow C=2015 \Rightarrow F(x)=\sqrt{x^2-2x+5}+2015$. **Chọn A.**

Câu 17: $F(x) = \int \frac{x}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2)}{x^2+2} = \frac{1}{2} \ln(x^2+2) + C$ mà $F(1)=\frac{3}{2} \ln 3 \Rightarrow C=\ln 3$

Do đó $F(x)=\frac{1}{2} \ln(x^2+2)+\ln 3 \Rightarrow F(\sqrt{7})=2 \ln 3 \Rightarrow e^{F(\sqrt{7})}=e^{2 \ln 3}=9$. **Chọn B.**

Câu 18: $\int \frac{1}{x \ln x + x} dx = \int \frac{1}{\ln x + 1} \frac{dx}{x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x + 1} = \ln |\ln x + 1| + C$. **Chọn A.**

Câu 19: $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+2}} dx = \frac{1}{6} \int \frac{d(3x^2+2)}{\sqrt{3x^2+2}} = \frac{1}{3} \sqrt{3x^2+2} + C$. **Chọn A.**