

Câu 1 (2,0điểm). Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ (1).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ (C) của hàm số (1).

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng $d: x + 3y + 1 = 0$.

Câu 2 (1,0điểm). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ trên đoạn $[\frac{1}{2}; 2]$.

Câu 3 (1,0điểm). Giải các phương trình sau

a) $2 \log_4(3x + 1) - \log_2(3 - x) = 1$. b) $\sqrt{3} \sin 2x - 1 = \cos 2x - 2 \cos x$.

Câu 4 (0,5điểm). Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{1}{x^2+3x+2} dx$.

Câu 5 (0,5điểm). Cho tập hợp X gồm các số tự nhiên có ba chữ số phân biệt được lập từ các chữ số 1,2,3,4,5,6. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên từ tập hợp X , tính xác suất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 8.

Câu 6 (1,0điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-1;4;6)$ và điểm $B(-2;3;6)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc trục Ox và đi qua điểm A và điểm B . Tìm tọa độ các giao điểm của (S) với trục Oz .

Câu 7 (1,0điểm). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC .

Câu 8 (1,0điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông $ABCD$. Điểm $F(\frac{11}{2}; 3)$ là trung điểm của cạnh AD . Đường thẳng EK có phương trình $19x - 8y - 18 = 0$ với điểm E là trung điểm của cạnh AB , điểm K thuộc cạnh DC và $KD = 3KC$. Tìm tọa độ điểm C của hình vuông $ABCD$ biết điểm E có hoành độ nhỏ hơn 3.

Câu 9 (1,0điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} = x + y \\ x\sqrt{2xy + 5x + 3} = 4xy - 5x - 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R}).$$

Câu 10 (1,0điểm).

Cho ba số thực a, b, c đôi một phân biệt và thỏa mãn các điều kiện $a + b + c = 1$ và $ab + bc + ca > 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2 \left(\sqrt{\frac{2}{(a-b)^2}} + \frac{2}{(b-c)^2} + \frac{1}{|c-a|} \right) + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

	Nội dung	Điểm																		
Câu I	Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$	2,0đ																		
Ý a	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số	1,0đ																		
	1.Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. 2.Sự biến thiên : $y' = x^2 - 2x; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3(\frac{1}{3} - \frac{1}{x})] = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^3(\frac{1}{3} - \frac{1}{x})] = -\infty$	0,25đ																		
	Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table> Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$ Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$. Hàm số có cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = y(0) = 0$. Hàm số có cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = y(2) = -\frac{4}{3}$	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	y'		+	0	-	0	+	y			0		$+\infty$	0,25đ
	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$															
y'		+	0	-	0	+														
y			0		$+\infty$															
3.Đồ thị Giao Ox: $(0;0), (3;0)$ Giao Oy: $(0;0)$ $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số nhận $I(1; -\frac{2}{3})$ làm điểm uốn và là tâm đối xứng	$f(x) = (1/3)x^3 - x^2$	0,25đ																		

Ý b	d có hệ số góc $k = -\frac{1}{3}$.	0,25đ
	Gọi x_0 là hoành độ điểm M	
	Ycbt $\Leftrightarrow y'(x_0) \cdot (\frac{1}{3}) = -1$	0,25đ
	$\Leftrightarrow y'(x_0) = 3$ $\Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} M(-1; -\frac{4}{3}) \\ M(3; 0) \end{cases}$	0,25đ
Câu 2 (1đ)	+) Hàm số liên tục trên $[\frac{1}{2}; 2]$ +) $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2};$ +) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [\frac{1}{2}; 2] \\ x = -2 \notin [\frac{1}{2}; 2] \end{cases}$ +) $f(\frac{1}{2}) = \frac{7}{6}; f(2) = \frac{7}{3}$ +) $\min_{x \in [\frac{1}{2}; 2]} f(x) = \frac{7}{6}; \max_{x \in [\frac{1}{2}; 2]} f(x) = \frac{7}{3}$	0,25đ 0,25đ
Câu 3 (1đ)	a) ĐK: $-\frac{1}{3} < x < 3$ Với điều kiện trên bpt $\Leftrightarrow \log_2(3x+1) = \log_2[2(3-x)]$ $\Leftrightarrow 3x+1 = 2(3-x)$ $\Leftrightarrow x=1$ KL: Kết hợp điều kiện, phương trình có nghiệm $x=1$	0,25đ 0,25đ
	Pt $\Leftrightarrow 2 \cos x (\sqrt{3} \sin x - \cos x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbf{Z})$	0,25đ 0,25đ
Câu 4 (0,5đ)	$I = \int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx = \int_0^2 (\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}) dx$	0,25đ
	$= \ln x+1 \Big _0^2 - \ln x+2 \Big _0^2 = \ln \frac{3}{2}$	0,25đ

Câu 5 (0,5đ)	+) Số cần tìm có dạng $\overline{abc}$ +) $n(S) = A_6^3$ +) B: “Số được chọn có tổng các chữ số bằng 8” $\Rightarrow n(B) = 12$ $\Rightarrow P(B) = \frac{12}{120} = 0,1$	0,25đ 0,25đ
Câu 6 (1,0đ)	+) $I(a;0;0)$ thuộc trục Ox là tâm mặt cầu $\Leftrightarrow IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2$ $\Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow I(2;0;0)$ $\Rightarrow R^2 = 61$ $\Rightarrow$ Phương trình mặt cầu: $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 61$ +) Tọa độ giao điểm của (S) và Oz thỏa mãn: $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 61 \\ x = y = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow z = \pm\sqrt{57}$ $\Rightarrow \begin{cases} M(0;0;\sqrt{57}) \\ M(0;0;-\sqrt{57}) \end{cases}$	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
Câu 7 (1đ)	+) GT $\Rightarrow \begin{cases} SH \perp (ABC) \\ SH = \frac{a}{2} \end{cases}$ +) $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ +) d qua B và d // AC $\Rightarrow d(AC, SB) = d(A; (SB, d)) = 2d(H; (SB, d))$ +) $d(H; (SB, d)) = HK$ $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HJ^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ $\Rightarrow d(AC, SB) = 2HK = a\sqrt{\frac{3}{7}}$	0,25đ 0,25đ 0,25đ

Câu 8 (1đ)	+) gt $\Rightarrow$ Cạnh hình vuông bằng 5 $\Rightarrow EF = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ +) Tọa độ E là nghiệm: $\begin{cases} (x - \frac{11}{2})^2 + (y - 3)^2 = \frac{25}{2} \\ 19x - 8y - 18 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{58}{17} \end{cases} \quad (\text{loại})$ $\Rightarrow E(2; \frac{5}{2})$ +) AC qua trung điểm I của EF và $AC \perp EF$ $\Rightarrow AC: 7x + y - 29 = 0$ $\Rightarrow P = AC \cap EK: \begin{cases} 7x + y - 29 = 0 \\ 19 - 8y - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{17}{3} \end{cases}$ $\Rightarrow P(\frac{10}{3}; \frac{17}{3})$ $\Rightarrow \vec{IC} = \frac{9}{5} \vec{IP} \Rightarrow C(3; 8)$	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
Câu 9 (1đ)	+) ĐK : $2xy + 5x + 3 \geq 0$ +) Từ pt (1) $\Rightarrow VT \geq \frac{ x+y }{2} + \frac{ x+y }{2} = x+y \geq x+y = VP$ Nên (1) $\Leftrightarrow x = y \geq 0$ Thay vào (2) được : $6x^2 - x\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - (2x^2 + 5x + 3) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2 + 5x + 3} \\ x = -\frac{1}{3}\sqrt{2x^2 + 5x + 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{loại})$ Vô nghiệm $x = 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$ Hệ có một nghiệm (3 ;3).	0,5đ 0,25đ 0,25đ

Câu 10 (1đ)	+) BĐT: $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \forall x, y$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} (\forall x, y > 0)$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y$ +) $P \geq \frac{2}{ a-b } + \frac{2}{ b-c } + \frac{2}{ c-a } + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$ Giả sử $a > b > c$: $P \geq \frac{10}{a-c} + \frac{10}{2\sqrt{ab+ac+bc}} \geq \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}}$ Ta có: $(1-b)(1+3b) = \frac{1}{3}(3-3b)(1+3b) \leq \frac{4}{3} \Rightarrow P \geq 10\sqrt{6}$ Min $P = 10\sqrt{6} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{2+\sqrt{6}}{6} \\ c = \frac{2-\sqrt{6}}{6} \end{cases}$ và các hoán vị của nó	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
----------------------------	---	---