

CHỦ ĐỀ 6: NGUYÊN HÀM CỦA HÀM LƯỢNG GIÁC

A. LÝ THUYẾT

1. Một số công thức lượng giác cần nhớ

Hằng đẳng thức lượng giác: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$; $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \sin b \cdot \cos a$$

- Công thức cộng: $\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b}$$

- Công thức nhân đôi:
$$\begin{cases} \sin 2a = 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \end{cases}$$

- Công thức hạ bậc: $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$; $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$

- Công thức nhân ba:
$$\begin{cases} \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \\ \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a \end{cases}$$

- Công thức biến đổi tích thành tổng: $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$

$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$; $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$

2. Một số nguyên hàm lượng giác cơ bản

$$I_1 = \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$I_2 = \int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C$$

$$I_3 = \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$I_4 = \int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$$

$$I_5 = \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$I_6 = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$I_7 = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$I_8 = \int \frac{dx}{\cos^2(ax)} = \frac{1}{a} \tan(ax) + C$$

$$I_9 = \int \frac{dx}{\sin^2(ax)} = -\cot x + C$$

$$I_{10} = \int \frac{dx}{\sin^2(ax)} = -\frac{1}{a} \cot(ax) + C$$

$$I_{11} = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

$$I_{12} = \int \cot x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$$

$$I_{13} = \int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C$$

$$I_{14} = \int \cot^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \cot x - x + C$$

3. Các dạng nguyên hàm lượng giác thường gặp

Dạng 1: Nguyên hàm $I = \int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

- **TH1:** Nếu $m = 2k + 1 \Rightarrow I = \int \sin^{2k} x \cdot \cos^n x \cdot \sin x dx$

$$= -\int (1 - \cos^2 x)^k \cdot \cos^n x d(\cos x) \rightarrow \text{Đặt } t = \cos x$$

- **TH2:** Nếu $n = 2k + 1 \rightarrow \text{Đặt } t = \sin x$

- **TH3:** Nếu m, n đều chẵn ta dùng công thức hạ bậc

Chú ý: Đối với nguyên hàm chỉ chứa $\sin x$ và $\cos x$ dạng.

$$I = \int f(\sin x) \cos x dx = \int f(\sin x) d(\sin x) \rightarrow \text{Đặt } t = \sin x$$

$$I = \int f(\cos x) \sin x dx = -\int f(\cos x) d(\cos x) \rightarrow \text{Đặt } t = \cos x$$

Dạng 2: Nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{\sin^m x \cdot \cos^n x}$

- **TH1:** Nếu $m = 2k + 1 \Rightarrow I = \int \frac{\sin x dx}{\sin^{2k+2} x \cdot \cos^n x} = -\int \frac{d(\cos x)}{(1 - \cos^2 x)^{k+1} \cdot \cos^n x}$

Khi đó ta đặt: $t = \cos x$

- **TH2:** Nếu $n = 2k + 1 \rightarrow$ ta đặt $t = \sin x$

- **TH3:** Nếu m, n đều chẵn ta biến đổi $\frac{1}{\sin^m x \cdot \cos^n x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^m x \cdot \cos^n x} \dots$

Dạng 3: Nguyên hàm lượng giác của hàm $\tan x$ và $\cot x$

Các nguyên hàm chứa $\tan x$ hay $\cot x$ ta thường dùng các hằng đẳng thức

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x; \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Nguyên hàm mà mẫu số là đẳng cấp bậc hai với $\sin x$ và $\cos x$;

$A \sin^2 x + B \sin x \cos x + C \cos^2 x$ thì ta chia cả tử số và mẫu số cho $\cos^2 x$

Chú ý: Khi $I = \int \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x} dx = \int f(\tan x) d(\tan x) \rightarrow$ đặt $t = \tan x$

Dạng 4: Nguyên hàm sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng

$$\int \cos ax \cdot \cos bxdx = \frac{1}{2} \int [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x] dx$$

$$\int \sin ax \cdot \sin bxdx = -\frac{1}{2} \int [\cos(a+b)x - \cos(a-b)x] dx$$

$$\int \sin ax \cdot \cos bxdx = \frac{1}{2} \int [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x] dx$$

$$\int \cos ax \cdot \sin bxdx = \frac{1}{2} \int [\sin(a+b)x - \sin(a-b)x] dx$$

Dạng 5: Nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$

Ta có: $I = \int \frac{dx}{2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + b \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) + c \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right)}$

$$\int \frac{dx}{m \sin^2 \frac{x}{2} + n \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + p \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2} \left(m \tan^2 \frac{x}{2} + n \tan \frac{x}{2} + p \right)}$$

$$\xrightarrow{t = \tan \frac{x}{2}} I = \int \frac{dt}{mt^2 + nt + p}$$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Tính các nguyên hàm sau:

$$a) I = \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$$

$$b) I = \int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx$$

$$c) I = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$$

$$d) I = \int \sin^4 x dx$$

Lời giải

$$a) I = \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx = -\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x d(\cos x) = -\int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x d(\cos x)$$

$$\xrightarrow{t=\cos x} I = \int (t^2 - 1)t^2 dt = \int (t^4 - t^2) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$b) I = \int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx = -\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x d(\cos x) = -\int (1 - \cos^2 x) \cos^5 x d(\cos x)$$

$$\xrightarrow{t=\cos x} I = \int (t^2 - 1)t^5 dt = \int (t^7 - t^5) dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^6}{6} + C = \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\cos^6 x}{6} + C$$

$$c) I = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \int (\sin x \cdot \cos x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (\sin 2x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$$

$$d) I = \int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (3 - 4\cos 2x + \cos 4x) dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$$

Ví dụ 2: Tính các nguyên hàm sau:

$$a) I = \int \frac{\cos^3 x}{1 + \sin x} dx$$

$$b) I = \int \frac{(2 + \cos x) dx}{\sin x}$$

$$c) I = \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^2 x}$$

$$d) I = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}$$

Lời giải

$$a) I = \int \frac{\cos^3 x}{1 + \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x d(\sin x)}{1 + \sin x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x) d(\sin x)}{1 + \sin x} = \int (1 - \sin x) d(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

$$b) I = \int \frac{(2 + \cos x) dx}{\sin x} = \int \frac{2 dx}{\sin x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int \frac{2 \sin x dx}{\sin^2 x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -\int \frac{2 d(\cos x)}{1 - \cos^2 x} + \ln |\sin x|$$

$$= \ln \left| \sin x \cdot \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C$$

$$c) I = \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{(1 - \cos^2 x) \cos^2 x} \xrightarrow{t = \cos x} I = \int \frac{dt}{t^2 (t^2 - 1)}$$

$$= \int \left(\frac{1}{t^2 - 1} - \frac{1}{t^2} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + \frac{1}{\cos x} + C$$

$$d) I = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^4 x}$$

$$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx + \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cot^2 x \right) dx$$

$$= \tan x - 2 \cot x - \int \cot^2 x d(\cot x) = \tan x - 2 \cot x - \frac{\cot^3 x}{3} + C$$

Ví dụ 3: Tính các nguyên hàm sau:

$$a) I = \int \tan^4 x dx$$

$$b) I = \int \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx$$

$$c) I = \int \sin 2x \cos 3x dx$$

$$d) I = \int \sin^2 x \cos 3x dx$$

Lời giải

$$a) I = \int \tan^4 x dx = \int \tan^2 x \tan^2 x dx = \int \tan^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$$

$$= \int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} dx - \int \tan^2 x dx = \int \tan^2 x d(\tan x) - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C$$

$$b) I = \int \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx = \int \frac{\tan^4 x dx}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \int \frac{\frac{\tan^4 x}{\cos^2 x}}{1 - \tan^2 x} dx \xrightarrow{t = \tan x} I = \int \frac{t^4 dt}{1 - t^2}$$

$$= \int \frac{t^4 - 1 + 1}{1 - t^2} dt = -\int \left(t^2 + 1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = -\frac{t^3}{3} - t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + C$$

$$\Rightarrow I = -\frac{\tan^3 t}{3} - \tan t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan t - 1}{\tan t + 1} \right| + C$$

$$c) I = \int \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x - \sin x) dx = -\frac{\cos 5x}{10} + \frac{\cos x}{2} + C$$

$$d) I = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 3x - \cos 2x \cos 3x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin 3x}{3} - \frac{1}{2} \int \cos 2x \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{6} - \frac{1}{4} \int (\cos 5x + \cos x) dx = \frac{\sin 3x}{6} - \frac{\sin 5x}{20} - \frac{\sin x}{4} + C$$

Ví dụ 4: Xét các mệnh đề sau:

$$(1). \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C$$

$$(2) \int \sin^6 x \cos x dx = \frac{\sin^7 x}{7} + C$$

$$(3) \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

$$(4) \int \cos^3 x dx = -\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

Số mệnh đề đúng là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C$$

$$\int \sin^6 x \cos x dx = \int \sin^6 x d(\sin x) = \frac{\sin^7 x}{7} + C$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \tan^2 x d(\tan x) = \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x d(\sin x) = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

Vậy có 2 mệnh đề đúng. **Chọn B**

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = x + \sin x \sin 2x$. Biết rằng $f(0) = 2$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{2}{3}$

B. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{3}$

C. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} + \frac{2}{3}$

D. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} + \frac{8}{3}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(x) = \int f'(x) dx = \frac{x^2}{2} + \int 2 \sin^2 x \cos x dx = \frac{x^2}{2} + 2 \int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{x^2}{2} + \frac{2 \sin^3 x}{3} + C$$

$$\text{Lại có: } f(0) = C = 2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{3}. \text{ **Chọn B**}$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}$. Biết rằng $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$. Tính giá trị của $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

- A. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ B. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 16$ C. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$ D. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$

Lời giải

Ta có: $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \tan^3 x d(\tan x) = \frac{\tan^4 x}{4} + C$

Lại có: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \Rightarrow \frac{1}{4} + C = 2 \Rightarrow C = \frac{7}{4} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{4} + \frac{7}{4} = 4$. **Chọn C**

Ví dụ 7: Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{\sin 2x dx}{(2 + \sin x)^2}$

- A. $I = 2 \ln(2 + \sin x) + \frac{4}{2 + \sin x} + C$ B. $I = 2 \ln(2 + \sin x) + \frac{2}{2 + \sin x} + C$
C. $I = \ln(2 + \sin x) + \frac{2}{2 + \sin x} + C$ D. $I = -2 \ln(2 + \sin x) - \frac{4}{2 + \sin x} + C$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin 2x dx}{(2 + \sin x)^2} = \int \frac{2 \sin x \cos x dx}{(2 + \sin x)^2} = \int \frac{2 \sin x d(\sin x)}{(2 + \sin x)^2} \\ &= \int \frac{2(2 + \sin x) - 4}{(2 + \sin x)^2} d(\sin x) = \int \left[\frac{2}{2 + \sin x} - \frac{4}{(2 + \sin x)^2} \right] d(\sin x) \\ &= 2 \ln(2 + \sin x) + \frac{4}{2 + \sin x} + C \end{aligned}$$

(do $2 + \sin x > 0$). **Chọn A**

Ví dụ 8: Biết rằng $I = \int \frac{\sin x \cos^2 x dx}{1 + \cos x} = a \cos x + b \cos 2x - \ln(1 + \cos x) + C (a, b \in \mathbb{R})$. Giá trị của $a + b$ là

- A. $a + b = -\frac{3}{4}$ B. $a + b = \frac{5}{4}$ C. $a + b = \frac{3}{4}$ D. $a + b = -\frac{5}{4}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= - \int \frac{\cos^2 x d(\cos x)}{1 + \cos x} \xrightarrow{t = \cos x} - \int \frac{t^2 dt}{1 + t} = \int \left(-t + 1 - \frac{1}{t + 1} \right) dt \\ &= -\frac{t^2}{2} + t - \ln|1 + t| + C = -\frac{\cos^2 x}{2} + \cos x - \ln(1 + \cos x) + C \\ &= -\frac{1}{4} \cos 2x + \cos x - \ln(1 + \cos x) + C + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Do đó: $a = 1, b = \frac{-1}{4} \Rightarrow a + b = \frac{3}{4}$. **Chọn C**

Ví dụ 9: Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{(2 \sin x + 3 \cos x)^2}$ và $F(0) = \frac{5}{6}$. Khi đó:

A. $F(x) = \frac{-1}{4 \tan x + 6} + 1$ **B.** $F(x) = \frac{1}{4 \tan x + 6} + \frac{2}{3}$ **C.** $F(x) = \frac{-1}{2 \tan x + 3} + \frac{7}{6}$ **D.** $F(x) = \frac{1}{2 \tan x + 3} + \frac{1}{2}$

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = \int \frac{dx}{(2 \sin x + 3 \cos x)^2} = \int \frac{dx}{\cos^2 x (2 \tan x + 3)^2} = \int \frac{d(\tan x)}{(2 \tan x + 3)^2} = -\frac{1}{2(2 \tan x + 3)} + C$$

$$\text{Do } F(0) = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{-1}{6} + C = \frac{5}{6} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{-1}{4 \tan x + 6} + 1. \text{ **Chọn A**}$$

Ví dụ 10: Tính nguyên hàm $\int \frac{\tan x}{\cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}} dx$

A. $I = \sqrt{\tan^2 x + 2} + C$ **B.** $I = \sqrt{\cos^2 x + 2} + C$ **C.** $I = \sqrt{\tan^2 x + 1} + C$ **D.** $I = \sqrt{\cos^2 x + 1} + C$

Lời giải

$$\text{Ta có: } I = \int \frac{\tan x dx}{\cos^2 x \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + 1}} = \int \frac{\tan x dx}{\cos^2 x \sqrt{\tan^2 x + 2}} \xrightarrow{t = \tan x} \int \frac{tdt}{\sqrt{2 + t^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + 2)}{\sqrt{t^2 + 2}} = \sqrt{t^2 + 2} + C = \sqrt{\tan^2 x + 2} + C. \text{ **Chọn A**}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$

- A. $\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$ B. $\frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$ C. $\sin^3 x - \sin^5 x + C$ D. $\frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C$

Câu 2: Tìm 1 nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$

- A. $F(x) = e^{\sin x}$ B. $F(x) = e^{\cos x}$ C. $F(x) = e^{-\sin x}$ D. $F(x) = e^{-\cos x}$

Câu 3: Tìm 1 nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

- A. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x + \frac{1}{10} \sin^5 2x$ B. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x$
C. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x + \frac{1}{10} \sin^5 2x + \frac{4}{15}$ D. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x + \frac{1}{15}$

Câu 4: Phát biểu nào sau đây là phát biểu đúng?

- A. $\int \cos^5 x \sin x dx = \frac{\sin^6 x}{6} + C$ B. $\int \cos^5 x \sin x dx = \frac{\cos^6 x}{6} + C$
C. $\int \cos^5 x \sin x dx = -\frac{\cos^6 x}{6} + C$ D. $\int \cos^5 x \sin x dx = -\frac{\sin^6 x}{6} + C$

Câu 5: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^{20} x}$

- A. $-\frac{1}{19 \sin^{19} x} + C$ B. $\frac{1}{19 \sin^{19} x} + C$ C. $-\frac{1}{19 \cos^{19} x} + C$ D. $\frac{1}{19 \cos^{19} x} + C$

Câu 6: Hàm số $f(x) = \sin^5 x$ có 1 nguyên hàm $F(x)$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Tính $F(\pi)$

- A. $F(\pi) = -\frac{15}{16}$ B. $F(\pi) = \frac{8}{15}$ C. $F(\pi) = \frac{15}{16}$ D. $F(\pi) = -\frac{8}{15}$

Câu 7: Tìm 1 nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos^5 x$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-7}{15}$

- A. $F(x) = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x - 1$ B. $F(x) = \cos x - \frac{2}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x - 1$
C. $F(x) = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + 1$ D. $F(x) = \cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x$

Câu 8: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\cos^5 x}{1 - \sin x}$

- A. $\cos x - \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\cos^4 x}{4} + C$ B. $\sin x - \frac{\sin^3 3x}{3} - \frac{\cos^4 4x}{4} + C$

$$\text{C. } \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\cos^4 x}{4} + C$$

$$\text{D. } \sin x - \frac{\sin^3 x}{9} - \frac{\cos^4 x}{4} + C$$

Câu 9: Hàm số $f(x) = \frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}$ có 1 nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{A. } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\text{B. } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\text{C. } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\text{D. } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$$

Câu 10: Hàm số $F(x) = \ln|\sin x - 3\cos x|$ là 1 nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây?

$$\text{A. } f(x) = \frac{\cos x + 3\sin x}{\sin x - 3\cos x} \quad \text{B. } f(x) = \cos x + 3\sin x \quad \text{C. } f(x) = \frac{-\cos x - 3\sin x}{\sin x - 3\cos x} \quad \text{D. } f(x) = \frac{\sin x - 3\cos x}{\cos x + 3\sin x}$$

Câu 11: Tìm 1 nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln 2$

$$\text{A. } F(x) = \sqrt{2} + \ln|\sin x + \cos x|$$

$$\text{B. } F(x) = \sqrt{2} - \ln|\sin x + \cos x|$$

$$\text{C. } F(x) = \sqrt{2} - \ln|\sin x - \cos x|$$

$$\text{D. } F(x) = \ln|\sin x + \cos x| - \sqrt{2}$$

Câu 12: Tìm 1 nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \tan^3 x (\tan^2 x + 1)$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{4}$

$$\text{A. } F(x) = 4\tan^4 x + \frac{1}{4}$$

$$\text{B. } F(x) = \frac{\tan^4 x}{4} + 1$$

$$\text{C. } F(x) = \tan^4 x - \frac{1}{4}$$

$$\text{D. } F(x) = 1 - \frac{\tan^4 x}{4}$$

Câu 13: Hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ có nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$. Tính $e^{F\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

$$\text{A. } e^{F\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{B. } e^{F\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = 2$$

$$\text{C. } e^{F\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = 3$$

$$\text{D. } e^{F\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2}$$

Câu 14: Hàm số $f(x) = \cot x$ có nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Tính $e^{F\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$$\text{A. } e^{F\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{B. } e^{F\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = 2$$

$$\text{C. } e^{F\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{D. } e^{F\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}$$

Câu 15: Hàm số $f(x) = \tan x$ có nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \ln 2$. Tính $e^{F\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

$$\text{A. } e^{F\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \ln 2$$

$$\text{B. } e^{F\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2$$

$$\text{C. } e^{F\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}$$

$$\text{D. } e^{F\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}$$

Câu 16: Biết $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos x}$; $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Tính $F(0)$.

$$\text{A. } -\frac{1}{3}\ln 2 + 2$$

$$\text{B. } -\frac{2}{3}\ln 2 + 2$$

$$\text{C. } -\frac{2}{3}\ln 2 - 2$$

$$\text{D. } -\frac{1}{3}\ln 2 - 2$$

Câu 17: Cho $I = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$; $J = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$. Tìm $T = 4J - 2I$

- A. $T = x - 3 \ln |\sin x + \cos x| + C$ B. $T = x + 3 \ln |\sin x + \cos x| + C$
 C. $T = 3x - \ln |\sin x + \cos x| + C$ D. $T = 2x - \ln |\sin x + \cos x| + C$

Câu 18: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x \sin x$

- A. $-\cos^3 x + C$ B. $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C$ C. $\frac{1}{3} \cos^3 x + C$ D. $\cos^3 x + C$

Câu 19: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x$

- A. $3 \sin^2 x \cos x + C$ B. $\frac{\cos^3 x}{6} - \cos x + C$ C. $\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$ D. $-\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$

Câu 20: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^3 x$

- A. $\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C$ B. $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$ C. $-\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$ D. $3 \sin^2 x \cos x + C$

Câu 21: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^4 x \cos x$

- A. $-\frac{1}{5} \sin^5 x + C$ B. $\sin^5 x + C$ C. $\frac{1}{5} \sin^5 x + C$ D. $-\sin^5 x + C$

Câu 22: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$

- A. $e^{\tan x} + C$ B. $e^{-\tan x} + C$ C. $\tan x \cdot e^{\tan x} + C$ D. $-e^{\tan x} + C$

Câu 23: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$

- A. $\tan^2 \sqrt{x} + C$ B. $2 \tan \sqrt{x} + C$ C. $\frac{1}{2} \tan \sqrt{x} + C$ D. $\tan \sqrt{x} + C$

Câu 24: Tìm 1 nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 3}$ thỏa $F(0) = 0$

- A. $\frac{\ln |2 + \sin^2 x|}{3}$ B. $\ln \left| 1 + \frac{\sin^2 x}{3} \right|$ C. $\ln |1 + \sin^2 x|$ D. $\ln |\cos^2 x|$

Câu 25: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$

- A. $\ln |\sin x| - \frac{1}{2} \ln |1 - \sin^2 x| + C$ B. $\ln |\sin x| + \frac{1}{2} \ln |1 - \sin^2 x| + C$
 C. $\frac{1}{2} \ln |\sin x| - \frac{1}{2} \ln |1 - \sin^2 x| + C$ D. $-\ln |\sin x| - \frac{1}{2} \ln |1 - \sin^2 x| + C$

Câu 26: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (\tan x + e^{2 \sin x}) \cos x$

A. $-\cos x + e^{2\sin x} + C$

B. $-\cos x - \frac{1}{2}e^{2\sin x} + C$

C. $\cos x + \frac{1}{2}e^{2\sin x} + C$

D. $-\cos x + \frac{1}{2}e^{2\sin x} + C$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \int (\sin^2 x - \sin^4 x) d(\sin x) = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C\end{aligned}$$

Chọn A

Câu 2: $F(x) = \int \cos x e^{\sin x} dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$. **Chọn A**

Câu 3: $F(x) = \int \sin^2 2x \cos^3 2x dx = \int \sin^2 2x \cos^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin^2 2x (1 - \sin^2 2x) d(\sin 2x)$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin^2 2x - \sin^4 2x) d(\sin 2x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x + C$$

Mà $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{15} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x + \frac{1}{15}$. **Chọn D**

Câu 4: $\int \cos^5 x \sin x dx = -\int \cos^5 x d(\cos x) = -\frac{1}{6} \cos^6 x + C$. **Chọn C**

Câu 5: $\int \frac{\cos x}{\sin^{20} x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^{20} x} = -\frac{1}{19 \sin^{19} x} + C$. **Chọn A**

Câu 6: $F(x) = \int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x \sin x dx = -\int (1 - \cos^2 x)^2 d(\cos x)$

$$= -\int (\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1) d(\cos x) = -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

Mà $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \cos x \Rightarrow F(\pi) = \frac{15}{16}$. **Chọn C**

Câu 7: $F(x) = \int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x)$

$$= \int (\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1) d(\sin x) = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \sin x + C$$

Mà $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{7}{15} \Rightarrow C = -1 \Rightarrow F(x) = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x - 1$. **Chọn A**

Câu 8:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^5 x}{1 - \sin x} dx &= \int \frac{\cos^4 x \cos x dx}{1 - \sin x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x)}{1 - \sin x} = \int (1 + \sin x)(1 - \sin^2 x) d(\sin x) \\ &= \int (-\sin^3 x - \sin^2 x + \sin x + 1) d(\sin x) = -\frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{1}{2} \sin^2 x + \sin x + C \\ &= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1}{4} + C = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{(\sin^2 x - 1)^2}{4} + C \\ &= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{4} \cos^4 x + C\end{aligned}$$

Chọn C

Câu 9:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{4\sin^3 x}{1+\cos x} dx = 4 \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{1+\cos x} = -4 \int \frac{(1-\cos^2 x) d(\cos x)}{1+\cos x} \\ &= 4 \int (\cos x - 1) d(\cos x) = 4 \left(\frac{1}{2} \cos^2 x - \cos x \right) + C = 2 \cos^2 x - 4 \cos x + C \end{aligned}$$

$$\text{Mà } F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow C = 3 \Rightarrow F(x) = 2 \cos^2 x - 4 \cos x \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$$

Chọn D

Câu 10: $f(x) = F'(x) = \frac{\cos x + 3 \sin x}{\sin x - 3 \cos x}$. **Chọn A**

Câu 11: $F(x) = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = -\int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = -\ln|\sin x + \cos x| + C$

$$\text{Mà } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow C = \sqrt{2} \Rightarrow F(x) = \sqrt{2} - \ln|\sin x + \cos x| \text{ . Chọn B}$$

Câu 12: $F(x) = \int \tan^3 x (\tan^2 x + 1) dx = \int \tan^3 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \tan^3 x d(\tan x) = \frac{1}{4} \tan^4 x + C$. **Chọn B**

Câu 13: $F(x) = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C$

$$\text{Mà } F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2} \ln 3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + \frac{1}{2} \ln 3 \Rightarrow e^{F\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = 3 \text{ . Chọn C}$$

Câu 14: $F(x) = \int \cot x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$

$$\text{Mà } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow C = \ln \sqrt{2} \Rightarrow F(x) = \ln|\sin x| = \ln \sqrt{2} \Rightarrow e^{F\left(\frac{-\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2} \text{ . Chọn A}$$

Câu 15: $F(x) = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

$$\text{Mà } F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \ln 2 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = -\ln|\cos x| \Rightarrow e^{F\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2 \text{ . Chọn B}$$

Câu 16: $F(x) = \int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + C$

$$\text{Mà } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + 2 \Rightarrow F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2 \text{ . Chọn B}$$

Câu 17: Ta có:
$$\begin{cases} I + J = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int dx = x + C \\ I - J = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln|\sin x + \cos x| + C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I = \frac{x + \ln|\sin x + \cos x|}{2} + C \\ J = \frac{x - \ln|\sin x + \cos x|}{2} + C \end{cases} \Rightarrow T = 4J - 2I = x - 3\ln|\sin x + \cos x| + C. \text{ Chọn A}$$

Câu 18: Ta có: $\int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{1}{3} \cos^3 x + C. \text{ Chọn B}$

Câu 19: $\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = -\int (1 - \cos^2 x) d(\cos x) = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C. \text{ Chọn C}$

Câu 20: $\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = -\frac{1}{3} \sin^3 x + \sin x + C. \text{ Chọn B}$

Câu 21: $\int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{1}{5} \sin^5 x + C. \text{ Chọn C}$

Câu 22: Ta có $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int e^{\tan x} d(\tan x) = e^{\tan x} + C. \text{ Chọn A}$

Câu 23: $\int \frac{1}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{d\sqrt{x}}{\cos^2 \sqrt{x}} = 2 \tan \sqrt{x} + C. \text{ Chọn B}$

Câu 24: Ta có:

$$F(x) = \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 3} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x dx}{\sin^2 x + 3} = \int \frac{2 \sin x d(\sin x)}{\sin^2 x + 3} = \int \frac{d(\sin^2 x + 3)}{\sin^2 x + 3} = \ln|\sin^2 x + 3| + C$$

Mà $F(0) = 0 \Rightarrow C = -\ln 3 \Rightarrow F(x) = \ln|\sin^2 x + 3| - \ln 3 = \ln\left|1 + \frac{\sin^2 x}{3}\right|. \text{ Chọn B}$

Câu 25:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x \cos x} &= \int \frac{\cos x dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x (1 - \sin^2 x)} \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \sin^2 x} \right) d(\sin x) = \ln|\sin x| - \frac{1}{2} \ln|1 - \sin^2 x| + C. \end{aligned}$$

Chọn A

Câu 26:

$$\begin{aligned} \int (\tan x + e^{2\sin x}) \cos x dx &= \int \sin x dx + \int e^{2\sin x} \cos x dx \\ &= \int \sin x dx + \frac{1}{2} \int e^{2\sin x} d(2\sin x) = -\cos x + \frac{1}{2} e^{2\sin x} + C. \end{aligned}$$

Chọn D

