

SUY LUẬN – SÁNG TẠO LỜI GIẢI

20 KỸ THUẬT CHINH PHỤC

Giải tích 12

VẬN DỤNG CAO
SỐ PHỨC

HOÀNG XUÂN NHÀN

GIÁO VIÊN TOÁN TRƯỜNG THCS-THPT NGUYỄN KHUYẾN
TH-THCS-THPT LÊ THÁNH TÔNG

20 KỸ THUẬT VẬN DỤNG CAO SỐ PHỨC

MỤC LỤC

TÓM TẮT KIẾN THỨC TRỌNG YẾU	Trang 01
CHỦ ĐỀ 01. SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN.....	Trang 09
Dạng 1. Tính toán, rút gọn số phức dựa vào qui luật dãy số	Trang 09
Dạng 2. Lập phương trình, hệ phương trình xác định số phức	Trang 12
Dạng 3. Phương pháp lấy mô-đun hai vế đẳng thức.....	Trang 15
Dạng 4. Phương pháp tạo số phức liên hợp	Trang 17
Dạng 5. Phương pháp chuẩn hóa số phức	Trang 21
Bài tập trắc nghiệm thực hành chủ đề 1	Trang 24
Hướng dẫn giải bài tập trắc nghiệm chủ đề 1	Trang 28
CHỦ ĐỀ 02. PHƯƠNG TRÌNH SỐ PHỨC.....	Trang 42
Tóm tắt lí thuyết	Trang 42
Dạng 1. Giải phương trình số phức bậc hai, bậc ba, bậc bốn	Trang 45
Dạng 2. Phương trình số phức có chứa tham số.....	Trang 51
Bài tập trắc nghiệm thực hành chủ đề 2	Trang 57
Hướng dẫn giải bài tập trắc nghiệm chủ đề 2	Trang 60
CHỦ ĐỀ 03. MAX-MIN MÔ ĐUN SỐ PHỨC	Trang 72
Tóm tắt lí thuyết	Trang 72
Dạng 1. Số phức có điểm biểu diễn thuộc đường cơ bản	Trang 76
Dạng 2. Điều kiện ba điểm thẳng hàng và kĩ thuật đối xứng	Trang 83
Dạng 3. Dùng miền nghiệm tìm Max-min mô-đun số phức.....	Trang 90
Dạng 4. Ép điểm theo quỹ đạo đường tròn	Trang 92
Dạng 5. Tạo cụm liên hợp chéo	Trang 96
Dạng 6. Sử dụng tam tỉ cự.....	Trang 98
Dạng 7. Tạo tam giác đồng dạng và tam giác bằng nhau.....	Trang 105
Dạng 8. Biện luận sự tương giao đường thẳng và đường tròn	Trang 109
Dạng 9. Bất đẳng thức tam giác.....	Trang 112
Dạng 10. Bất đẳng thức Mincowski và kĩ thuật cân bằng hệ số.....	Trang 116
Dạng 11. Bất đẳng thức Cauchy Schwarz	Trang 120
Dạng 12. Kĩ thuật đổi biến và khảo sát hàm số	Trang 123
Dạng 13. Phương pháp lượng giác hóa số phức	Trang 126
Bài tập trắc nghiệm thực hành chủ đề 3	Trang 129
Hướng dẫn giải bài tập trắc nghiệm chủ đề 3	Trang 132

20 Kỹ thuật Vận dụng cao SỐ PHỨC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

I. SỐ PHỨC VÀ CÁC YẾU TỐ LIÊN QUAN:

1. **Khái niệm số phức:** Số phức z là biểu thức có dạng $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$.

Trong đó: a, b lần lượt được gọi là **phần thực** và **phần ảo** của z , i là **đơn vị ảo**.

Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$ với $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Ta thấy $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

- Nếu $a = 0$ thì $z = bi$ được gọi là **số thuần ảo**.
- Nếu $b = 0$ thì $z = a$ được gọi là **số thực**.
- Nếu $a = b = 0$ thì $z = 0$ vừa là **số thực**, vừa là **số thuần ảo**.

Ví dụ 1: Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của z .

Hướng dẫn giải:

Số phức z có phần thực $a = 3$, phần ảo $b = -2$.

Ví dụ 2: Cho số phức $z = (2m + 1) + i(n - 1)$ với $m, n \in \mathbb{R}$. Tìm m để z là số thuần ảo; tìm m để z là số thực; tìm m để z vừa là số thực, vừa là số thuần ảo.

Hướng dẫn giải:

Số phức z có phần thực $a = 2m + 1$, phần ảo $b = n - 1$.

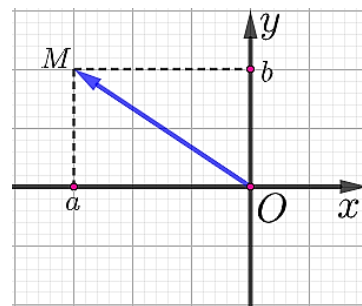
z là số thuần ảo $\Leftrightarrow a = 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$; z là số thực $\Leftrightarrow b = n - 1 = 0 \Leftrightarrow n = 1$.

$$z \text{ vừa là số thực, vừa là số thuần ảo} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = 1 \end{cases}.$$

2. Số phức và hình học:

a) **Điểm biểu diễn số phức:** Cho số phức $z = a + bi$, khi đó điểm

$M(a; b)$ là **điểm biểu diễn** của z trên mặt phẳng phức, hay mặt phẳng (Oxy) .



b) Môđun của số phức: Cho số phức $z = a + bi$ với điểm biểu diễn $M(a; b)$, khi đó **môđun** số phức z là: $|z| = |\overline{OM}| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ hay $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ví dụ 3: Tìm tọa độ điểm M và tính độ dài OM biết rằng M là điểm biểu diễn của số phức $z = 4 - 3i$ trong mặt phẳng (Oxy) .

Hướng dẫn giải: Ta có: $M(4; -3)$ và $OM = |z| = |4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

3. Số phức liên hợp:

Cho số phức $z = a + bi$, khi đó kí hiệu $\overline{z} = a - bi$ được gọi là **số phức liên hợp** của z .

□ **Một số tính chất:**

- $\overline{\overline{z}} = z$ và $|\overline{z}| = |z|$.
- Trên mặt phẳng (Oxy) , điểm biểu diễn của hai số phức z và $\overline{z}$ đối xứng nhau qua trục hoành.

Ví dụ 4: Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức z khi biết số phức liên hợp $\overline{z} = 4 + 6i$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có:

$$z = 4 - 6i \Rightarrow a = 4, b = -6 \Rightarrow a + b = -2.$$

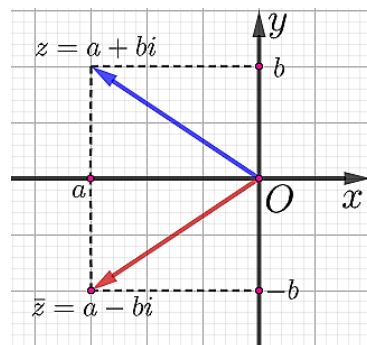
4. Hai số phức bằng nhau: Hai số phức là **bằng nhau** nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

Ta có: $a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$ và $a + bi = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

Ví dụ 5: Tìm cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn hệ thức $x - y + 2i = 2x - 1 + (3y + x + 1)i$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } \underset{a}{x} - \underset{b}{y} + \underset{c}{2i} = \underset{c}{2x} - 1 + \underbrace{(3y + x + 1)}_d i \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2x - 1 \\ 2 = 3y + x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$



II. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP SỐ PHỨC:

1. Phép cộng, phép trừ, phép nhân các số phức: Cho các số phức $z = a + bi$, $w = c + di$. Ta có:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i;$$

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Ví dụ 6: Thực hiện các phép tính sau:

a) $(2 - 3i) + (3 - 4i)$.

b) $\left(1 + \frac{3}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} - 6i\right)$.

c) $(2+4i) \cdot (1-4i)$.

d) $(2-3i)^2 + i^3 + 2i^4 + 3i^5$.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: $(2-3i) + (3-4i) = (2+3) + (-3-4)i = 5-7i$.

b) Ta có: $\left(1 + \frac{3}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} - 6i\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} + 6\right)i = \frac{1}{2} + \frac{15}{2}i$.

c) Ta có: $(2+4i) \cdot (1-4i) = 2 - 8i + 4i - 16i^2 = (2+16) + (4-8)i = 18-4i$.

d) Ta có: $(2-3i)^2 + i^3 + 2i^4 + 3i^5 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 + i^2 \cdot i + 2i^2 \cdot i^2 + 3i^2 \cdot i^2 \cdot i$
 $= 4 - 12i - 9 - i + 2 + 3i = -3 - 10i$.

★ **Tóm lại:** Phép cộng, phép trừ, phép nhân các số phức có tất cả tính chất của phép cộng, phép trừ, phép nhân các số thực; trong đó ta luôn lưu ý rằng $i^2 = -1$.

★ **Các hằng đẳng thức đáng nhớ:** Cho các số phức z, w, t , ta có:

$$(z \pm w)^2 = z^2 \pm 2zw + w^2; (z+w)^3 = z^3 + 3z^2w + 3zw^2 + w^3; (z-w)^3 = z^3 - 3z^2w + 3zw^2 - w^3.$$

$$z^2 - w^2 = (z-w) \cdot (z+w); z^3 + w^3 = (z+w) \cdot (z^2 - zw + w^2); z^3 - w^3 = (z-w) \cdot (z^2 + zw + w^2).$$

$$z^2 + w^2 = (z+w)^2 - 2zw = (z-w)^2 + 2zw; z^3 + w^3 = (z+w)^3 - 3zw(z+w).$$

$$(z+w+t)^2 = z^2 + w^2 + t^2 + 2(zw + wt + zt).$$

★ **Đúc kết 1:** Cho $z = a+bi$ và $\bar{z}$ là hai số phức liên hợp, ta có:

▪ $z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi)$ hay $\boxed{z + \bar{z} = 2a}$;

▪ $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$ hay $\boxed{z \cdot \bar{z} = |z|^2}$.

Ta nhận thấy rằng **tổng và tích của hai số phức liên hợp của nhau là một số thực**.

☛ **Nhận xét:** Với $n \in \mathbb{N}$ thì: $\boxed{i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i}$.

2. Phép chia số phức cho một số phức khác 0:

Cho số phức $z = a+bi$ và $w = c+di \neq 0$. Ta có:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} \text{ hay } \boxed{\frac{z}{w} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i}.$$

Ví dụ 7: Tìm môđun số phức z biết rằng $z = \frac{3+5i}{1-i}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z = \frac{3+5i}{1-i} = \frac{(3+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i+5i+5i^2}{1-i^2} = \frac{-2+8i}{2} = -1+4i$.

Suy ra: $|z| = |-1+4i| = \sqrt{17}$.

★ **Đúc kết 2:** Cho hai số phức $z = a+bi$ và $w = c+di \neq 0$, ta có:

$$\overline{z \cdot w} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd) + (bc+ad)i} = (ac-bd) - (bc+ad)i;$$

$$\overline{z \cdot w} = (a-bi)(c-di) = (ac-bd) - (bc+ad)i. \text{ Vậy } \boxed{\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}}.$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)} = \overline{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\right)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i;$$

$$\frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \frac{a-bi}{c-di} = \frac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)} = \frac{(ac+bd) + (ad-bc)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \text{ Vậy } \boxed{\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}}.$$

III. CĂN BẬC HAI VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI SỐ PHỨC:

1. Căn bậc hai của số phức:

a) Căn bậc hai của số thực âm: Cho số phức $z = a+bi$. Khi $b=0$, $a < 0$ thì $z = a$ là một số thực âm, ta có $z = a = -|a| = i^2 \cdot |a|$ nên z có hai căn bậc hai là: $\pm i\sqrt{|a|} = \pm i\sqrt{-a}$.

Ví dụ 1: $z = -9 = 9i^2$ có hai căn bậc hai là $\pm 3i$; vì $(\pm 3i)^2 = 9i^2 = -9$. Tương tự $z = -15 = 15i^2$ có hai căn bậc hai là $\pm i\sqrt{15}$ vì $(\pm i\sqrt{15})^2 = 15i^2 = -15$.

b) Căn bậc hai của số phức: Cho số phức $z = a+bi$, khi đó $w = x+yi$ được gọi là một căn bậc hai của z nếu $w^2 = z$. Ta có: $(x+yi)^2 = a+bi \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a+bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} (*)$.

Giải hệ phương trình (*), ta được hai cặp số thực $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ thỏa mãn đề bài. Ta kết luận số phức $z = a+bi$ có hai căn bậc hai là $x_1 + y_1i$ và $x_2 + y_2i$.

Ví dụ 2: Tìm các căn bậc hai của số phức $z = 6-8i$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $w = x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của z , ta có $w^2 = z \Leftrightarrow (x+yi)^2 = 6-8i$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 6-8i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 6 \\ 2xy = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\frac{-4}{x}\right)^2 = 6 \\ y = \frac{-4}{x} \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 8 \quad (n) \\ x^2 = -2 \quad (l) \end{cases}.$$

$$\text{Với } x^2 = 8 \text{ thì } \begin{cases} x = 2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2}, y = \sqrt{2} \end{cases}. \text{ Vậy } z \text{ có hai căn bậc hai là } 2\sqrt{2} - i\sqrt{2} \text{ và } -2\sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

2. Phương trình bậc hai với hệ số thực:

Cho phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$ (*) với $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Xét: $\Delta = b^2 - 4ac$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (*) có hai nghiệm phức (cũng là số thực) trùng nhau là

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}.$$

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình (*) có hai nghiệm phức (cũng là số thực) phân biệt: $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình (*) có hai nghiệm phức phân biệt: $z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Nhận xét:

- Nếu phương trình bậc hai với các hệ số $a, b, c \in \mathbb{R}$ có các nghiệm là số phức z_1, z_2 ($\Delta < 0$) thì hai nghiệm này là hai số phức liên hợp của nhau (tức là $z_1 = \overline{z_2}, z_2 = \overline{z_1}$).
- Trên tập hợp số phức, mọi phương trình bậc hai đều có hai nghiệm (không nhất thiết phân biệt).
- Tổng quát:** Mọi phương trình bậc n (với $n \in \mathbb{N}^*$) đều có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

Ví dụ 3: Giải phương trình sau trên tập số phức: $2x^2 - x + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7 < 0$. Do đó phương trình có hai nghiệm số phức là:

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i; \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{1 - i\sqrt{7}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i.$$

IV. TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN CỦA SỐ PHỨC:

1. Tập hợp điểm biểu diễn số phức liên quan đến đường thẳng:

Xét số phức $z = x + yi$ có điểm biểu diễn $M(x; y)$. Khi đó:

Nếu x, y thỏa mãn phương trình	Kết luận
$ax + by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 > 0)$	M thuộc đường thẳng có phương trình $ax + by + c = 0$.
$ax + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a} = m \quad (a \neq 0)$	M thuộc đường thẳng vuông góc với Ox và có phương trình $x = m$.
$by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{c}{b} = n \quad (b \neq 0)$	M thuộc đường thẳng vuông góc với Oy và có phương trình $y = n$.
$x = 0$	M thuộc trục Oy .
$y = 0$	M thuộc trục Ox .
$ax + by + c > 0 \quad (a^2 + b^2 > 0)$ hoặc $ax + by + c \geq 0; \quad ax + by + c < 0;$ $ax + by + c \leq 0$	M thuộc nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng với phương trình $ax + by + c = 0$.

Đặc biệt: Nếu $MA = MB$ với A, B cố định thì M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB .

2. Tập hợp điểm biểu diễn số phức liên quan đến đường tròn:

a) Đường tròn: Xét số phức $z = x + yi$ có điểm biểu diễn $M(x; y)$. Khi đó:

Nếu x, y thỏa mãn phương trình	Kết luận
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$	M thuộc đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính R .
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$	M thuộc đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính $R = \sqrt{\underbrace{a^2 + b^2 - c}_{>0}}$.

b) Hình tròn: Xét số phức $z = x + yi$ có điểm biểu diễn $M(x; y)$. Khi đó:

Nếu x, y thỏa mãn phương trình	Kết luận
$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$	M thuộc hình tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính R .
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0$	M thuộc hình tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính $R = \sqrt{\underbrace{a^2 + b^2 - c}_{>0}}$.

c) Phần trong và ngoài đường tròn:

Xét số phức $z = x + yi$ có điểm biểu diễn $M(x; y)$. Khi đó:

Nếu x, y thỏa mãn phương trình	Kết luận
$(x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2$	M thuộc phần trong đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính R .
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c < 0$	M thuộc phần trong đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính $R = \sqrt{\underbrace{a^2 + b^2 - c}_{>0}}$.
$(x-a)^2 + (y-b)^2 > R^2$	M thuộc phần ngoài đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính R .
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c > 0$	M thuộc phần ngoài đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính $R = \sqrt{\underbrace{a^2 + b^2 - c}_{>0}}$.

☞ **Đặc biệt:** Nếu $|z + a + bi| = r > 0$ thì ta nói tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn có tâm $I(-a; -b)$ và bán kính bằng r .

3. Tập hợp điểm biểu diễn là một đường cong khác:

Xét số phức $z = x + yi$ có điểm biểu diễn $M(x; y)$. Khi đó:

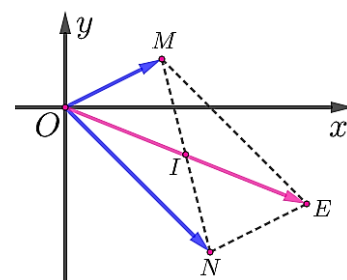
Nếu x, y thỏa mãn phương trình	Kết luận
$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$	M thuộc parabol có phương trình $y = ax^2 + bx + c$
$x = ay^2 + by + c \quad (a \neq 0)$	M thuộc parabol có phương trình $x = ay^2 + by + c$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$	M thuộc elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

☛ **Đặc biệt:** Nếu $|z + a + bi| + |z + c + di| = T > F_1 F_2$ với $F_1(-a; -b)$, $F_2(-c; -d)$ thì tập hợp điểm M là elip có hai tiêu điểm là F_1, F_2 .

V. ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC MÔ-ĐUN:

1. **Các đẳng thức mô-đun:** Cho các số phức $z = a + bi$, $w = c + di$ lần lượt có các điểm biểu diễn $M(a; b)$, $N(c; d)$. Ta có:

- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;
- $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$ với $w \neq 0$;
- $|z + w| = |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{OE}| = 2|\overrightarrow{OI}| = 2OI$ với E là một đỉnh của hình bình hành $OMEN$ và I là trung điểm đoạn thẳng MN .
- $|z - w| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{NM}| = MN$.



2. **Bất đẳng thức vector (bất đẳng thức tam giác):**

$$|z + w| \geq ||z| - |w|| \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}| \geq |OM - ON| \Leftrightarrow OE \geq |OM - ON| \Leftrightarrow OE \geq |OM - ME|.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}$ **ngược hướng** với $\overrightarrow{ON}$ (hay $z = k \cdot w$ với $k \in \mathbb{R}$, $k < 0$).

- $|z - w| \geq ||z| - |w||$. Bất đẳng thức này được chứng minh tương tự, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}$ **cùng hướng** với $\overrightarrow{ON}$ (hay $z = k \cdot w$ với $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$).

$$|z + w| \leq |z| + |w| \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}| \leq |\overrightarrow{OM}| + |\overrightarrow{ON}| \Leftrightarrow OE \leq OM + ON \Leftrightarrow OE \leq OM + ME.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}$ **cùng hướng** với $\overrightarrow{ON}$ (hay $z = k \cdot w$ với $k > 0$).

★ **Đúc kết:** Cả ba bất đẳng thức trên đều được xây dựng từ một tính chất cơ bản trong tam giác:

- Với một tam giác bất kỳ, tổng hai cạnh luôn lớn hơn cạnh thứ ba (hiệu hai cạnh luôn nhỏ hơn cạnh thứ ba).
- Với ba điểm bất kỳ tạo nên ba cạnh (có thể ba điểm thẳng hàng hoặc tạo thành tam giác), tổng hai cạnh luôn không nhỏ hơn cạnh thứ ba (hiệu hai cạnh không vượt quá cạnh thứ ba).

Ví dụ 1: Cho hai số phức z, w có $|z| = 10$ và $w = -3 - 4i$. Biết rằng khi $|z + w|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $z = a + bi$. Tính $a + b$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $|z + w| \geq ||z| - |w|| = |10 - 5| = 5$. Do đó $|z + w|_{\min} = 5$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $z = k \cdot w$ với $k < 0 \Leftrightarrow z = k(-3 - 4i) = -3k - 4ki$.

Khi đó: $|z| = \sqrt{(-3k)^2 + (-4k)^2} = 10 \Leftrightarrow 5|k| = 10 \Rightarrow k = -2$ ($k < 0$).

Vậy $z = 6 + 8i \Rightarrow a = 6, b = 8 \Rightarrow a + b = 14$.

3. **Bất đẳng thức AM-GM:**

- $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ với mọi $a, b \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.
- $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ với mọi $a, b, c \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 2: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $\frac{z}{1+i} = \frac{(2-i)^2}{w}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = |z|^2 + |w|^2.$$

Hướng dẫn giải:

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: $T = |z|^2 + |w|^2 \geq 2\sqrt{|z|^2 \cdot |w|^2} = 2|z| \cdot |w|$.

Ta lại có: $\frac{z}{1+i} = \frac{(2-i)^2}{w} \Leftrightarrow zw = (1+i)(2-i)^2 = 7-i$. Suy ra $|zw| = \sqrt{49+1} = 5\sqrt{2}$.

Vậy $T \geq 2|z| \cdot |w| \Leftrightarrow T \geq 10\sqrt{2}$. Do đó $T_{\min} = 10\sqrt{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|z| = |w|$.

4. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

▪ Cho các cặp số $(a; x), (b; y)$, ta có: $|ax + by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ ($x, y \neq 0$) hay $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ ($b, y \neq 0$).

▪ Cho các cặp số $(a; x), (b; y), (c; z)$, ta có: $|ax + by + cz| \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ ($x, y, z \neq 0$).

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + i| = 2$, tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z + 1|^2 - |z - 2 + i|^2.$$

Hướng dẫn giải:

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết: $|z - 2 + i| = 2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ (1).

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= |z + 1|^2 - |z - 2 + i|^2 = (x + 1)^2 + y^2 - [(x - 2)^2 + (y + 1)^2] \\ &= 2x + 1 - (-4x + 4 + 2y + 1) = 6x - 2y - 4 = 6(x - 2) - 2(y + 1) + 10. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$|6(x - 2) - 2(y + 1)| \leq \sqrt{(36 + 4) \underbrace{[(x - 2)^2 + (y + 1)^2]_{=4}}_{=4}} = \sqrt{40 \cdot 4} = 4\sqrt{10}.$$

$$\text{Suy ra } -4\sqrt{10} \leq 6(x - 2) - 2(y + 1) \leq 4\sqrt{10} \Rightarrow 10 - 4\sqrt{10} \leq \underbrace{6(x - 2) - 2(y + 1) + 10}_P \leq 10 + 4\sqrt{10}.$$

$$\text{Ta có: } 10 - 4\sqrt{10} \leq P \leq 10 + 4\sqrt{10} \text{ nên } \begin{cases} \text{Max} P = 10 + 4\sqrt{10} \\ \text{Min} P = 10 - 4\sqrt{10} \end{cases}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \frac{x - 2}{6} = \frac{y + 1}{-2} \Leftrightarrow x + 3y + 1 = 0 \quad (2).$$

Giải hệ phương trình (1), (2) ta tìm được các số phức z_1, z_2 thỏa mãn.

CHỦ ĐỀ I. SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN

Dạng 1: Tính toán, rút gọn biểu thức số phức dựa vào chu kỳ hoặc quy luật dãy số.

Phương pháp:

Học sinh cần nắm vững các tính chất và công thức sau:

- Với $n \in \mathbb{N}$ thì: $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i$.
- Xét cấp số cộng với công sai d như sau: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$. Khi đó $n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1$.
- Tổng n số hạng đầu của cấp số cộng có số hạng đầu u_1 , công sai d là:

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2} = \frac{[2u_1 + (n-1)d] \cdot n}{2}.$$
- Tổng n số hạng đầu của cấp số nhân có số hạng đầu u_1 , công bội q là: $S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$.
- Khai triển nhị thức New-ton:**
Dạng liệt kê: $(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$.
Đặc biệt: $(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$ (*).
Dạng tổng quát: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$.

VÍ DỤ MINH HỌA:

VÍ DỤ 1. Tìm phần ảo của số phức $z = (1+i)^{100} + (2-2i)^{201}$.

- A. 2^{201} . B. -2^{50} . C. -2^{50} . D. -2^{301} .

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } z &= (1+i)^{100} + (2-2i)^{201} = \left[(1+i)^2 \right]^{50} + 2^{201} (1-i)^{201} = (2i)^{50} + 2^{201} \left[(1-i)^2 \right]^{100} (1-i) \\ &= 2^{50} \cdot (i^2)^{25} + 2^{201} \cdot (-2i)^{100} (1-i) = -2^{50} + 2^{201} \cdot (-2)^{100} \cdot (i^2)^{50} (1-i) = -2^{50} + 2^{301} \cdot (1-i) \\ &= -2^{50} + 2^{301} - 2^{301}i. \end{aligned}$$

Do đó phần ảo của số phức z là -2^{301} . **Chọn D.**

VÍ DỤ 2. Cho số phức $z = (i^5 + i^4 + i^3 + i^2 + i + 1)^{20}$, z bằng với:

- A. 1024. B. -1024. C. 1024i. D. -1024i.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } i^5 + i^4 + i^3 + i^2 + i + 1 = (i^2)^2 i + (i^2)^2 + i^2 i - 1 + i + 1 = i + 1 - i + i = i + 1.$$

$$\text{Do vậy } z = (1+i)^{20} = (1+2i+i^2)^{10} = 2^{10} \cdot i^{10} = 2^{10} \cdot (i^2)^5 = 2^{10} \cdot (-1)^5 = -1024. \text{ Chọn B.}$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

VÍ DỤ 3. Tìm mô-đun số phức $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{33} + (1-i)^{10}$.

A. $|z| = 33$.

B. $|z| = 32$.

C. $|z| = 31$.

D. $|z| = 34$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{33} = \left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^{33} = i^{33} = (i^2)^{16} \cdot i = i$;

$(1-i)^{10} = (1-2i+i^2)^5 = (-2)^5 \cdot i^5 = -2^5 \cdot (i^2)^2 \cdot i = -32i$.

Do vậy $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{33} + (1-i)^{10} = i - 32i = -31i \Rightarrow |z| = \sqrt{0^2 + (-31)^2} = 31$. **Chọn C.**

VÍ DỤ 4. Tính tổng $S = 1 + i^3 + i^6 + \dots + i^{2025}$.

A. $S = 0$.

B. $S = i$.

C. $S = -i$.

D. $S = -1$.

Hướng dẫn giải:

S là tổng của một cấp số nhân gồm n phần tử ($u_1 = 1, q = i^3$).

Ta thấy số mũ của các số hạng được xếp theo cấp số cộng: $0, 3, 6, \dots, 2025$ nên số phần tử xuất hiện trong tổng S là: $\frac{2025-0}{3} + 1 = 676$.

Vì vậy $S = \frac{u_1(1-q^{676})}{1-q} = \frac{1[1-(i^3)^{676}]}{1-i^3} = \frac{1-(-i)^{676}}{1+i} = \frac{1-i^{676}}{1+i} = \frac{1-(i^2)^{338}}{1+i} = \frac{1-1}{1+i} = 0$. **Chọn A.**

VÍ DỤ 5. Giá trị của biểu thức $C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - C_{100}^6 + \dots - C_{100}^{98} + C_{100}^{100}$ bằng

A. -2^{100} .

B. -2^{50} .

C. 2^{100} .

D. 2^{50} .

Hướng dẫn giải:

Ta có: $(1+i)^{100} = C_{100}^0 + iC_{100}^1 + i^2C_{100}^2 + \dots + i^{100}C_{100}^{100}$

$= (C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - \dots + C_{100}^{100}) + (C_{100}^1 - C_{100}^3 + C_{100}^5 - \dots - C_{100}^{99})i$.

Mặt khác: $(1+i)^{100} = [(1+i)^2]^{50} = (2i)^{50} = 2^{50} \cdot (i^2)^{25} = -2^{50}$.

Vậy $C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - C_{100}^6 + \dots - C_{100}^{98} + C_{100}^{100} = -2^{50}$. **Chọn B.**

VÍ DỤ 6. Biết $2^n(C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + \dots + i^n C_n^n) = 32768i$, với C_n^k là các số tổ hợp chập k của n và $i^2 = -1$. Đặt $T_{k+1} = i^k C_n^k$, giá trị của T_8 bằng

A. $8i$.

B. $-8i$.

C. $-36i$.

D. $36i$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $2^n(C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + \dots + i^n C_n^n) = 32768i$

$\Leftrightarrow 2^n(C_n^0 + iC_n^1 + i^2C_n^2 + i^3C_n^3 + \dots + i^n C_n^n) = 32768i \Leftrightarrow 2^n(1+i)^n = 2^{15}i$ (*).

Trường hợp 1: n là số tự nhiên lẻ, tức là $n = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$).

Khi đó: $(1+i)^n = (1+i)^{2k+1} = [(1+i)^2]^k (1+i) = (2i)^k (1+i) = 2^k i^k (1+i)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Thay vào (*): $2^{2k+1} \cdot 2^k i^k (1+i) = 2^{15} i \Leftrightarrow 2^{3k-14} = \frac{i}{i^k (1+i)}$ (điều này không thỏa vì vế phải luôn là số phức với phần ảo khác 0, vế trái là số thực).

Trường hợp 2: n là số tự nhiên chẵn, tức là $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$).

Ta có: $(1+i)^n = (1+i)^{2k} = \left[(1+i)^2\right]^k = (2i)^k = 2^k i^k$. Thay vào (*), ta được:

$$2^{2k} \cdot 2^k i^k = 2^{15} i \Leftrightarrow 2^{3k} i^k = 2^{15} i \Rightarrow k = 5 \Rightarrow n = 10. \text{ Khi đó: } T_8 = i^7 C_8^7 = -8i. \text{ Chọn B.}$$

VÍ DỤ 7. Khai triển của biểu thức $(x^2 + x + 1)^{2024}$ được viết thành $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{4048} x^{4048}$. Tổng

$S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots - a_{4046} + a_{4048}$ bằng:

A. -2^{1012} .

B. 0.

C. 2^{2024} .

D. 1.

Hướng dẫn giải:

Ta có $(x^2 + x + 1)^{2024} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{4048} x^{4048}$.

Cho $x = i$ ta được $(i^2 + i + 1)^{2024} = a_0 + a_1 i - a_2 - a_3 i + a_4 + a_5 i - a_6 - \dots + a_{4048}$ mà

$$(i^2 + i + 1)^{2024} = (-1 + i + 1)^{2024} = (i^2)^{1012} = (-1)^{1012} = 1 \text{ nên}$$

$$a_0 + a_1 i - a_2 - a_3 i + a_4 + a_5 i - a_6 - \dots + a_{4048} = 1.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots - a_{4046} + a_{4048} = 1 \\ a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \dots - a_{4047} = 0 \end{cases}.$$

Vậy $S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots - a_{4046} + a_{4048} = 1$. **Chọn D.**

VÍ DỤ 8. Gọi $T = a - b$ với a, b lần lượt là phần thực, phần ảo của số phức $w = i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2025i^{2025}$. Tính giá trị của T .

A. $T = 2025$.

B. $T = -1$.

C. $T = 0$.

D. $T = 2024$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $w = i(1 + 2i + 3i^2 + \dots + 2025i^{2024}) = iz$ với $z = 1 + 2i + 3i^2 + \dots + 2025i^{2024}$.

$$\text{Xét tổng cấp số nhân sau: } f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2025} = x \frac{x^{2025} - 1}{x - 1} = \frac{x^{2026} - x}{x - 1} \quad (1).$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1), ta có: $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + 2025x^{2024}$

$$= \frac{(2026x^{2025} - 1)(x - 1) - (x^{2026} - x)}{(x - 1)^2} = \frac{2025x^{2026} - 2026x^{2025} + 1}{(x - 1)^2} \quad (2).$$

Thay $x = i$ vào (2): $z = 1 + 2i + 3i^2 + \dots + 2025i^{2024}$

$$= \frac{2025i^{2026} - 2026i^{2025} + 1}{(i - 1)^2} = \frac{2025(i^2)^{1013} - 2026(i^2)^{1012} \cdot i + 1}{-2i} = \frac{-2025 - 2026i + 1}{-2i} = 1013 - 1012i.$$

Do vậy: $w = iz = i(1013 - 1012i) = 1012 + 1013i$. Suy ra $a = 1012, b = 1013$.

Khi đó: $T = a - b = 1012 - 1013 = -1$. **Chọn B.**

➤Dạng 2: Lập phương trình hoặc hệ phương trình để xác định số phức

Phương pháp:

Học sinh cần nắm vững các tính chất và công thức sau:

- $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.
- $z = a+bi$ là số thực $\Leftrightarrow b = 0$.
- $z = a+bi$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow a = 0$.

VÍ DỤ 9. Cho số phức $z = a+bi$, với a, b là các số thực thỏa mãn $a+bi+2i(a-bi)+4=i$, với i là đơn vị ảo. Tìm mô đun của $\omega = 1+z+z^2$.

- A. $|\omega| = \sqrt{229}$. B. $|\omega| = \sqrt{13}$ C. $|\omega| = 229$. D. $|\omega| = 13$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $a+bi+2i(a-bi)+4=i \Leftrightarrow a+bi+2ai+2b+4=i \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=-4 \\ b+2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$.

Suy ra $z = 2-3i$. Do đó: $\omega = 1+z+z^2 = -2-15i$.

Vậy $|\omega| = \sqrt{(-2)^2 + (-15)^2} = \sqrt{229}$. **Chọn A.**

VÍ DỤ 10. Cho số phức $z = (2a-b+4) - (a+b+6)i$, với $a, b \in \mathbb{R}$, i là đơn vị ảo. Biết rằng z là số thuần ảo và $z+2+i$ là số thực. Tính $S = a^2 + b^2$.

- A. $S = 13$. B. $S = 5$ C. $S = 20$. D. $S = 36$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: z là số thuần ảo nên $2a-b+4=0$ (1).

Ngoài ra: $z+2+i = (2a-b+6) - (a+b+5)i$ là số thực, suy ra: $a+b+5=0$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} 2a-b+4=0 \\ a+b+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-2 \end{cases}$. Do vậy $S = a^2 + b^2 = 13$. **Chọn A.**

VÍ DỤ 11. Gọi số phức $z = a+bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z-1|=1$ và $(1+i)(\bar{z}-1)$ có phần thực bằng 1 đồng thời z không là số thực. Khi đó $a.b$ bằng :

- A. $a.b = -2$. B. $a.b = 2$. C. $a.b = 1$. D. $a.b = -1$.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: z không là số thực suy ra $b \neq 0$.

Theo giả thiết: $|z-1|=1 \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + b^2} = 1 \Rightarrow (a-1)^2 + b^2 = 1$ (1).

Xét số phức $w = (1+i)(\bar{z}-1) = (1+i)(a-1-bi) = (a+b-1) + (a-b-1)i$; w có phần thực bằng 1 nên $a+b-1=1 \Rightarrow b=2-a$ (2).

Thay (2) vào (1): $(a-1)^2 + (2-a)^2 = 1 \Leftrightarrow 2a^2 - 6a + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=2 \end{cases}$.

Với $a=1$ thì $b=1$. Suy ra $a.b=1$. **Chọn C.**

Với $a=2$ thì $b=0$ (không thỏa điều kiện).

VÍ DỤ 12. (Mã đề 110, Đề thi THPT QG 2017) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i| = 2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải:Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).Ta có: $|z + 2 - i| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$ (1).Mặt khác: $(z-1)^2 = [(x-1) + yi]^2 = [(x-1)^2 - y^2] + 2(x-1)yi$ là số thuần ảo nên

$$(x-1)^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-1 \\ y = -x+1 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $y = x-1$, thay vào (1), ta được: $(x+2)^2 + (x-2)^2 = 8 \Leftrightarrow 2x^2 + 8 = 8 \Leftrightarrow x = 0$.Suy ra $y = -1$. Ta tìm được $z = z_1 = -i$.**Trường hợp 2:** $y = -x+1$, thay vào (1), ta được: $(x+2)^2 + (-x)^2 = 8 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 4 = 8$

$$\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}. \text{ Ta có: } z = z_2 = (-1 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})i; z = z_3 = (-1 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})i.$$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn. **Chọn D.****VÍ DỤ 13.** (Mã đề 105, đề TN THPT QG 2017) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 3i| = \sqrt{13}$ và $\frac{z}{z+2}$

là số thuần ảo?

A. 0.

B. 2.

C. Vô số.

D. 1.

Hướng dẫn giải:Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z + 3i| = \sqrt{13} \Leftrightarrow |a + bi + 3i| = \sqrt{13} \Leftrightarrow a^2 + (b+3)^2 = 13$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 6b + 9 = 13 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4 - 6b \quad (1).$$

$$\text{Ta lại có: } \frac{z}{z+2} = 1 - \frac{2}{z+2} = 1 - \frac{2}{a+2+bi} = 1 - \frac{2(a+2-bi)}{(a+2)^2 + b^2}.$$

$$= \frac{(a+2)^2 + b^2 - 2a - 4}{(a+2)^2 + b^2} + \frac{2b}{(a+2)^2 + b^2}i = \frac{a^2 + b^2 + 2a}{(a+2)^2 + b^2} + \frac{2b}{(a+2)^2 + b^2}i.$$

$$\text{Do } \frac{z}{z+2} \text{ là số thuần ảo nên } \frac{a^2 + b^2 + 2a}{(a+2)^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 2a = 0 & (2) \\ (a+2)^2 + b^2 \neq 0 & (3) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta có $4 - 6b + 2a = 0 \Leftrightarrow a = 3b - 2$. Thay vào (1), ta được:

$$(3b-2)^2 + b^2 - 4 + 6b = 0 \Leftrightarrow 10b^2 - 6b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Với $b = 0$ thì $a = -2$, không thỏa mãn (3).Với $b = \frac{3}{5}$ thì $a = -\frac{1}{5}$, suy ra $z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$. Vậy có một số phức z thỏa mãn. **Chọn D.****VÍ DỤ 14.** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = |z + \bar{z}| = 1$?

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Hướng dẫn giải:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi \Rightarrow z + \bar{z} = 2x$.

Theo giả thiết: $\begin{cases} |z|=1 \\ |z+\bar{z}|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=1 \\ |2x|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=\pm\frac{1}{2} \end{cases}$.

Với $x = \pm\frac{1}{2}$ thì $\frac{1}{4} + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy có 4 số phức thỏa mãn là $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Chọn C.

VÍ DỤ 15. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = \left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải:

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có: $\begin{cases} \left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1 \\ \left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-1| = |z-i| \\ |z-3i| = |z+i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = a^2 + (b-1)^2 \\ a^2 + (b-3)^2 = a^2 + (b+1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a+1 = -2b+1 \\ -6b+9 = 2b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$. Vậy có một số phức thỏa mãn là $z = 1 + i$. **Chọn B.**

VÍ DỤ 16. (Đề tham khảo THPT QG 2018) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i - |z|(1+i) = 0$ và $|z| > 1$. Tính $P = a + b$.

A. $P = -1$.

B. $P = -5$.

C. $P = 3$.

D. $P = 7$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z + 2 + i - |z|(1+i) = 0 \Leftrightarrow (a+2) + (b+1)i = |z| + i|z|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2 = |z| \\ b+1 = |z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ b+1 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \quad (1)$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được: $a - b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = a + 1$. Thay vào (1) ta được:

$a + 2 = \sqrt{a^2 + (a+1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2 \geq 0 \\ a^2 + 4a + 4 = 2a^2 + 2a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2 \geq 0 \\ a^2 - 2a - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2 \geq 0 \\ a = -1 \\ a = 3 \end{cases}$.

Với $a = -1$ thì $b = 0$. Khi đó: $z = -1 \Rightarrow |z| = 1$ (không thỏa điều kiện $|z| > 1$).

Với $a = 3$ thì $b = 4$. Khi đó $z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = 5 > 1$ (thỏa điều kiện $|z| > 1$).

Vậy $P = a + b = 3 + 4 = 7$. **Chọn D.**

VÍ DỤ 17. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 1$, $|z_2| = 2$ và $|z_1 + z_2| = 3$. Giá trị của $|z_1 - z_2|$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Giả sử $z_1 = a_1 + b_1i$, ($a_1, b_1 \in \mathbb{R}$), $z_2 = a_2 + b_2i$, ($a_2, b_2 \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2| = 2 \\ |z_1 + z_2| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 = 4 \\ (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 = 4 \\ \underbrace{a_1^2 + b_1^2}_{=1} + \underbrace{a_2^2 + b_2^2}_{=4} + 2(a_1a_2 + b_1b_2) = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 = 4 \\ a_1a_2 + b_1b_2 = 2 \end{cases} \text{ . Khi đó, ta có: } |z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

$$= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) - 2(a_1a_2 + b_1b_2)} = \sqrt{1 + 4 - 2 \cdot 2} = 1. \text{ Vậy } |z_1 - z_2| = 1.$$

VÍ DỤ 18. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = \sqrt{3}$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tính $|2z_1 + 3z_2|$.

A. $\sqrt{52}$.

B. $\sqrt{53}$.

C. $5\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{51}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z_1| = |z_2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 3 \\ c^2 + d^2 = 3 \end{cases}$.

Mặt khác: $|z_1 - z_2| = 2 \Leftrightarrow |(a - c) + (b - d)i| = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} = 2 \Leftrightarrow \underbrace{a^2 + b^2}_{=3} + \underbrace{c^2 + d^2}_{=3} - 2(ac + bd) = 4 \Leftrightarrow ac + bd = 1.$$

Khi đó: $|2z_1 + 3z_2| = |(2a + 3c) + (2b + 3d)i| = \sqrt{(2a + 3c)^2 + (2b + 3d)^2}$

$$= \sqrt{\underbrace{4a^2 + 4b^2}_{=4 \cdot 3} + \underbrace{9c^2 + 9d^2}_{=9 \cdot 3} + 12 \left(\underbrace{ac + bd}_{=1} \right)} = \sqrt{12 + 27 + 12 \cdot 1} = \sqrt{51}. \text{ Chọn D.}$$

Dạng 3: Phương pháp lấy mô-đun hai vế đẳng thức

Phương pháp:

Học sinh cần nắm vững các tính chất và công thức sau:

Cho các số phức z, w :

- Nếu $z = w$ thì $|z| = |w|$ (điều ngược lại không chắc đúng).
- $|zw| = |z| \cdot |w|$; $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$.

VÍ DỤ 19. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z| = 3$ và $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z + w}$. Khi đó $|w|$ bằng:

A. 3.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w} \Leftrightarrow \frac{z+w}{zw} = \frac{1}{z+w} \Rightarrow (z+w)^2 = zw \Rightarrow z^2 + w^2 + zw = 0 \Rightarrow \left(z + \frac{1}{2}w\right)^2 = -\frac{3}{4}w^2$
 $\Rightarrow \left(z + \frac{1}{2}w\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}i}{2}w\right)^2 \Rightarrow z + \frac{1}{2}w = \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}w \Rightarrow z = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)w \quad (*)$.

Lấy mô-đun hai vế của (*), ta được: $|z| = \underbrace{\left|-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right|}_{=1} |w| \Leftrightarrow |z| = |w| = 3$. **Chọn A.**

VÍ DỤ 20. Tìm mô-đun của số phức z biết $z - 4 = (1+i)|z| - (4+3z)i$.

A. $|z| = \frac{1}{2}$. B. $|z| = 2$. C. $|z| = 4$. D. $|z| = \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z - 4 = (1+i)|z| - (4+3z)i \Leftrightarrow (1+3i)z = |z| + 4 + (|z| - 4)i \quad (1)$.

Lấy mô-đun hai vế của (1), ta được: $|(1+3i)z| = ||z| + 4 + (|z| - 4)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{10}|z| = \sqrt{(|z| + 4)^2 + (|z| - 4)^2} \Leftrightarrow 10|z|^2 = 2|z|^2 + 32 \Leftrightarrow 8|z|^2 = 32 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Rightarrow |z| = 2$.

Chọn B.

VÍ DỤ 21. (Mã đề 104, TN THPT QG 2018) Có bao nhiêu số phức z thỏa: $|z|(z - 5 - i) + 2i = (6 - i)z$?

A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $|z|(z - 5 - i) + 2i = (6 - i)z \Leftrightarrow (|z| - 6 + i)z = 5|z| + (|z| - 2)i \quad (1)$

Lấy mô-đun hai vế của (1), ta được: $\sqrt{(|z| - 6)^2 + 1} \cdot |z| = \sqrt{25|z|^2 + (|z| - 2)^2}$

$\Leftrightarrow (|z|^2 - 12|z| + 37)|z|^2 = 26|z|^2 - 4|z| + 4 \Leftrightarrow |z|^4 - 12|z|^3 + 11|z|^2 + 4|z| - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \vee |z| \approx 10,97 \\ |z| \approx 0,62 \vee |z| \approx -0,59 \end{cases}$. Vì $|z| \geq 0$ nên $|z| \approx -0,59$ bị loại.

Ta thấy, (1) là **phương trình bậc nhất đối với số phức z** nên với mỗi giá trị thực $|z|$ tìm được, khi thay vào (1), ta luôn tìm được duy nhất một số phức z thỏa mãn. Vậy có ba số phức z thỏa mãn đề bài. **Chọn B.**

VÍ DỤ 22. Cho số phức z thỏa mãn $z[(1+3i)|z| - 3 + i] = 4\sqrt{10}$, $|z| > 1$. Tính $|z|$.

A. $|z| = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{65}}{4}}$. B. $|z| = \sqrt{\frac{1+\sqrt{65}}{2}}$. C. $|z| = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{65}}{2}}$. D. $|z| = \sqrt{\frac{1+\sqrt{65}}{4}}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z[(1+3i)|z| - 3 + i] = 4\sqrt{10} \Leftrightarrow z[(|z| - 3) + (3|z| + 1)i] = 4\sqrt{10} \quad (1)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Lấy mô-đun hai vế của (1): $|z|\sqrt{(|z|-3)^2 + (3|z|+1)^2} = 4\sqrt{10} \Leftrightarrow |z|^2 \left[(|z|-3)^2 + (3|z|+1)^2 \right] = 160$

$$\Leftrightarrow 10|z|^4 + 10|z|^2 - 160 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = \frac{-1+\sqrt{65}}{2} > 0 \\ |z|^2 = \frac{-1-\sqrt{65}}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{65}}{2}} \approx 1,879 \text{ (thỏa } |z| > 1).$$

Chọn C.

VÍ DỤ 23. (Trích đề Tham khảo THPT QG 2017) Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2+i$.

Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$. B. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. C. $|z| > 2$. D. $|z| < \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2+i \Leftrightarrow |z| + 2 + (2|z|-1)i = \frac{\sqrt{10}}{z}$ (1).

Lấy mô-đun hai vế của (1), ta được: $\left| |z| + 2 + (2|z|-1)i \right| = \left| \frac{\sqrt{10}}{z} \right| \Leftrightarrow \sqrt{(|z|+2)^2 + (2|z|-1)^2} = \frac{\sqrt{10}}{|z|}$

$$\Leftrightarrow (|z|+2)^2 + (2|z|-1)^2 = \frac{10}{|z|^2} \Leftrightarrow |z|^2(5|z|^2+5) = 10 \Leftrightarrow 5|z|^4 + 5|z|^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 1 > 0 \\ |z|^2 = -2 < 0 \end{cases}.$$

Ta nhận $|z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$ vì $|z| \geq 0$. Vậy $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$. **Chọn A.**

Dạng 4: Phương pháp tạo số phức liên hợp

Phương pháp:

Học sinh cần nắm vững các tính chất và công thức sau:

Cho các số phức z, w :

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$; $\overline{\bar{z}} = z$.
- $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$; $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$; $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.
- $2a = z + \bar{z}$ với a là phần thực của z .
- Nếu z là số thực thì $z = \bar{z}$. Ngược lại, nếu $z = \bar{z}$ thì $b = 0$ với b là phần ảo của z .
- Nếu z là số thuần ảo thì $z + \bar{z} = 0$. Ngược lại, nếu $z + \bar{z} = 0$ thì $a = 0$ với a là phần thực của z .

VÍ DỤ 24. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^3 + 2i|z|^2 = 0$.

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 6.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z^3 + 2i|z|^2 = 0 \Leftrightarrow z^3 + 2iz\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z(z^2 + 2i\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z^2 + 2i\bar{z} = 0 \end{cases}$ (1)

Gọi $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Thay vào (1) có: $x^2 - y^2 + 2xyi + 2i(x - yi) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2y + 2x(y+1)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2y = 0 \\ 2x(y+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2y = 0 \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0 \\ -y^2 + 2y = 0 \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} y = -1 \\ x^2 - 3 = 0 \end{cases} & (3) \end{cases}.$$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$; (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases}$.

Vậy có bốn số phức z thỏa mãn là: $z = 0 \vee z = 2i \vee z = \pm\sqrt{3} - i$. **Chọn A.**

VÍ DỤ 25. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn điều kiện $|z_1| = 4, |z_2| = 3, |z_3| = 2$ và $|4z_1z_2 + 16z_2z_3 + 9z_1z_3| = 48$. Giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2 + z_3|$ bằng:

- A. 1. B. 8. C. 2. D. 6.

Hướng dẫn giải:

Ta có $|z_1| = 4, |z_2| = 3, |z_3| = 2$ nên $\bar{z}_1 \cdot z_1 = |z_1|^2 = 16, \bar{z}_2 \cdot z_2 = |z_2|^2 = 9, \bar{z}_3 \cdot z_3 = |z_3|^2 = 4$.

Khi đó: $|4z_1z_2 + 16z_2z_3 + 9z_1z_3| = 48 \Leftrightarrow |\bar{z}_3z_1z_2z_3 + \bar{z}_1z_1z_2z_3 + \bar{z}_2z_1z_2z_3| = 48$

$\Leftrightarrow |(\bar{z}_3 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2)z_1z_2z_3| = 48 \Leftrightarrow |\bar{z}_3 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2| \cdot |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| = 48 \Leftrightarrow |\bar{z}_3 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2| = 2$.

Vậy $P = |z_1 + z_2 + z_3| = |\overline{\bar{z}_3 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2}| = |\bar{z}_3 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2| = 2$. **Chọn C.**

VÍ DỤ 26. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z + 2w| = 3, |2z + 3w| = 6$ và $|z + 4w| = 7$. Tính giá trị của biểu thức $P = z\bar{w} + \bar{z}w$.

- A. $P = -14i$. B. $P = -28i$. C. $P = -14$. D. $P = -28$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $|z + 2w| = 3 \Leftrightarrow |z + 2w|^2 = 9 \Leftrightarrow (z + 2w) \cdot (\overline{z + 2w}) = 9 \Leftrightarrow (z + 2w) \cdot (\bar{z} + 2\bar{w}) = 9$

$\Leftrightarrow z\bar{z} + 2(z\bar{w} + \bar{z}w) + 4w\bar{w} = 9 \Leftrightarrow |z|^2 + 2P + 4|w|^2 = 9 \quad (1)$.

Tương tự: $|2z + 3w| = 6 \Leftrightarrow |2z + 3w|^2 = 36 \Leftrightarrow (2z + 3w) \cdot (2\bar{z} + 3\bar{w}) = 36$

$\Leftrightarrow 4|z|^2 + 6P + 9|w|^2 = 36 \quad (2)$.

$|z + 4w| = 7 \Leftrightarrow (z + 4w) \cdot (\bar{z} + 4\bar{w}) = 49 \Leftrightarrow |z|^2 + 4P + 16|w|^2 = 49 \quad (3)$.

Giải hệ phương trình gồm (1), (2), (3) ta có: $\begin{cases} |z|^2 = 33 \\ P = -28 \\ |w|^2 = 8 \end{cases}$. Vậy $P = -28$. **Chọn D.**

VÍ DỤ 27. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{z+1}{z-1}$ là số thuần ảo. Tìm $|z|$.

- A. $|z| = 2$. B. $|z| = \frac{1}{2}$. C. $|z| = 1$. D. $|z| = 3$.

Hướng dẫn giải:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Đặt $w = \frac{z+1}{z-1}$, vì w thuần ảo nên $w + \bar{w} = 0$. Ta có: $\frac{z+1}{z-1} + \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = 0 \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} + \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = 0$

Suy ra: $(z+1)(\bar{z}-1) + (z-1)(\bar{z}+1) = 0 \Rightarrow z\bar{z} - z + \bar{z} - 1 + z\bar{z} + z - \bar{z} - 1 = 0 \Rightarrow 2z\bar{z} = 2 \Rightarrow |z|^2 = 1$.

Vậy $|z| = 1$. **Chọn C.**

VÍ DỤ 28. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 5$ và $iz + 4$ là số thuần ảo, tìm số phức nghịch đảo của z biết rằng z có phần thực dương.

A. $z^{-1} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$. B. $z^{-1} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$. C. $z^{-1} = \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$. D. $z^{-1} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $w = iz + 4$, vì w thuần ảo nên $w + \bar{w} = 0$. Ta có: $iz + 4 + \overline{(iz + 4)} = iz + 4 + (\overline{iz}) + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow iz + 8 + i\bar{z} = 0 \Leftrightarrow iz + 8 - i\bar{z} = 0 \Leftrightarrow i(z - \bar{z}) = -8 \Leftrightarrow z - \bar{z} = \frac{-8}{i} = 8i$$

$$\Leftrightarrow a + bi - (a - bi) = 8i \text{ với } z = a + bi \text{ (} a, b \in \mathbb{R} \text{)} \Leftrightarrow 2bi = 8i \Leftrightarrow b = 4 \text{ (1).}$$

Ta lại có: $|z| = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25$ (2). Thay (1) vào (2) suy ra $a = \pm 3$, mà $a > 0$ nên $a = 3$.

Khi đó: $z = 3 + 4i \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{3+4i} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$. **Chọn B.**

VÍ DỤ 29. Cho số phức z khác 1 và $|z| = 1$. Tìm phần thực của số phức $\frac{1}{1-z}$.

A. 2. B. -2. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi a là phần thực của số phức $\frac{1}{1-z}$, suy ra:

$$2a = \frac{1}{1-z} + \overline{\left(\frac{1}{1-z}\right)} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-\bar{z}} = \frac{1-\bar{z}+1-z}{1-z-\bar{z}+z\bar{z}} = \frac{1-\bar{z}+1-z}{1-z-\bar{z}+|z|^2} = \frac{2-\bar{z}-z}{2-z-\bar{z}} = 1 \text{ vì } z\bar{z} = |z|^2 = 1.$$

Vậy $2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$. **Chọn D.**

VÍ DỤ 30. Cho số phức z có phần ảo khác 0, biết rằng số phức $\frac{1}{|z|-z}$ có phần thực bằng 4. Tính $|z|$.

A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{8}$. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Vì $\frac{1}{|z|-z}$ có phần thực bằng 4 nên $2.4 = \frac{1}{|z|-z} + \overline{\left(\frac{1}{|z|-z}\right)}$

$$= \frac{1}{|z|-z} + \frac{1}{|z|-\bar{z}} = \frac{|z|-\bar{z}+|z|-z}{|z|^2-|z|\bar{z}-|z|z+z\bar{z}} = \frac{2|z|-z-\bar{z}}{2|z|^2-|z|(z+\bar{z})} = \frac{2|z|-z-\bar{z}}{|z|(2|z|-z-\bar{z})} = \frac{1}{|z|}.$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Do vậy: $\frac{1}{|z|} = 8 \Rightarrow |z| = \frac{1}{8}$. **Chọn B.**

VÍ DỤ 31. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $z_1 z_2 \neq 1$. Tìm phần ảo của số phức

$$w = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}.$$

A. 1.

B. 0.

C. -1.

D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $|z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{\bar{z}_1}, z_2 = \frac{1}{\bar{z}_2}$.

$$\text{Vì vậy: } w = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = \frac{\frac{1}{\bar{z}_1} + \frac{1}{\bar{z}_2}}{1 + \frac{1}{\bar{z}_1 \bar{z}_2}} = \frac{\frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{\bar{z}_1 \bar{z}_2}}{\frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2 + 1}{\bar{z}_1 \bar{z}_2}} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{z_1 z_2 + 1}} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{z_1 z_2 + 1}} = \bar{w}.$$

Ta thấy w bằng với số phức liên hợp của nó, vì vậy w là số thực, tức phần ảo của w bằng 0.

Chọn B.

VÍ DỤ 32. Cho ba số phức z, w, t thỏa mãn $z + w + t = 0$ và $|z| = |w| = |t| = 2\sqrt{506}$. Gọi $s = z^2 + w^2 + t^2$.

Tìm khẳng định đúng trong các mệnh đề sau:

A. s là số thực âm.

B. $s = 0$.

C. s là số thuần ảo.

D. s là số thực dương.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } s = z^2 + w^2 + t^2 = (z + w + t)^2 - 2(zw + wt + tz) = -2zwt \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{w} + \frac{1}{z} \right) \quad (1).$$

$$\text{Ta lại có: } |z| = |w| = |t| = 2\sqrt{506} \Rightarrow \begin{cases} z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 2024 \\ w \cdot \bar{w} = |w|^2 = 2024 \\ t \cdot \bar{t} = |t|^2 = 2024 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{2024}, \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{2024}, \frac{1}{t} = \frac{\bar{t}}{2024} \quad (2).$$

$$\begin{aligned} \text{Thay (2) vào (1): } s &= -2zwt \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{w} + \frac{1}{z} \right) = -2zwt \left(\frac{\bar{z}}{2024} + \frac{\bar{w}}{2024} + \frac{\bar{t}}{2024} \right) \\ &= \frac{-zwt}{1012} (\bar{z} + \bar{w} + \bar{t}) = \frac{-zwt}{1012} \overline{(z + w + t)} = 0. \quad \text{Chọn B.} \end{aligned}$$

VÍ DỤ 33. Cho số phức z có phần ảo khác 0 và thỏa mãn $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}$ là số thực. Tìm mô-đun của z .

A. $|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. $|z| = 1$.

C. $|z| = \sqrt{3}$.

D. $|z| = 2$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2} = 1 + 2 \frac{z}{1-z+z^2}$; vì $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}$ là số thực nên $\frac{z}{1-z+z^2}$ cũng là số thực.

Suy ra: $\frac{1-z+z^2}{z}$ là số thực, mà $\frac{1-z+z^2}{z} = z + \frac{1}{z} - 1$ nên $z + \frac{1}{z}$ là số thực.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Ta có: $z + \frac{1}{z} = \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z - \bar{z} + \frac{\bar{z} - z}{z \cdot \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow (z - \bar{z}) \left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \bar{z} \\ 1 - \frac{1}{|z|^2} = 0 \end{cases}$

- Với $z = \bar{z}$ thì z là số thực (loại vì trái giả thiết).
- Với $1 - \frac{1}{|z|^2} = 0$ thì $|z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$. **Chọn B.**

Đạng 5: Phương pháp chuẩn hóa số phức

Phương pháp:

Bài toán tổng quát: Cho các số phức $z, w, t, \dots$ thỏa mãn các hệ thức về mô-đun (hoặc một số tính chất khác của số phức). Tính giá trị một biểu thức $P = P(z, w, t, \dots)$.

Phương pháp:

Khi biểu thức P luôn có thể được rút gọn về một hằng số cụ thể, tức là mệnh đề

$P = P(z, w, t, \dots) = P_0$ luôn đúng khi $z, w, t, \dots$ thỏa mãn các hệ thức về mô-đun (hoặc tính chất khác), ta có thể chọn z bằng một số phức cụ thể thỏa mãn giả thiết, khi đó ta tìm được $P = P(z, w, t, \dots) = P_0$ một cách nhanh chóng, dễ dàng mà không làm mất đi tính tổng quát của bài toán.

Lưu ý:

- Phương pháp này chỉ phù hợp cho việc giải toán trắc nghiệm, việc nhận biết khi nào cần chuẩn hóa số phức đòi hỏi kinh nghiệm giải bài tập nơi các em học sinh.
- Phương pháp chuẩn hóa thường không dùng được cho các bài toán Max-Min số phức, vì với những bài toán này thường thì kết quả rơi vào một trường hợp đặc biệt của các số phức $z, w, \dots$ nên việc ta chọn z bằng một số phức cụ thể ngay từ đầu là không khả thi.

VÍ DỤ 34. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = |z_1| = |z_2| > 0$. Tính $A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4$.

A. 1.

B. 2.

C. -1.

D. -2.

Hướng dẫn giải:

☺ **Cách giải 1: Phương pháp tạo số phức liên hợp.**

Ta có: $|z_1 - z_2| = |z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1 - z_2| = |z_1| \\ |z_1| = |z_2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 \\ z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_1 \\ z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 = z_1 \bar{z}_1 \\ z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 \end{cases}$

Khi đó: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 = \left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}\right)^2 - 2 = \left(\frac{\frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} + \frac{z_2 \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1}}{\frac{z_1 \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1}}\right)^2 - 2 = \left(\frac{\frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} + \frac{z_2 \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1}}{1}\right)^2 - 2 = \left(\frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} + \frac{z_2 \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1}\right)^2 - 2 = 1 - 2 = -1.$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Ta có: $A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4 = \left[\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2\right]^2 - 2 = (-1)^2 - 2 = -1$. **Chọn C.**

☺ **Cách giải 2: Phương pháp chuẩn hóa số phức.**

Chọn $z_2 = 1$ thỏa $|z_2| = 1$. Gọi $z_1 = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Từ giả thiết $|z_1 - z_2| = |z_1| = |z_2| = 1$, suy ra: $\begin{cases} |z_1 - 1| = 1 \\ |z_1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |(x-1) + yi| = 1 \\ |x + yi| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 1 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

• Với $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ thì $A = \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{1}\right)^4 + \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^4 = -1$.

• Với $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ thì $A = \left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{1}\right)^4 + \left(\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^4 = -1$. **Chọn C.**

VÍ DỤ 35. Cho z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6}$. Tính giá trị của biểu thức $P = |2z_1 + z_2|$.

A. $P = 2$.

B. $P = \sqrt{3}$.

C. $P = 3$.

D. $P = 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn $z_2 = 1$ thỏa $|z_2| = 1$. Gọi $z_1 = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $\begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_1 - 2 \cdot 1| = \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + yi| = 1 \\ |(x-2) + yi| = \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-2)^2 + y^2 = 6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm \frac{\sqrt{15}}{4} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

• Với $z_1 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4}i$ thì $P = \left|2\left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4}i\right) + 1\right| = 2$.

• Với $z_1 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4}i$ thì $P = \left|2\left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4}i\right) + 1\right| = 2$. **Chọn A.**

VÍ DỤ 36. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z| = 3$ và $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$. Khi đó $|w|$ bằng:

A. 3.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{3}$.**Hướng dẫn giải:**

Chọn $z=3$ thỏa $|z|=3$, thay vào phương trình: $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$, ta có:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{w} = \frac{1}{3+w} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{w-(3+w)}{w(3+w)} \Leftrightarrow w^2 + 3w + 9 = 0 \Leftrightarrow w = -\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

Với cả hai trường hợp $w = -\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ thì $|w| = \left| -\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right| = 3$. **Chọn A.**

VÍ DỤ 37. Cho số phức $z = a + bi$ có phần ảo b khác 0 và thỏa mãn $w = \frac{z}{1+z^2}$ là số thực. Tính

$$T = \frac{|z|}{1+|z|^2}.$$

A. $T = \frac{1}{2}$.B. $T = \frac{1}{5}$.C. $T = \frac{1}{3}$.D. $T = 1$.**Hướng dẫn giải:**

Theo giả thiết $w = \frac{z}{1+z^2}$ là số thực, ta chọn $w=1 \Rightarrow \frac{z}{1+z^2} = 1 \Rightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Với cả hai trường hợp $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ thì $T = \frac{\left| \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right|}{1 + \left| \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right|^2} = \frac{1}{2}$. **Chọn A.**

VÍ DỤ 38. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|z^2 + 4| = 2|z|$. Đặt $P = 8(b^2 - a^2) - 12$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = (|z|^2 - 2)$.B. $P = (|z| - 4)^2$.C. $P = (|z|^2 - 2)^2$.D. $P = (|z|^2 - 4)^2$.**Hướng dẫn giải:**

Ta có: $|z^2 + 4| = 2|z| \Leftrightarrow |(a+bi)^2 + 4| = 2|a+bi| \Leftrightarrow |(a^2 - b^2 + 4) + 2abi| = 2|a+bi|$
 $\Leftrightarrow (a^2 - b^2 + 4)^2 + (2ab)^2 = 4(a^2 + b^2)$ (*).

Chọn $a=1$, thay vào (*): $(5-b^2)^2 + 4b^2 = 4 + 4b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-b^2 = 2 \\ 5-b^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm\sqrt{3} \\ b = \pm\sqrt{7} \end{cases}$.

• Với $b = \pm\sqrt{3}$, $a=1$ thì $P = 8[(\pm\sqrt{3})^2 - 1^2] - 12 = 4$; $|z| = 2$. Suy ra $P = (|z|^2 - 2)^2$.

• Với $b = \pm\sqrt{7}$, $a=1$ thì $P = 8[(\pm\sqrt{7})^2 - 1^2] - 12 = 36$; $|z| = 2\sqrt{2}$. Suy ra $P = (|z|^2 - 2)^2$.

Chọn C.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

VÍ DỤ 39. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

- A. 0. B. -1. C. 1. D. 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn $z_3 = 1$, suy ra $z_1 + z_2 = -1$. Gọi $z_1 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), suy ra $z_2 = -a - bi - 1$.

$$\text{Theo giả thiết: } \begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a + bi| = 1 \\ |-a - 1 - bi| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (-a-1)^2 + (-b)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 + 2a + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 1 + 2a + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

- Với $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ thì $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$$P = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + 1^2 = 0.$$

- Với $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ thì $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Ta cũng tính được $P = 0$. **Chọn A.**

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM THỰC HÀNH CHỦ ĐỀ 1

Câu 1. Cho số phức z thỏa $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2000}$. Viết z dưới dạng $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó tổng $a + b$ có giá trị bằng bao nhiêu?

- A. 0. B. -1. C. 1. D. 2.

Câu 2. Tìm phần thực, phần ảo của số phức z thỏa $\left(\frac{z}{2} - i\right)(1-i) = (1+i)^{3979}$.

- A. Phần thực là 2^{1989} và phần ảo là 1. B. Phần thực là 2^{1990} và phần ảo là 2.
 C. Phần thực là -2^{1989} và phần ảo là 1. D. Phần thực là -2^{1990} và phần ảo là 2.

Câu 3. Cho số phức $z = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{26}$. Phần thực của số phức z là

- A. $-(1+2^{13})$. B. 2^{13} . C. -2^{13} . D. $(1+2^{13})$.

Câu 4. Tính tổng $L = C_{2024}^0 - C_{2024}^2 + C_{2024}^4 - C_{2024}^6 + \dots - C_{2024}^{2022} + C_{2024}^{2024}$.

- A. 2^{1012} . B. -2^{1012} . C. 2^{2024} . D. -2^{2024} .

Câu 5. Cho số phức $z = \left(\frac{4i}{i+1}\right)^m$, m nguyên dương. Có bao nhiêu giá trị $m \in [1; 100]$ để z là số thực?

- A. 26. B. 25. C. 27. D. 28.

- Câu 6.** Cho số phức $z = \left(\frac{2+6i}{3-i}\right)^m$, m nguyên dương. Có bao nhiêu giá trị $m \in [1;50]$ để z là số thuần ảo?
- A. 25. B. 26. C. 24. D. 50.
- Câu 7.** (Mã đề 104, Đề thi THPTQG năm 2017) Cho số phức z thỏa mãn $|z|=5$ và $|z+3|=|z+3-10i|$. Tìm số phức $w = z - 4 + 3i$.
- A. $w = -3 + 8i$. B. $w = 1 + 3i$. C. $w = -1 + 7i$. D. $w = -4 + 8i$.
- Câu 8.** (Mã đề 110, Đề thi THPT QG 2017) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i = |z|$. Tính $S = 4a + b$.
- A. $S = 4$ B. $S = 2$ C. $S = -2$ D. $S = -4$
- Câu 9.** (Trích Đề Tham khảo THPTQG 2019) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = 2|z + \bar{z}| + 4$ và $|z - 1 - i| = |z - 3 + 3i|$?
- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.
- Câu 10.** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời điều kiện $|z \cdot \bar{z} + z| = 2$ và $|z| = 2$?
- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.
- Câu 11.** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn: $|z|^2 + |\bar{z}|^2 = 26$ và $z + \bar{z} = 6$?
- A. 2. B. 3. C. 2. D. 1.
- Câu 12.** Tính tổng S của các phần thực của tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện $\bar{z} = \sqrt{3}z^2$.
- A. $S = \sqrt{3}$. B. $S = 0$. C. $S = \frac{\sqrt{3}}{6}$. D. $S = 1$.
- Câu 13.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn phương trình $\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z - \frac{1}{\bar{z}}} = i$. Tính $a^2 + b^2$.
- A. $3 + 2\sqrt{2}$. B. 4. C. $3 - 2\sqrt{2}$. D. $2 + 2\sqrt{2}$.
- Câu 14.** Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\frac{iz - (3i+1)\bar{z}}{1+i} = |z|^2$. Số phức $w = \frac{26}{9}iz$ có môđun là
- A. 9. B. $\sqrt{26}$. C. $3\sqrt{3}$. D. 5.
- Câu 15.** Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn $|2z - i| = |2 + iz|$, biết $|z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2|$
- A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $P = 2$. C. $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. D. $P = \sqrt{3}$.
- Câu 16.** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1| = |z_2| = 2$ và $|z_1 + 2z_2| = 4$. Giá trị của $|2z_1 - z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{6}$.

B. $\sqrt{6}$.

C. $3\sqrt{6}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Câu 17. Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 3i| = |1 - i\bar{z}|$ và $z - \frac{9}{z}$ là số thuần ảo?

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Câu 18. Có bao nhiêu số phức z thỏa $|z + 1 - 2i| = |\bar{z} + 3 + 4i|$ và $\frac{z - 2i}{z + i}$ là một số thuần ảo

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Câu 19. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}|$ và z^2 là số thuần ảo

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Câu 20. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z - 3| = |z - 1|$ và $(z + 2)(\bar{z} - i)$ là số thực. Tính $a + b$.

A. -2.

B. 0.

C. 2.

D. 4.

Câu 21. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3$, $|z_2| = 4$, $|z_1 - z_2| = \sqrt{37}$. Xét số phức $z = \frac{z_1}{z_2} = a + bi$.

Tìm $|b|$.

A. $|b| = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

B. $|b| = \frac{\sqrt{3}}{10}$.

C. $|b| = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

D. $|b| = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 22. Cho số phức z thỏa mãn $z - 4 = (1 + i)|z| - (4 + 3z)i$. Môđun của số phức z bằng

A. 2.

B. 1.

C. 16.

D. 4.

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z}[(3 + 4i)|z| - 4 + 3i] - 5\sqrt{2} = 0$. Giá trị của $|z|$ là

A. 2.

B. $\sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 1.

Câu 24. Cho số phức $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z|(2 + i) = z - 1 + i(2z + 3)$. Tính $S = a + b$.

A. $S = -1$.

B. $S = 0$.

C. $S = 2$.

D. $S = -5$.

Câu 25. Tính tổng phần thực của tất cả các số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\left(z + \frac{5}{|z|}\right)i = 7 - z$.

A. -2.

B. -3.

C. 3.

D. 2.

Câu 26. Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $z\sqrt{3z\bar{z} + 1} = |z|(2 + 6iz)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{2} < |z| < 1$.

D. $|z| < \frac{1}{4}$.

Câu 27. Cho số phức z thỏa mãn $(2 - i)|z| - \frac{25}{z} = 6 - 2i$. Khi đó $|z|$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau?

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

A. (2;4).

B. (4;6).

C. (9;11).

D. (11;14).

Câu 28. Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

B. $|z_1 + z_2 + z_3| > |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

C. $|z_1 + z_2 + z_3| < |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

D. $|z_1 + z_2 + z_3| \neq |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

Câu 29. Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$.

B. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \leq |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$.

C. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \geq |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$.

D. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \neq |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$.

Câu 30. Cho số phức z có môđun bằng 10 và w là số phức thỏa biểu thức $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$. Môđun của số phức w là:

A. 20.

B. 10.

C. 1.

D. $\frac{1}{20}$.

Câu 31. Cho các số phức $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{2}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1} \right|.$$

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. 2.

D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 32. Cho các số phức z_1, z_2 khác nhau thỏa mãn: $|z_1| = |z_2|$. Chọn phương án đúng:

A. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = 0$.

B. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ có phần thực và phần ảo khác 0.

C. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số thực.

D. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số thuần ảo.

Câu 33. Nếu $|z| = 1$ thì $\frac{z^2 - 1}{z}$

A. bằng -1 .

B. là số thuần ảo.

C. bằng 0.

D. là số phức có phần thực dương.

Câu 34. Cho số phức z có $|z| = m, (m > 0)$. Với $z \neq m$; tìm phần thực của số phức $\frac{1}{m - z}$.

A. m .

B. $\frac{1}{m}$.

C. $\frac{1}{4m}$.

D. $\frac{1}{2m}$.

- Câu 35.** Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$. Tính $A = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$.
- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{3}{8}$.
- Câu 36.** Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = \sqrt{3}$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Môđun $|z_1 + z_2|$ bằng
- A. 2. B. 3. C. $\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.
- Câu 37.** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\frac{z^2}{z - 2i} = |z|^2$?
- A. 4 B. 3 C. 1 D. 2
- Câu 38.** Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_1 z_2 z_3 = 0$. Đặt $z = z_1 + z_2 + z_3$, giá trị của $|z|^3 - 3|z|^2$ bằng:
- A. -2. B. -4. C. 4. D. 2.
- Câu 39.** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_1 + z_2| = 3$ và $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{3}$. Giá trị của biểu thức $\left| (z_1 \overline{z_2})^3 + (\overline{z_1} z_2)^3 \right|$ bằng:
- A. 1458 B. 324 C. 729 D. 2196
- Câu 40.** Cho z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2^2}$ là số thực và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{6}$. Môđun của z_1 bằng
- A. $\sqrt{10}$ B. $\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 2
- Câu 41.** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = 1$ và $|2z_1 - 3z_2| = 4$. Tính giá trị biểu thức $P = |z_1 + 2z_2|$.
- A. $P = \sqrt{11}$. B. $P = \sqrt{10}$. C. $P = \sqrt{15}$. D. $P = 2\sqrt{5}$.
- Câu 42.** Cho số phức z thỏa mãn $z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$. Tìm phần thực của số phức $w = z(z^2 - z + 1)$.
- A. $\frac{1}{2}$. B. 0. C. 1. D. 2.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHỦ ĐỀ 1

Câu 1. Chọn C.

$$\text{Ta có: } z = \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^{2000} = \left(\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} \right)^{2000} = \left(\frac{-2i}{2} \right)^{2000} = (-i)^{2000} = i^{2000} = (i^2)^{1000} = (-1)^{1000} = 1.$$

Suy ra $a = 1, b = 0$ nên $a + b = 1$.

Câu 2. Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \left(\frac{z}{2} - i\right)(1-i) &= (1+i)^{3979} \Leftrightarrow \frac{z}{2} - i = \frac{(1+i)^{3979}}{1-i} \Leftrightarrow \frac{z}{2} - i = \frac{(1+i)^{3980}}{2} \Leftrightarrow \frac{z}{2} - i = \frac{[(1+i)^2]^{1990}}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{z}{2} - i = \frac{(2i)^{1990}}{2} \Leftrightarrow z - 2i = 2^{1990} \cdot i^{1990} \Leftrightarrow z = 2^{1990} \cdot (i^2)^{995} + 2i = -2^{1990} + 2i. \end{aligned}$$

Câu 3. Chọn B.

Nhận xét: z là tổng 27 số hạng một cấp số nhân có số hạng đầu bằng 1 và công bội $q = 1+i$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } z &= 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{26} = 1 \cdot \frac{(1+i)^{27} - 1}{(1+i) - 1} \\ &= \frac{[(1+i)^2]^{13} \cdot (1+i) - 1}{i} = \frac{(2i)^{13} (1+i) - 1}{i} \\ &= \frac{2^{13} (i^2)^6 i (1+i) - 1}{i} = \frac{2^{13} i + 2^{13} i^2 - 1}{i} = \frac{2^{13} i - 2^{13} - 1}{i} = 2^{13} + (1 + 2^{13})i. \end{aligned}$$

Vậy phần thực của z là 2^{13} .

Câu 4. Chọn A.

$$\text{Ta có } (1+i)^{2024} = C_{2024}^0 + C_{2024}^1 i + C_{2024}^2 i^2 + C_{2024}^3 i^3 + \dots + C_{2024}^{2023} i^{2023} + C_{2024}^{2024} i^{2024} \quad (1);$$

$$(1-i)^{2024} = C_{2024}^0 - C_{2024}^1 i + C_{2024}^2 i^2 - C_{2024}^3 i^3 + \dots - C_{2024}^{2023} i^{2023} + C_{2024}^{2024} i^{2024} \quad (2).$$

Lấy (1) cộng (2) theo vế với lưu ý rằng $i^{4k} = 1, i^{4k+2} = -1$ với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta có:

$$(1+i)^{2024} + (1-i)^{2024} = 2(C_{2024}^0 - C_{2024}^2 + C_{2024}^4 - \dots - C_{2024}^{2022} + C_{2024}^{2024}) = 2L.$$

$$\text{Do đó } L = \frac{(1+i)^{2024} + (1-i)^{2024}}{2} = \frac{(2i)^{1012} + (-2i)^{1012}}{2} = \frac{2^{1012} \cdot (i^2)^{506} + 2^{1012} \cdot (i^2)^{506}}{2} = 2^{1012}.$$

Câu 5. Chọn B.

$$\text{Ta có: } z = \left(\frac{4i}{i+1}\right)^m = \left[\frac{4i(1-i)}{1-i^2}\right]^m = [2i(1-i)]^m = 2^m (1+i)^m = 2^m \cdot [(1+i)^2]^{\frac{m}{2}} = 2^m \cdot (2i)^{\frac{m}{2}} = 2^{\frac{3m}{2}} \cdot i^{\frac{m}{2}}.$$

$$\text{Ta có: } z \text{ là số thực} \Leftrightarrow \frac{m}{2} = 2k \quad (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow m = 4k, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

$$\text{Vì } m \in [1; 100] \Rightarrow 1 \leq 4k \leq 100 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq 25 \text{ mà } k \in \mathbb{N} \text{ nên } k \in \{1; 2; \dots; 25\}.$$

Vậy có 25 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 6. Chọn A.

$$\text{Ta có: } z = \left(\frac{2+6i}{3-i}\right)^m = (2i)^m = 2^m \cdot i^m.$$

Ta có: z là số thuần ảo khi và chỉ khi $m = 2k+1, k \in \mathbb{N}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Vì $m \in [1; 50] \Rightarrow 1 \leq 2k+1 \leq 50 \Rightarrow 0 \leq k \leq 24,5$ mà $k \in \mathbb{N}$ nên $k \in \{0; 1; 2; \dots; 24\}$.

Vậy có 25 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 7. Chọn D.

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z| = 5 \Leftrightarrow |x + yi| = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$ (1).

$$|z + 3| = |z + 3 - 10i| \Leftrightarrow |(x + 3) + yi| = |(x + 3) + (y - 10)i| \Leftrightarrow (x + 3)^2 + y^2 = (x + 3)^2 + (y - 10)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = y - 10 \\ y = 10 - y \end{cases} \Leftrightarrow y = 5 \text{ (2). Thay (2) vào (1): } x^2 + 5^2 = 25 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy $z = 5i$. Từ đó ta có $w = z - 4 + 3i = -4 + 8i$.

Câu 8. Chọn D.

$$\text{Ta có: } z + 2 + i = |z| \Leftrightarrow (a + 2) + (b + 1)i = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ b + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ (a + 2)^2 = a^2 + 1 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ a^2 + 4a + 4 = a^2 + 1 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow S = 4a + b = -4.$$

Câu 9. Chọn B.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Suy ra $z + \bar{z} = x + yi + x - yi = 2x$.

$$\text{Ta có: } |z|^2 = 2|z + \bar{z}| + 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4|x| + 4 \text{ (1).}$$

$$\text{Mặt khác: } |z - 1 - i| = |z - 3 + 3i| \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (x - 3)^2 + (y + 3)^2$$

$$\Leftrightarrow -2x + 1 - 2y + 1 = -6x + 9 + 6y + 9 \Leftrightarrow 4x = 8y + 16 \Leftrightarrow x = 2y + 4 \text{ (2).}$$

$$\text{Thay (2) vào (1): } (2y + 4)^2 + y^2 = 4|2y + 4| + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} (2y + 4)^2 + y^2 = 4(2y + 4) + 4, y \geq -2 \\ (2y + 4)^2 + y^2 = -4(2y + 4) + 4, y < -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2 + 8y - 4 = 0, y \geq -2 \\ 5y^2 + 24y + 28 = 0, y < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{5} \vee y = -2 \\ y = -\frac{14}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Với } y = \frac{2}{5} \text{ thì } x = \frac{24}{5} \Rightarrow z = \frac{24}{5} + \frac{2}{5}i; \text{ với } y = -2 \text{ thì } x = 0 \Rightarrow y = -2i; \text{ với } y = -\frac{14}{5} \text{ thì } x = -\frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow z = -\frac{8}{5} - \frac{14}{5}i. \text{ Vậy có ba số phức thỏa mãn.}$$

Câu 10. Chọn D.

$$\text{Đặt } z = a + bi \text{ (} a, b \in \mathbb{R} \text{)} \Rightarrow \bar{z} = a - bi, z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2.$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

$$\text{Ta có: } \begin{cases} |a^2 + b^2 + a + bi| = 2 \\ |a + bi| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a + 4 + bi| = 2 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + 4)^2 + b^2 = 4 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underbrace{a^2 + b^2}_{=4} + 8a + 16 = 4 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}. \text{ Suy ra } z = -2.$$

Vậy có một số phức z thỏa mãn.

Câu 11. Chọn A.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), suy ra: $\bar{z} = x - yi$, $|z|^2 = |\bar{z}|^2 = x^2 + y^2$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} |z|^2 + |\bar{z}|^2 = 26 \\ z + \bar{z} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 2x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \pm 2 \end{cases}.$$

Ta tìm được hai số phức thỏa mãn là $z = 3 \pm 2i$.

Câu 12. Chọn B.

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết, ta có: $a - bi = \sqrt{3}(a + bi)^2$

$$\Leftrightarrow a - bi = \sqrt{3}(a^2 - b^2 + 2abi) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}(a^2 - b^2) = a & (1) \\ 2\sqrt{3}ab = -b & (2) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 2\sqrt{3}a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases}.$$

$$\bullet \text{ Với } b = 0 \text{ thì (1) suy ra: } a = 0 \vee a = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\bullet \text{ Với } a = -\frac{\sqrt{3}}{6} \text{ thì (1) suy ra: } \sqrt{3}\left(\frac{1}{12} - b^2\right) = -\frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}.$$

Vậy có bốn số phức z thỏa mãn, tổng phần thực của chúng là: $S = 0 + \frac{\sqrt{3}}{3} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = 0$.

Câu 13. Chọn A.

$$\text{Ta có: } \frac{(|z|-1)(1+iz)}{z - \frac{1}{\bar{z}}} = i \Leftrightarrow \frac{(|z|-1)(1+iz)\bar{z}}{z\bar{z}-1} = i \Leftrightarrow \frac{(|z|-1)(1+iz)\bar{z}}{|z|^2-1} = i \quad (1).$$

Điều kiện: $|z|^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow |z| \neq 1$.

$$(1) \Leftrightarrow (1+iz)\bar{z} = i(|z|+1) \Leftrightarrow \bar{z} + i|z|^2 = i(|z|+1) \Leftrightarrow a - bi + i(a^2 + b^2) = (\sqrt{a^2 + b^2} + 1)i$$

$$\Leftrightarrow a + (a^2 + b^2 - b)i = (\sqrt{a^2 + b^2} + 1)i \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 + b^2 - b = \sqrt{a^2 + b^2} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b^2 - b = |b| + 1, \end{cases} \quad (2).$$

$$\text{Ta có: } (2) \Leftrightarrow |b| = b^2 - b - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - b - 1 \geq 0 \\ b = b^2 - b - 1 \\ b = -b^2 + b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - b - 1 \geq 0 \\ b = 1 \pm \sqrt{2} \\ b = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = 1 + \sqrt{2} \end{cases}.$$

- Với $b = -1, a = 0$ thì $|z| = 1$ (không thỏa điều kiện).
- Với $b = 1 + \sqrt{2}, a = 0$ thì $|z| = 1 + \sqrt{2} \neq 1$ (thỏa điều kiện).

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 = (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Câu 14. Chọn B.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có: } \frac{iz - (3i + 1)\bar{z}}{1 + i} = |z|^2 \Leftrightarrow i(x + yi) - (3i + 1)(x - yi) = (1 + i)(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow xi - y - 3xi - 3y - x + yi = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)i \Leftrightarrow -x - 4y + (y - 2x)i = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x - 4y = x^2 + y^2 & (1) \\ -2x + y = x^2 + y^2 & (2) \end{cases}. \text{ Lấy (1) trừ (2) theo vế, ta được: } x - 5y = 0 \Leftrightarrow x = 5y.$$

$$\text{Thế } x = 5y \text{ vào (1), ta có: } -9y = 25y^2 + y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -\frac{9}{26} \end{cases}.$$

- Với $y = 0$ thì $x = 0 \Rightarrow z = 0$ (trái giả thiết).
- Với $y = -\frac{9}{26}$ thì $x = \frac{-45}{26} \Rightarrow z = -\frac{45}{26} - \frac{9}{26}i$. Ta có: $|w| = \left| \frac{26}{9}i \left(-\frac{45}{26} - \frac{9}{26}i \right) \right| = |1 - 5i| = \sqrt{26}$.

Câu 15. Chọn D.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có: $|2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow |2x + (2y - 1)i| = |2 - y + xi|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + (2y - 1)^2} = \sqrt{(2 - y)^2 + x^2} \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 - 4y + 1 = 4 - 4y + y^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1.$$

$$\text{Ta có: } |z_1 + z_2|^2 + \underbrace{|z_1 - z_2|^2}_{=1^2} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 2z_1\bar{z}_1 + 2z_2\bar{z}_2$$

$$= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = 2(1 + 1) = 4.$$

$$\text{Suy ra: } |z_1 + z_2|^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{3}.$$

Câu 16. Chọn A.

Giả sử $z_1 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$); $z_2 = c + di$ ($c, d \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} |z_1| = 2 \\ |z_2| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ c^2 + d^2 = 4 \end{cases}.$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Mặt khác: $|z_1 + 2z_2| = 4 \Leftrightarrow (a + 2c)^2 + (b + 2d)^2 = 16 \Leftrightarrow \underbrace{a^2 + b^2}_{=4} + 4 \underbrace{(c^2 + d^2)}_{=4} + 4(ac + bd) = 16$.

Suy ra: $ac + bd = -1$. Ta có: $|2z_1 - z_2| = \sqrt{(2a - c)^2 + (2b - d)^2}$
 $= \sqrt{4(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - 4(ac + bd)} = \sqrt{4 \cdot 4 + 4 - 4(-1)} = 2\sqrt{6}$.

Câu 17. Chọn B.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Điều kiện: $z \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 0$.

Ta có: $|z - 3i| = |1 - i\bar{z}| \Leftrightarrow |x + yi - 3i| = |1 - i(x - yi)| \Leftrightarrow |x + (y - 3)i| = |(1 - y) - xi|$

$\Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = (1 - y)^2 + x^2 \Leftrightarrow -6y + 9 = -2y + 1 \Leftrightarrow y = 2$.

Xét số phức: $z - \frac{9}{z} = x + 2i - \frac{9}{x + 2i} = x + 2i - \frac{9(x - 2i)}{x^2 + 4} = x - \frac{9x}{x^2 + 4} + \left(2 + \frac{18}{x^2 + 4}\right)i$ là số thuần ảo.

Suy ra: $x - \frac{9x}{x^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow x \left(1 - \frac{9}{x^2 + 4}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$.

Vậy có 3 số phức thỏa mãn đề bài là $2i, \pm\sqrt{5} + 2i$.

Câu 18. Chọn C.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z + 1 - 2i| = |\bar{z} + 3 + 4i| \Leftrightarrow |x + 1 + (y - 2)i| = |x + 3 + (4 - y)i|$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = (x + 3)^2 + (4 - y)^2 \Leftrightarrow 2x - 4y + 5 = 6x - 8y + 25 \Leftrightarrow y = x + 5$ (1).

Xét số phức $w = \frac{z - 2i}{\bar{z} + i} = \frac{x + (y - 2)i}{x + (1 - y)i} = \frac{[x + (y - 2)i] \cdot [x - (1 - y)i]}{x^2 + (1 - y)^2}$
 $= \frac{x^2 + (y - 2)(1 - y) + [x(y - 2) - x(1 - y)]i}{x^2 + (y - 1)^2} = \frac{x^2 + (y - 2)(1 - y) + x(2y - 3)i}{x^2 + (y - 1)^2}$

Theo giả thiết, w là một số ảo, suy ra: $\begin{cases} x^2 - (y - 2)(y - 1) = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 \neq 0 \end{cases}$ (2).

Thay (1) vào (2): $x^2 - (x + 3)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow -7x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{12}{7}$. Suy ra $y = \frac{23}{7}$.

Vậy $z = -\frac{12}{7} + \frac{23}{7}i$, tức là chỉ có một số phức z thỏa mãn đề bài.

Câu 19. Chọn D.

Gọi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z|^2 = |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = |2a| + |2bi|$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2|a| + 2|b|$ (1).

Mặt khác: $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ là số thuần ảo, suy ra $a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a = \pm b$.

Trường hợp 1: $a = b$; thay vào (1) ta được: $2a^2 = 4|a| \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = 0 \\ |a| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \pm 2 \end{cases}$.

Suy ra: $a = b = 0 \vee a = b = \pm 2$.

Trường hợp 2: $a = -b$ thay vào (1) ta được: $2a^2 = 4|a| \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = 0 \\ |a| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \pm 2 \end{cases}$.

Suy ra: $a = b = 0 \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$.

Vậy có 5 số phức thỏa mãn bài toán là $z = 0, z = 2 \pm 2i, z = -2 \pm 2i$.

Câu 20. Chọn B.

Ta có: $|z - 3| = |z - 1| \Leftrightarrow |a - 3 + bi| = |a - 1 + bi| \Leftrightarrow \sqrt{(a-3)^2 + b^2} = \sqrt{(a-1)^2 + b^2}$
 $\Leftrightarrow (a-3)^2 + b^2 = (a-1)^2 + b^2 \Leftrightarrow -4a + 8 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ (1).

Xét số phức: $w = (z + 2)(\bar{z} - i) = (a + bi + 2)(a - bi - i) = [(a + 2) + bi][a - (b + 1)i]$
 $= a(a + 2) + b(b + 1) + [ab - (a + 2)(b + 1)]i = a(a + 2) + b(b + 1) - (a + 2b + 2)i$.

Theo giả thiết, w là số thực, suy ra: $a + 2b + 2 = 0$ (2).

Thay (1) vào (2), ta được: $b = -2$. Do vậy $a + b = 0$.

Câu 21. Chọn C.

Đặt $z_1 = x + yi, z_2 = c + di$ ($x, y, c, d \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z_1| = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9; |z_2| = 4 \Rightarrow c^2 + d^2 = 16;$

$|z_1 - z_2| = \sqrt{37} \Rightarrow (x - c)^2 + (y - d)^2 = 37 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{=9} + \underbrace{c^2 + d^2}_{=16} - 2(xc + yd) = 37 \Leftrightarrow xc + yd = -6$.

Ta có: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x + yi}{c + di} = \frac{(x + yi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{xc + yd + (yc - xd)i}{c^2 + d^2} = \frac{xc + yd}{c^2 + d^2} + \frac{yc - xd}{c^2 + d^2}i = \frac{-6}{16} + \frac{yc - xd}{16}i$.
 $= a + bi$. Suy ra $a = -\frac{3}{8}$.

Mặt khác: $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{3}{4} = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow b^2 = \frac{9}{16} - \left(-\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{27}{64} \Rightarrow b = \pm \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Vậy: $|b| = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 22. Chọn A.

☺ **Cách giải 1: Lập hệ phương trình.**

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có: $z - 4 = (1 + i)|z| - (4 + 3z)i \Leftrightarrow z(1 + 3i) - 4 + 4i = (1 + i)|z|$
 $\Leftrightarrow (a + bi)(1 + 3i) - 4 + 4i = (1 + i)\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a - 3b - 4 + (3a + b + 4)i = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2}i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3b-4=\sqrt{a^2+b^2} \\ 3a+b+4=\sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3b-4=\sqrt{a^2+b^2} \\ 2a+4b+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5b-8=\sqrt{5b^2+16b+16} \\ a=-2b-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5b-8 \geq 0 \\ 25b^2+80b+64=5b^2+16b+16 \\ a=-2b-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \leq -\frac{8}{5} \\ 20b^2+64b+48=0 \\ a=-2b-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \leq -\frac{8}{5} \\ b=-2 \vee b=-\frac{6}{5} \\ a=-2b-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=0 \end{cases}.$$

Vậy $z = -2i \Rightarrow |z| = 2$.

☺ Cách giải 2: Lấy môđun hai vế đẳng thức.

Ta có: $z-4 = (1+i)|z| - (4+3z)i \Leftrightarrow z-4 = |z| + i|z| - 4i - 3zi \Leftrightarrow z(1+3i) = |z| + 4 + (|z|-4)i$ (*).

Lấy môđun hai vế của (*), ta được: $|z(1+3i)| = ||z| + 4 + (|z|-4)i|$

$$\Leftrightarrow |z| \cdot |1+3i| = \sqrt{(|z|+4)^2 + (|z|-4)^2} \Leftrightarrow 10|z|^2 = (|z|+4)^2 + (|z|-4)^2 \Leftrightarrow 10|z|^2 = 2|z|^2 + 32$$

$$\Leftrightarrow 8|z|^2 = 32 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Rightarrow |z| = 2.$$

Câu 23. Chọn D.

$$\text{Ta có: } \bar{z}[(3+4i)|z| - 4 + 3i] - 5\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (3+4i)|z| - 4 + 3i = \frac{5\sqrt{2}}{z}$$

$$\Leftrightarrow (3|z|-4) + (4|z|+3)i = \frac{5\sqrt{2}}{z} \quad (*)$$

$$\text{Lấy môđun hai vế của (*), ta được: } \sqrt{(3|z|-4)^2 + (4|z|+3)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{|z|} \quad (\text{với } |z| = |\bar{z}|)$$

$$\Leftrightarrow (3|z|-4)^2 + (4|z|+3)^2 = \frac{50}{|z|^2} \Leftrightarrow 25|z|^2 + 25 = \frac{50}{|z|^2} \Leftrightarrow 25|z|^4 + 25|z|^2 - 50 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z|=1 > 0 \\ |z|=-2 < 0 \end{cases}$$

Suy ra $|z|=1$.

Câu 24. Chọn A.

$$\text{Ta có: } |z|(2+i) = z-1+i(2z+3) \Leftrightarrow |z|(2+i) + 1-3i = z(1+2i) \Leftrightarrow (1+2|z|) + (|z|-3)i = z(1+2i) \quad (*)$$

Lấy môđun hai vế của (*), ta được:

$$(1+2|z|)^2 + (|z|-3)^2 = 5|z|^2 \Leftrightarrow 5|z|^2 - 2|z| + 10 = 5|z|^2 \Leftrightarrow |z| = 5.$$

Thay $|z|=5$ vào phương trình ban đầu, ta có:

$$5(2+i) = z-1+i(2z+3) \Leftrightarrow z(1+2i) = 11+2i \Leftrightarrow z = \frac{11+2i}{1+2i} = 3-4i. \text{ Suy ra: } a=3, b=-4.$$

Vậy $S = a+b = 3-4 = -1$.

Câu 25. Chọn C.

Ta có: $\left(z + \frac{5}{|z|}\right)i = 7 - z \quad (*) \Leftrightarrow zi + \frac{5i}{|z|} = 7 - z \Leftrightarrow z(i+1) = 7 - \frac{5i}{|z|} \Leftrightarrow z(i+1) = \frac{7|z| - 5i}{|z|} \quad (*).$

Lấy môđun hai vế của (*), ta được: $|z| \cdot |i+1| = \frac{|7|z| - 5i|}{|z|} \Leftrightarrow \sqrt{2}|z| = \frac{\sqrt{49|z|^2 + 25}}{|z|}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}|z|^2 = \sqrt{49|z|^2 + 25} \Leftrightarrow 2|z|^4 = 49|z|^2 + 25 \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 25 \\ |z|^2 = -\frac{1}{2} < 0 \end{cases}.$$

Do vậy $|z|^2 = 25 \Rightarrow |z| = 5$. Thay vào (*), ta được:

$$(z+1)i = 7 - z \Leftrightarrow z(i+1) = 7 - i \Leftrightarrow z = \frac{7-i}{i+1} = 3 - 4i.$$

Chỉ có duy nhất số phức $z = 3 - 4i$ thỏa mãn nên tổng phần thực bằng 3.

Câu 26. Chọn A.

Ta có: $z\sqrt{3z\bar{z}+1} = |z|(2+6iz) \Leftrightarrow z\sqrt{3z\bar{z}+1} = 2|z|+6i|z|.z \Leftrightarrow z(\sqrt{3|z|^2+1}-6|z|i) = 2|z| \quad (*).$

Lấy môđun hai vế của (*), ta được: $|z|(\sqrt{3|z|^2+1}+36|z|^2) = 2|z| \Leftrightarrow |z|(\sqrt{3|z|^2+1}+36|z|^2) = 2|z|$

$$\Leftrightarrow 3|z|^2+1+36|z|^2 = 4 \quad (\text{do } |z| > 0, \forall z \neq 0) \Leftrightarrow |z|^2 = \frac{1}{13} \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{13}}{13} \approx 0,27735 \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right).$$

Câu 27. Chọn B.

Ta có: $(2-i)|z|-6+2i = \frac{25}{z} \Leftrightarrow (2|z|-6)+(2-|z|)i = \frac{25}{z} \quad (*).$

Lấy môđun hai vế của (*), ta được: $\sqrt{(2|z|-6)^2 + (2-|z|)^2} = \frac{25}{|z|} \Leftrightarrow (2|z|-6)^2 + (2-|z|)^2 = \frac{625}{|z|^2}$

$$\Leftrightarrow 5|z|^2 - 28|z| + 40 = \frac{625}{|z|^2} \Leftrightarrow 5|z|^4 - 28|z|^3 + 40|z|^2 - 625 = 0$$

$$\Leftrightarrow (|z|-5)(5|z|^3 - 3|z|^2 + 25|z| + 125) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z|-5=0 \\ 5|z|^3 - 3|z|^2 + 25|z| + 125 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|=5 \\ |z| \approx -2,22 < 0 \end{cases}.$$

Vậy $|z| = 5 \in (4; 6)$.

Câu 28. Chọn A.

Theo giả thiết: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \Rightarrow \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}, \bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}, \bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}.$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } |z_1 + z_2 + z_3| &= \overline{|z_1 + z_2 + z_3|} = \overline{|z_1 + z_2 + z_3|} = \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| = \left| \frac{z_2 z_3 + z_1 z_2 + z_3 z_1}{z_1 z_2 z_3} \right| \\ &= \frac{|z_2 z_3 + z_1 z_2 + z_3 z_1|}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3|} = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|. \end{aligned}$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Câu 29. Chọn D.

Chọn $z_3 = 1$, suy ra $z_1 + z_2 = -1$. Gọi $z_1 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), suy ra $z_2 = -a - bi - 1$.

$$\text{Theo giả thiết: } \begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a + bi| = 1 \\ |-a - 1 - bi| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (-a - 1)^2 + (-b)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 + 2a + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

- Với $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ thì $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- Với $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ thì $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Với các hai trường hợp trên, ta thay vào các đáp án và **Chọn D**.

Câu 30. Chọn B.

☺ **Cách giải 1: Phương pháp tổng quát.**

$$\text{Ta có: } \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w} \Leftrightarrow (z+w)^2 = zw \Leftrightarrow z^2 + zw + w^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{w}\right)^2 + \frac{z}{w} + 1 = 0 \text{ (do } w \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{w} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i. \text{ Suy ra } \left|\frac{z}{w}\right| = \left|-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1 \Rightarrow |w| = |z| = 10.$$

☺ **Cách giải 2: Phương pháp chuẩn hóa.**

Chọn $z = 10$ thỏa $|z| = 10$, thay vào $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$, ta có:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{w} = \frac{1}{10+w} \Leftrightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{10+w} - \frac{1}{w} \Leftrightarrow \frac{1}{10} = \frac{-10}{(10+w)w} \Leftrightarrow w^2 + 10w + 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow w = -5 \pm 5\sqrt{3}i \Rightarrow |w| = 10.$$

Câu 31. Chọn D.

☺ **Cách giải 1: Phương pháp tổng quát.**

$$\text{Ta có: } \frac{2}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2} \Leftrightarrow \frac{z_1 + 2z_2}{z_1 z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2} \Leftrightarrow (z_1 + 2z_2)(z_1 + z_2) = z_1 z_2$$

$$\Leftrightarrow (z_1)^2 + 2z_1 z_2 + 2(z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + 2\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + 2 = 0 \text{ (vì } z_2 \neq 0) \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -1 \pm i.$$

$$\text{Suy ra } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |-1 \pm i| = \sqrt{2} \text{ và } \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Khi đó: } P = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

☺ **Cách giải 2: Phương pháp chuẩn hóa.**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Chọn $z_1 = 1$. Thay vào $\frac{2}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2}$, ta được :

$$\frac{2}{1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{1+z_2} \Leftrightarrow \frac{1+2z_2}{z_2} = \frac{1}{1+z_2} \Leftrightarrow 2z_2^2 + 3z_2 + 1 = z_2 \Leftrightarrow z_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i.$$

$$\text{Khi đó : } P = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i}{1} \right| + \left| \frac{1}{-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i} \right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 32. Chọn D.

☺ **Cách giải 1: Phương pháp tổng quát.**

Vì $|z_1| = |z_2|$ và $z_1 \neq z_2$ nên cả hai số phức đều khác 0. Đặt $w = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ và $|z_1| = |z_2| = a$, ta có

$$\overline{w} = \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{z_1 - z_2}} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}} = \frac{\frac{a^2}{z_1} + \frac{a^2}{z_2}}{\frac{a^2}{z_1} - \frac{a^2}{z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{z_2 - z_1} = -w.$$

Do vậy: $w + \overline{w} = 0$ hay w là số thuần ảo.

☺ **Cách giải 2: Phương pháp chuẩn hóa.**

Hai số phức z_1, z_2 khác nhau thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$ nên ta chọn $z_1 = 1, z_2 = i$.

Khi đó: $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = \frac{1+i}{1-i} = i$ là số thuần ảo.

Câu 33. Chọn B.

☺ **Cách giải 1: Phương pháp tổng quát.**

Ta có: $\frac{z^2 - 1}{z} = z - \frac{1}{z} = z - \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = z - \frac{\overline{z}}{|z|^2} = z - \overline{z}$ vì $|z| = 1$.

Vậy $\frac{z^2 - 1}{z} = z - \overline{z}$ là số thuần ảo.

☺ **Cách giải 2: Phương pháp chuẩn hóa.**

Chọn $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ thỏa $|z| = 1$. Khi đó: $\frac{z^2 - 1}{z} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 - 1}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \sqrt{3}i$ (là số thuần ảo).

Câu 34. Chọn D.

Gọi a là phần thực của số phức $\frac{1}{m-z}$. Ta có: $\frac{1}{m-z} + \overline{\left(\frac{1}{m-z}\right)} = 2a$.

Ta xét: $\frac{1}{m-z} + \overline{\left(\frac{1}{m-z}\right)} = \frac{1}{m-z} + \frac{1}{\overline{m-z}} = \frac{1}{m-z} + \frac{1}{m-\overline{z}} = \frac{m-\overline{z} + m-z}{(m-z)(m-\overline{z})} = \frac{2m-z-\overline{z}}{m^2 - mz - m\overline{z} + z\overline{z}}$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

$$= \frac{2m - z - \bar{z}}{2m^2 - mz - m\bar{z}} = \frac{2m - z - \bar{z}}{m(2m - z - \bar{z})} = \frac{1}{m} = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2m}.$$

Câu 35. Chọn C.

$$\text{Ta có: } z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = -z_3 \\ z_1 + z_3 = -z_2 \\ z_3 + z_2 = -z_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Vì vậy: } A &= |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |-z_3|^2 + |-z_2|^2 + |-z_1|^2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 3 \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Câu 36. Chọn D.

$$\text{Xét } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 2z_1\bar{z}_1 + 2z_2\bar{z}_2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

$$\text{Suy ra: } |z_1 + z_2|^2 + 4 = 2(3+3) \Rightarrow |z_1 + z_2|^2 = 8 \Rightarrow |z_1 + z_2| = 2\sqrt{2}.$$

Câu 37. Chọn D.

Điều kiện: $z \neq 2i$.

$$\text{Ta có: } \frac{z^2}{z-2i} = |z|^2 \Leftrightarrow \frac{z^2}{z-2i} = |z|^2 = z\bar{z} \Leftrightarrow z \left(\frac{z}{z-2i} - \bar{z} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \text{ (nhận)} \\ \frac{z}{z-2i} - \bar{z} = 0 \text{ (*)} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } z = x + yi \text{ (} x, y \in \mathbb{R} \text{)} \Rightarrow \bar{z} = x - yi, \text{ thay vào (*) ta có: } x + yi = (x - yi)(x + yi - 2i)$$

$$\Leftrightarrow x + yi = x^2 + xyi - 2xi - xyi + y^2 - 2y \Leftrightarrow x + yi = x^2 + y^2 - 2y - 2xi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = x \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x^2 + 4x = x \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 3x = 0 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = -\frac{3}{5}, y = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Vậy có hai số phức thỏa mãn đề bài là $0; -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$.

Câu 38. Chọn A.

Phương pháp chuẩn hóa.

Do giả thiết đã cho đúng với mọi bộ ba số phức z_1, z_2, z_3 nên ta chọn $z_1 = z_2 = 1$.

$$\text{Ta có: } z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_1z_2z_3 = 0 \Leftrightarrow 1+1+z_3^3+z_3 = 0 \Leftrightarrow z_3^3+z_3+2=0$$

$$\Leftrightarrow (z_3+1)(z_3^2-z_3+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_3 = -1 \\ z_3 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i \end{cases}, \text{ ta thấy chỉ có } z_3 = -1 \text{ thỏa mãn } |z_3| = 1.$$

$$\text{Ta có: } z = z_1 + z_2 + z_3 = 1+1-1=1 \Rightarrow |z|^3 - 3|z|^2 = 1-3 \cdot 1 = -2.$$

Câu 39. Chọn A.

☺ **Cách giải 1: Phương pháp tổng quát.**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Gọi $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

Theo giả thiết, ta có: $|z_1| = 3 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 9$ (1); $|z_1 + z_2| = 3 \Leftrightarrow (a+c)^2 + (b+d)^2 = 9$ (2);

$|z_1 - z_2| = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow (a-c)^2 + (b-d)^2 = 27$ (3).

Trừ vế theo vế của phương trình (2) và (3) ta được:

$$(a+c-a+c)(a+c+a-c) + (b+d-b+d)(b+d+b-c) = -18 \Leftrightarrow ac + bd = -\frac{9}{2}.$$

$$\text{Ta có: } (2) \Leftrightarrow \underbrace{a^2 + b^2}_{=9} + c^2 + d^2 + 2 \left(\underbrace{ac + bd}_{=-\frac{9}{2}} \right) = 9 \Leftrightarrow 9 + c^2 + d^2 - 9 = 9 \Leftrightarrow c^2 + d^2 = 9 = |z_2|^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 &= (a+bi)(c-di) + (a-bi)(c+di) = ac - adi + bci + bd + ac + adi - bci + bd \\ &= 2ac + 2bd = 2(ac + bd) = 2 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } (z_1 \bar{z}_2)^3 + (\bar{z}_1 z_2)^3 &= (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)^3 - 3(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_1 z_2 \\ &= (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)^3 - 3(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) |z_1|^2 |z_2|^2 = (-9)^3 - 3(-9) \cdot 9 \cdot 9 = -729 + 27 \cdot 9 = 1458. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \left| (z_1 \bar{z}_2)^3 + (\bar{z}_1 z_2)^3 \right| = 1458.$$

☺ **Cách giải 2: Phương pháp chuẩn hóa.**

Chọn $z_1 = 3$, gọi $z_2 = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z_1| = |z_1 + z_2|$ và $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_2 + 3| = 3 \\ |3 - z_2| = 3\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = 9 \\ (3-x)^2 + y^2 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = 9 \\ (3-x)^2 - (x+3)^2 = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = 9 \\ -12x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Với } z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \text{ thì } \bar{z}_2 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i; z_1 = 3 = \bar{z}_1. \text{ Ta có: } \left| (z_1 \bar{z}_2)^3 + (\bar{z}_1 z_2)^3 \right| = 1458.$$

Câu 40. Chọn C.

Điều kiện: $z_2^2 \neq 0 \Leftrightarrow z_2 \neq 0$. Đặt $z_1 = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z_2 = x - yi$.

Ta có: $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow |2yi| = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow y^2 = 6$ (*).

$$\frac{z_1}{z_2^2} = \frac{x + yi}{x^2 - y^2 - 2xyi} = \frac{(x + yi)(x^2 - y^2 + 2xyi)}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = \frac{x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}$$

$$\text{Vì } \frac{z_1}{z_2^2} \text{ là số thực nên ta có: } 3x^2y - y^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 3x^2 = y^2 \end{cases}.$$

Với $y = 0$: mâu thuẫn với (*) nên loại.

Với $3x^2 = y^2 = 6$ (do $(*)$), suy ra $x^2 = 2$. Ta có: $|z_1| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2+6} = 2\sqrt{2}$.

Nhận xét: Bài toán này trông có vẻ rơi vào dạng của *phương pháp chuẩn hóa*. Tuy vậy, khi đọc kỹ đề ta thấy *dữ liệu bài toán cho rất chặt* khiến kết quả cuối cùng của nó là một trường hợp cụ thể của $z = x_0 + y_0 i$, vì vậy ta không dùng được phương pháp chuẩn hóa.

Câu 41. Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } |2z_1 - 3z_2| &= 4 \Leftrightarrow |2z_1 - 3z_2|^2 = 16 \Leftrightarrow (2z_1 - 3z_2)(2\bar{z}_1 - 3\bar{z}_2) = 16 \\ &\Leftrightarrow 4z_1\bar{z}_1 + 9z_2\bar{z}_2 - 6(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) = 16 \Leftrightarrow 4|z_1|^2 + 9|z_2|^2 - 6(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) = 16 \\ &\Leftrightarrow 4 \cdot 2^2 + 9 \cdot 1^2 - 6(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) = 16 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = \frac{3}{2}. \\ \text{Xét } P^2 &= |z_1 + 2z_2|^2 = (z_1 + 2z_2)(\bar{z}_1 + 2\bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + 4z_2\bar{z}_2 + 2(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) \\ &= |z_1|^2 + 4|z_2|^2 + 2(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) = 4 + 4 \cdot 1 + 2\left(\frac{3}{2}\right) = 11 \Rightarrow P = \sqrt{11}. \end{aligned}$$

Câu 42. Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 &= 0 \Leftrightarrow \frac{z^7 + 1}{z + 1} = 0 \Leftrightarrow z^7 = -1. \text{ Suy ra } |z| = 1. \\ \text{Hơn nữa: } z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 &= 0 \Leftrightarrow z(z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z - 1) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z(z-1)(z^4 + z^2 + 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow z(z-1)(z^2 + 1 + z)(z^2 + 1 - z) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z(z^3 - 1)(z^2 + 1 - z) + 1 = 0 \Leftrightarrow z(z^2 + 1 - z) = -\frac{1}{z^3 - 1} = w. \\ \text{Gọi } a \text{ là phần thực của } w, \text{ ta có: } 2a &= w + \bar{w} = \frac{1}{1 - z^3} + \overline{\left(\frac{1}{1 - z^3}\right)} = \frac{1}{1 - z^3} + \frac{1}{1 - (\bar{z})^3} \\ &= \frac{2 - (\bar{z})^3 - z^3}{1 - (\bar{z})^3 - z^3 + (z\bar{z})^3} \underset{=1}{=} \frac{2 - (\bar{z})^3 - z^3}{2 - (\bar{z})^3 - z^3} = 1. \text{ Suy ra } a = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

CHỦ ĐỀ II. PHƯƠNG TRÌNH SỐ PHỨC

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tính chất chung:

- Mọi phương trình số phức **bậc hai đều có hai nghiệm** (không nhất thiết phân biệt).
- Mọi phương trình số phức **bậc ba, bậc bốn** đều lần lượt có **ba nghiệm, bốn nghiệm** (không nhất thiết phân biệt).

☞ **Mở rộng:** Mọi phương trình số phức **bậc n** ($n \in \mathbb{N}$) đều có **n nghiệm** (không nhất thiết phân biệt).

2. Phương trình số phức bậc hai:

a) Phương trình số phức bậc hai với hệ số là số thực.

Cho phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$ (*) với $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Xét: $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (*) có hai nghiệm phức (cũng là số thực) trùng nhau là

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}.$$

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình (*) có hai nghiệm phức (cũng là số thực) phân biệt:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình (*) có hai nghiệm phức phân biệt: $z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

- Xét phương trình số phức bậc hai hệ số thực: $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$). Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình, ta luôn áp dụng được định lý Vi-ét (không cần xét Δ):

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

☞ **Lưu ý 1:** Nếu hệ số b chia hết cho 2, ta có thể dùng công thức $\Delta' = (b')^2 - ac$ với $b' = \frac{b}{2}$.

Ba trường hợp của Δ' hoàn toàn tương tự với ba trường hợp của Δ , tức là:

— Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có hai nghiệm phức (cũng là số thực) trùng nhau là

$$z_1 = z_2 = -\frac{b'}{a}.$$

— Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phức (cũng là số thực): $z_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$.

— Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình có hai nghiệm phức (không là số thực):

$$z_{1,2} = \frac{-b' \pm i\sqrt{-\Delta'}}{a}.$$

☞ **Lưu ý 2:**

- Điều kiện để phương trình $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phức phân biệt là $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$.

- Nếu $z_1 = a + bi$ là một nghiệm số phức của phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$ (hệ số thực) thì nghiệm còn lại của phương trình đó là $z_2 = a - bi$.

b) Nhắc lại cách tìm căn bậc hai của một số phức (không là số thực).

Giả sử các số phức dạng $w = x + yi$ là căn bậc hai của số phức $z = a + bi$.

$$\text{Khi đó : } w^2 = z \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} (*). \text{ Giải hệ phương trình } (*), \text{ ta}$$

tìm được (hai) cặp $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu, tương ứng với (hai) số phức w thỏa mãn

$$w^2 = z.$$

Hai cặp số $(x; y)$ sẽ trùng nhau khi $z = 0$. Nghĩa là số 0 là số phức duy nhất chỉ có một căn bậc hai, và căn bậc hai đó cũng là chính nó.

c) Phương trình bậc hai với hệ số là số phức:

Xét phương trình dạng : $Az^2 + Bz + C = 0$ với A, B, C là các số phức, $A \neq 0$.

Ta tính được $\Delta = B^2 - 4AC = (\alpha + \beta i)^2$ thì Δ có các căn bậc hai là $\pm(\alpha + \beta i)$.

$$\text{Phương trình có hai nghiệm số phức là : } z_{1,2} = \frac{-B \pm (\alpha + \beta i)}{2A}.$$

d) Phương trình số phức bậc hai đặc biệt :

Nếu phương trình bậc hai số phức dạng $Az^2 + Bz + C = 0$ có :

- $A + B + C = 0$ thì phương trình có hai nghiệm : $z_1 = 1, z_2 = \frac{C}{A}$.
- $A - B + C = 0$ thì phương trình có hai nghiệm : $z_1 = -1, z_2 = -\frac{C}{A}$.

3. Phương trình số phức bậc ba :

a) Phương pháp giải phương trình :

Dạng phương trình : $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$ (*) với A, B, C, D là các số phức, $A \neq 0$.

☺ Cách giải 1: Nhắm nghiệm và tách về trái thành nhân tử.

- Nhắm một nghiệm $z = z_0$ của (*).
- Chia đa thức cho đa thức (tức là lấy về trái (*)) chia cho $z - z_0$ để tìm nhân tử bậc hai còn lại. **Lưu ý:** Ta có thể sử dụng sơ đồ Horner để thực hiện nhanh việc tìm hệ số của nhân tử bậc hai.
- Sau khi thực hiện xong bước hai thì phương trình có dạng : $(z - z_0)(az^2 + bz + c) = 0$ với a, b, c được lấy từ kết quả của phép chia đa thức cho đa thức (hay sơ đồ Horner).

☺ Cách giải 2: Phân tích về trái thành nhân tử.

- Thêm bớt các hệ số, các số hạng.
- Đặt thừa số chung, đưa phương trình về dạng tích : $f(z).g(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(z) = 0 \\ g(z) = 0 \end{cases}$.

☞ Đặc biệt :

— Nếu $A + B + C + D = 0$ thì phương trình (*) luôn có nghiệm $z = 1$.

- Nếu $A - B + C - D = 0$ thì phương trình (*) luôn có nghiệm $z = -1$.
- Nếu phương trình (*) với hệ số thực A, B, C, D có duy nhất một nghiệm thực thì hai nghiệm phức còn lại sẽ là hai số phức liên hợp.

b) Định lý Vi-ét cho phương trình bậc ba :

Xét phương trình : $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$ (*) với A, B, C, D là các số phức, $A \neq 0$.

Phương trình (*) luôn có ba nghiệm (không nhất thiết phân biệt) z_1, z_2, z_3 .

$$\text{Theo định lý Vi-ét : } \begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{B}{A} \\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = \frac{C}{A} \\ z_1z_2z_3 = -\frac{D}{A} \end{cases}$$

4. Phương trình số phức bậc bốn :

Dạng phương trình : $Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0$ (*) với A, B, C, D là số phức và $A \neq 0$.

☺ Cách giải 1: Nhẩm nghiệm, chia đa thức cho đa thức (hoặc sơ đồ Horner).

Cách giải này nhằm đưa phương trình về dạng tích và từng bước giảm bậc cho việc giải phương trình được thuận lợi hơn.

☺ Cách giải 2: Phương pháp đặt ẩn phụ.

- Phương trình bậc bốn trùng phương có dạng : $Az^4 + Bz^2 + C = 0$ (**). Đặt $t = z^2$. Phương trình (**) được đưa về dạng bậc hai quen thuộc : $At^2 + Bt + C = 0$.
- Phương trình bậc bốn đặc biệt dạng : $Az^4 + Bz^3 + Cz^2 \pm Bz + A = 0$.
Kiểm tra phương trình xem có nghiệm $z = 0$ hay không. Sau đó chia hai vế phương trình cho $z^2 \neq 0$. Phương trình sẽ có dạng : $Az^2 + Bz + C \pm \frac{B}{z} + \frac{A}{z^2} = 0 \Leftrightarrow A\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + B\left(z \pm \frac{1}{z}\right) + C = 0$.

Đặt $t = z \pm \frac{1}{z}$, ta sẽ đưa được phương trình về dạng bậc hai theo t và giải một cách dễ dàng.

- Phương trình bậc bốn dạng : $(x+A)(x+B)(x+C)(x+D) = E$ với $A+B=C+D$.
Biến đổi phương trình về $[x^2 + (A+B)x + AB][x^2 + (C+D)x + CD] - E = 0$.
Đặt $t = x^2 + (A+B)x = x^2 + (C+D)x$, ta đưa phương trình đã cho về dạng bậc hai quen thuộc.
- Phương trình bậc bốn dạng : $(x+A)^4 + (x+B)^4 = C$.

Đặt $x = t - \frac{A+B}{2}$, phương trình trở thành : $\left(t + \frac{A-B}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{A-B}{2}\right)^4 = C$.

Khai triển vế trái, ta thu được phương trình bậc bốn trùng phương theo t , giải tìm t , suy ra x .

☞ Lưu ý :

- Nếu phương trình $Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0$ (*) với $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$ có một nghiệm là số phức w (không là số thực) thì (*) cũng có một nghiệm khác là $\bar{w}$.
- Nếu phương trình $Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0$ (*) với $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$ có bốn nghiệm phức (trong đó z_1, z_2 liên hợp ; z_3, z_4 liên hợp) thì :

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

$z_1 + z_3, z_2 + z_4$ là các số phức liên hợp của nhau ;
 $z_1 \cdot z_3, z_2 \cdot z_4$ là các số phức liên hợp của nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA:

Dạng 1: Giải phương trình số phức bậc hai, bậc ba, bậc bốn...

Câu 1. Cho hai số phức z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 + 4z + 13 = 0$. Tính mô-đun của số phức $w = (z_1 + z_2)i + z_1 z_2$.

- A. $|w| = 3$. B. $|w| = \sqrt{185}$. C. $|w| = \sqrt{153}$. D. $|w| = \sqrt{17}$.

Hướng dẫn giải:

☺ Cách giải 1: Giải phương trình bậc hai số phức.

Xét $z^2 + 4z + 13 = 0$, phương trình này có hai nghiệm số phức: $z_1 = -2 - 3i, z_2 = -2 + 3i$.

Khi đó: $w = (z_1 + z_2)i + z_1 z_2 = (-2 - 3i - 2 + 3i)i + (-2 - 3i)(-2 + 3i) = 13 - 4i$

$\Rightarrow |w| = \sqrt{13^2 + (-4)^2} = \sqrt{185}$. **Chọn B.**

☺ Cách giải 2: Sử dụng định lý Vi-ét cho phương trình bậc hai.

Theo định lý Vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = -4 \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} = 13 \end{cases} \Rightarrow w = -4i + 13 \Rightarrow |w| = \sqrt{185}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 2. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Tính $w = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + i(z_1^2 z_2 + z_2^2 z_1)$.

- A. $w = -\frac{4}{5} + 20i$. B. $w = \frac{4}{5} + 20i$. C. $w = 4 + 20i$. D. $w = 20 + \frac{4}{5}i$.

Hướng dẫn giải:

Theo **định lý Vi-ét**, ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 \\ z_1 z_2 = 5 \end{cases}$. Ta có: $w = \frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2} + i z_1 z_2 (z_1 + z_2) = \frac{4}{5} + 20i$.

Câu 3. Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn $z^2 - 4z + 5 = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = (z_1 - 1)^{2025} + (z_2 - 1)^{2025}$.

- A. $P = 2^{2024}$. B. $P = 2^{1012}$. C. $P = 2^{1013}$. D. $P = 2^{2025}$.

Hướng dẫn giải:

Phương trình đã cho có hai nghiệm số phức: $z_1 = 2 - i$ và $z_2 = 2 + i$.

Khi đó: $P = (1 - i)^{2025} + (1 + i)^{2025} = (1 - i) \cdot \left[(1 - i)^2 \right]^{1012} + (1 + i) \cdot \left[(1 + i)^2 \right]^{1012}$
 $= (1 - i) \cdot (-2i)^{1012} + (1 + i) \cdot (2i)^{1012} = (1 - i) \cdot 2^{1012} + (1 + i) \cdot 2^{1012} = 2^{1013}$. **Chọn C.**

Câu 4. Cho số phức z có phần ảo dương thỏa mãn $\frac{z-11}{z-2} = z-1$. Tính $\left| \frac{z-4i}{z+2i} \right|$.

- A. $w = -\frac{4}{5} + 20i$. B. 1. C. $w = 4 + 20i$. D. $w = 20 + \frac{4}{5}i$.

Hướng dẫn giải:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Điều kiện: $z \neq 2$. Ta có: $\frac{z-11}{z-2} = z-1 \Leftrightarrow z-11 = (z-2)(z-1) \Leftrightarrow z^2 - 4z + 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2+3i \\ z = 2-3i \end{cases}$.

Vì z có phần ảo dương nên $z = 2+3i \Rightarrow \bar{z} = 2-3i$. Khi đó: $\left| \frac{z-4i}{z+2i} \right| = \left| \frac{(2+3i)-4i}{(2-3i)+2i} \right| = 1$. **Chọn B.**

Câu 5. Cho phương trình $z^2 - 7z + 11 + 3i = 0$ (1). Biết rằng A, B là các điểm biểu diễn hai nghiệm số phức của phương trình (1) trên hệ trục Oxy , tính diện tích tam giác OAB .

- A. 2. B. 3. C. $\frac{7}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\Delta = (-7)^2 - 4(11+3i) = 5-12i$. Gọi $\delta = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của Δ .

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(-\frac{6}{x}\right)^2 = 5 \\ y = -\frac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \\ y = -\frac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = -\frac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Xét $\delta = 3-2i$, phương trình (1) có hai nghiệm: $z_1 = \frac{7+(3-2i)}{2.1} = 5-i$, $z_2 = \frac{7-(3-2i)}{2.1} = 2+i$.

Điểm biểu diễn của hai nghiệm trên là $A(5;-1)$, $B(2;1) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (5;-1)$, $\overrightarrow{OB} = (2;1)$.

Diện tích tam giác OAB là: $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} |5.1 - (-1)2| = \frac{7}{2}$. **Chọn C.**

Ghi nhớ: Nếu tam giác ABC có tọa độ các vector $\overrightarrow{AB} = (x_1; y_1)$, $\overrightarrow{AC} = (x_2; y_2)$ thì diện tích tam giác ABC được tìm nhanh bởi công thức: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$.

Câu 6. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2(2-i)z + 6-8i = 0$, hãy tìm một phương trình bậc hai có hai nghiệm là z_1^2 và z_2^2 .

- A. $z^2 + 2z - 96i = 0$. B. $z^2 - 28 - 96i = 0$.
C. $z^2 - 28z - 96i = 0$. D. $z^2 + 28z + 96i = 0$.

Hướng dẫn giải:

☺ Cách giải 1: Giải phương trình bậc hai số phức dựa vào biệt thức delta.

Xét phương trình $z^2 - 2(2-i)z + 6-8i = 0$ (*) có $\Delta' = (2-i)^2 - (6-8i) = -3+4i$.

Gọi $\delta = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $\Delta' = -3+4i$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = -3 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Xét $\delta = 1+2i$, (*) có hai nghiệm $z_1 = (2-i) + (1+2i) = 3+i$, $z_2 = (2-i) - (1+2i) = 1-3i$.

Suy ra $z_1^2 = 8+6i$, $z_2^2 = -8-6i \Rightarrow S = z_1^2 + z_2^2 = 0$, $P = z_1^2 \cdot z_2^2 = -28-96i$.

Vậy z_1^2, z_2^2 là hai nghiệm của phương trình: $z^2 - Sz + P = 0$ hay $z^2 - 28 - 96i = 0$. **Chọn B.**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

☺ Cách giải 2: Sử dụng định lý Vi-ét cho phương trình bậc hai.

Xét phương trình $z^2 - 2(2-i)z + 6-8i = 0$ với $a=1$, $b=-2(2-i)$, $c=6-8i$.

Theo **định lý Vi-ét**, ta có: $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = 2(2-i)$, $z_1 z_2 = \frac{c}{a} = 6-8i$.

Khi đó, đặt $S = z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = [2(2-i)]^2 - 2(6-8i) = 0$,

$P = z_1^2 \cdot z_2^2 = (z_1 z_2)^2 = (6-8i)^2 = -28-96i$.

Theo **định lý đảo Vi-ét** thì z_1^2 , z_2^2 là hai nghiệm của phương trình: $z^2 - Sz + P = 0$ hay $z^2 - 28 - 96i = 0$.

Câu 7. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm số phức của phương trình $\frac{|z|^4}{z^2} + \bar{z} + 4 = 0$. Tính $|z_1 - z_2|$.

- A. 1. B. $\sqrt{15}$. C. $\sqrt{13}$. D. $2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\frac{|z|^4}{z^2} + \bar{z} + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{|z|^2}{z}\right)^2 + \bar{z} + 4 = 0 \Leftrightarrow (\bar{z})^2 + \bar{z} + 4 = 0 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$; $\bar{z}_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$.

Do vậy: $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$; $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$. Suy ra: $|z_1 - z_2| = \sqrt{15}$. **Chọn B.**

Câu 8. Phương trình $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên tập số phức?

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 6.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$.

Đặt $t = z^3$, phương trình trở thành: $t^2 - 9t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 8 \end{cases}$.

• Với $t = 1$ thì $z^3 = 1 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

• Với $t = 8$ thì $z^3 = 8 \Leftrightarrow (z-2)(z^2 + 2z + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ z = -1 \pm i\sqrt{3} \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phức phân biệt. **Chọn D.**

Câu 9. Tìm tổng các nghiệm phức của phương trình sau: $\left(\frac{z+i}{1+i}\right)^3 - \frac{z^2-1+2iz}{2i} + 2 = 0$.

- A. 2. B. -2. C. $2-i$. D. $1-2i$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\left(\frac{z+i}{1+i}\right)^3 - \frac{z^2-1+2iz}{2i} = 2i^2 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{1+i}\right)^3 - \frac{(z-i)^2}{(1+i)^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{1+i}\right)^3 - \left(\frac{z-i}{1+i}\right)^2 + 2 = 0$.

Đặt $t = \frac{z+i}{1+i}$, phương trình trở thành: $t^3 - t^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2 + 2t + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \pm i \end{cases}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Với $t = -1$ thì $\frac{z+i}{1+i} = -1 \Leftrightarrow z+i = -1-i \Leftrightarrow z = -1-2i = z_1$.

Với $t = 1+i$ thì $\frac{z+i}{1+i} = 1+i \Leftrightarrow z+i = (1+i)^2 \Leftrightarrow z = i = z_1$.

Với $t = 1-i$ thì $\frac{z+i}{1+i} = 1-i \Leftrightarrow z+i = 1-i^2 \Leftrightarrow z = 2-i = z_3$.

Vậy $z_1 + z_2 + z_3 = (-1-2i) + i + (2-i) = 1-2i$. **Chọn D.**

Câu 10. Cho hai số phức z, w khác 0 thỏa mãn $\frac{5}{w} + \frac{1}{z} = \frac{12}{3z+w}$. Biết rằng số phức $\frac{z}{w} = \frac{a}{b} + \frac{\sqrt{c}}{b}i$, trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $b > 0, c \in \mathbb{N}$. Tính giá trị $T = a - b + c$.

A. $T = 3$. B. $T = -2$. C. $T = -1$. D. $T = 1$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\frac{5}{w} + \frac{1}{z} = \frac{12}{3z+w} \Leftrightarrow \frac{5z+w}{wz} = \frac{12}{3z+w} \Leftrightarrow (5z+w)(3z+w) = 12zw \Leftrightarrow 15z^2 + 8zw + w^2 = 12zw$
 $\Leftrightarrow 15z^2 - 4zw + w^2 = 0 \Leftrightarrow 15\left(\frac{z}{w}\right)^2 - 4\left(\frac{z}{w}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{z}{w} = \frac{2}{15} \pm \frac{\sqrt{11}}{15}i$.

Ta có: $\frac{z}{w} = \frac{a}{b} + \frac{\sqrt{c}}{b}i = \frac{2}{15} + \frac{\sqrt{11}}{15}i \Rightarrow a = 2, b = 15, c = 11$.

Vì vậy: $T = a - b + c = -2$. **Chọn B.**

Câu 11. Tìm tổng lập phương các nghiệm của phương trình phức sau $(z^2 - z)(z+3)(z+2) = 10$.

A. 32. B. -34. C. 31. D. -30.

Ta có: $(z^2 - z)(z+3)(z+2) = 10 \Leftrightarrow z(z+2)(z-1)(z+3) = 10 \Leftrightarrow (z^2 + 2z)(z^2 + 2z - 3) - 10 = 0$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = z^2 + 2z$. Phương trình trở thành: $t(t-3) - 10 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 5 \end{cases}$.

Với $t = -2$ thì $z^2 + 2z = -2 \Leftrightarrow z = -1 \pm i$.

Với $t = 5$ thì $z^2 + 2z = 5 \Leftrightarrow z = -1 \pm \sqrt{6}$.

Tổng lập phương các nghiệm là: $(-1+\sqrt{6})^3 + (-1-\sqrt{6})^3 + (-1+i)^3 + (-1-i)^3 = -34$. **Chọn B.**

Câu 12. Biết phương trình $z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1 = 0$ có 3 nghiệm phức z_1, z_2, z_3 . Tính $T = |z_1| + |z_2| + |z_3|$.

A. $T = 3$. B. $T = 4$. C. $T = 1$. D. $T = 2$.

Hướng dẫn giải:

☺ **Cách giải 1:** Giải phương trình bậc bốn dạng đối xứng.

Ta có: $z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 3z + 4 - \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$ (chia hai vế phương trình cho $z^2 \neq 0$)

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z + \frac{1}{z} = 1 & (1) \\ z + \frac{1}{z} = 2 & (2) \end{cases}.$$

• (1) $\Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

• $z + \frac{1}{z} = 2 \quad (2) \Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$.

Khi đó: $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| + \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| + |1| = 3$. **Chọn A.**

☺ Cách giải 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Một số **đồng máy tính cầm tay đời mới** cho ta cách giải phương trình bậc bốn dễ dàng.

Khi đó ta tìm được các nghiệm: $z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = 1$. Qua đó tính được $T = 3$.

Câu 13. Tìm tổng T của tất cả nghiệm phức của phương trình $(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) - 3z^2 = 0$.
A. $T = -8$. B. $T = -6$. C. $T = 2$. D. $T = 4$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = z^2 + 3z + 6$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 + 2zt - 3z^2 = 0 \quad (*)$.

Ta có: $\Delta' = z^2 + 3z^2 = (2z)^2$; $(*)$ có hai nghiệm: $\begin{cases} t = -z + 2z = z \\ t = -z - 2z = -3z \end{cases}$.

• Với $t = z$ thì $z^2 + 3z + 6 = z \Leftrightarrow z^2 + 2z + 6 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}i$.

• Với $t = -3z$ thì $z^2 + 3z + 6 = -3z \Leftrightarrow z^2 + 6z + 6 = 0 \Leftrightarrow z_{3,4} = -3 \pm \sqrt{3}$.

Tổng bốn nghiệm thu được: $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -8$. **Chọn A.**

Câu 14. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm phức của phương trình $\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1$. Giá trị của

$P = (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1)$ là:

A. $\frac{17}{8}$. B. $\frac{17}{9}$. C. $\frac{9}{17}$. D. $\frac{17i}{9}$.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $z \neq \frac{i}{2}$, ta có: $\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z-1}{2z-i} = \pm 1 \\ \frac{z-1}{2z-i} = \pm i \end{cases}.$

• Ta có: $\frac{z-1}{2z-i} = 1 \Leftrightarrow z-1 = 2z-i \Leftrightarrow z = -1+i$.

• $\frac{z-1}{2z-i} = -1 \Leftrightarrow z-1 = -2z+i \Leftrightarrow z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

- $\frac{z-1}{2z-i} = i \Leftrightarrow z-1 = 2iz+1 \Leftrightarrow (1-2i)z = 2 \Leftrightarrow z = \frac{2}{1-2i} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i.$
- $\frac{z-1}{2z-i} = -i \Leftrightarrow z-1 = -2iz-1 \Leftrightarrow 3iz = 0 \Leftrightarrow z = 0.$

Khi đó: $P = (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1) = [(-1+i)^2 + 1] \left[\frac{(1+i)^2}{9} + 1 \right] \left[\frac{(2+4i)^2}{25} + 1 \right] \cdot 1 = \frac{17}{9}.$

Chọn B.

Câu 15. Tìm tổng các nghiệm số phức của phương trình $z^3 - 2(1+i)z + 3iz + 1 - i = 0.$

- A. 0. B. 1. C. $1-i.$ D. $2+2i.$

Hướng dẫn giải:

Nhận xét: Phương trình đã cho có một nghiệm $z=1$, ta dùng sơ đồ Horner như sau:

Hệ số đa thức bậc ba:	1	$-2(1+i)$	$3i$	$1-i$	<i>(đầu rơi, nhân ngang, cộng chéo)</i>
Nghiệm nhằm được:	1	1	$-1-2i$	$-1+i$	

Ta có: $z^3 - 2(1+i)z + 3iz + 1 - i = 0 \Leftrightarrow (z-1)[z^2 - (1+2i)z - 1 + i] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ z^2 - (1+2i)z - 1 + i = 0 (*) \end{cases}.$

Xét phương trình (*): $\Delta = (1+2i)^2 - 4(-1+i) = 1.$

Phương trình (*) có hai nghiệm số phức: $z_1 = \frac{1+2i+1}{2} = 1+i, z_2 = \frac{1+2i-1}{2} = i.$

Tổng ba nghiệm phức của phương trình là: $1 + (1+i) + i = 2+2i.$ **Chọn D.**

Câu 16. Tìm tổng bình phương tất cả phần ảo các số phức z thỏa mãn $z^3 - 2(1+i)z^2 + 4(1+i)z - 8i = 0.$

- A. 6. B. 10. C. 5. D. 12.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z^3 - 2(1+i)z^2 + 4(1+i)z - 8i = 0 \Leftrightarrow z^3 - 2z^2 + 4z - 2iz^2 + 4iz - 8i = 0$

$\Leftrightarrow z(z^2 - 2z + 4) - 2i(z^2 - 2z + 4) = 0 \Leftrightarrow (z-2i)(z^2 - 2z + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=2i \\ z^2 - 2z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2i \\ z=1 \pm \sqrt{3}i \end{cases}.$

Tổng bình phương các phần ảo ba số phức thu được là: $2^2 + \sqrt{3}^2 + (-\sqrt{3})^2 = 10.$ **Chọn B.**

Câu 17. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{Z}$) thỏa mãn $z^3 = 18 + 26i$. Tính $T = (z-2)^2 + (4-z)^2.$

- A. 2. B. 4. C. 0. D. 1.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z^3 = 18 + 26i \Leftrightarrow x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = 18 + 26i \Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i = 18 + 26i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 18 \\ 3x^2y - y^3 = 26 \end{cases}.$ Ta thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Đặt $y = tx$. Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $t \in \mathbb{Q}.$

Hệ phương trình trở thành:
$$\begin{cases} x^3 - 3xt^2x^2 = 18 \\ 3x^2tx - t^3x^3 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(1-3t^2) = 18 & (1) \\ x^3(3t-t^3) = 26 & (2) \end{cases}$$

Ta thấy $3t-t^3=0$ không thỏa mãn (2). Lấy (1) chia (2) theo vế:

$$\frac{1-3t^2}{3t-t^3} = \frac{9}{13} \Leftrightarrow 13-39t^2 = 27t-9t^3 \Leftrightarrow \left(t-\frac{1}{3}\right)\left(t^2-4t-\frac{13}{3}\right) = 0. \text{ Suy ra } t = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}.$$

Thay $t = \frac{1}{3}$ vào (1): $x^3\left(1-3\cdot\frac{1}{9}\right) = 18 \Leftrightarrow x = 3$. Suy ra $y = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1$.

Do vậy $z = 3+i$. Ta có: $T = (z-2)^2 + (4-z)^2 = (1+i)^2 + (1-i)^2 = 2i + (-2i) = 0$. **Chọn C.**

Dạng 2: Phương trình số phức có chứa tham số

Câu 18. Cho phương trình $z^2 - mz + 2m - 1 = 0$ trong đó m là tham số thực. Biết rằng khi $m = m_0$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = -2$. Tìm mệnh đề đúng bên dưới.

A. $m_0 \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. B. $m_0 \in \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$. C. $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. D. $m_0 \in \left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải:

Áp dụng định lý Vi-ét cho phương trình $z^2 - mz + 2m - 1 = 0$ trên tập số phức, ta có:

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = m; \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a} = 2m - 1.$$

Khi đó: $z_1^2 + z_2^2 = -2 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = -2 \Leftrightarrow m^2 - 2(2m - 1) = -2 \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy $m_0 = 2 \in \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$. **Chọn B.**

Câu 19. (Câu 43-Mã đề 101-Đề thi TN THPTQG 2021) Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 7$?

A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Hướng dẫn giải:

Xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (*)

Trường hợp 1: Phương trình có nghiệm là số thực, trong đó có một nghiệm là $z_0 = 7$.

Thay $z = z_0 = 7$ vào (*): $7^2 - 2(m+1)\cdot 7 + m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 7 \pm \sqrt{14}$.

• Với $m = 7 + \sqrt{14}$, (*) trở thành: $z^2 - 2(8 + \sqrt{14})z + (7 + \sqrt{14})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 9 + 2\sqrt{14} \\ z = 7 \end{cases}$ (thỏa mãn).

• Với $m = 7 - \sqrt{14}$, (*) trở thành: $z^2 - 2(8 - \sqrt{14})z + (7 - \sqrt{14})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 9 - 2\sqrt{14} \\ z = 7 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: Phương trình có nghiệm là hai số phức liên hợp của nhau z_1, z_2 với $|z_1| = |z_2| = 7$.

Theo định lý Vi-ét, ta có: $z_1 z_2 = m^2 \Rightarrow |z_1 z_2| = m^2 \Rightarrow |z_1| |z_2| = m^2 \Rightarrow m^2 = 49 \Rightarrow m = \pm 7$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

- Với $m = 7$, (*) trở thành: $z^2 - 16z + 49 = 0 \Leftrightarrow z = 8 \pm \sqrt{15}$ (loại).
- Với $m = -7$, (*) trở thành: $z^2 + 12z + 49 = 0 \Leftrightarrow z = -6 \pm i\sqrt{13}$ (thỏa mãn).

Vậy có 3 giá trị thực của m thỏa mãn đề bài là $m = 7 \pm \sqrt{14}$ và $m = -7$. **Chọn B.**

Câu 20. Biết $z_1 = 2 - i$ là một nghiệm phức của phương trình $z^2 + bz + c = 0$ ($b, c \in \mathbb{R}$), nghiệm còn lại là z_2 . Tìm số phức $w = bz_1 + cz_2$.

- A. $w = 18 - i$. B. $w = 18 + i$. C. $w = 2 - 9i$. D. $w = 2 + 9i$.

Hướng dẫn giải:

Do $z_1 = 2 - i$ là một nghiệm phức của phương trình $z^2 + bz + c = 0$ ($b, c \in \mathbb{R}$) nên $z_2 = 2 + i$.

Theo định lý Vi-ét thì: $z_1 + z_2 = -b = (2 - i) + (2 + i) \Rightarrow b = -4$; $z_1 z_2 = c = (2 - i)(2 + i) \Rightarrow c = 5$.

Do đó: $w = bz_1 + cz_2 = -4(2 - i) + 5(2 + i) = 2 + 9i$. **Chọn D.**

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của a sao cho phương trình $z^2 - az + 2a - a^2 = 0$ có hai nghiệm phức với phần ảo khác 0 và có mô-đun bằng 1.

- A. $a = 1$. B. $a = 1, a = -1$. C. $a = 1 \pm \sqrt{2}, a = 1$. D. $a = -1$.

Hướng dẫn giải:

Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình. Theo định lý Vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = a \\ z_1 z_2 = 2a - a^2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } |z_1| \cdot |z_2| = |z_1 z_2| = |2a - a^2| \Leftrightarrow |2a - a^2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - a^2 = 1 \\ 2a - a^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 1 + \sqrt{2} \\ a = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Thử lại:

- Thay $a = 1$ vào phương trình đã cho: $z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (thỏa điều kiện).
- Thay $a = 1 \pm \sqrt{2}$ vào phương trình đã cho: $z^2 \mp (1 + \sqrt{2})z - 1 = 0$. Các phương trình này luôn có hai nghiệm thực trái dấu nên không thỏa mãn đề bài.

Vậy $a = 1$ là giá trị duy nhất thỏa mãn. **Chọn A.**

Câu 22. Cho số thực a, b, c sao cho phương trình $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ nhận các số phức $1 + i, 2$ làm nghiệm. Khi đó tổng giá trị $a + b + c$ là:

- A. -2 . B. 2 . C. 4 . D. -4 .

Hướng dẫn giải:

Phương trình có nghiệm $z = 2$ nên $8 + 4a + 2b + c = 0$.

Phương trình có nghiệm $z = 1 + i$ nên $(1 + i)^3 + a(1 + i)^2 + b(1 + i) + c = 0$

$$\Leftrightarrow (-2 + 2i) + a \cdot 2i + b(1 + i) + c = 0 \Leftrightarrow (-2 + b + c) + (2 + 2a + b)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + b + c = 0 \\ 2 + 2a + b = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy ta có hệ } \begin{cases} b + c = 2 \\ 2a + b = -2 \\ 4a + 2b + c = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 6 \\ c = -4 \end{cases}. \text{ Suy ra } a + b + c = -2. \text{ Chọn A.}$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Câu 23. Cho số phức w và hai số thực a, b . Biết $z_1 = w + 2i$ và $z_2 = 2w - 3$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + az + b = 0$. Tính $T = |z_1| + |z_2|$.

- A. $T = 2\sqrt{13}$. B. $T = \frac{2\sqrt{97}}{3}$. C. $T = \frac{2\sqrt{85}}{3}$. D. $T = 4\sqrt{13}$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $w = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $z_1 + z_2 = 3w - 3 + 2i = 3(x + yi) - 3 + 2i = (3x - 3) + (3y + 2)i$.

Theo định lý Vi-ét: $z_1 + z_2 = -a$. Do vậy $(3x - 3) + (3y + 2)i = -a \Rightarrow 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}$.

Khi đó: $w = x - \frac{2}{3}i$ và $z_1 = x - \frac{2}{3}i + 2i = x + \frac{4}{3}i$, $z_2 = 2\left(x - \frac{2}{3}i\right) - 3 = (2x - 3) - \frac{4}{3}i$.

Vì z_1, z_2 là hai nghiệm số phức của phương trình bậc hai (hệ số thực) nên chúng là hai số phức liên hợp của nhau, suy ra $2x - 3 = x \Rightarrow x = 3$. Do đó $w = 3 - \frac{2}{3}i$ và $z_1 = 3 + \frac{4}{3}i$, $z_2 = 3 - \frac{4}{3}i$.

Ta tính được: $T = |z_1| + |z_2| = \frac{2\sqrt{97}}{3}$. **Chọn B.**

Câu 24. Cho phương trình $8z^2 - 4(m+1)z + 4m + 1 = 0$ (1) với m là tham số. Tìm tổng tất cả số thực m để (1) có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2}$ là số thuần ảo, trong đó z_2 là số phức có phần ảo dương.

- A. 2. B. 5. C. 6. D. 4.

Hướng dẫn giải:

Xét (1), ta có $\Delta' = 4(m+1)^2 - 8(4m+1) = 4m^2 - 24m - 4$. Theo giả thiết thì $\frac{z_1}{z_2}$ thuần ảo nên

z_1, z_2 không là số thực, suy ra $\Delta' < 0 \Rightarrow 4m^2 - 24m - 4 < 0 \Rightarrow 3 - \sqrt{10} < m < 3 + \sqrt{10}$ (2).

Khi đó, căn bậc hai của Δ' là $\pm i\sqrt{-4m^2 + 24m + 4}$, vì vậy (1) có hai nghiệm là:

$$z_1 = \frac{2(m+1) - i\sqrt{-4m^2 + 24m + 4}}{8}, z_2 = \frac{2(m+1) + i\sqrt{-4m^2 + 24m + 4}}{8} \quad (z_2 \text{ có phần ảo dương}).$$

Ta có: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_1} = \frac{z_1 z_1}{|z_1|^2}$ thuần ảo, suy ra z_1^2 thuần ảo $\Rightarrow \left(\frac{2(m+1) - i\sqrt{-4m^2 + 24m + 4}}{8} \right)^2$ thuần ảo.

Suy ra: $4(m+1)^2 - (-4m^2 + 24m + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$ (thỏa điều kiện (2)). **Chọn A.**

Câu 25. Tìm tổng bình phương tất cả số thực m để phương trình $4z^2 + 4(m-1)z + m^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm là các số phức thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = \sqrt{10}$.

- A. 25. B. 29. C. 10. D. 17.

Hướng dẫn giải:

Với m là số thực thì phương trình đã cho **luôn có hai nghiệm là các số phức liên hợp** của nhau.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Gọi $z_1 = a + bi$, $z_2 = a - bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z_1| + |z_2| = \sqrt{10} \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \underbrace{a^2 + b^2}_{|z_1|^2} = \frac{5}{2}$.

Mặt khác, theo **định lý Vi-ét**: $z_1 z_2 = \frac{m^2 - 3m}{4} = z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2$.

Vì vậy: $\frac{m^2 - 3m}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow m^2 - 3m = 10 \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 5 \end{cases}$.

Tổng bình phương các giá trị m tìm được: $(-2)^2 + 5^2 = 29$. **Chọn B.**

Câu 26. Cho phương trình số phức $z^4 - 4z^3 + 9z^2 + mz + 20 = 0$ với $m \in \mathbb{R}$. Biết phương trình có một nghiệm là $z_1 = -2i$. Tìm tổng mô-đun hai nghiệm không thuần ảo của phương trình đã cho.

- A. $2\sqrt{5}$. B. $2\sqrt{10}$. C. $2\sqrt{3}$. D. 4.

Hướng dẫn giải:

Thay $z = z_1 = -2i$ vào phương trình đã cho, ta có: $(-2i)^4 - 4(-2i)^3 + 9(-2i)^2 + m(-2i) + 20 = 0$
 $\Leftrightarrow (-2m - 32)i = 0 \Leftrightarrow m = -16$.

Với $m = -16$ thì phương trình trở thành: $z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20 = 0$.

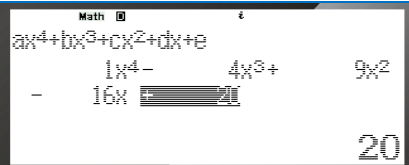
☺ **Cách giải 1:** Vì phương trình có một nghiệm là $z_1 = -2i$ nên cũng có nghiệm $z_2 = 2i$ (là số phức liên hợp của z_1). Do vậy phương trình tương đương $(z + 2i)(z - 2i)(ax^2 + bx + c) = 0$ với a, b, c là các hệ số thực được tìm thông qua việc chia vế trái cho $(z + 2i)(z - 2i) = z^2 + 4$ hoặc lập sơ đồ Horner hai lần. Ta thu được: $az^2 + bz + c = z^2 - 4z + 5$.

Vậy: $z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20 = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)(z + 2i)(z^2 - 4z + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm 2i \\ z^2 - 4z + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm 2i \\ z = 2 \pm i \end{cases}$.

Tổng mô-đun hai nghiệm không thuần ảo của phương trình là $|2 + i| + |2 - i| = 2\sqrt{5}$. **Chọn A.**

☺ **Cách giải 2:** Sử dụng máy tính cầm tay có chức năng giải phương trình bậc bốn (ta thực hành trên **VINACAL 680 EXPLUS**):

MENU $\xrightarrow{\text{Next}}$ **9** $\xrightarrow{\text{Next}}$ **2** $\xrightarrow{\text{Next}}$ **4** (gọi chức năng giải phương trình bậc bốn hệ số thực).

Nhập các hệ số của đa thức bậc bốn	Bấm phím $\boxed{=}$ để hiển thị nghiệm phương trình
	$\begin{matrix} x_1 = 2 - i, & x_2 = 2 + i, \\ x_3 = 2i, & x_4 = -2i \end{matrix}$

Vậy $z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm 2i \\ z = 2 \pm i \end{cases}$. Ta có: $|2 + i| + |2 - i| = 2\sqrt{5}$. **Chọn A.**

Câu 27. Cho phương trình $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ với a, b, c, d là các hệ số thực. Biết phương trình có hai nghiệm là $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 - 2i$. Khi đó tổng $T = a + b + c + d$ bằng

- A. $T = 12$. B. $T = 20$. C. $T = 10$. D. $T = 7$.

Hướng dẫn giải:

Vì $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 - 2i$ là hai nghiệm của phương trình nên $z_3 = 1 - i$, $z_4 = 3 + 2i$ cũng là các nghiệm của phương trình đã cho.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Xét $\begin{cases} S_1 = z_1 + z_3 = 2 \\ P_1 = z_1 z_3 = 2 \end{cases}$, do vậy z_1, z_3 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - S_1 z + P_1 = 0$ hay

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Xét $\begin{cases} S_2 = z_2 + z_4 = 6 \\ P_2 = z_2 z_4 = 13 \end{cases}$, do vậy z_2, z_4 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - S_2 z + P_2 = 0$ hay

$$z^2 - 6z + 13 = 0.$$

Vậy, ta có: $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 6z + 13)$.

Đồng nhất hai vế, ta được: $az^3 = -6z^3 - 2z^3 \Rightarrow \boxed{a = -8}$; $bz^2 = 13z^2 + 2z^2 + 12z^2 \Rightarrow \boxed{b = 27}$;

$$cz = -26z - 12z = -38z \Rightarrow \boxed{c = -38}; \boxed{d = 26}.$$

Vậy $T = a + b + c + d = 7$. **Chọn D.**

Câu 28. Cho phương trình số phức $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ với a, b, c, d là các hệ số thực. Biết phương trình có tích hai nghiệm là $13+i$ và tổng hai nghiệm còn lại là $3-4i$. Giá trị của b thuộc khoảng nào?

A. $(44; 46)$.

B. $[46; 48]$.

C. $[50; 52]$.

D. $(48; 50)$.

Hướng dẫn giải:

Gọi bốn nghiệm phức của phương trình đã cho là z_1, z_2, z_3, z_4 . Ta có: $\begin{cases} z_1 z_3 = 13+i \\ z_2 + z_4 = 3-4i \end{cases}$.

Vì phương trình đã cho là bậc bốn hệ số thực nên hai số phức $z_1 z_3, z_2 z_4$ là liên hợp của nhau; tương tự hai số phức $z_1 + z_3, z_2 + z_4$ là liên hợp của nhau. Suy ra: $\begin{cases} z_2 z_4 = 13-i \\ z_1 + z_3 = 3+4i \end{cases}$.

Khi đó z_1, z_3 là nghiệm phương trình $z^2 - (3+4i)z + 13+i = 0$; z_2, z_4 là nghiệm phương trình $z^2 - (3-4i)z + 13-i = 0$.

$$\text{Do vậy } z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = [z^2 - (3+4i)z + 13+i][z^2 - (3-4i)z + 13-i].$$

Đồng nhất hệ số hai vế, ta có: $bz^2 = (13-i)z^2 + (13+i)z^2 + (3+4i)(3-4i)z^2$ suy ra $b = (13-i) + (13+i) + (9+16) = 51$. **Chọn C.**

Câu 29. Cho phương trình $z^3 - (m+1)z^2 + (m+1+mi)z - 1 - mi = 0$ trong đó $z \in \mathbb{C}$, m là tham số thực. Số giá trị của tham số m để phương trình có 3 nghiệm phức phân biệt sao cho các điểm biểu diễn của các nghiệm trên mặt phẳng phức tạo thành một tam giác cân là

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Xét phương trình: } z^3 - (m+1)z^2 + (m+1+mi)z - 1 - mi = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 - mz + 1 + mi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ z^2 - mz + 1 + mi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ z^2 - i^2 - (mz - mi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ (z-i)(z+i-m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ z=i \\ z=m-i \end{cases}.$$

Gọi các điểm biểu diễn của ba số phức trên là: $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(m;-1)$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1;1)$,
 $\overrightarrow{AC} = (m-1;-1)$, $\overrightarrow{BC} = (m;-2)$; $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{m^2+4}$, $AC = \sqrt{(m-1)^2+1}$.

Ba điểm A , B , C tạo thành một tam giác $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\Leftrightarrow m \neq 2$.

Nhận xét: $BC = \sqrt{m^2+4} \geq 2 > \sqrt{2} = AB$, vì vậy tam giác ABC cân $\Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ AC = BC \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(m-1)^2+1} = \sqrt{2} \\ \sqrt{(m-1)^2+1} = \sqrt{m^2+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m=0 \\ -2m=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=2 \\ m=-1 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện $m \neq 2$ ta được $m \in \{0; -1\}$. Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn. **Chọn D.**

Câu 30. Cho α, β, γ là các nghiệm thuộc tập số phức của phương trình $x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = 0$. Gọi ω là số phức thỏa mãn $\omega^3 = 1$ và $\omega \neq 1$. Tính $\frac{\alpha-1}{\beta-1} + \frac{\beta-1}{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{\alpha-1}$ theo ω .

- A. $\frac{8}{\omega}$. B. ω^2 . C. $2\omega^2$. D. $3\omega^2$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\omega^3 = 1 \Leftrightarrow (\omega-1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0$ (do $\omega \neq 1$).

Nhận xét: nếu ω là một nghiệm của phương trình $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ thì ω^2 cũng là nghiệm phương trình $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (vì $\omega^2 + \omega + 1 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + \omega \cdot \omega^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\omega^2)^2 + \omega^2 + 1 = 0$).

Do đó phương trình $\omega^3 = 1$ có ba nghiệm là $1, \omega, \omega^2$ (1).

Ta có: $x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 = -8 \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{-2}\right)^3 = 1$ (2).

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \begin{cases} \frac{x-1}{-2} = 1 \\ \frac{x-1}{-2} = \omega \\ \frac{x-1}{-2} = \omega^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 = \alpha \\ x = 1 - 2\omega = \beta \\ x = 1 - 2\omega^2 = \gamma \end{cases}.$$

$$\text{Do vậy: } \frac{\alpha-1}{\beta-1} + \frac{\beta-1}{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{\alpha-1} = \frac{-1-1}{1-2\omega-1} + \frac{1-2\omega-1}{1-2\omega^2-1} + \frac{1-2\omega^2-1}{-1-1} = \frac{2}{\omega} + \omega^2 = \frac{2+\omega^3}{\omega} = \frac{3}{\omega} = 3\omega^2.$$

Chọn D.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM THỰC HÀNH CHỦ ĐỀ 2

- Câu 1.** Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$
- A. $T = 2 + 2\sqrt{3}$. B. $T = 4$. C. $T = 2\sqrt{3}$. D. $T = 4 + 2\sqrt{3}$.
- Câu 2.** Tính mô-đun của số phức $w = b + ci$ ($b, c \in \mathbb{R}$); biết số phức $\frac{i^8 - 1 - 2i}{1 - i^7}$ là nghiệm của phương trình $z^2 + bz + c = 0$.
- A. 2. B. 3. C. $2\sqrt{2}$. D. $3\sqrt{2}$.
- Câu 3.** Trong tập số phức, phương trình $z^2 + mz - i = 0$ ($m \in \mathbb{C}$) có tổng bình phương hai nghiệm là $4i$ thì mô-đun của số phức m bằng:
- A. $\sqrt{5}$. B. $\sqrt{2}$. C. 1. D. 2.
- Câu 4.** Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 7 = 0$. Số phức $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2$ bằng
- A. 2. B. 10. C. $2i$. D. $10i$.
- Câu 5.** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - 2z + 27 = 0$. Giá trị của $z_1 |z_2| + z_2 |z_1|$ bằng:
- A. 2. B. 6. C. $3\sqrt{6}$. D. $\sqrt{6}$.
- Câu 6.** Tìm tổng mô-đun tất cả nghiệm không thuần ảo của phương trình $iz^4 + 2(1 + 2i)z^2 + 8 = 0$.
- A. 4. B. 2. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{6}$.
- Câu 7.** Trong tập số phức, cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ ($b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$) có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_2 - z_1 = 4 + 2i$. Gọi A, B là các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $z^2 - 2bz + 4c = 0$. Tính độ dài đoạn AB .
- A. $8\sqrt{5}$. B. $2\sqrt{5}$. C. $4\sqrt{5}$. D. $\sqrt{5}$.
- Câu 8.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $z^6 - 1 = 0$ là:
- A. 4. B. 2. C. 1. D. 0.
- Câu 9.** Cho các số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z + w \neq 0$ và $\frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{6}{z + w}$. Khi đó $\left| \frac{z}{w} \right|$ bằng
- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. 3. D. $\frac{1}{3}$.
- Câu 10.** Gọi S là tổng các số thực m để phương trình $z^2 - 2z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z| = 2$. Tính S .
- A. $S = 6$. B. $S = 10$. C. $S = -3$. D. $S = 7$.
- Câu 11.** Phương trình $z^4 - 12 = 6iz^2 - \frac{8i}{z^2}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm số phức?
- A. 2. B. 4. C. 6. D. 0.
- Câu 12.** Cho số phức w và hai số thực a, b . Biết rằng $w + i$ và $2w - 1$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$. Tổng $S = a + b$ bằng
- A. $\frac{5}{9}$. B. $-\frac{5}{9}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Thi thử trường Chu Văn An, Hà Nội, 2019

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

- Câu 13.** Cho phương trình $(z^2 - 4z)^2 - 3(z^2 - 4z) - 40 = 0$. Gọi z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình đã cho. Tính $P = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$.
- A. $P = 42$. B. $P = 34$. C. $P = 16$. D. $P = 24$.
- Câu 14.** Có bao nhiêu giá trị dương của số thực a sao cho phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ có nghiệm phức z_0 với phần ảo khác 0 thỏa mãn $|z_0| = \sqrt{3}$.
- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.
- Câu 15.** Cho biết z_1, z_2, z_3, z_4 là nghiệm của phương trình $z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + 1 = 0$. Hỏi phương trình trên có bao nhiêu nghiệm số phức có phần ảo lớn hơn 1?
- A. 1 B. 2. C. 4. D. 0.
- Câu 16.** Số phức $z_0 = 2 - i$ là một nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm phần ảo của số phức $az_0 + b$.
- A. 5. B. 4. C. -3. D. $4i$.
- Câu 17.** Biết phương trình $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có $z_1, z_2, z_3 = 1 + 2i$ là nghiệm. Biết z_2 có phần ảo âm, tìm phần ảo của $w = z_1 + 2z_2 + 3z_3$.
- A. 3. B. 2. C. -2. D. -1.
- Câu 18.** Gọi A, B là hai điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn đẳng thức $z_1^2 + z_2^2 - z_1z_2 = 0$, khi đó tam giác OAB (O là gốc tọa độ):
- A. Là tam giác đều. B. Là tam giác vuông.
 C. Là tam giác cân, không đều. D. Là tam giác tù.
- Câu 19.** Cho hai số thực b, c thỏa mãn $c > 0, b \neq 0$. Kí hiệu A, B là hai điểm thuộc mặt phẳng tọa độ biểu diễn hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2bz + c = 0$. Tìm mối liên hệ của b và c để tam giác OAB là tam giác vuông tại O .
- A. $c = 2b^2$. B. $b^2 = c$. C. $b = c$. D. $b^2 = 2c$.
- Câu 20.** Cho phương trình $x^2 - 4x + \frac{c}{d} = 0$ (với phân số $\frac{c}{d}$ tối giản) có hai nghiệm phức (phần ảo khác 0). Gọi A, B là hai điểm biểu diễn của hai nghiệm đó trên mặt phẳng Oxy . Biết tam giác OAB đều (với O là gốc tọa độ), tính $P = c + 2d$.
- A. $P = 18$. B. $P = -10$. C. $P = -14$. D. $P = 22$.
- Câu 21.** Cho phương trình $4z^4 + mz^2 + 4 = 0$ trong tập số phức và m là tham số thực. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình đã cho. Tìm tất cả các giá trị của m để $(z_1^2 + 4)(z_2^2 + 4)(z_3^2 + 4)(z_4^2 + 4) = 324$.
- A. $m = 1$ hoặc $m = -35$. B. $m = -1$ hoặc $m = -35$.
 C. $m = -1$ hoặc $m = 35$. D. $m = 1$ hoặc $m = 35$.
- Câu 22.** Trong tập các số phức, cho phương trình $z^2 - 6z + m = 0, m \in \mathbb{R}$ (1). Gọi m_0 là một giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$. Hỏi trong khoảng $(0; 20)$ có bao nhiêu giá trị $m_0 \in \mathbb{N}$?
- A. 13. B. 11. C. 12. D. 10.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

- Câu 23.** Cho số phức z thỏa mãn $\frac{1+i}{z}$ là số thực và $|z-2|=m$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi m_1, m_2 là các giá trị của m để có đúng một số phức thỏa mãn bài toán. Tính $T = m_1^2 + m_2^2$.
A. $T=1$. **B.** $T=10$. **C.** $T=5$. **D.** $T=6$.
- Câu 24.** Trên tập hợp số phức, cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ với $b, c \in \mathbb{R}$. Biết rằng hai nghiệm của phương trình có dạng $w+3$ và $2w-15i+9$ với w là một số phức. Tính $S = b^2 - 2c$.
A. $S=-32$. **B.** $S=1608$. **C.** $S=1144$. **D.** $S=-64$.
- Câu 25.** Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 + 4z^2 - 5 = 0$. Giá trị của $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$ bằng
A. $2+2\sqrt{5}$. **B.** 12 . **C.** 0 . **D.** $2+\sqrt{5}$.
- Câu 26.** Biết $z=1-2i$ là nghiệm phức của phương trình $z^2 + az + b = 0$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó $a-b$ bằng bao nhiêu?
A. $a-b=-7$. **B.** $a-b=7$. **C.** $a-b=-3$. **D.** $a-b=3$.
- Câu 27.** Xác định tất cả các số thực m để phương trình $z^2 - 2z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức z thỏa mãn $|z|=2$.
A. $m=-3$. **B.** $m=-3, m=9$.
C. $m=1, m=9$. **D.** $m=-3, m=1, m=9$.
- Câu 28.** Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4 + (4-m)z^2 - 4m = 0$. Tìm tất cả các giá trị m để $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 6$.
A. $m=-1$. **B.** $m=\pm 2$. **C.** $m=\pm 3$. **D.** $m=\pm 1$.
- Câu 29.** Cho a là số thực, phương trình $z^2 + (a-2)z + 2a-3 = 0$ có 2 nghiệm z_1, z_2 . Gọi M, N là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết tam giác OMN có một góc bằng 120° , tính tổng các giá trị của a .
A. -6 . **B.** 6 . **C.** -4 . **D.** 4 .
- Câu 30.** Cho a, b, c là các số thực sao cho phương trình $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ có ba nghiệm phức lần lượt là $z_1 = w+3i; z_2 = w+9i; z_3 = 2w-4$, trong đó w là một số phức nào đó. Tính giá trị của $P = |a+b+c|$.
A. $P=36$. **B.** $P=208$. **C.** $P=136$. **D.** $P=84$.
- Câu 31.** Cho phương trình số phức dạng $z^3 + bz^2 + (9-i)z - 6+2i = 0$ ($b \in \mathbb{R}$). Biết rằng phương trình trên có một nghiệm thực. Hãy tìm tổng mô-đun các nghiệm còn lại của phương trình đó.
A. $\sqrt{5}+1$. **B.** $\sqrt{2}+1$. **C.** $\sqrt{10}+1$. **D.** $\sqrt{5}+\sqrt{2}$.
- Câu 32.** Cho phương trình số phức $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ với a, b, c, d là các hệ số thực. Biết phương trình có tổng hai nghiệm là $-2+i$ và tích hai nghiệm còn lại là $-1-5i$. Tìm tổng $a+b+c+d$.
A. 17 . **B.** 19 . **C.** 15 . **D.** 13 .

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHỦ ĐỀ 2

Câu 1. Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Tính tổng

$$T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$$

A. $T = 2 + 2\sqrt{3}$.

B. $T = 4$.

C. $T = 2\sqrt{3}$.

D. $T = 4 + 2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } z^4 - z^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = -3 = 3i^2 \\ z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm i\sqrt{3} \\ z = \pm 2 \end{cases}.$$

Khi đó: $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = |i\sqrt{3}| + |i\sqrt{3}| + |-2| + |2| = 2\sqrt{3} + 4$. **Chọn D.**

Câu 2. Tính mô-đun của số phức $w = b + ci$ ($b, c \in \mathbb{R}$); biết số phức $\frac{i^8 - 1 - 2i}{1 - i^7}$ là nghiệm của phương trình $z^2 + bz + c = 0$.

A. 2.

B. 3.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt } z_o = \frac{i^8 - 1 - 2i}{1 - i^7} \text{ trong đó: } \begin{cases} i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1 \\ i^7 = (i^2)^3 \cdot i = -i \end{cases} \Rightarrow z_o = \frac{1 - 1 - 2i}{1 + i} = \frac{-2i}{1 + i} = \frac{-2i(1 - i)}{1 - i^2} = -1 - i.$$

Ta có z_o là nghiệm của phương trình $z^2 + bz + c = 0$ (*) $\Rightarrow \bar{z}_o = -1 + i$ là nghiệm còn lại của (*).

Theo **định lý Vi-ét**, ta có: $z_o + \bar{z}_o = -\frac{b}{a} \stackrel{a=1}{=} -b = -2 \Rightarrow \boxed{b=2}$;

$z_o \cdot \bar{z}_o = \frac{c}{a} \stackrel{a=1}{=} c \Rightarrow (-1 - i)(-1 + i) = c \Rightarrow \boxed{c=2}$. Suy ra: $w = 2 + 2i \Rightarrow |w| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

Chọn C.

Câu 3. Trong tập số phức, phương trình $z^2 + mz - i = 0$ ($m \in \mathbb{C}$) có tổng bình phương hai nghiệm là $4i$ thì mô-đun của số phức m bằng:

A. $\sqrt{5}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Gọi } z_1, z_2 \text{ là hai nghiệm phức của phương trình đã cho, theo } \text{định lý Vi-ét: } \begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = -m \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} = -i \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } z_1^2 + z_2^2 = 4i \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = 4i \Leftrightarrow m^2 + 2i = 4i \Leftrightarrow m^2 = 2i = (1 + i)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 + i \\ m = -1 - i \end{cases}.$$

Mô-đun của m là: $|1 + i| = |-1 - i| = \sqrt{2}$. **Chọn B.**

Câu 4. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 7 = 0$. Số phức $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2$ bằng

A. 2.

B. 10.

C. $2i$.

D. $10i$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z^2 + 4z + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -2 + \sqrt{3}i \\ z_2 = -2 - \sqrt{3}i \end{cases} \Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = (-2 + \sqrt{3}i)^2 + (-2 - \sqrt{3}i)^2 = 2$. **Chọn A.**

- Câu 5.** Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - 2z + 27 = 0$. Giá trị của $z_1|z_2| + z_2|z_1|$ bằng:
A. 2. **B. 6.** **C. $3\sqrt{6}$.** **D. $\sqrt{6}$.**

Hướng dẫn giải:

Ta có: $3z^2 - 2z + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1 + \sqrt{80}i}{3} \\ z_2 = \frac{1 - \sqrt{80}i}{3} \end{cases}$. Khi đó: $z_1|z_2| + z_2|z_1| = 2$. **Chọn A.**

- Câu 6.** Tìm tổng mô-đun tất cả nghiệm không thuần ảo của phương trình $iz^4 + 2(1+2i)z^2 + 8 = 0$.
A. 4. **B. 2.** **C. $2\sqrt{2}$.** **D. $\sqrt{6}$.**

Hướng dẫn giải:

Đặt $w = z^2$, phương trình trở thành: $iw^2 + 2(1+2i)w + 8 = 0$ (*).

Ta có: $\Delta' = (1+2i)^2 - 8i = -3 - 4i = (1-2i)^2$ nên Δ' có hai căn bậc hai là $\pm(1-2i)$.

Phương trình (*) có hai nghiệm $z_1 = \frac{-(1+2i) + (1-2i)}{i} = -4$, $z_2 = \frac{-(1+2i) - (1-2i)}{i} = 2i$.

Với $w = -4$ thì $z^2 = -4 = 4i^2 \Rightarrow z = z_{1,2} = \pm 2i$ (là số thuần ảo).

Với $w = 2i$ thì $z^2 = 2i = (1+i)^2 \Rightarrow z = z_{3,4} = \pm(1+i)$ (không thuần ảo).

Tổng mô-đun các nghiệm không thuần ảo của phương trình là: $|-1-i| + |1+i| = 2\sqrt{2}$. **Chọn C.**

- Câu 7.** Trong tập số phức, cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ ($b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$) có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_2 - z_1 = 4 + 2i$. Gọi A, B là các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $z^2 - 2bz + 4c = 0$. Tính độ dài đoạn AB .
A. $8\sqrt{5}$. **B. $2\sqrt{5}$.** **C. $4\sqrt{5}$.** **D. $\sqrt{5}$.**

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z_2 - z_1 = 4 + 2i \Rightarrow (z_2 - z_1)^2 = (z_2 + z_1)^2 - 4z_1z_2 = (4 + 2i)^2 \Rightarrow b^2 - 4c = (4 + 2i)^2$.

Xét $z^2 - 2bz + 4c = 0$ (*); $\Delta' = b^2 - 4c = (4 + 2i)^2$, Δ' có hai căn bậc hai là $\pm(4 + 2i)$.

Vậy phương trình (*) có hai nghiệm phức là: $\begin{cases} z_A = b - 4 - 2i \Rightarrow A(b-4; -2) \\ z_B = b + 4 + 2i \Rightarrow B(b+4; 2) \end{cases}$.

Vậy $AB = \sqrt{(b+4-b-4)^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{5}$. **Chọn C.**

- Câu 8.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $z^6 - 1 = 0$ là:
A. 4. **B. 2.** **C. 1.** **D. 0.**

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z^3 - 1)(z^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1)(z + 1)(z^2 - z + 1) = 0$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm 1 \\ z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \pm 1 \vee z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \vee z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z^2 - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Tổng bình phương cả bốn nghiệm này là:

$$(-1)^2 + 1^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = 0. \text{ Chọn D.}$$

Câu 9. Cho các số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z + w \neq 0$ và $\frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{6}{z+w}$. Khi đó $\left|\frac{z}{w}\right|$ bằng

A. $\sqrt{3}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. 3.

D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{6}{z+w} \Leftrightarrow \frac{w+3z}{zw} = \frac{6}{z+w} \Leftrightarrow (w+3z)(z+w) = 6zw \Leftrightarrow 3z^2 - 2zw + w^2 = 0$.

$\Leftrightarrow 3\left(\frac{z}{w}\right)^2 - 2\frac{z}{w} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{z}{w} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i \Rightarrow \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Chọn B.}$

Câu 10. Gọi S là tổng các số thực m để phương trình $z^2 - 2z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z| = 2$.

Tính S .

A. $S = 6$.

B. $S = 10$.

C. $S = -3$.

D. $S = 7$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z^2 - 2z + 1 - m = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = m \quad (1)$

Trường hợp 1: $m \geq 0$. Ta có: $(1) \Leftrightarrow z = 1 \pm \sqrt{m}$.

Do $|z| = 2$ nên $\begin{cases} |1 + \sqrt{m}| = 2 \\ |1 - \sqrt{m}| = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 9 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$

Trường hợp 2: $m < 0$. Ta có: $(1) \Leftrightarrow z = 1 \pm i\sqrt{-m}$.

Do $|z| = 2$ nên $|1 \pm i\sqrt{-m}| = 2 \Leftrightarrow 1 - m = 4 \Leftrightarrow m = -3 \text{ (thỏa mãn).}$

Vậy $S = 1 + 9 - 3 = 7$. **Chọn D.**

Câu 11. Phương trình $z^4 - 12 = 6iz^2 - \frac{8i}{z^2}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm số phức?

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 0.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z^4 - 12 = 6iz^2 - \frac{8i}{z^2} \Leftrightarrow z^6 - 6iz^4 - 12z^2 + 8i = 0 \Leftrightarrow (z^2)^3 - 3(z^2)^2 \cdot 2i + 3z^2(2i)^2 - (2i)^3 = 0$

$\Leftrightarrow (z^2 - 2i)^3 = 0 \Leftrightarrow z^2 = 2i$.

Gọi $z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$. Ta có: $(x + yi)^2 = 2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{cases}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm số phức: $z_1 = 1+i$, $z_2 = -1-i$. **Chọn A.**

Câu 12. Cho số phức w và hai số thực a, b . Biết rằng $w+i$ và $2w-1$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$. Tổng $S = a+b$ bằng

A. $\frac{5}{9}$.

B. $-\frac{5}{9}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Thi thử trường Chu Văn An, Hà Nội, 2019

Hướng dẫn giải:

Đặt $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Vì $a, b \in \mathbb{R}$ và phương trình $z^2 + az + b = 0$ có hai nghiệm là

$$z_1 = w+i, z_2 = 2w-1 \text{ nên } z_1 = \overline{z_2} \Leftrightarrow w+i = \overline{2w-1} \Leftrightarrow x+yi+i = \overline{2(x+yi)-1} - 1$$

$$\Leftrightarrow x+(y+1)i = (2x-1)-2yi \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x-1 \\ y+1 = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } w = 1 - \frac{1}{3}i \Rightarrow \begin{cases} z_1 = w+i = 1 + \frac{2}{3}i \\ z_2 = 2w-1 = 1 - \frac{2}{3}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 2 \\ z_1 z_2 = \frac{13}{9} \end{cases} (*)$$

$$\text{Theo định lý Vi-ét: } \begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1 z_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{13}{9} \end{cases}. \text{ Vậy } S = a+b = -\frac{5}{9}. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 13. Cho phương trình $(z^2 - 4z)^2 - 3(z^2 - 4z) - 40 = 0$. Gọi z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình đã cho. Tính $P = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$.

A. $P = 42$.

B. $P = 34$.

C. $P = 16$.

D. $P = 24$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt } t = z^2 - 4z. \text{ Phương trình đã cho trở thành: } t^2 - 3t - 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 \\ t = -5 \end{cases}$$

• Với $t = 8$ thì $z^2 - 4z = 8 \Leftrightarrow z_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{3}$.

• Với $t = -5$ thì $z^2 - 4z = -5 \Leftrightarrow z_{3,4} = 2 \pm i$.

$$\text{Khi đó: } P = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 = |2+2\sqrt{3}|^2 + |2-2\sqrt{3}|^2 + |2+i|^2 + |2-i|^2 = 42. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị dương của số thực a sao cho phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ có nghiệm phức z_0 với phần ảo khác 0 thỏa mãn $|z_0| = \sqrt{3}$.

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } \Delta = 3 - 4(a^2 - 2a) = 3 - 4a^2 + 8a.$$

$$\text{Phương trình } z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0 \text{ có nghiệm phức khi và chỉ khi } \Delta < 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - 4a^2 + 8a < 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 8a - 3 > 0 \quad (*).$$

$$\text{Khi đó phương trình có hai nghiệm } z_1, z_2 \text{ là hai số phức liên hợp của nhau và } |z_1| = |z_2|.$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Ta có: $z_1 \cdot z_2 = a^2 - 2a \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |a^2 - 2a| \Leftrightarrow |z_1| \cdot |z_2| = |a^2 - 2a| \Rightarrow |z_0|^2 = |a^2 - 2a|$.

Theo giả thiết, ta có: $(\sqrt{3})^2 = |a^2 - 2a| \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a = 3 \\ a^2 - 2a = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn (*)).

Vậy có một giá trị dương a thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C.**

Câu 15. Cho biết z_1, z_2, z_3, z_4 là nghiệm của phương trình $z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + 1 = 0$. Hỏi phương trình trên có bao nhiêu nghiệm số phức có phần ảo lớn hơn 1?

A. 1

B. 2.

C. 4.

D. 0.

Hướng dẫn giải:

Nhận xét: $z = 0$ không là nghiệm phương trình đã cho, lấy hệ số $\frac{1}{2}$ làm vị trí chính giữa thì ta thấy các cặp hệ số hai bên lần lượt là $(-1; 1), (1; 1)$, phương trình dạng này được gọi là phản xứng.

Ta chia hai vế phương trình cho $z^2 \neq 0$, được:

$$z^2 - z + \frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + 2 - \left(z - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2} = 0 \quad (*).$$

Đặt $t = z - \frac{1}{z}$, phương trình (*) trở thành: $t^2 - t + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$.

- Với $t = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ thì $z - \frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \Leftrightarrow 2z^2 - (1+3i)z - 2 = 0 \quad (1);$

$\Delta_{(1)} = (1+3i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 8+6i = (3+i)^2$ nên $\Delta_{(1)}$ có hai căn bậc hai là $3+i, -3-i$.

(1) có hai nghiệm phức là: $z_1 = \frac{1+3i+3+i}{2 \cdot 2} = 1+i, z_2 = \frac{1+3i-3-i}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

- Với $t = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ thì $z - \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \Leftrightarrow 2z^2 - (1-3i)z - 2 = 0 \quad (2).$

$\Delta_{(2)} = (1-3i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 8-6i = (3-i)^2$ nên $\Delta_{(2)}$ có hai căn bậc hai là $3-i, -3+i$.

(2) có hai nghiệm phức là: $z_3 = \frac{1-3i+3-i}{2 \cdot 2} = 1-i, z_4 = \frac{1-3i-3+i}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Cả bốn nghiệm z_1, z_2, z_3, z_4 đều không có phần ảo lớn hơn 1. **Chọn D.**

Câu 16. Số phức $z_0 = 2-i$ là một nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm phần ảo của số phức $az_0 + b$.

A. 5.

B. 4.

C. -3.

D. 4i.

Hướng dẫn giải:

Vì $z = 2-i$ là một nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) nên phương trình này có hai nghiệm $z_1 = 2-i$ và $z_2 = 2+i$. Suy ra $z_1 + z_2 = -a = 4 \Rightarrow a = -4, z_1 z_2 = b = 5$.

Khi đó: $az_0 + b = -4(2-i) + 5 = -3+4i$. **Chọn B.**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Câu 17. Biết phương trình $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có $z_1, z_2, z_3 = 1 + 2i$ là nghiệm. Biết z_2 có phần ảo âm, tìm phần ảo của $w = z_1 + 2z_2 + 3z_3$.

A. 3.

B. 2.

C. -2.

D. -1.

Hướng dẫn giải:

Ta biết rằng một phương trình bậc ba với hệ số thực luôn có ít nhất một nghiệm thực, nên theo đề bài, phương trình đã cho có một nghiệm thực (gọi là z_1) và hai nghiệm phức với phần ảo khác 0.

Vì $z_3 = 1 + 2i$ là nghiệm của phương trình nên nghiệm phức còn lại là $z_2 = 1 - 2i$.

Vì phần ảo của z_1 bằng 0 nên phần ảo của $w = z_1 + 2z_2 + 3z_3$ là: $0 + 2(-2) + 3.2 = 2$. **Chọn B.**

Câu 18. Gọi A, B là hai điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn đẳng thức $z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2 = 0$, khi đó tam giác OAB (O là gốc tọa độ):

A. Là tam giác đều.

B. Là tam giác vuông.

C. Là tam giác cân, không đều.

D. Là tam giác tù.

Hướng dẫn giải:

☺ **Cách giải 1:** Theo giả thiết: $z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2 = 0 \Rightarrow (z_1 + z_2)(z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2) = 0$ (do $z_1, z_2 \neq 0$)

$$\Leftrightarrow z_1^3 + z_2^3 = 0 \Leftrightarrow z_1^3 = -z_2^3 = (-z_2)^3 \Rightarrow z_1 = -z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2| \Rightarrow \boxed{OA = OB} \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác: } z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)^2 = -z_1 z_2 \Rightarrow |(z_1 - z_2)^2| = |-z_1 z_2|$$

$$\Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = |z_1||z_2| \Rightarrow AB^2 = OA \cdot OB = OA^2 \Rightarrow \boxed{AB = OA} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác OAB đều. **Chọn A.**

😊 **Cách giải 2:** Ta có: $z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 - \frac{z_1}{z_2} + 1 = 0$ (do $z_2 \neq 0$).

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 - \frac{z_1}{z_2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right| = 1 \Rightarrow |z_1| = |z_2| \text{ hay } \boxed{OA = OB} \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác: } |z_1 - z_2| = \left|\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} z_2 - z_2\right| = \left|\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} - 1\right| \cdot |z_2| = |z_2| \Rightarrow \boxed{AB = OB} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác OAB đều. **Chọn A.**

Câu 19. Cho hai số thực b, c thỏa mãn $c > 0, b \neq 0$. Kí hiệu A, B là hai điểm thuộc mặt phẳng tọa độ biểu diễn hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2bz + c = 0$. Tìm mối liên hệ của b và c để tam giác OAB là tam giác vuông tại O .

A. $c = 2b^2$.B. $b^2 = c$.C. $b = c$.D. $b^2 = 2c$.

Hướng dẫn giải:

Theo định lý Vi-ét, ta có: $z_1 + z_2 = -2b, z_1 \cdot z_2 = c$.

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} OA^2 = |z_1|^2, OB^2 = |z_2|^2 \\ AB^2 = |z_1 - z_2|^2 = |(z_1 - z_2)^2| = |(z_1 + z_2)^2 - 4z_1 z_2| = |4b^2 - 4c| = 4|b^2 - c| \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } OA^2 + OB^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2}{2} = \frac{4b^2 + 4|b^2 - c|}{2} = 2b^2 + 2|b^2 - c|.$$

Theo giả thiết, tam giác OAB vuông tại $O \Leftrightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2$

$$\Leftrightarrow 2b^2 + 2|b^2 - c| = 4|b^2 - c| \Leftrightarrow b^2 = |b^2 - c| \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = b^2 - c \\ b^2 = c - b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \text{ (loại)} \\ c = 2b^2 > 0 \text{ (nhận)} \end{cases} \cdot \text{Chọn A.}$$

Câu 20. Cho phương trình $x^2 - 4x + \frac{c}{d} = 0$ (với phân số $\frac{c}{d}$ tối giản) có hai nghiệm phức (phần ảo khác 0).

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn của hai nghiệm đó trên mặt phẳng Oxy . Biết tam giác OAB đều (với O là gốc tọa độ), tính $P = c + 2d$.

A. $P = 18$.

B. $P = -10$.

C. $P = -14$.

D. $P = 22$.

Thi thử Sở GD và ĐT Đà Nẵng, 2019

Hướng dẫn giải:

$$\text{Xét phương trình } x^2 - 4x + \frac{c}{d} = 0 \quad (*); \Delta' = 4 - \frac{c}{d}.$$

Phương trình (*) có hai nghiệm phức (phần ảo khác 0) $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{c}{d} < 0$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm phức $x_1 = 2 + i\sqrt{-\Delta'}$; $x_2 = 2 - i\sqrt{-\Delta'}$.

Gọi A, B lần lượt là hai điểm biểu diễn của x_1, x_2 , ta có: $A(2; \sqrt{-\Delta'})$; $B(2; -\sqrt{-\Delta'})$.

$$\text{Ta có: } AB = \sqrt{(2-2)^2 + (-\sqrt{-\Delta'} - \sqrt{-\Delta'})^2} = 2\sqrt{-\Delta'}; OA = OB = \sqrt{4 - \Delta'}.$$

Tam giác OAB đều khi và chỉ khi $AB = OA = OB \Leftrightarrow 2\sqrt{-\Delta'} = \sqrt{4 - \Delta'}$

$$\Leftrightarrow 4(-\Delta') = 4 - \Delta' \Leftrightarrow \Delta' = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow 4 - \frac{c}{d} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{16}{3}.$$

Từ đó ta có $c = 16, d = 3$ (do $\frac{c}{d}$ tối giản). Vậy: $P = c + 2d = 22$. **Chọn D.**

Câu 21. Cho phương trình $4z^4 + mz^2 + 4 = 0$ trong tập số phức và m là tham số thực. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình đã cho. Tìm tất cả các giá trị của m để $(z_1^2 + 4)(z_2^2 + 4)(z_3^2 + 4)(z_4^2 + 4) = 324$.

A. $m = 1$ hoặc $m = -35$.

B. $m = -1$ hoặc $m = -35$.

C. $m = -1$ hoặc $m = 35$.

D. $m = 1$ hoặc $m = 35$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = z^2$, phương trình trở thành: $4t^2 + mt + 4 = 0$ luôn có hai nghiệm số phức t_1, t_2 .

$$\text{Theo định lý Vi-ét: } \begin{cases} t_1 + t_2 = -\frac{m}{4} \\ t_1 t_2 = 1 \end{cases} \text{ . Giả sử ta có } z_1^2 = z_2^2 = t_1, z_3^2 = z_4^2 = t_2.$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow (t_1 + 4)^2 (t_2 + 4)^2 = 324 \Leftrightarrow [t_1 t_2 + 4(t_1 + t_2) + 16]^2 = 324$$

$$\Leftrightarrow (-m + 17)^2 = 18^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 17 = 18 \\ -m + 17 = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 35 \end{cases} \cdot \text{Chọn C.}$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Câu 22. Trong tập các số phức, cho phương trình $z^2 - 6z + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$ (1). Gọi m_0 là một giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $\overline{z_1 \cdot z_1} = \overline{z_2 \cdot z_2}$. Hỏi trong khoảng $(0; 20)$ có bao nhiêu giá trị $m_0 \in \mathbb{N}$?

A. 13.

B. 11.

C. 12.

D. 10.**Hướng dẫn giải:**

Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là: $\Delta = 9 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 9$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $\overline{z_1 \cdot z_1} = \overline{z_2 \cdot z_2} \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Trường hợp 1: (1) có hai nghiệm thực phân biệt đối nhau $z_1 = -z_2$.

Ta có: $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ z_1 + z_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - m > 0 \\ 6 = 0 \end{cases}$ (vô lí).

Trường hợp 2: (1) phải có hai nghiệm số phức $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 9 - m < 0 \Leftrightarrow m > 9$.

Mặt khác, m nguyên thuộc khoảng $(0; 20)$ nên $m = m_0 \in \{10; 11; \dots; 19\}$, suy ra có 10 giá trị m_0 thỏa mãn. **Chọn D.**

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{1+i}{z}$ là số thực và $|z - 2| = m$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi m_1, m_2 là các giá trị của m để có đúng một số phức thỏa mãn bài toán. Tính $T = m_1^2 + m_2^2$.

A. $T = 1$.B. $T = 10$.C. $T = 5$.**D. $T = 6$.****Hướng dẫn giải:**

Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$); đặt $w = \frac{1+i}{z} = \frac{1+i}{x+yi} = \frac{(1+i)(x-yi)}{x^2+y^2}$
 $= \frac{x+y+(x-y)i}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2} + \frac{x-y}{x^2+y^2}i$ (với $x^2+y^2 \neq 0$).

Theo giả thiết, w là số thực nên: $\frac{x-y}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x = y \neq 0$ (1).

Mặt khác: $|x - 2 + yi| = m \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = m^2$ (2) và $m \geq 0$.

Thay (1) vào (2) được: $(x-2)^2 + x^2 = m^2 \Leftrightarrow \underbrace{2x^2 - 4x + 4 - m^2}_{g(x)} = 0$ (3).

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình (3) có đúng một nghiệm thực khác 0.

Trường hợp 1: Phương trình (3) có nghiệm kép là số thực khác 0.

Ta có: $\begin{cases} \Delta' = 4 - 2(4 - m^2) = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}; \text{ mà } m \geq 0 \text{ nên } m = \sqrt{2} = m_1.$

Trường hợp 2: Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt thỏa $x_1 \neq x_2 = 0$.

Khi đó: $\begin{cases} \Delta' = 4 - 2(4 - m^2) > 0 \\ g(0) = 4 - m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2 > 0 \\ m = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 2; \text{ mà } m \geq 0 \text{ nên } m = 2 = m_2.$

Vậy $m_1^2 + m_2^2 = 6$. **Chọn D.**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

- Câu 24.** Trên tập hợp số phức, cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ với $b, c \in \mathbb{R}$. Biết rằng hai nghiệm của phương trình có dạng $w+3$ và $2w-15i+9$ với w là một số phức. Tính $S = b^2 - 2c$
A. $S = -32$. **B.** $S = 1608$. **C.** $S = 1144$. **D.** $S = -64$.

Hướng dẫn giải:

Giả sử $w = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $w+3 = x+3+yi$, $2w-15i+9 = 2x+9+(2y-15)i$.

Theo **định lý Vi-ét**:
$$\begin{cases} (2w-15i+9) + (w+3) = -b \\ (2w-15i+9)(w+3) = c \end{cases} \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} [2x+9+(2y-15)i] + (x+3+yi) = -b \\ [2x+9+(2y-15)i](x+3+yi) = c \end{cases}$$

Vì $b, c \in \mathbb{R}$ nên
$$\begin{cases} 2y-15+y=0 \\ (x+3)(2y-15)+y(2x+9)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=5 \end{cases}$$

Ta có: $w = -6+5i$; do đó (1) suy ra: $\begin{cases} b=6 \\ c=34 \end{cases}$. Vậy $S = b^2 - 2c = -32$. **Chọn A.**

- Câu 25.** Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 + 4z^2 - 5 = 0$. Giá trị của $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$ bằng
A. $2+2\sqrt{5}$. **B.** 12. **C.** 0. **D.** $2+\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z^4 + 4z^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 1 \\ z^2 = -5 = 5i^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm 1 = z_{1,2} \\ z = \pm i\sqrt{5} = z_{3,4} \end{cases}$

Do đó: $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 = 1^2 + 1^2 + (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = 12$.

- Câu 26.** Biết $z = 1-2i$ là nghiệm phức của phương trình $z^2 + az + b = 0$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó $a-b$ bằng bao nhiêu?
A. $a-b = -7$. **B.** $a-b = 7$. **C.** $a-b = -3$. **D.** $a-b = 3$.

Hướng dẫn giải:

☺ Cách giải 1: Do $z = 1-2i$ là nghiệm phức của phương trình $z^2 + az + b = 0$ nên:

$$(1-2i)^2 + a(1-2i) + b = 0 \Leftrightarrow a+b-3-2(a+2)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-3=0 \\ -2(a+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=5 \end{cases}$$

Do vậy $a-b = -7$. **Chọn A.**

☺ Cách giải 2:

Phương trình bậc hai với hệ số thực có hai nghiệm phức là hai số phức liên hợp của nhau.

Do đó phương trình đã cho có 2 nghiệm $z_1 = 1-2i$ và $z_2 = 1+2i$. Ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 \\ z_1 z_2 = 5 \end{cases} \quad (*)$

Áp dụng **định lý Vi-ét** với phương trình đã cho: $\begin{cases} z_1 + z_2 = -a = 2 \\ z_1 z_2 = b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a-b = -7$.

- Câu 27.** Xác định tất cả các số thực m để phương trình $z^2 - 2z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức z thỏa mãn $|z| = 2$.
A. $m = -3$. **B.** $m = -3, m = 9$.
C. $m = 1, m = 9$. **D.** $m = -3, m = 1, m = 9$.

Hướng dẫn giải:

☺ Cách giải 1:

Xét phương trình $z^2 - 2z + 1 - m = 0$ (1). Ta có: $\Delta' = 1 - (1 - m) = m$.

Trường hợp 1: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$. Khi đó, phương trình có hai nghiệm thực: $z = 1 \pm \sqrt{m}$.

Với $z = 1 + \sqrt{m}$. Ta có: $|z| = 2 \Rightarrow 1 + \sqrt{m} = 2 \Rightarrow m = 1$ (nhận).

Với $z = 1 - \sqrt{m}$. Ta có: $|z| = 2 \Rightarrow |1 - \sqrt{m}| = 2 \Rightarrow m = 9$ (nhận).

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 0$. Vì (1) là phương trình bậc hai hệ số thực có $\Delta' < 0$ nên (1) có hai nghiệm phức là liên hợp của nhau (ta gọi chúng là $z, \bar{z}$), theo **định lý Vi-ét**: $\boxed{z \cdot \bar{z} = 1 - m}$ (2).

Do đó: $|z| = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 4 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 1 - m = 4 \Leftrightarrow m = -3$ (nhận).

Vậy $m \in \{-3; 1; 9\}$. **Chọn D.**

☺ Cách giải 2:

Ta có: $z^2 - 2z + 1 - m = 0 \Leftrightarrow (z - 1)^2 = m$ (*).

Trường hợp 1: $m \geq 0$, (*) trở thành: $z - 1 = \pm \sqrt{m} \Rightarrow z = 1 \pm \sqrt{m}$.

Với $z = 1 + \sqrt{m}$. Ta có: $|z| = 2 \Rightarrow 1 + \sqrt{m} = 2 \Rightarrow m = 1$ (nhận).

Với $z = 1 - \sqrt{m}$. Ta có: $|z| = 2 \Rightarrow |1 - \sqrt{m}| = 2 \Rightarrow m = 9$ (nhận).

Trường hợp 2: $m < 0$, (*) trở thành: $(z - 1)^2 = -mi^2 \Rightarrow z - 1 = \pm i\sqrt{-m} \Rightarrow z = 1 \pm i\sqrt{-m}$.

Với $z = 1 + i\sqrt{-m}$. Ta có: $|z| = 2 \Rightarrow |1 + i\sqrt{-m}| = 2 \Rightarrow \sqrt{1 + (-m)} = 2 \Rightarrow m = -3$ (nhận).

Vì hai số phức $z = 1 \pm i\sqrt{-m}$ có cùng mô-đun nên ta không cần xét số phức còn lại.

Vậy $m \in \{-3; 1; 9\}$. **Chọn D.**

Câu 28. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4 + (4 - m)z^2 - 4m = 0$. Tìm tất cả các giá trị m để $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 6$.

A. $m = -1$.

B. $m = \pm 2$.

C. $m = \pm 3$.

D. $m = \pm 1$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z^4 + (4 - m)z^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow z^4 + 4z^2 - mz^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow z^2(z^2 + 4) - m(z^2 + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow (z^2 + 4)(z^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = -4 & (1) \\ z^2 = m & (2) \end{cases}$$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow z^2 = 4i^2 \Leftrightarrow z_{1,2} = \pm 2i$. Do vậy $|z_1| = |z_2| = 2$.

Gọi z_3, z_4 là nghiệm của phương trình (2). Ta có: $|z_3| = |z_4| = \sqrt{|m|}$.

Ta có: $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{|m|} + 4 = 6 \Leftrightarrow \sqrt{|m|} = 1 \Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy $m = \pm 1$ thỏa mãn đề bài. **Chọn D.**

Câu 29. Cho a là số thực, phương trình $z^2 + (a - 2)z + 2a - 3 = 0$ có 2 nghiệm z_1, z_2 . Gọi M, N là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết tam giác OMN có một góc bằng 120° , tính tổng các giá trị của a .

A. -6.

B. 6.

C. -4.

D. 4.

Hướng dẫn giải:

Vì O, M, N không thẳng hàng nên z_1, z_2 không đồng thời là số thực, cũng không đồng thời là số thuần ảo. Xét phương trình $z^2 + (a-2)z + 2a-3 = 0$;

$$\Delta = (a-2)^2 - 4(2a-3) = a^2 - 12a + 16 < 0 \Leftrightarrow a \in (6-2\sqrt{5}; 6+2\sqrt{5}) \quad (*).$$

Theo **định lý Vi-ét**, ta có: $z_1 + z_2 = 2-a, z_1 z_2 = 2a-3$ (z_1, z_2 là các số phức liên hợp của nhau).

$$\text{Ta có: } |z_1 z_2| = |2a-3| \Rightarrow |z_1| \cdot |z_2| = |z_1|^2 = |z_2|^2 = |2a-3| \stackrel{(*)}{=} 2a-3 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \boxed{OM = ON = \sqrt{2a-3}};$$

$$MN^2 = |z_1 - z_2|^2 = |(z_1 - z_2)|^2 = |(z_1 + z_2)^2 - 4z_1 z_2| = |(2-a)^2 - 4(2a-3)| = |a^2 - 12a + 16|$$

$$\Rightarrow \boxed{MN = \sqrt{\underbrace{a^2 - 12a + 16}_{\Delta}}}_{\Delta < 0} = \sqrt{-a^2 + 12a - 16}.$$

$$\text{Tam giác } OMN \text{ cân tại } O \text{ nên } \angle MON = 120^\circ \Rightarrow \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM \cdot ON} = \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 - 8a + 10}{2(2a-3)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a^2 - 6a + 7 = 0 \Rightarrow a = 3 \pm \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn } (*)).$$

Suy ra tổng các giá trị cần tìm của a là 6. **Chọn B.**

Câu 30. Cho a, b, c là các số thực sao cho phương trình $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ có ba nghiệm phức lần lượt là $z_1 = w + 3i; z_2 = w + 9i; z_3 = 2w - 4$, trong đó w là một số phức nào đó. Tính giá trị của $P = |a + b + c|$.

A. $P = 36$.B. $P = 208$.**C. $P = 136$.**D. $P = 84$.**Hướng dẫn giải:**

Đặt $w = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Xét phương trình số phức bậc ba: $z^3 + az^2 + bz + c = 0$.

Theo **định lý Vi-ét**, ta có: $z_1 + z_2 + z_3 = -a$. Từ giả thiết: $z_1 + z_2 + z_3 = 4w - 4 + 12i = -a$

$$\Leftrightarrow 4(x + yi) - 4 + 12i = -a \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4 = -a \\ 12 + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4 = -a \\ y = -3 \end{cases}.$$

Từ đó: $w = x - 3i \Rightarrow z_1 = x, z_2 = x + 6i, z_3 = 2x - 4 - 6i$.

Vì phương trình bậc ba $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ có một nghiệm thực nên hai nghiệm phức còn lại là hai số phức liên hợp của nhau, suy ra: $x = 2x - 4 \Rightarrow x = 4$.

Vậy ta có được $z_1 = 4, z_2 = 4 + 6i, z_3 = 4 - 6i$.

$$\text{Trở lại với } \textbf{định lý Vi-ét} \text{ bậc ba: } \begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = -a \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = b \\ z_1 z_2 z_3 = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 = -a \\ 84 = b \\ 208 = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 84 \\ c = -208 \end{cases}.$$

Vậy $P = |a + b + c| = |-12 + 84 + (-208)| = 136$. **Chọn C.**

Câu 31. Cho phương trình số phức dạng $z^3 + bz^2 + (9-i)z - 6 + 2i = 0$ ($b \in \mathbb{R}$). Biết rằng phương trình trên có một nghiệm thực. Hãy tìm tổng mô-đun các nghiệm còn lại của phương trình đó.

A. $\sqrt{5}+1$.

B. $\sqrt{2}+1$.

C. $\sqrt{10}+1$.

D. $\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi x là nghiệm thực của phương trình, ta có: $x^3 + bx^2 + (9-i)x - 6 + 2i = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 + bx^2 + 9x - 6 + (2-x)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=0 \\ x^3 + bx^2 + 9x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 8+4b+18-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ b=-5 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho trở thành: $z^3 - 5z^2 + (9-i)z - 6 + 2i = 0$, trong đó $z=2$ là một nghiệm.

$$\text{Ta có: } z^3 - 5z^2 + (9-i)z - 6 + 2i = 0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2 - 3z + 3-i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=2 \\ z^2 - 3z + 3-i = 0 \end{cases}.$$

Xét phương trình $z^2 - 3z + 3-i = 0$ (*):

$$\Delta = (-3)^2 - 4(3-i) = -3 + 4i = (1+2i)^2; \Delta \text{ có các căn bậc hai là } \pm(1+2i).$$

$$\text{Vì vậy phương trình (*) có hai nghiệm: } \begin{cases} z = \frac{3+(1+2i)}{2} \\ z = \frac{3-(1+2i)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2+i \\ z = 1-i \end{cases}.$$

Tổng mô-đun hai nghiệm này là: $|2+i| + |1-i| = \sqrt{5} + \sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 32. Cho phương trình số phức $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ với a, b, c, d là các hệ số thực. Biết phương trình có tổng hai nghiệm là $-2+i$ và tích hai nghiệm còn lại là $-1-5i$. Tìm tổng $a+b+c+d$.

A. 17.

B. 19.

C. 15.

D. 13.

Hướng dẫn giải:

Gọi bốn nghiệm phức của phương trình đã cho là z_1, z_2, z_3, z_4 . Ta có: $\begin{cases} z_1 + z_3 = -2+i \\ z_2 \cdot z_4 = -1-5i \end{cases}$.

Vì phương trình đã cho là bậc bốn hệ số thực nên hai số phức $z_1 + z_3, z_2 + z_4$ là liên hợp của nhau;

tương tự hai số phức $z_1 \cdot z_3, z_2 \cdot z_4$ là liên hợp của nhau. Suy ra: $\begin{cases} z_2 + z_4 = -2-i \\ z_1 z_3 = -1+5i \end{cases}$.

Khi đó z_1, z_3 là nghiệm phương trình $z^2 - (-2+i)z - 1+5i = 0 \Leftrightarrow \boxed{z^2 + (2-i)z - 1+5i = 0}$;

z_2, z_4 là nghiệm phương trình $z^2 - (-2-i)z - 1-5i = 0 \Leftrightarrow \boxed{z^2 + (2+i)z - 1-5i = 0}$.

Do vậy $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = [z^2 + (2-i)z - 1+5i][z^2 + (2+i)z - 1-5i]$.

Đồng nhất hệ số hai vế, ta có: $az^3 = [(2+i) + (2-i)]z^3 = 4z^3 \Rightarrow \boxed{a=4}$;

$bz^2 = [(-1-5i) + (-1+5i) + (2-i)(2+i)]z^2 = 3z^2 \Rightarrow \boxed{b=3}$;

$cz = [(-1+5i)(2+i) + (-1-5i)(2-i)]z = -14z \Rightarrow \boxed{c=-14}$; $\boxed{d = (-1+5i)(-1-5i) = 26}$.

Ta có $a+b+c+d = 19$. **Chọn B.**

CHỦ ĐỀ III. MAX-MIN CỦA MÔ-ĐUN SỐ PHỨC

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC:

1. Tập hợp điểm biểu diễn số phức liên quan đến đường thẳng:

Xét số phức $z = x + yi$ có điểm biểu diễn $M(x; y)$. Khi đó:

Nếu x, y thỏa mãn phương trình	Kết luận
$ax + by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 > 0)$	M thuộc đường thẳng có phương trình $ax + by + c = 0$.
$ax + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a} = m \quad (a \neq 0)$	M thuộc đường thẳng vuông góc với Ox và có phương trình $x = m$.
$by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{c}{b} = n \quad (b \neq 0)$	M thuộc đường thẳng vuông góc với Oy và có phương trình $y = n$.
$x = 0$	M thuộc trục Oy .
$y = 0$	M thuộc trục Ox .
$ax + by + c > 0 \quad (a^2 + b^2 > 0)$ hoặc $ax + by + c \geq 0$; $ax + by + c < 0$; $ax + by + c \leq 0$	M thuộc nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng với phương trình $ax + by + c = 0$.

☞ Đặc biệt:

- Nếu $MA = MB$ với A, B cố định thì M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB .
- Nếu $AB + BC = AC$ thì ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó.
- Nếu $AB + BC + CD = AD$ thì bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng theo thứ tự đó.
- Nếu $|z - (a + bi)| + |z - (c + di)| = k$ với $k = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$ thì ba điểm $M, A(a; b), B(c; d)$ thẳng hàng (M là điểm biểu diễn của z).

- Nếu $(z - z_0) \cdot (\overline{w} - \overline{z_0})$ là số thực thì $(z - z_0) \cdot \left(\frac{\overline{w} - \overline{z_0}}{\neq 0} \right) = k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z - z_0 = \frac{k}{\overline{w} - \overline{z_0}}$
 $\Leftrightarrow z - z_0 = \frac{k(w - z_0)}{|\overline{w} - \overline{z_0}|^2} \Leftrightarrow \boxed{z - z_0 = m(w - z_0)}, m = \frac{k}{|\overline{w} - \overline{z_0}|^2} \in \mathbb{R}.$

Khi đó ba điểm M, N, A thẳng hàng (biết M, N, A theo thứ tự là các điểm biểu diễn của các số phức z, w, z_0).

2. Tập hợp điểm biểu diễn số phức liên quan đến đường tròn:

a) **Đường tròn:** Xét số phức $z = x + yi$ có điểm biểu diễn $M(x; y)$. Khi đó:

Nếu x, y thỏa mãn phương trình	Kết luận
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$	M thuộc đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính R .
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$	M thuộc đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính $R = \sqrt{\underbrace{a^2 + b^2 - c}_{>0}}$.

b) Hình tròn: Xét số phức $z = x + yi$ có điểm biểu diễn $M(x; y)$. Khi đó:

Nếu x, y thỏa mãn phương trình	Kết luận
$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$	M thuộc hình tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính R .
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0$	M thuộc hình tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính $R = \sqrt{\underbrace{a^2 + b^2 - c}_{>0}}$.

c) Phần trong và ngoài đường tròn:

Xét số phức $z = x + yi$ có điểm biểu diễn $M(x; y)$. Khi đó:

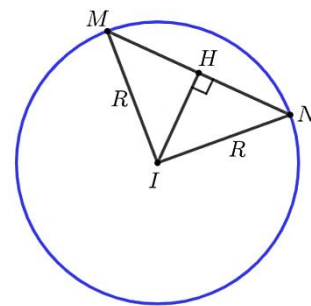
Nếu x, y thỏa mãn phương trình	Kết luận
$(x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2$	M thuộc phần trong đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính R .
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c < 0$	M thuộc phần trong đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính $R = \sqrt{\underbrace{a^2 + b^2 - c}_{>0}}$.
$(x-a)^2 + (y-b)^2 > R^2$	M thuộc phần ngoài đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính R .
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c > 0$	M thuộc phần ngoài đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính $R = \sqrt{\underbrace{a^2 + b^2 - c}_{>0}}$.

☞ Đặc biệt:

- Nếu $|z + a + bi| = R > 0$ thì ta nói tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn có tâm $I(-a; -b)$ và bán kính bằng R .

- Xét z_1, z_2 thỏa mãn $|z + a + bi| = R > 0$ và $|z_1 - z_2| = k > 0$:
 Gọi M, N là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 thì $MN = k$ là dây cung của đường tròn tâm $I(-a; -b)$, bán kính R .

- Xét z_1, z_2 thỏa mãn $|z + a + bi| = R > 0$ và $\left| \frac{z_1 + z_2}{2} \right| = l > 0$.



Gọi M, N là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 và H là trung điểm của MN thì là dây cung của đường tròn tâm $I(-a; -b)$, bán kính, đồng thời $IH = l$.

3. Tập hợp điểm biểu diễn là một đường cong khác:

Xét số phức $z = x + yi$ có điểm biểu diễn $M(x; y)$. Khi đó:

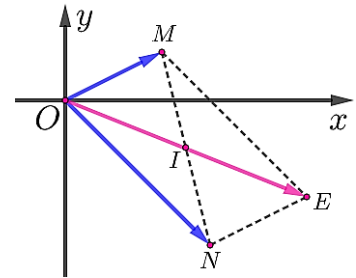
Nếu x, y thỏa mãn phương trình	Kết luận
$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$	M thuộc parabol có phương trình $y = ax^2 + bx + c$
$x = ay^2 + by + c \ (a \neq 0)$	M thuộc parabol có phương trình $x = ay^2 + by + c$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$	M thuộc elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Đặc biệt: Nếu $|z + a + bi| + |z + c + di| = T > F_1F_2$ với $F_1(-a; -b), F_2(-c; -d)$ thì tập hợp điểm M là elip có hai tiêu điểm là F_1, F_2 .

II. ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC MÔ-ĐUN:

1. Các đẳng thức mô-đun: Cho các số phức $z = a + bi, w = c + di$ lần lượt có các điểm biểu diễn $M(a; b), N(c; d)$. Ta có:

- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$; ▪ $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$ với $w \neq 0$;
- $|z + w| = |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{OE}| = |\overrightarrow{2OI}| = 2OI$ với E là một đỉnh của hình bình hành $OMEN$ và I là trung điểm đoạn thẳng MN .
- $|z - w| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{NM}| = MN$.
- $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ hay $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2 = |\bar{z}|^2$.
- $|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + (z\bar{w} + \bar{z}w) + |w|^2 \quad (1).$
- $|z - w|^2 = (z - w)(\overline{z - w}) = (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = |z|^2 - (z\bar{w} + \bar{z}w) + |w|^2 \quad (2).$



$$\text{Cộng theo vế (1) và (2): } |z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2 \Rightarrow |z|^2 + |w|^2 = \frac{|z + w|^2 + |z - w|^2}{2}.$$

2. Bất đẳng thức vector (bất đẳng thức tam giác):

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1 = kz_2 \ (k \geq 0)$.
- $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1 = kz_2 \ (k \leq 0)$.
- $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$; dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1 = kz_2 \ (k \geq 0)$.
- $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$; dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1 = kz_2 \ (k \leq 0)$.

★ Đúc kết: Tất cả bất đẳng thức trên đều được xây dựng từ một tính chất cơ bản trong tam giác:

- Với một tam giác bất kỳ, tổng hai cạnh luôn lớn hơn cạnh thứ ba (hiệu hai cạnh luôn nhỏ hơn cạnh thứ ba).
- Với ba điểm bất kỳ tạo nên ba cạnh (có thể ba điểm thẳng hàng hoặc tạo thành tam giác), tổng hai cạnh luôn không nhỏ hơn cạnh thứ ba (hiệu hai cạnh không vượt quá cạnh thứ ba).

Ví dụ 1: Cho hai số phức z, w có $|z| = 10$ và $w = -3 - 4i$. Biết rằng khi $|z + w|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $z = a + bi$. Tính $a + b$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $|z + w| \geq ||z| - |w|| = |10 - 5| = 5$. Do đó $|z + w|_{\min} = 5$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $z = k.w$ với $k < 0 \Leftrightarrow z = k(-3 - 4i) = -3k - 4ki$.

Khi đó: $|z| = \sqrt{(-3k)^2 + (-4k)^2} = 10 \Leftrightarrow 5|k| = 10 \Rightarrow k = -2 \ (k < 0)$.

Vậy $z = 6 + 8i \Rightarrow a = 6, b = 8 \Rightarrow a + b = 14$.

3. Bất đẳng thức AM-GM:

- $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ với mọi $a, b \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.
- $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ với mọi $a, b, c \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 2: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $\frac{z}{1+i} = \frac{(2-i)^2}{w}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = |z|^2 + |w|^2.$$

Hướng dẫn giải:

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: $T = |z|^2 + |w|^2 \geq 2\sqrt{|z|^2 \cdot |w|^2} = 2|z| \cdot |w| = 2|zw|$.

Ta lại có: $\frac{z}{1+i} = \frac{(2-i)^2}{w} \Leftrightarrow zw = (1+i)(2-i)^2 = 7 - i$. Suy ra $|zw| = \sqrt{49 + 1} = 5\sqrt{2}$.

Vậy $T \geq 2|z| \cdot |w| \Leftrightarrow T \geq 10\sqrt{2}$. Do đó $T_{\min} = 10\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|z| = |w| = \sqrt{5\sqrt{2}}$.

4. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

- Cho các cặp số $(a; x), (b; y)$, ta có: $|ax + by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.
 Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} \ (x, y \neq 0)$ hay $\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \ (b, y \neq 0)$.
- Cho các cặp số $(a; x), (b; y), (c; z)$, ta có: $|ax + by + cz| \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)}$.
 Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} \ (x, y, z \neq 0)$.

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + i| = 2$, tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z + 1|^2 - |z - 2 + i|^2.$$

Hướng dẫn giải:

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết: $|z - 2 + i| = 2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ (1).

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= |z + 1|^2 - |z - 2 + i|^2 = (x + 1)^2 + y^2 - [(x - 2)^2 + (y + 1)^2] \\ &= 2x + 1 - (-4x + 4 + 2y + 1) = 6x - 2y - 4 = 6(x - 2) - 2(y + 1) + 10. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$|6(x - 2) - 2(y + 1)| \leq \sqrt{(36 + 4) \underbrace{[(x - 2)^2 + (y + 1)^2]_{=4}}_{=4}} = \sqrt{40 \cdot 4} = 4\sqrt{10}.$$

$$\text{Suy ra } -4\sqrt{10} \leq 6(x - 2) - 2(y + 1) \leq 4\sqrt{10} \Rightarrow 10 - 4\sqrt{10} \leq \underbrace{6(x - 2) - 2(y + 1) + 10}_P \leq 10 + 4\sqrt{10}.$$

$$\text{Ta có: } 10 - 4\sqrt{10} \leq P \leq 10 + 4\sqrt{10} \text{ nên } \begin{cases} \text{Max} P = 10 + 4\sqrt{10} \\ \text{Min} P = 10 - 4\sqrt{10} \end{cases}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \frac{x - 2}{6} = \frac{y + 1}{-2} \Leftrightarrow x + 3y + 1 = 0 \quad (2).$$

Giải hệ phương trình (1), (2) ta tìm được các số phức z_1, z_2 thỏa mãn.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN:

Kỹ thuật 1: Tìm Max-min mô-đun chứa số phức có điểm biểu diễn thuộc đường cơ bản.

1. Tập hợp điểm biểu diễn của z là đường thẳng d :

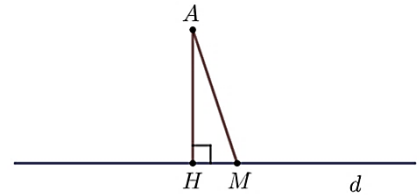
Gọi M là điểm biểu diễn của z , M thuộc $d: ax + by + c = 0$.

- Ta có: $|z| = OM$ bé nhất $\Leftrightarrow M \equiv H$ là hình chiếu của O trên

đường thẳng d . Khi đó $|z|_{\min} = OH = d(O, d) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

- Ta có: $|z - z_0| = AM$ bé nhất (A là điểm biểu diễn của z_0) $\Leftrightarrow M \equiv H$ là hình chiếu của A trên đường thẳng d .

Khi đó: $|z - z_0|_{\min} = AH = d(A, d) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.



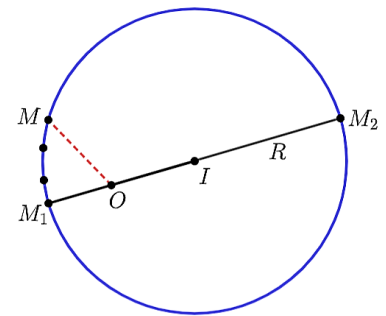
2. Tập hợp điểm biểu diễn của z là đường tròn (C):

Gọi M là điểm biểu diễn của z , M thuộc đường tròn (C) tâm $I(a; b)$, bán kính R .

- Nếu O nằm bên trong đường tròn (C):

$$\text{Ta có: } |z| = OM \text{ bé nhất là } |z|_{\min} = OM_{\min} = OM_1 = R - OI.$$

Khi đó $M \equiv M_1$ với $\overrightarrow{IM_1} = \frac{R}{OI} \cdot \overrightarrow{IO}$, ta tìm được M .



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

– Ta có: $|z| = OM$ **lớn nhất** là $|z|_{\max} = OM_{\max} = OM_2 = R + OI$.

Khi đó $M \equiv M_2$ với $\overrightarrow{IM_2} = \frac{R}{OI} \cdot \overrightarrow{OI}$, ta tìm được M .

• Nếu O **nằm bên ngoài** đường tròn (C) :

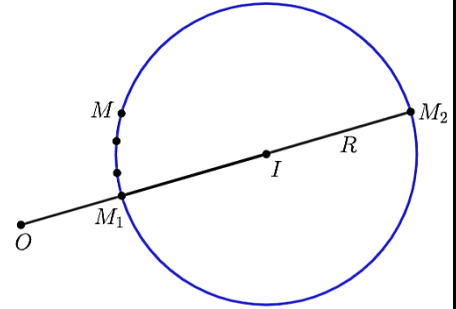
– Ta có: $|z| = OM$ **bé nhất** là

$|z|_{\min} = OM_{\min} = OM_1 = OI - R$. Khi đó $M \equiv M_1$ với

$\overrightarrow{OM_1} = \frac{OI - R}{OI} \cdot \overrightarrow{OI}$, ta tìm được M .

– Ta có: $|z| = OM$ **lớn nhất** là $|z|_{\max} = OM_{\max} = OI + R$. Khi đó $M \equiv M_2$ với

$\overrightarrow{OM_2} = \frac{OI + R}{OI} \cdot \overrightarrow{OI}$, ta tìm được M .



3. Tập hợp điểm biểu diễn của z là elip (E) :

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - c| + |z + c| = 2a$, ($a > c > 0$).

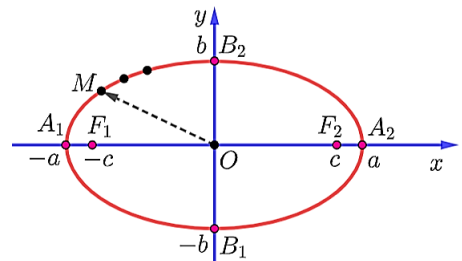
Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z thì M thuộc elip có

phương trình chính tắc $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = a^2 - c^2$.

Elip (E) có hai tiêu điểm $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$, $F_1F_2 = 2c$ và các đỉnh như hình vẽ. Ta có:

• $|z|_{\min} = OM_{\min} = OB_1 = OB_2 = b$.

• $|z|_{\max} = OM_{\max} = OA_1 = OA_2 = a$.



Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $|z + i + 1| = |\bar{z} - 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng

A. $\sqrt{2}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

C. 2.

D. 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) có $M(x; y)$ là điểm biểu diễn.

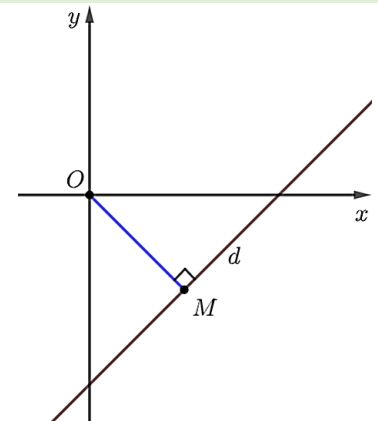
Ta có: $|z + i + 1| = |\bar{z} - 2i| \Leftrightarrow |(x+1) + (y+1)i| = |x - (y+2)i|$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y+2)^2 \Leftrightarrow \boxed{x - y - 1 = 0}$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng $\Delta: x - y - 1 = 0$.

Do đó, $|z| = OM$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của O trên Δ .

Ta có: $|z|_{\min} = OM_{\min} = d(O, \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Câu 2. Xét các số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm $P = 3x - 2y$.

A. -2.

B. -4.

C. 4.

D. 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |z - 2 - 4i| &= |z - 2i| \Leftrightarrow |(x-2) + (y-4)i| = |x + (y-2)i| \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 &= x^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0. \end{aligned}$$

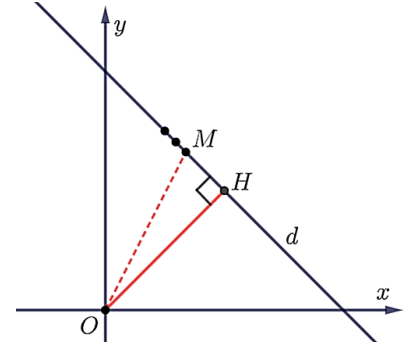
Vậy tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn các số phức z là đường thẳng $d: x + y - 4 = 0$.

$|z|_{\min} \Leftrightarrow OM_{\min} = OH$ với H là hình chiếu của điểm O lên đường thẳng d .

Vì $OH \perp d: x + y - 4 = 0$ nên phương trình $OH: x - y + m = 0$.

Do $O(0;0) \in OH \Rightarrow m = 0 \Rightarrow OH: x - y = 0$.

Vì $H = d \cap OH$ nên tọa độ H thỏa mãn hệ $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$. Suy ra $P = 3x - 2y = 2$.



Câu 3. Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 3i| = 2$. Số phức z mà $|z - 1|$ nhỏ nhất là

A. $z = 1 + 5i$.B. $z = 1 + i$.C. $z = 1 + 3i$.D. $z = 1 - i$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z .

$$\text{Ta có: } |z - 1 - 3i| = 2 \Leftrightarrow |(x-1) + (y-3)i| = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4.$$

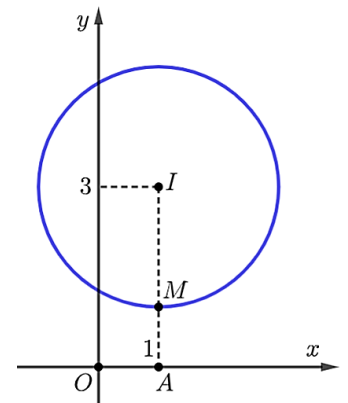
Tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I(1; 3)$, bán kính $R = 2$.

$$\text{Ta có: } |z - 1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = AM \text{ với } A(1; 0).$$

Khi đó: $|z - 1| = AM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A, M, I$ thẳng hàng theo thứ tự đó.

$$\text{Ta có: } IA = 3, IM = 2 \Rightarrow AM = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AI}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{1}{3} \cdot (1-1) \\ y-0 = \frac{1}{3} \cdot (3-0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ hay } M(1;1). \text{ Vậy } z = 1 + i.$$



Câu 4. Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |\bar{z} + 1 + i|$ lần lượt là

A. $\sqrt{13} + 2$ và $\sqrt{13} - 2$.B. $\sqrt{13} + 3$ và $\sqrt{13} - 3$.C. $\sqrt{13} + 1$ và $\sqrt{13} - 1$.D. $\sqrt{13} + 4$ và $\sqrt{13} - 4$.

Hướng dẫn giải:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

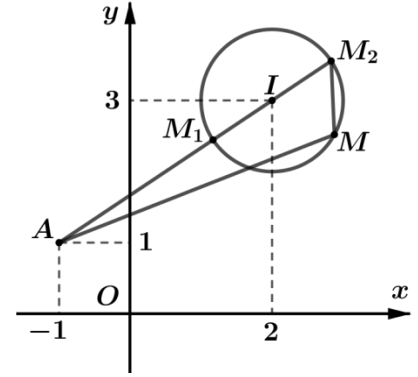
Chọn C.

Ta có $|z - 2 - 3i| = 1$; tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2; 3)$, bán kính $R = 1$.

Ta có $P = |\bar{z} + 1 + i| = |\overline{z + 1 - i}| = |z + 1 - i| = MA$ với $A(-1; 1)$;

$$AI = \sqrt{[2 - (-1)]^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{13}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} P_{\min} = AM_1 = AI - R = \sqrt{13} - 1 \\ P_{\max} = AM_2 = AI + R = \sqrt{13} + 1 \end{cases}.$$



Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 3 - 4i| = 3$ và $w = 2z + 3 - 2i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $6 - 3\sqrt{5}$.

B. $6 + 3\sqrt{5}$.

C. 7.

D. $3\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

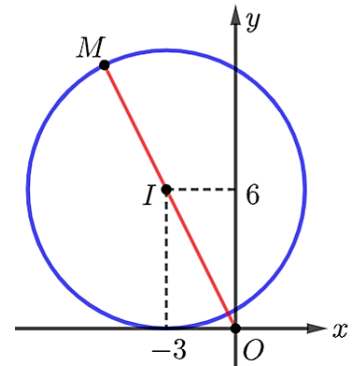
Theo giả thiết $w = 2z + 3 - 2i \Rightarrow z = \frac{w - 3 + 2i}{2}$.

Thay vào $|z + 3 - 4i| = 3$, ta được:

$$\left| \frac{w - 3 + 2i}{2} + 3 - 4i \right| = 3 \Leftrightarrow \left| \frac{w - 3 + 2i + 6 - 8i}{2} \right| = 3 \Leftrightarrow |w + 3 - 6i| = 6.$$

Vì vậy tập hợp điểm M biểu diễn cho w là đường tròn tâm $I(-3; 6)$, bán kính $R = 6$. Khi đó $|w| = OM$ đạt giá trị lớn nhất là

$$|w|_{\max} = OM_{\max} = OI + R = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} + 6 = 6 + 3\sqrt{5}.$$



Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 6| + |z + 6| = 20$. Gọi T_1, T_2 lần lượt là mô-đun lớn nhất và nhỏ nhất của z . Tính $T_1 - T_2$.

A. $T_1 - T_2 = 2$.

B. $T_1 - T_2 = 4$.

C. $T_1 - T_2 = 3$.

D. $T_1 - T_2 = 5$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi M là điểm biểu diễn của z và hai điểm cố định $F_1(-6; 0), F_2(6; 0); F_1F_2 = 12$.

Ta có: $|z - 6| + |z + 6| = 20 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 20 > F_1F_2$ nên M thuộc elip (E) có hai tiêu điểm F_1, F_2 .

Đặt $2a = 20 \Rightarrow a = 10; 2c = 12 \Rightarrow c = 6; b = \sqrt{a^2 - c^2} = 8$.

Vậy (E) có bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ.

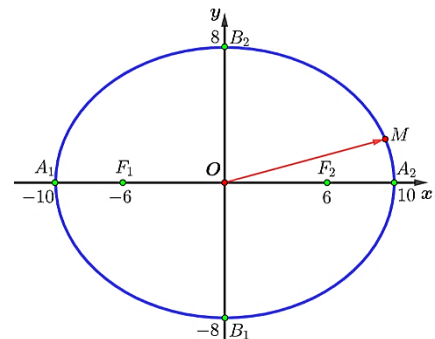
$$\Leftrightarrow |x - 6 + yi| + |x + 6 + yi| = 20$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 6)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 6)^2 + y^2} = 20 \quad (*).$$

Gọi $M(x; y), F_1(6; 0)$ và $F_2(-6; 0)$.

Khi $T = |z|$ lớn nhất khi M trùng với A_1 hoặc A_2 ; ta có

$$T_{\max} = OA_1 = OA_2 = 10 = T_1.$$



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

$T = |z|$ nhỏ nhất khi M trùng với B_1 hoặc B_2 ; ta có $T_{\min} = OB_1 = OB_2 = 8 = T_2$.

Vậy $T_1 - T_2 = 2$.

Câu 7. Gọi S là tập hợp các số phức thỏa mãn $|z-3|+|z+3|=10$; biết z_1, z_2 là các số phức có mô-đun nhỏ nhất thuộc S . Giá trị biểu thức $P = z_1^2 + z_2^2$.

A. 16.

B. -16.

C. 32.

D. -32.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z và các điểm $F_1(-3;0), F_2(3;0)$.

Ta có: $|z-3|+|z+3|=10 \Leftrightarrow MF_1+MF_2=10 > 6 = F_1F_2$

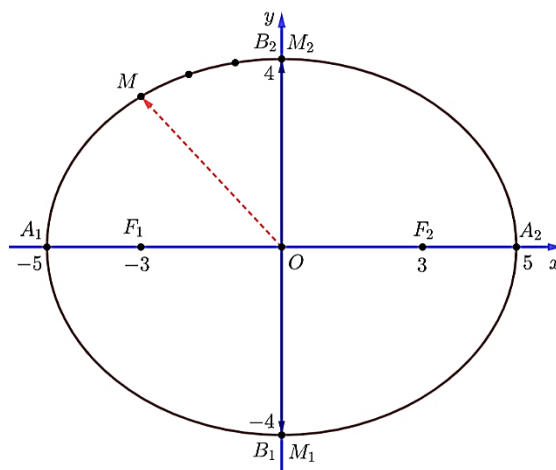
nên M thuộc elip (E) có hai tiêu điểm F_1, F_2 .

Đặt $\begin{cases} 2a=10 \\ 2c=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ c=3 \end{cases}$ và $b=\sqrt{a^2-c^2}=4$.

Elip (E) lần lượt có các đỉnh $A_1(-5;0), A_2(5;0), B_1(0;-4), B_2(0;4)$ được cho như hình vẽ.

$|z|$ bé nhất là $|z|_{\min} = OM_{\min} = OB_1 = OB_2 = 4$.

Khi đó $z = -4 = z_1$ hay $z = 4 = z_2$. Suy ra $P = z_1^2 + z_2^2 = 32$.



Câu 8. Cho số phức z thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $|z+\sqrt{5}|+|z-\sqrt{5}|=6$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = |(1+i)z - 4 + 4i|$ bằng

A. 2.

B. $2\sqrt{2}$.

C. 5.

D. $5\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi M là điểm biểu diễn cho số phức z , và $F_1(-\sqrt{5};0), F_2(\sqrt{5};0)$.

Ta có: $MF_1+MF_2=6 > 2\sqrt{5} = F_1F_2$; vì vậy M thuộc elip (E)

có các tiêu điểm F_1, F_2 .

Đặt $\begin{cases} 2a=6 \\ 2c=2\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ c=\sqrt{5} \end{cases}$ và $b=\sqrt{a^2-c^2}=2$. Elip (E) có các

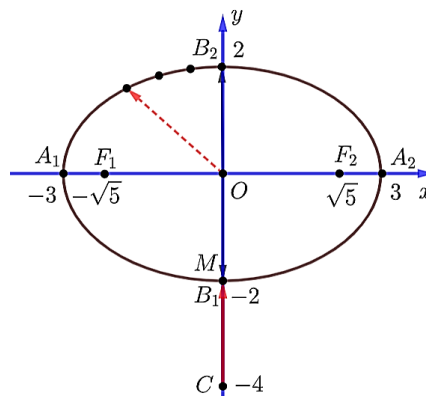
đỉnh $A_1(-3;0), A_2(3;0), B_1(0;-2), B_2(0;2)$.

Ta có: $P = |(1+i)z - 4 + 4i| = |1+i| \cdot |z + 4i| = \sqrt{2} |z - (-4i)|$

$P = \sqrt{2}MC$ với $C(0;-4)$

Khi đó: $P_{\min} \Leftrightarrow \sqrt{2}MC_{\min} = \sqrt{2}B_1C = \sqrt{2} \cdot |-4 - (-2)| = 2\sqrt{2}$;

đấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv B_1(0;-2)$.



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4$. Gọi P_1, P_2 lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $P = |z - 2 - 2i|$. Đặt $A = P_1 + P_2$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. $A \in (\sqrt{34}; 6)$. B. $A \in (6; \sqrt{42})$. C. $A \in (2\sqrt{7}; \sqrt{33})$. D. $A \in (4; 3\sqrt{3})$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) có điểm biểu diễn là $M(x; y)$.

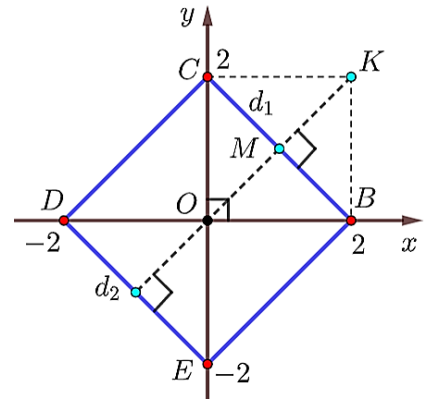
Ta có: $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4 \Leftrightarrow |x + yi + x - yi| + |x + yi - x + yi| = 4 \Leftrightarrow 2|x| + 2|y| = 4 \Leftrightarrow |x| + |y| = 2$.

Suy ra tập hợp điểm M là hình vuông $BCDE$ như hình vẽ (bốn đỉnh của hình vuông lần là giao điểm của hai trong bốn đường thẳng $x + y = 2, x - y = 2, -x + y = 2, -x - y = 2$); trong đó hai đỉnh B, C thuộc đường thẳng $d_1: x + y - 2 = 0$ và hai đỉnh D, E thuộc đường thẳng $d_2: x + y + 2 = 0$.

Ta có: $P = |z - 2 - 2i| = |z - (2 + 2i)| = MK$ với $K(2; 2)$.

Vì vậy $P_{\min} = MK_{\min} = d(K, d_1) = \frac{|2 + 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \boxed{\sqrt{2} = P_1}$;

$P_{\max} = MK_{\max} = d(K, d_2) = \frac{|2 + 2 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \boxed{3\sqrt{2} = P_2}$.



Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| = 8$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - 3 - 3i|$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A. $\sqrt{10} + \sqrt{34}$. B. $2\sqrt{10}$. C. $\sqrt{10} + \sqrt{58}$. D. $\sqrt{5} + \sqrt{58}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) có điểm biểu diễn là $N(x; y)$.

Ta có: $|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| = 8 \Leftrightarrow 2|x| + 4|y| = 8 \Leftrightarrow |x| + 2|y| = 4$.

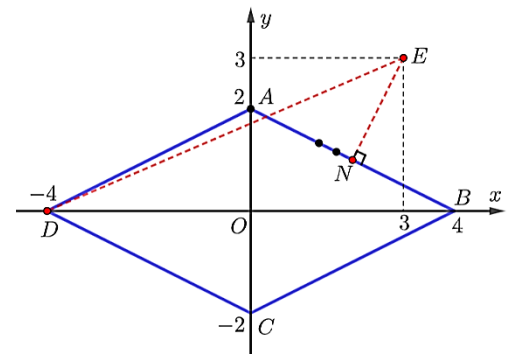
Khi đó tập hợp điểm N là hình bình hành $ABCD$ với $A(0; 2), B(4; 0), C(0; -2), D(-4; 0)$ (bốn điểm này là giao điểm của hai trong bốn đường thẳng $x + 2y = 4, x - 2y = 4, -x + 2y = 4, -x - 2y = 4$); trong đó A, B thuộc đường thẳng $d: x + 2y - 4 = 0$.

$P = |z - 3 - 3i| = |z - (3 + 3i)| = NE$ với $E(3; 3)$.

$P_{\min} = NE_{\min} = d(E, d) = \frac{|3 + 2 \cdot 3 - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \boxed{\sqrt{5} = m}$.

$P_{\max} = NE_{\max} = ED = \sqrt{(-4 - 3)^2 + (0 - 3)^2} = \boxed{\sqrt{58} = M}$.

Vậy $M + m = \sqrt{5} + \sqrt{58}$.



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Câu 11. Cho số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1 - 1 - 2i| = 2$ và $|z_2 + 2 + 3i| = |z_2 - 1 - i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ bằng

A. $\frac{33}{10}$. B. $\frac{29}{10}$. C. $\frac{9}{10}$. D. $\frac{13}{10}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi M là điểm biểu diễn của z_1 .

Vì $|z_1 - 1 - 2i| = 2$ nên M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 2$.

Gọi $N(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z_2

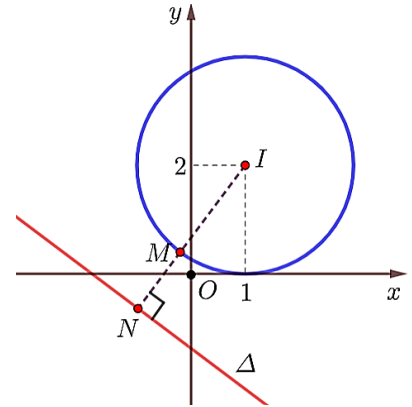
Khi đó: $|z_2 + 2 + 3i| = |z_2 - 1 - i| \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+3)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow 6x + 8y + 11 = 0$.

Suy ra N thuộc đường thẳng $\Delta: 6x + 8y + 11 = 0$.

Ta có: $|z_1 - z_2| = MN$. Vì $d(I, \Delta) = \frac{|6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 11|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{33}{10} > R$

nên Δ và (C) không có điểm chung.

Vì vậy $MN_{\min} = d(I, \Delta) - R = \frac{33}{10} - 2 = \frac{13}{10}$.



Câu 12. Cho số phức z_1 thỏa $|z_1 - 4 - 3i| = 1$ và z_2 thỏa mãn $(z_2 - 4)(\bar{z}_2 - 2i)$ là số thuần ảo. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$. Tính $M + m$.

A. $4\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{5}$. C. $3\sqrt{5} + 1$. D. $4\sqrt{5} - 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi M là điểm biểu diễn của z_1 , suy ra M thuộc đường tròn (C) có tâm $I_1(4; 3)$, bán kính $R_1 = 1$.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Đặt

$$w = (z_2 - 4)(\bar{z}_2 - 2i) = [(x-4) + yi][x - (y+2)i]$$

Theo giả thiết w thuần ảo nên $x(x-4) + y(y+2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn N của z_2 là đường tròn tâm

$I_2(2; -1)$ và bán kính $R_2 = \sqrt{5}$.

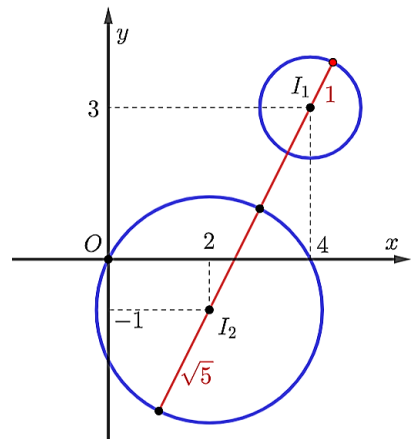
Ta thấy hai đường tròn không có điểm chung vì

$$I_1I_2 = 2\sqrt{5} > 1 + \sqrt{5} = R_1 + R_2.$$

Do vậy $|z_1 - z_2|$ đạt giá trị lớn nhất là:

$$M = I_1I_2 + R_1 + R_2 = 3\sqrt{5} + 1; |z_1 - z_2| \text{ đạt giá trị nhỏ nhất là: } m = I_1I_2 - R_1 - R_2 = \sqrt{5} - 1.$$

Vậy $M + m = 4\sqrt{5}$.



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Kỹ thuật 2: Sử dụng điều kiện ba điểm thẳng hàng và kỹ thuật lấy đối xứng

1. Hai điểm đối với đường thẳng d :

Gọi M là điểm biểu diễn của z , M thuộc $d: ax + by + c = 0$.

- Xét $T = |z - z_1| + |z - z_2| = MA + MB$ với A, B là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 .

– Nếu A, B **khác phía** so với d : $T = MA + MB$ bé nhất $\Leftrightarrow MA + MB$ bé nhất A, M, B thẳng hàng theo thứ tự đó.

– Nếu A, B **cùng phía** so với d : Lấy điểm A_1 đối xứng với A qua d , khi đó $MA = MA_1$.

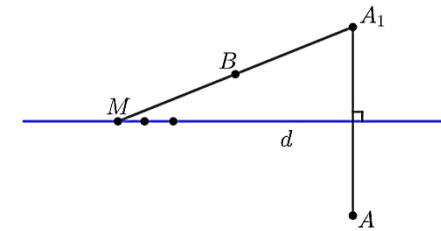
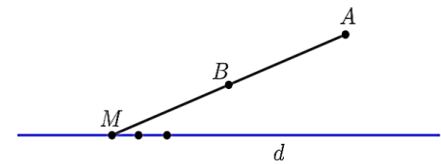
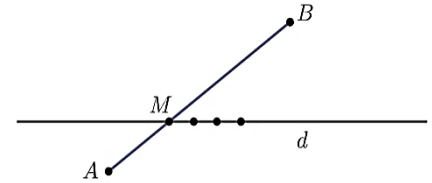
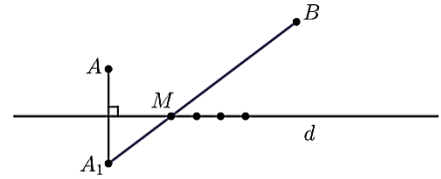
$T = MA + MB = MA_1 + MB$ bé nhất $\Leftrightarrow MA_1 + MB$ bé nhất A_1, M, B thẳng hàng theo thứ tự đó.

- Xét $T = |z - z_1| - |z - z_2| = MA - MB$ với A, B là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 .

– Nếu A, B **cùng phía** so với d : $T = MA - MB \leq AB$. Vì vậy T lớn nhất ($T_{\max} = AB$) $\Leftrightarrow A, B, M$ thẳng hàng theo thứ tự đó.

– Nếu A, B **khác phía** so với d : Lấy điểm A_1 đối xứng với A qua d , khi đó $MA = MA_1$.

$T = MA - MB = MA_1 - MB \leq A_1B$. Vì vậy T lớn nhất ($T_{\max} = A_1B$) $\Leftrightarrow A_1, B, M$ thẳng hàng theo thứ tự đó.



2. Điểm và đường tròn đối với đường thẳng d :

Gọi M là điểm biểu diễn của z , M thuộc $d: ax + by + c = 0$.

Hai điểm A, B biểu diễn cho z_1, z_2 với B di động trên đường tròn (C) có tâm I , bán kính R .

Ta cần xét giá trị nhỏ nhất $T_{\min}$ của biểu thức $T = |z - z_1| + |z - z_2|$; giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = |z - z_2| - |z - z_1|$.

a) Trường hợp 1: Điểm A và đường tròn (C) **nằm cùng phía** so với d .

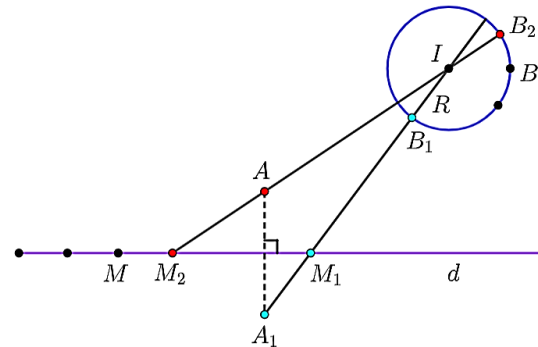
- $P = |z - z_2| - |z - z_1| = MB - MA \leq AB \leq AB_2$ hay

$$P_{\max} = AB_2 = AI + R.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M, A, I, B$ thẳng hàng theo thứ tự đó $\Leftrightarrow M \equiv M_2, B \equiv B_2$.

- $T = |z - z_1| + |z - z_2| = MA + MB = MA_1 + MB$ (với A_1 đối xứng với A qua d).

$$T = MA_1 + MB \geq A_1B \geq A_1B_1 \text{ hay } T_{\min} = A_1B_1.$$



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A_1, M, B, I$ thẳng hàng theo thứ tự đó $\Leftrightarrow M \equiv M_1, B \equiv B_1$.

b) Trường hợp 2: Điểm A và đường tròn (C) nằm khác phía so với d .

$$\bullet T = |z - z_1| + |z - z_2| = MA + MB \geq AB \geq AB_1.$$

$$T_{\min} = AB_1 = AI - R.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A, M, B, I$ thẳng hàng theo thứ tự đó $\Leftrightarrow M \equiv M_1, B \equiv B_1$.

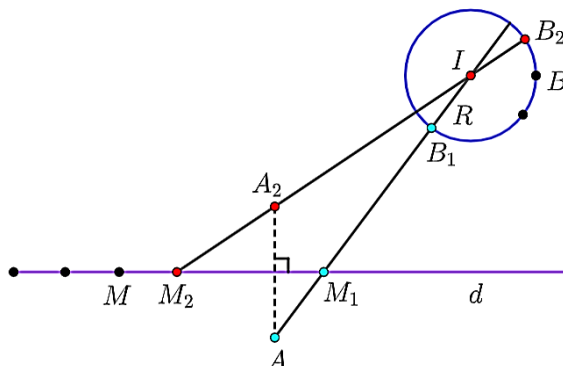
$$\bullet P = |z - z_2| - |z - z_1| = MB - MA = MB - MA_2 \text{ (với } A_2 \text{ là điểm đối xứng của } A \text{ qua } d).$$

$$P = MB - MA_2 \leq A_2B \leq A_2B_2.$$

$$P_{\max} = A_2B_2 = A_2I + R.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M, A_2, I, B_2$ thẳng hàng theo thứ tự đó $\Leftrightarrow M \equiv M_2, B \equiv B_2$.

Lưu ý: Khi xét hai đường tròn đối với đường thẳng d , ta cũng xét hai tình huống tương tự như trên.



Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn: $|\bar{z}| = |z + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - i| + |z - 4|$ là

A. 5.

B. 4.

C. $3\sqrt{3}$.

D. 6.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) có $M(x; y)$ là điểm biểu diễn.

$$\text{Ta có } |\bar{z}| = |z + 2i| \Leftrightarrow |x - yi| = |x + (y + 2)i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + (y + 2)^2 \Leftrightarrow y + 1 = 0.$$

Vậy điểm M thuộc đường thẳng $d: y + 1 = 0$.

$$\text{Ta có: } P = |z - i| + |z - 4| = MA + MB \text{ với } A(0; 1), B(4; 0).$$

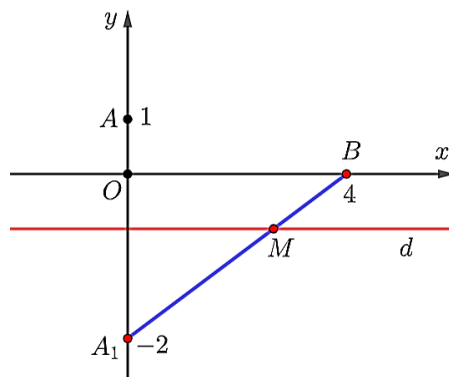
Xét $(y_A + 1)(y_B + 1) = 2 > 0$ nên hai điểm A, B nằm **cùng phía** so với đường thẳng d .

Lấy điểm A_1 đối xứng với A qua d thì $A_1(0; -3)$. Suy ra

$$P = MA + MB = MA_1 + MB.$$

$$\text{Vì vậy } P \geq A_1B \text{ hay } P_{\min} = A_1B = \sqrt{(4 - 0)^2 + (0 + 3)^2} = 5.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi A_1, M, B thẳng hàng theo thứ tự đó (hay $M = A_1B \cap d$).



Câu 14. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 2i| = |\bar{z}|$, biết rằng biểu thức $T = |z - 3 + 3i| - |z + 2 + i|$ đạt giá trị lớn nhất. Hãy tính $|z + 2|$.

A. $5\sqrt{2}$.

B. 7.

C. 6.

D. $3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Chọn A.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z .

Ta có: $|z - 2 + 2i| = |\bar{z}| \Leftrightarrow |(x - 2) + (y + 2)i| = |x - yi|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x - y - 2 = 0.$$

Vậy điểm M thuộc đường thẳng $\Delta: x - y - 2 = 0$.

Xét $T = |z - 3 + 3i| - |z + 2 + i| = MA - MB$ với

$$A(3; -3), B(-2; -1).$$

Dễ thấy A, B nằm khác phía so với Δ . Ta tìm tọa độ A_1 đối xứng với A qua Δ .

Gọi d qua A và vuông góc Δ nên phương trình $d: x + y = 0$; giao điểm của d với Δ là $H(1; -1)$.

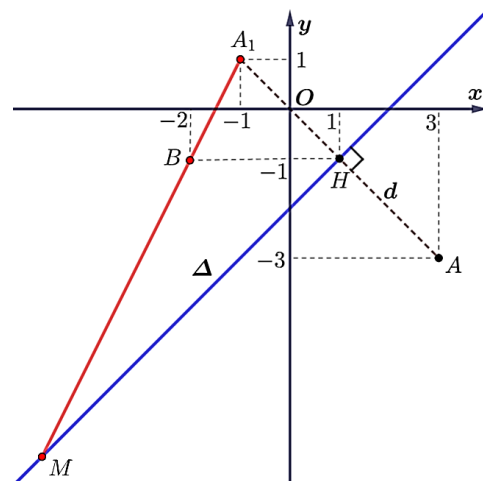
Vì A_1 cũng đối xứng với A qua H nên $A_1(-1; 1)$. Lúc này A_1 và B nằm cùng phía so với Δ .

Ta có: $T = MA - MB = MA_1 - MB \leq A_1B = \sqrt{5}$.

Dấu đẳng thức có được khi A_1, B, M thẳng hàng theo thứ tự đó, hay $M = A_1B \cap \Delta$.

Phương trình $A_1B: 2x - y + 3 = 0$, suy ra tọa độ $M(-5; -7)$ hay $z = -5i - 7$.

Vì vậy $|z + 2| = |-5 - 5i| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$.



Câu 15. Xét số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 2i| = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - 1 - i| + |z - 5 - 2i|$ bằng

A. $1 + \sqrt{10}$.

B. 4.

C. $\sqrt{17}$.

D. 5.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

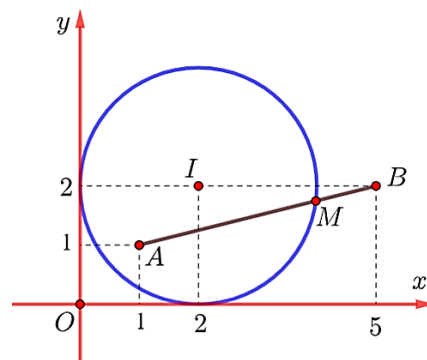
Do $|z - 2 - 2i| = 2$ nên tập hợp điểm M là đường tròn (C) có tâm $I(2; 2)$, bán kính $R = 2$.

Xét $P = |z - 1 - i| + |z - 5 - 2i| = MA + MB$ với $A(1; 1), B(5; 2)$.

Vì $\begin{cases} IA = \sqrt{2} < R \\ IB = 3 > R \end{cases}$ nên hai điểm A, B lần lượt nằm trong và nằm ngoài đường tròn (C) .

Do đó: $P = MA + MB \geq AB = \sqrt{17}$ hay $P_{\min} = \sqrt{17}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi A, M, B thẳng hàng theo thứ tự đó.



Câu 16. Xét các số phức z thỏa mãn $|z + 3 - 2i| + |z - 3 + i| = 3\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2| + |z - 1 - 3i|$. Tìm M, m .

A. $M = \sqrt{17} + \sqrt{5}; m = 3\sqrt{2}$.

B. $M = \sqrt{26} + 2\sqrt{5}; m = \sqrt{2}$.

C. $M = \sqrt{26} + 2\sqrt{5}; m = 3\sqrt{2}$.

D. $M = \sqrt{17} + \sqrt{5}; m = \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Chọn C.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z . Đặt $F_1(-3;2)$, $F_2(3;-1)$, $A(-2;0)$ và $B(1;3)$.

Ta có: $|z+3-2i|+|z-3+i|=3\sqrt{5} \Leftrightarrow MF_1+MF_2=3\sqrt{5}$ và $F_1F_2=3\sqrt{5}$. Suy ra $\boxed{MF_1+MF_2=F_1F_2}$.

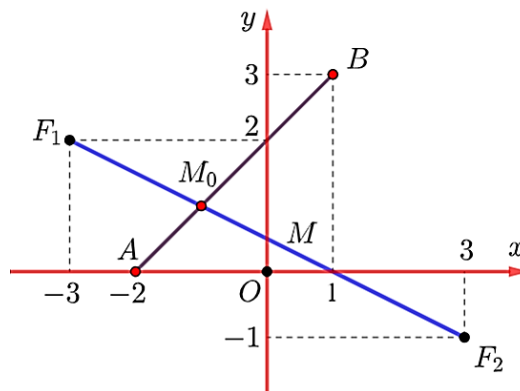
Do đó điểm M thuộc đoạn thẳng F_1F_2 như hình vẽ.

Khi đó: $P=|z+2|+|z-1-3i|=MA+MB \geq AB$ hay

$P_{\min}=AB=3\sqrt{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi A, M, B thẳng hàng theo thứ tự đó hay $M \equiv M_0$.

Dựa vào hình vẽ, ta có

$P_{\max}=AF_2+BF_2=\sqrt{26}+2\sqrt{5}$, khi đó $M \equiv F_2$.



Câu 17. Cho ba số phức u, v, w thỏa mãn các điều kiện $|u+4-2i|=2$, $|3v-1+i|=|2v+1-i|$ và $|w|=\overline{w}+2+2i$. Biết rằng biểu thức $T=|u-w|+|v-w|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $|w|$ bằng

- A. $|w|=\sqrt{10}$. B. $|w|=\frac{\sqrt{10}}{2}$. C. $|w|=\frac{\sqrt{10}}{4}$. D. $P=\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức u , từ giả thiết $|u+4-2i|=2$, suy ra M thuộc đường tròn (C_1) có tâm $I(-4;2)$, bán kính $R_1=2$.

Gọi $N(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức v , khi đó: $|3v-1+i|=|2v+1-i|$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^2+(3y+1)^2=(2x+1)^2+(2y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 9x^2-6x+1+9y^2+6y+1=4x^2+4x+1+4y^2-4y+1 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=2.$$

Do vậy điểm N thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I_2(1;-1)$, bán kính $R_2=\sqrt{2}$.

Gọi $P(a;b)$ là điểm biểu diễn cho số phức w , khi đó:

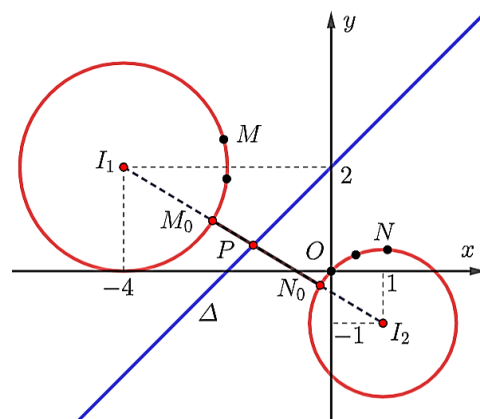
$$|w|=\overline{w}+2+2i$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2=(a+2)^2+(2-b)^2 \Leftrightarrow a-b+2=0.$$

Do đó điểm P thuộc đường thẳng $\Delta: x-y+2=0$.

Từ hình vẽ, ta có hai đường tròn (C_1) , (C_2) nằm về hai phía của đường thẳng Δ .

Khi đó: $T=|u-w|+|v-w|=PM+PN \geq MN \geq M_0N_0$.



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Do đó $T_{\min} = M_0 N_0 = I_1 I_2 - R_1 - R_2 = \sqrt{(1+4)^2 + (-1-2)^2} - 2 - \sqrt{2} = \sqrt{34} - \sqrt{2} - 2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi I_1, M, P, N, I_2 thẳng hàng theo thứ tự đó $\Leftrightarrow M \equiv M_0, N \equiv N_0$.

Suy ra $P = I_1 I_2 \cap \Delta$. Ta có $JI : 3x + 5y + 2 = 0$ và $\Delta : x - y + 2 = 0 \Rightarrow P\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Vì vậy $w = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \Rightarrow |w| = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Câu 18. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z + 2 + 2i| = 1$ và $|w - 1 + 2i| = |w + i|$. Khi $|z - w| + |w + 1 - i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $|z - w|$.

A. $\frac{\sqrt{26}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{26}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{26} - 2}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{26} - 3}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi $M, N(x; y)$ theo thứ tự là các điểm biểu diễn của hai số phức z, w .

Ta có: $|z + 2 + 2i| = 1$ nên điểm M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-2; -2)$, bán kính $R = 1$.

Mặt khác: $|w - 1 + 2i| = |w + i| \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = x^2 + (y + 1)^2 \Leftrightarrow x - y - 2 = 0$.

Do vậy N thuộc đường thẳng $d : x - y - 2 = 0$.

Xét $T = |z - w| + |w + 1 - i| = |z - w| + |w - (-1 + i)| = MN + NA$ với $A(-1; 1)$.

Từ hình vẽ, ta thấy A và (C) nằm **cùng phía** với đường thẳng d . Gọi A_1 đối xứng với A qua d .

Gọi Δ là đường thẳng qua A và vuông góc với d , suy ra $\Delta : x + y = 0$; Δ và d giao nhau tại $H(1; -1)$.

Dễ thấy A_1 đối xứng với A qua H nên $A_1(3; -3)$.

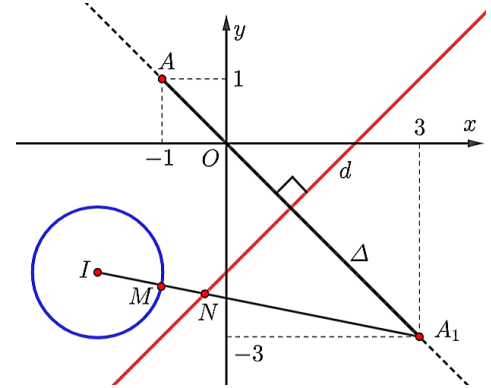
Khi đó: $T = MN + NA = MN + NA_1 \geq MA_1$.

$$T_{\min} = IA_1 - R = \sqrt{5^2 + (-1)^2} - 1 = \sqrt{26} - 1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $N = IA_1 \cap d$. Ta có phương

trình $IA_1 : x + 5y + 12 = 0$ và $d : x - y - 2 = 0$, suy ra $N\left(-\frac{1}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.

$$\text{Vậy } |z - w| = MN = IN - R = \sqrt{\left(-\frac{1}{3} + 2\right)^2 + \left(-\frac{7}{3} + 2\right)^2} - 1 = \frac{\sqrt{26} - 3}{3}.$$



Câu 19. Cho số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1 - 4 - 5i| = |z_2 - 1| = 1$ và $|\bar{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_1| + |z - z_2|$.

A. 6.

B. 8.

C. 9.

D. 7.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Gọi A là điểm biểu diễn của số phức z_1 . Suy ra A thuộc đường tròn (C_1) có tâm $I_1(4;5)$, bán kính $R_1=1$. Gọi B là điểm biểu diễn của số phức z_2 . Suy ra B thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I_2(1;0)$, bán kính $R_2=1$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$.

Theo giả thiết: $|\bar{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$

$$\Leftrightarrow |x + (4 - y)i| = |(x - 8) + (y + 4)i|$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (4 - y)^2 = (x - 8)^2 + (y + 4)^2$$

$$\Leftrightarrow -8y + 16 = -16x + 64 + 8y + 16 \Leftrightarrow \boxed{x - y - 4 = 0}.$$

Suy ra M thuộc đường thẳng $d: x - y - 4 = 0$.

Ta có: $P = |z - z_1| + |z - z_2| = MA + MB$.

Theo hình vẽ, ta thấy (C_1) , (C_2) nằm **cùng phía** so với d .

Vì vậy ta cần lấy đường tròn (C_3) đối xứng với (C_2) qua d .

Gọi Δ là đường thẳng qua I_2 và vuông góc với d , suy ra

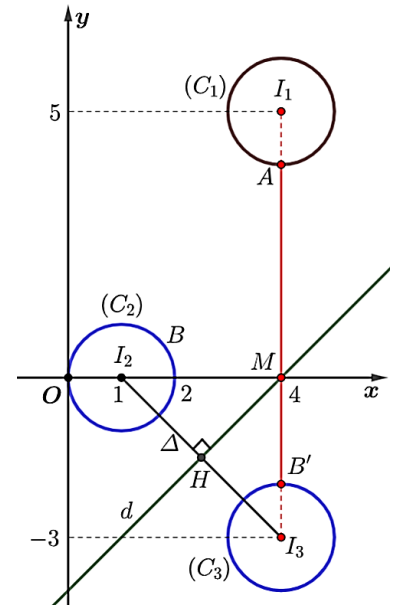
$$\Delta: x + y - 1 = 0.$$

Giao điểm giữa d , Δ là $H\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; I_3 (tâm của (C_3)) đối xứng với I_2 qua H nên $I_3(4; -3)$.

Gọi B' đối xứng với B qua d , vì B thuộc (C_2) nên B' thuộc (C_3) .

Khi đó: $P = MA + MB = MA + MB' \geq AB' \geq I_1I_3 - R_1 - R_3 = 8 - 1 - 1 = 6$.

Vậy $P_{\min} = 6$; dấu đẳng thức xảy ra khi I_1, A, M, B', I_3 thẳng hàng theo thứ tự đó (hay M là giao điểm giữa hai đường thẳng d và I_1I_3).



Câu 20. Cho các số phức z, t, w thỏa mãn $|z + 5i| = 2\sqrt{2}$, $|t - 1 - 8i| = \sqrt{2}$, $|w + 2 + i| = |w + 4 - 3i|$. Biết rằng $P = ||z - w| - |t - w||$ đạt giá trị lớn nhất, tính $Q = |z| + |w|$.

A. $\sqrt{325} + 5$.

B. $\sqrt{325} + 3\sqrt{2}$.

C. $5\sqrt{13} + \sqrt{53}$.

D. $5\sqrt{13} - \sqrt{53}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi A, B, M lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức z, t, w .

Từ giả thiết ta có: A thuộc đường tròn tâm $I(0; -5)$, bán kính $R_1 = 2\sqrt{2}$, B thuộc đường tròn tâm $J(1; 8)$ bán kính $R_2 = \sqrt{2}$, M thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y + 5 = 0$ (là đường trung trực của đoạn thẳng PQ với $P(-2; -1)$, $Q(-4; 3)$).

Ta có $P = ||z - w| - |t - w|| = |MA - MB|$, trong đó A, B nằm **khác phía** đối với Δ (vì hai đường tròn nằm **khác phía** Δ).

Gọi J' đối xứng với J qua Δ ; xét đường thẳng d qua J và vuông góc Δ suy ra $d: 2x + y - 10 = 0$; giao điểm của d và Δ là $H(3; 4)$; hai điểm J' và J đối xứng nhau qua H nên $J'(5; 0)$. Gọi B' đối xứng với B qua Δ thì B' thuộc đường tròn tâm $J'(5; 0)$, bán kính $R'_2 = \sqrt{2}$.

Khi đó: $P = |MA - MB| = |MA - MB'| \leq AB' \leq IJ' + R_1 + R'_2$ hay

$$P_{\max} = IJ' + R_1 + R_2' = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

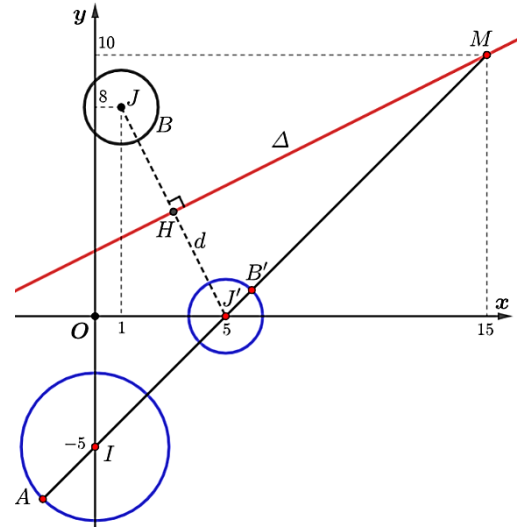
Dấu đẳng thức xảy ra khi A, I, J', B', M thẳng hàng theo thứ tự đó.

Ta cần tính $Q = |z| + |w| = OA + OM$.

$$\text{Vİ } \overrightarrow{IA} = \frac{R}{JT} \overrightarrow{JT} \Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}(-5) \\ y_A + 5 = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}(-5) \end{cases} \quad \text{hay } A(-2; -7).$$

Phương trình $JT : x - y - 10 = 0$; vì M là giao điểm của hai đường thẳng Δ và $JT \Rightarrow M(15; 10)$.

Ta có: $Q = OA + OM = 5\sqrt{13} + \sqrt{53}$.



Câu 21. Gọi M, N, P lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn điều kiện $|5z_1 + 9 - 3i| = |5z_1|, |z_2 - 2| = |z_2 - 3 - i|, |z_3 + 1| + |z_3 - 3| = 4$. Khi M, N, P là ba đỉnh của một tam giác thì giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác MNP bằng

A. $\frac{9\sqrt{10}}{10}$.

B. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

D. $13\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đặt $z_1 = x_1 + y_1 i$ ($x_1, y_1 \in \mathbb{R}$). Ta có: $|5z_1 + 9 - 3i| = |5z_1| \Leftrightarrow |(5x_1 + 9) + (5y_1 - 3)i| = 5|x_1 + y_1 i|$
 $\Leftrightarrow (5x_1 + 9)^2 + (5y_1 - 3)^2 = 25x_1^2 + 25y_1^2 \Leftrightarrow 3x_1 - y_1 + 3 = 0$. Do đó $\boxed{M \in d_1 : 3x - y + 3 = 0}$.

Đặt $z_2 = x_2 + y_2 i$ ($x_2, y_2 \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z_2 - 2| = |z_2 - 3 - i| \Leftrightarrow |(x_2 - 2) + y_2 i| = |(x_2 - 3) + (y_2 - 1)i|$
 $\Leftrightarrow (x_2 - 2)^2 + y_2^2 = (x_2 - 3)^2 + (y_2 - 1)^2 \Leftrightarrow x_2 + y_2 - 3 = 0$. Do đó $\boxed{N \in d_2 : x + y - 3 = 0}$.

Xét số phức z_3 thỏa $|z_3 + 1| + |z_3 - 3| = 4$. Vì

$|z_3 + 1| + |z_3 - 3| = PA + PB = 4 = AB$ (với $A(-1;0)$, $B(3;0)$) nên P thuộc đoạn thẳng AB .

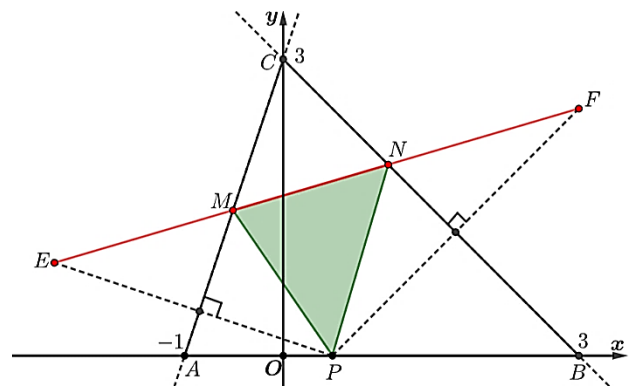
Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của P qua d_1, d_2 . Ta có: $CE = CP = CF$, $MP = ME$, $NP = NF$.

Chu vi tam giác MNP là:

$$MP + MN + NP = \underline{ME} + MN + NF \geq EF.$$

Ta có $CE = CP, CF = CP \Rightarrow CE = CF$ hay tam giác CEF cân tại $C(3;0)$ và $ECF = 2ACB$.

Ta có: $EF^2 = CE^2 + CF^2 - 2.CE.CF.\cos ECF$



$$= 2.CE^2 \cdot (1 - \cos ECF) = 4.CE^2 \cdot \sin^2 \frac{ECF}{2} = 4.CE^2 \cdot \sin^2 ACB; \text{ trong đó}$$

$$\sin^2 ACB = 1 - \cos^2 ACB = 1 - \left(\frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{CA \cdot CB} \right)^2 = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Vì vậy } EF^2 = 4CE^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16CE^2}{5}. \text{ Do vậy } EF \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow CE \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow CP \text{ nhỏ nhất}$$

$$\Leftrightarrow CP \perp AB. \text{ Khi đó } P \equiv O(0;0) \text{ hay } CP = CO = 3; CE = 3 \Rightarrow EF^2 = \frac{16 \cdot 3^2}{5} = \frac{144}{5}.$$

$$\text{Vậy chu vi của tam giác } MNP \text{ nhỏ nhất bằng } EF = \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

Kỹ thuật 3: Sử dụng miền nghiệm để tìm Max-min mô-đun số phức

1. Biểu diễn nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d:

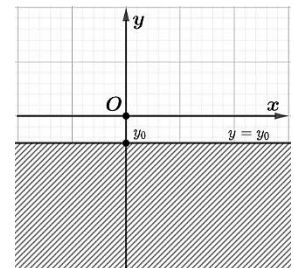
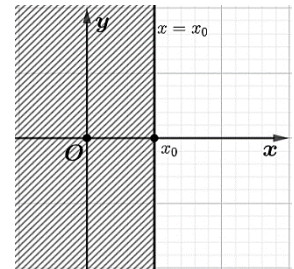
Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z , tọa độ M thỏa: $ax + by + c > 0$ (*). Ta **biểu diễn miền nghiệm** (miền chứa điểm M) theo các bước sau:

- **Bước 1:** Vẽ đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ trên hệ trục tọa độ Oxy.
- **Bước 2:** Chọn điểm A không thuộc d thay vào (*).
 - Nếu tọa độ A **thỏa mãn** (*) thì tập hợp điểm M là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d và **chứa** điểm A (không kể d).
 - Nếu tọa độ A **không thỏa mãn** (*) thì tập hợp điểm M là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d và **không chứa** điểm A (không kể d).

☞ Chú ý: **Biểu diễn miền nghiệm cho các bất phương trình** $ax + by + c \geq 0$, $ax + by + c < 0$, $ax + by + c \leq 0$ thì ta làm tương tự. Nếu bất phương trình có **chứa dấu bằng** thì miền nghiệm của nó **tính luôn cả bờ** là đường thẳng d .

☞ Đặc biệt:

- Miền biểu diễn bất phương trình $x > x_0$ là nửa mặt phẳng bên phải có bờ là đường thẳng $x = x_0$ (kết luận ngược lại dành cho bất phương trình $x < x_0$).
- Miền biểu diễn bất phương trình $y > y_0$ là nửa mặt phẳng phía trên có bờ là đường thẳng $y = y_0$ (kết luận ngược lại dành cho bất phương trình $y < y_0$).



2. Biểu diễn miền nghiệm có biên là đường tròn:

Nếu x, y thỏa mãn phương trình	Kết luận
$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$	M thuộc hình tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính R .

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

$(x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2$	M thuộc phần trong đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính R .
$(x-a)^2 + (y-b)^2 \geq R^2$	M thuộc phần ngoài đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính R , kể cả đường tròn đó.
$(x-a)^2 + (y-b)^2 > R^2$	M thuộc phần ngoài đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính R .

Câu 22. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z-1-3i| \leq |z+2i|$ và $|w+1+3i| \leq |w-2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z-w|$ là

- A. $\frac{\sqrt{13}+1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{26}}{4}$. C. $\frac{3}{13}$. D. $\frac{3\sqrt{26}}{13}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi $z = a+bi$ và $w = c+di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) lần lượt có các điểm biểu diễn là M, N .

Ta có: $|z-1-3i| \leq |z+2i| \Rightarrow (a-1)^2 + (b-3)^2 \leq a^2 + (b+2)^2 \Leftrightarrow a+5b-3 \geq 0$.

Suy ra M thuộc miền nghiệm bất phương trình $x+5y-3 \geq 0$ (1).

Mặt khác $|w+1+3i| \leq |w-2i| \Leftrightarrow (c+1)^2 + (d+3)^2 \leq c^2 + (d-2)^2 \Leftrightarrow c+5d+3 \leq 0$.

Suy ra N thuộc miền nghiệm bất phương trình

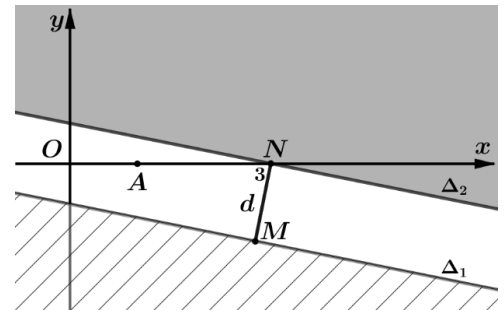
$x+5y+3 \leq 0$ (2).

Miền nghiệm của (1) và (2) được biểu diễn như hình (trong đó Δ_1, Δ_2 lần lượt là hai biên).

Khi đó $P = |z-w| = MN \geq d(\Delta_1, \Delta_2)$.

$$P_{\min} = d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|3-(-3)|}{\sqrt{1^2+5^2}} = \frac{3\sqrt{26}}{13}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi MN vuông góc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 .



Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i| \leq |z-4i|$ và $|z-3-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z-2|$ là:

- A. $\sqrt{13}+1$. B. $\sqrt{10}+1$. C. $\sqrt{13}$. D. $\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Chọn C.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z ta có:

$$|z - 2i| \leq |z - 4i| \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 \leq x^2 + (y - 4)^2$$

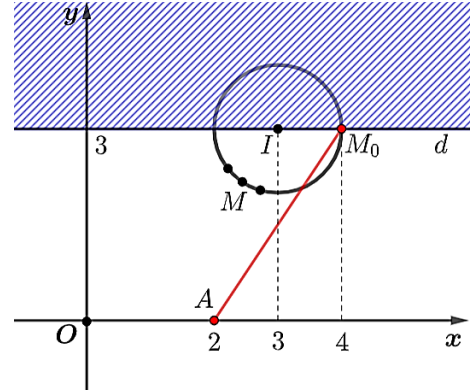
$\Leftrightarrow y \leq 3$. Vì vậy M thuộc nửa mặt phẳng bên dưới đường thẳng $d: y = 3$ (kể cả d).

Mặt khác: $|z - 3 - 3i| = 1$ nên điểm M nằm trên đường tròn tâm $I(3; 3)$, bán kính bằng 1.

Biểu thức $P = |z - 2| = AM$ với $A(2; 0)$. Từ hình vẽ, ta có

$$P = AM \leq AM_0 \text{ với } M_0(4; 3).$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = AM_0 = \sqrt{(4 - 2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$



Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn $3|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| \leq 12$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|z - 4 + 3i|$. Giá trị của $M.m$ bằng:

A. 28.

B. 24.

C. 26.

D. 20.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) có điểm biểu diễn là M . Ta có:

$$3|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| \leq 12 \Leftrightarrow 3|2x| + 2|2yi| \leq 12 \Leftrightarrow 3|x| + 2|y| \leq 6 \quad (1).$$

Miền nghiệm của (1) là **miền của hình thoi** mà mỗi đỉnh của nó là mỗi nghiệm của hệ gồm hai phương trình từ

$$3x + 2y = 6, 3x - 2y = 6, -3x + 2y = 6, -3x - 2y = 6.$$

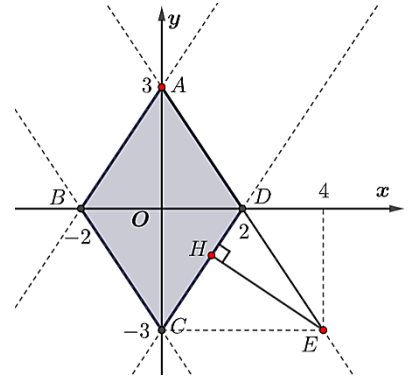
Các đỉnh hình thoi là $A(0; 3), B(-2; 0), C(0; -3), D(2; 0)$.

Xét $T = |z - 4 + 3i| = ME$ với $E(4; -3)$.

$$m = T_{\min} = d(E, CD) = \frac{|3 \cdot 4 - 2(-3) - 6|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{12\sqrt{13}}{13} \text{ với } CD:$$

$$3x - 2y - 6 = 0.$$

$$M = T_{\max} = EA = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13}. \text{ Vì vậy } M.m = \frac{12\sqrt{13}}{13} \cdot 2\sqrt{13} = 24.$$



Kỹ thuật 4: Ép điểm theo quỹ đạo đường tròn

1. Nhận xét:

Kỹ thuật này vô cùng quan trọng để ta có thể biến biểu thức mô-đun số phức (có dạng phức tạp) thành khoảng cách giữa các điểm mà quỹ tích của nó là các đường tròn.

Kỹ thuật này có thể được minh họa đơn giản như sau:

Xét $|z| = r_1 > 0, |w| = r_2 > 0$, ta cần đánh giá biểu thức $T = |z + kw + a + bi|$ với $k, a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có: $T = |(z + a + bi) - (-kw)|$.

- Xét $|z| = r_1 \Leftrightarrow |(z + a + bi) - (a + bi)| = r_1$; gọi M là điểm biểu diễn của $z + a + bi$ thì M thuộc đường tròn tâm $(a; b)$, bán kính bằng r_1 .

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

- Xét $|w| = r_2 \Leftrightarrow |-kw| = |k|r_2$; gọi N là điểm biểu diễn của $-kw$ thì N thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính bằng $|k|r_2$.

Khi đó: $T = \left| \underbrace{(z + a + bi)}_M - \underbrace{(-kw)}_N \right| = MN$ với hai điểm M, N thuộc hai đường tròn cố định nên việc xét Max-Min của bài toán không còn là điều khó khăn với các em học sinh.

2. Dấu hiệu để sử dụng kỹ thuật 4:

- Bài toán thường cho một cách tổng quát là:
 $|z| = r_1, |w| = r_2$, đánh giá Max-min của biểu thức $|z_0z + w_0w + a + bi|$, trong đó $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$.
- Nếu giả thiết cho $|z| = r_1, |w| = r_2$ và $|mz + nw| = r_3$ (hoặc một hệ thức nào đó của z với w) thì ta **không sử dụng kỹ thuật này**, học sinh **tham khảo kỹ thuật 5**.

Câu 25. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = |w| = 1$. Khi $|z - 2w - 3 - 4i|$ đạt giá trị lớn nhất thì $|z - w|$ bằng
A. $5\sqrt{5}$. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z - 3 - 4i$ và $2w$.

Ta có $|z| = 1 \Leftrightarrow |(z - 3 - 4i) - (-3 - 4i)| = 1 \Leftrightarrow MI = 1$, với $I(-3; -4)$.

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn (C_1) tâm $I(-3; -4)$ và bán kính $R_1 = 1$.

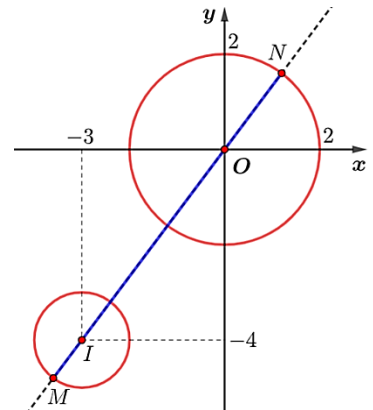
Ta có $|w| = 1 \Leftrightarrow |2w| = 2$ nên tập hợp điểm N là đường tròn (T_2) tâm O và bán kính $R_2 = 2$.

$$\text{Ta có } P = |z - 2w - 3 - 4i| = \left| \underbrace{(z - 3 - 4i)}_M - \underbrace{2w}_N \right| = MN.$$

$$\Rightarrow \max P = OI + R_1 + R_2 = 5 + 1 + 2 = 8.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } 6\overrightarrow{OI} = 5\overrightarrow{OM} \Rightarrow M\left(\frac{-18}{5}; \frac{-24}{5}\right); -2\overrightarrow{OI} = 5\overrightarrow{ON} \Rightarrow N\left(\frac{6}{5}; \frac{8}{5}\right).$$

$$\text{Khi đó ta có } z = \frac{-3}{5} - \frac{4i}{5}, w = \frac{3}{5} + \frac{4i}{5} \text{ nên } |z - w| = 2.$$



Câu 26. Cho các số phức z và w thỏa mãn $|z - 4| = 1$ và $|iw - 2| = 1$. Khi $|z + 2w|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|iz + w|$ bằng

- A.** $2\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{2} - 3$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $4\sqrt{2} + 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z và N là điểm biểu diễn số phức $-2w$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Ta có: $|z - 4| = 1$ nên M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(4;0)$, bán kính $R=1$. Mặt khác: $|iw - 2| = 1 \Leftrightarrow |i| \cdot |w + 2i| = 1$
 $\Leftrightarrow |-w - 2i| = 1 \Leftrightarrow |(-2w) - 4i| = 2$; vì vậy N thuộc đường tròn (C') có tâm $I'(0;4)$, bán kính $R'=2$.

Ta có: $T = |z + 2w| = |z - (-2w)| = MN \geq II' - R - R'$.

$$T_{\min} = II' - R - R' = 4\sqrt{2} - 3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi I, M, N, I' thẳng hàng theo thứ tự đó.

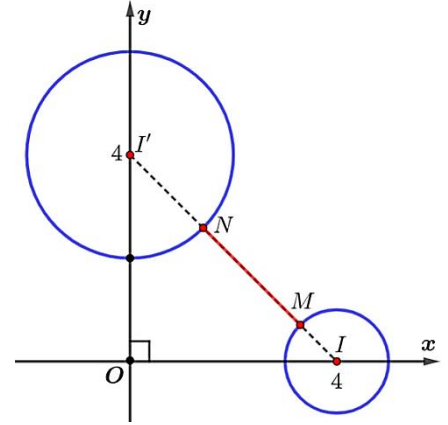
$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IM} = \frac{IM}{II'} \overrightarrow{II'} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \overrightarrow{II'}$$

$$\begin{cases} x_M - 4 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot (-4) \\ y_M = \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 4; \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \text{ suy ra } z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

$$\text{Tương tự: } \overrightarrow{I'N} = \frac{I'N}{II'} \overrightarrow{II'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \frac{2}{4\sqrt{2}} \cdot 4 \\ y_N - 4 = \frac{2}{4\sqrt{2}} \cdot (-4) \end{cases} \Rightarrow N(\sqrt{2}; 4 - \sqrt{2}).$$

$$\text{Suy ra } -2w = \sqrt{2} + (4 - \sqrt{2})i \Rightarrow w = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4 - \sqrt{2}}{2}i.$$

$$\text{Vậy } |iz + w| = \left| i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4 - \sqrt{2}}{2}i \right| = \sqrt{6}.$$



Câu 27. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z - i| = 2$ và $|w + 5 + i| = 1$. Khi $|z + iw - 6 - 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng?

A. $7\sqrt{2}$.

B. $6\sqrt{2}$.

C. 8.

D. 10.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z - 6 - 8i$ và $-iw$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Ta có:

$$|z - i| = 2 \Leftrightarrow |(z - 6 - 8i) + (6 + 7i)| = 2 \Leftrightarrow |(z - 6 - 8i) - (-6 - 7i)| = 2,$$

với $I_1(-6; -7)$.

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-6; -7)$, bán kính $R_1 = 2$.

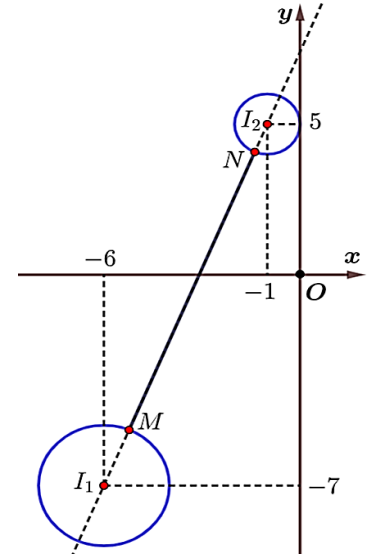
Ta có: $|w + 5 + i| = 1 \Leftrightarrow |-i| \cdot |w + 5 + i| = |-i| \cdot 1 \Leftrightarrow |(-iw) - (-1 + 5i)| = 1.$

Suy ra tập hợp điểm N là đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1; 5)$, bán kính $R_2 = 1$.

Ta có $T = |z + iw - 6 - 8i| = |(z - 6 - 8i) - (-iw)| = MN.$

$$T = MN \geq I_1I_2 - R_1 - R_2 \text{ hay } T_{\min} = \sqrt{(-6+1)^2 + (-7-5)^2} - 1 - 2 = 10.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi I_1, M, N, I_2 thẳng hàng theo thứ tự đó.



Câu 28. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1| = 2$ và $|z_2 + i| = 1$. Biết rằng $|iz_1 - z_2 + 4 + 2i|$ đạt giá trị lớn nhất, tính $|z_1 + 2z_2 - 3i|$.

A. $\sqrt{533}.$

B. $\frac{\sqrt{533}}{3}.$

C. $\frac{\sqrt{533}}{5}.$

D. $\frac{\sqrt{533}}{2}.$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $|iz_1 - z_2 + 4 + 2i| = |iz_1 - (z_2 - 4 - 2i)|.$

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức iz_1 và $z_2 - 4 - 2i$.

Ta có: $|z_1| = 2 \Leftrightarrow |iz_1| = 2$ nên A thuộc đường tròn tâm O , bán kính $R_1 = 2$. Mặt khác: $|z_2 + i| = 1 \Leftrightarrow |(z_2 - 4 - 2i) + 4 + 3i| = 1$ nên B thuộc đường tròn tâm $I(-4; -3)$, bán kính $R_2 = 1$.

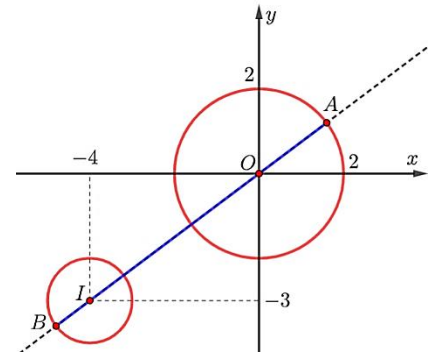
Khi đó: $T = |iz_1 - (z_2 - 4 - 2i)| = AB \leq OI + R_1 + R_2.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi A, O, I, B thẳng hàng theo thứ tự đó.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{OA} = \frac{OA}{OI} \overrightarrow{IO} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = \frac{2}{5} \cdot 4 \\ y_A = \frac{2}{5} \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{8}{5}; \frac{6}{5}\right)$$

$$\Rightarrow iz_1 = \frac{8}{5} + \frac{6}{5}i \Rightarrow z_1 = \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i.$$

$$\overrightarrow{IB} = \frac{IB}{OI} \overrightarrow{OI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B + 4 = \frac{1}{5}(-4) \\ y_B + 3 = \frac{1}{5}(-3) \end{cases} \Rightarrow B\left(-\frac{24}{5}; -\frac{18}{5}\right) \Rightarrow z_2 - 4 - 2i = -\frac{24}{5} - \frac{18}{5}i \Rightarrow z_2 = -\frac{4}{5} - \frac{8}{5}i.$$



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Vậy $|z_1 + 2z_2 - 3i| = \left| \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i + 2 \cdot \left(-\frac{4}{5} - \frac{8}{5}i \right) - 3i \right| = \frac{\sqrt{533}}{5}$.

Kỹ thuật 5: Tạo cụm liên hợp chéo $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1$.

1. Dấu hiệu:

Ta sử dụng **kỹ thuật 5** nếu bài toán được cho tổng quát như sau:

Cho $|z| = r_1$, $|w| = r_2$ và $|mz + nw| = r_3$, đánh giá Max-Min của biểu thức $|z_0z + w_0w + a + bi|$, trong đó $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$.

2. Nhận xét:

Kỹ thuật 5 được xây dựng dựa trên tính chất quen thuộc mà ta dễ dàng chứng minh được:

- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.
- $|m \cdot z + n \cdot w|^2 = (m \cdot z + n \cdot w)(\overline{m \cdot z + n \cdot w}) = (m \cdot z + n \cdot w)(m \cdot \bar{z} + n \cdot \bar{w}) = m^2|z|^2 + n^2|w|^2 + mn(z\bar{w} + w\bar{z})$.

Câu 29. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z| = |w| = 10$ và $|3z - 4w| = 50$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $|4z + 3w - 8 + 6i|$.

A. 30.

B. 40.

C. 60.

D. 50.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $|3z - 4w|^2 = 50^2 \Leftrightarrow (3z - 4w)(\overline{3z - 4w}) = 50^2 = (3z - 4w)(3\bar{z} - 4\bar{w}) = 50^2$
 $\Leftrightarrow 9|z|^2 + 16|w|^2 - 12(z\bar{w} + w\bar{z}) = 50^2 \Leftrightarrow 9 \cdot 10^2 + 16 \cdot 10^2 - 12(z\bar{w} + w\bar{z}) = 50^2 \Leftrightarrow \boxed{z\bar{w} + w\bar{z} = 0}$.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức $4z + 3w$, ta có: $|4z + 3w|^2 = (4z + 3w)(\overline{4z + 3w})$
 $= (4z + 3w)(4\bar{z} + 3\bar{w})$
 $= 16|z|^2 + 9|w|^2 + 12(z\bar{w} + w\bar{z}) = 16 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^2 + 12 \cdot 0 = 2500$.

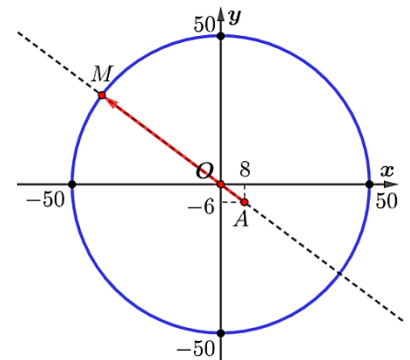
Suy ra $\boxed{|4z + 3w| = 50}$, vì vậy điểm M thuộc đường tròn tâm

$O(0;0)$, bán kính $R = 50$.

Xét $T = |4z + 3w - 8 + 6i| = |4z + 3w - (8 - 6i)| = MA$ với $A(8; -6)$.

Ta có: $T = MA \leq R + OA = 50 + \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 60$ hay $T_{\max} = 60$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi A, O, M thẳng hàng theo thứ tự đó.



Câu 30. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = 1$, $|z_2| = \sqrt{7}$, $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ và giá trị lớn nhất của $|3z_1 + 2z_2 + z_3|$ bằng 78. Giá trị $|z_3|$ bằng

A. $78 - \sqrt{53}$.

B. 25.

C. $78 - \sqrt{73}$.

D. 5.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $|z_1 - z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 2 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) = 2$

$\Leftrightarrow 1 + 7 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) = 2 \Leftrightarrow \boxed{z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 6}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Gọi M là điểm biểu diễn số phức $3z_1 + 2z_2$, ta có: $|3z_1 + 2z_2|^2 = (3z_1 + 2z_2)(3\bar{z}_1 + 2\bar{z}_2)$
 $= 9|z_1|^2 + 4|z_2|^2 + 6(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) = 9.1 + 4.7 + 6.6 = 73 \Rightarrow |3z_1 + 2z_2| = \sqrt{73}$.

Suy ra điểm M thuộc đường tròn tâm O , bán kính $R = \sqrt{73}$.

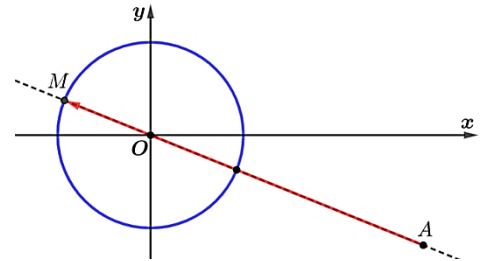
Gọi A là điểm biểu diễn của số phức $(-z_3)$.

Xét $T = |3z_1 + 2z_2 - (-z_3)| = MA$ đạt giá trị lớn nhất khi A ,

O, M thẳng hàng theo thứ tự đó.

Vì vậy $T = MA \leq OA + R$ hay $T_{\max} = OA + R = OA + \sqrt{73}$.

Theo giả thiết $T_{\max} = 78 = OA + \sqrt{73} \Rightarrow OA = 78 - \sqrt{73}$.



Câu 31. Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1| = 2, |z_2| = \sqrt{3}, |z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |3z_1 - z_2 - 10 + 5i| + 2$ bằng

A. $10\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$.

B. $3\sqrt{5} - 1$.

C. $2 + 2\sqrt{5}$.

D. $8 - 2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $|z_1 + z_2|^2 = 5 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = 5 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 5$

$\Leftrightarrow 4 + 3 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 5 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = -2$.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức $3z_1 - z_2$, khi đó: $|3z_1 - z_2|^2 = (3z_1 - z_2)(3\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$

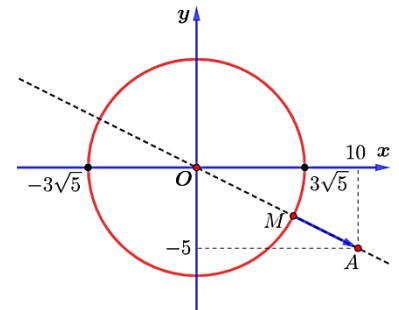
$= 9|z_1|^2 + |z_2|^2 - 3(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_1) = 9.4 + 3 - 3(-2) = 45 \Rightarrow |3z_1 - z_2| = 3\sqrt{5}$.

Suy ra điểm M thuộc đường tròn tâm O , bán kính $R = 3\sqrt{5}$.

Ta có: $P = |3z_1 - z_2 - (10 - 5i)| + 2 = MA + 2$ với $A(10; -5)$.

Khi đó: $P_{\min} = (OA - R) + 2 = (\sqrt{10^2 + (-5)^2} - 3\sqrt{5}) + 2 = 2\sqrt{5} + 2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi O, M, A thẳng hàng theo thứ tự đó.



Câu 32. Cho $z_1; z_2$ là các số phức thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = 3$ và $z_1.\bar{z}_2$ là số thuần ảo. Giá trị lớn nhất của $P = |4z_1 - 3z_2 + 1 - 2i|$ bằng

A. $15 + \sqrt{5}$.

B. $5 + \sqrt{5}$.

C. $\sqrt{65} + \sqrt{5}$.

D. $\sqrt{145} + \sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Vì $z_1.\bar{z}_2$ là số thuần ảo nên $z_1.\bar{z}_2 + (\overline{z_1.\bar{z}_2}) = 0 \Rightarrow z_1.\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 0$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Gọi M là điểm biểu diễn số phức $4z_1 - 3z_2$, ta có: $|4z_1 - 3z_2|^2 = (4z_1 - 3z_2) \cdot (4\bar{z}_1 - 3\bar{z}_2)$

$$= 16|z_1|^2 + 9|z_2|^2 - 12(z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = 16 \cdot 4 + 9 \cdot 9 - 12 \cdot 0 = 145$$

$\Rightarrow |4z_1 - 3z_2| = \sqrt{145}$. Suy ra M thuộc đường tròn tâm O ,

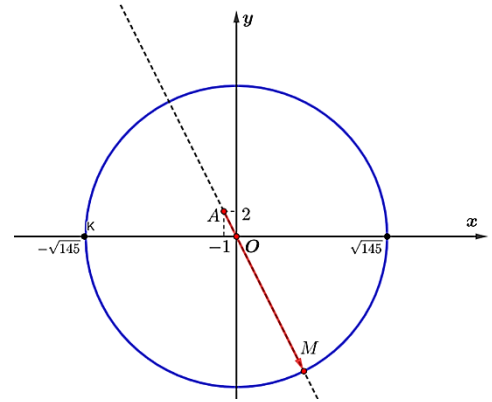
bán kính $R = \sqrt{145}$.

Khi đó: $P = |4z_1 - 3z_2 + 1 - 2i|$

$$= |(4z_1 - 3z_2) - (-1 + 2i)| = MA \text{ với } A(-1; 2).$$

Ta có: $P = MA \leq OA + R$ hay $P_{\max} = OA + R = \sqrt{5} + \sqrt{145}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi A, O, M thẳng hàng theo thứ tự đó.



Kỹ thuật 6: Sử dụng tâm tử cự

1. Tâm tử cự:

Trong hình học vector, **tâm tử cự** chính là một điểm quan trọng mà thông qua điểm đó ta có thể **đễ dàng thu gọn được biểu thức vector hoặc biểu thức độ dài vector**. Từ đó có thể đánh giá được biểu thức đó.

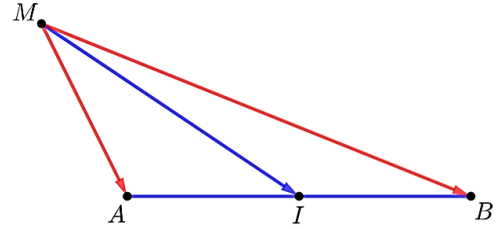
Xét hệ n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và n số thực $k_1, k_2, \dots, k_n$. Khi đó nếu tồn tại duy nhất điểm G thỏa mãn $k_1 \overrightarrow{GA_1} + k_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + k_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$ thì G được gọi là tâm tử cự của hệ điểm đã cho.

2. Công thức tâm tử cự là trung điểm:

Xét I là trung điểm của đoạn AB và M là điểm bất kì, ta có: $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$

$$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})}_{=\vec{0}} = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

Tóm lại: $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.



3. Công thức tổng quát về tâm tỉ cự:

a) Xét $P = |\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}|$.

$$\begin{aligned} &\text{Với điểm } I \text{ bất kì thì } \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \\ &= \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} + (\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n}). \end{aligned}$$

Ta cần chọn điểm I thỏa mãn $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ thì

$P = |(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI}| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n| \cdot MI$. Lúc này việc thực hiện điều kiện Max-min của bài toán không còn là vấn đề khó.

b) Xét $T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2$.

Với điểm I bất kì thì

$$\begin{aligned} T &= \alpha_1 \overrightarrow{MA_1}^2 + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2}^2 + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}^2 = \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1})^2 + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2})^2 + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n})^2 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) MI^2 + (\alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2) + 2\overrightarrow{MI} (\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n}). \end{aligned}$$

Ta cần chọn I thỏa mãn $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ thì

$$T = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) MI^2 + (\alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2) \text{ trong đó}$$

$\alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2$ cố định nên T lớn hay nhỏ hoàn toàn phụ thuộc vào độ dài MI .

Câu 33. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = |z + 2 - i|^2 + |z - 2 - 3i|^2.$$

A. 18.

B. $38 + 8\sqrt{10}$.

C. $18 + 2\sqrt{10}$.

B. $16 + 2\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z thì M thuộc

đường tròn tâm $I(1; -1)$, bán kính $R = 2$.

$$\text{Xét } P = |z + 2 - i|^2 + |z - 2 - 3i|^2 = MA^2 + MB^2 \text{ với}$$

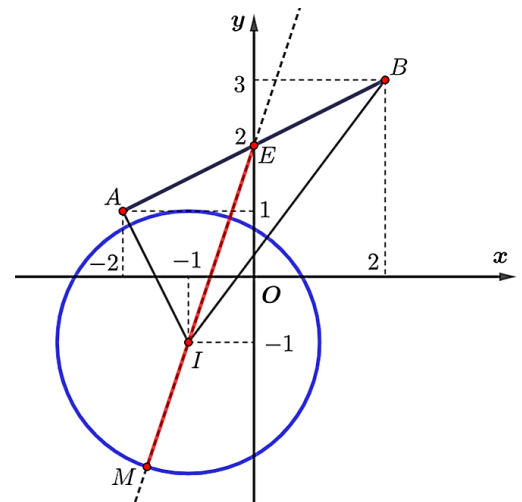
$$A(-2; 1), B(2; 3).$$

$$P = |z + 2 - i|^2 + |z - 2 - 3i|^2 = MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2}$$

với $E(0; 2)$ là trung điểm AB .

$P = 2ME^2 + 10$ ($AB = 2\sqrt{5}$); P lớn nhất khi ME lớn nhất, suy ra E, I, M thẳng hàng theo thứ tự đó.

$$\text{Ta có: } P_{\max} = 2(IE + R)^2 + 10 = 2(2 + \sqrt{10})^2 + 10 = 38 + 8\sqrt{10}$$



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Câu 34. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w = \frac{1}{|z| - z}$ có phần thực bằng $\frac{1}{8}$. Xét các

số phức $z \in S$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 2|^2 + |z + 2i|^2$ bằng

- A. 16. B. $40 - 16\sqrt{2}$. C. $40 + 16\sqrt{2}$. D. 32.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Vì w có phần thực bằng $\frac{1}{8}$ nên $w + \bar{w} = 2 \cdot \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{|z| - z} + \frac{1}{|z| - \bar{z}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{|z| - \bar{z} + |z| - z}{2|z|^2 - |z|(z + \bar{z})} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{2|z| - \bar{z} - z}{|z|(2|z| - \bar{z} - z)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{|z|} = \frac{1}{4} \Rightarrow |z| = 4.$$

Gọi M là điểm biểu diễn của z thì M thuộc đường tròn tâm O , bán kính $R = 4$.

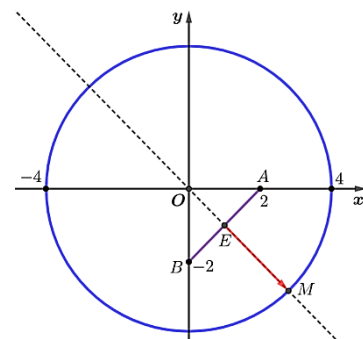
Ta có: $P = |z - 2|^2 + |z + 2i|^2 = MA^2 + MB^2$ với $A(2; 0)$, $B(0; -2)$;

$$P = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2} \text{ với } E(1; -1) \text{ là trung điểm đoạn } AB, AB = 2\sqrt{2};$$

$$P = 2ME^2 + 4 \text{ mà } ME \geq R - OE = 4 - \sqrt{2} \text{ nên}$$

$$P \geq 2(4 - \sqrt{2})^2 + 4 = 40 - 16\sqrt{2} \text{ hay } P_{\min} = 40 - 16\sqrt{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi O, E, M thẳng hàng theo thứ tự đó.



Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{(2-i)z - 3i - 1}{z - i} \right| = 2$. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức $w = \frac{1}{iz + 1}$. Xét

các số phức $w_1, w_2 \in S$ thỏa mãn $|w_1 - w_2| = 2$, giá trị lớn nhất của $P = |w_1 - 4i|^2 - |w_2 - 4i|^2$ bằng

- A. $4\sqrt{29}$. B. $4\sqrt{13}$. C. $2\sqrt{13}$. D. $2\sqrt{29}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$\text{Ta có: } \left| \frac{(2-i)z - 3i - 1}{z - i} \right| = 2 \Leftrightarrow \left| 2 - i - \frac{i}{z - i} \right| = 2 \Leftrightarrow \left| 2 - i + \frac{1}{iz + 1} \right| = 2 \Leftrightarrow |w + 2 - i| = 2.$$

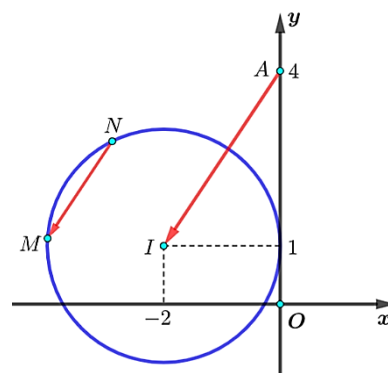
Gọi M, N là các điểm biểu diễn của w_1, w_2 thì M, N thuộc đường tròn tâm $I(-2; 1)$, bán kính $R = 2$. Mặt khác $|w_1 - w_2| = 2 \Rightarrow MN = 2$.

Ta có: $P = |w_1 - 4i|^2 - |w_2 - 4i|^2 = MA^2 - NA^2$ với $A(0; 4)$.

$$\begin{aligned} P &= \overrightarrow{AM}^2 - \overrightarrow{AN}^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM})^2 - (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IN})^2 \\ &= \underbrace{\overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IN}^2}_{=0} + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IM} - 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{AI}(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IN}) \\ &= 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{NM} = 2AI \cdot MN \cdot \cos(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{NM}) = 4\sqrt{13} \cdot \cos(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{NM}) \end{aligned}$$

$P \leq 4\sqrt{13}$; dấu đẳng thức xảy ra khi $\overrightarrow{AI}$ cùng hướng $\overrightarrow{NM}$.

Vậy $P_{\max} = 4\sqrt{13}$.



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Câu 36. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w = \frac{z+2}{z-2i}$ là số thuần ảo. Xét các số phức

$z_1, z_2 \in S$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$, giá trị lớn nhất của $P = |z_1 + 6|^2 - |z_2 + 6|^2$ bằng

- A. $2\sqrt{78}$. B. $4\sqrt{15}$. C. $\sqrt{78}$. D. $2\sqrt{15}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có: $w = \frac{x + yi + 2}{x + yi - 2i} = \frac{[(x+2) + yi][x - (y-2)i]}{x^2 + (y-2)^2}$, w thuần ảo nên

$$x(x+2) + y(y-2) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

Gọi M, N là các điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2 thì M, N thuộc đường tròn tâm $I(-1;1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$. Mặt khác $|z_1 - z_2| = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{MN = \sqrt{3}}$.

Ta có: $P = |z_1 + 6|^2 - |z_2 + 6|^2 = MA^2 - NA^2$ với $A(-6;0)$;

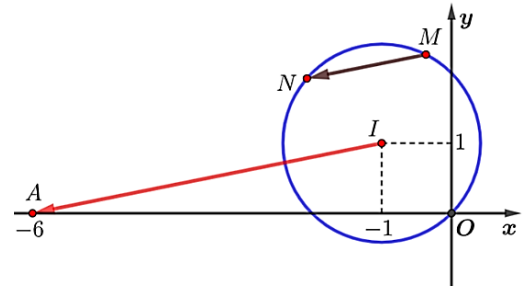
$$P = \overline{MA}^2 - \overline{NA}^2 = (\overline{MI} + \overline{IA})^2 - (\overline{NI} + \overline{IA})^2$$

$$= 2\overline{MI} \cdot \overline{IA} - 2\overline{NI} \cdot \overline{IA} = 2\overline{IA} \cdot (\overline{MI} - \overline{NI}) = 2\overline{IA} \cdot \overline{MN}$$

$$= 2IA \cdot MN \cdot \cos(\overline{IA}, \overline{MN}) \leq 2IA \cdot MN \text{ (vì}$$

$$\cos(\overline{IA}, \overline{MN}) \leq 1).$$

$$P_{\max} = 2IA \cdot MN = 2 \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{78}. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi } \overline{IA} \text{ cùng hướng } \overline{MN}.$$



Câu 37. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{|z+4| + |z-4|}{1-2i} = \frac{1+2i}{5}$. Biết rằng $T = |z-1+5i|^2 - 2|z-2-i|^2 - |z-1+7i|^2$

đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0$, hãy tính $|z_0 + 3 - 4i|$.

- A. $2\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{5}$. C. $2\sqrt{6}$. D. $3\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$$\text{Ta có: } \frac{|z+4| + |z-4|}{1-2i} = \frac{1+2i}{5} \Leftrightarrow |z+4| + |z-4| = 2(1+2i)(1-2i) \Leftrightarrow \boxed{|z+4| + |z-4| = 10 \text{ (*)}}.$$

Gọi M là điểm biểu diễn của z và hai điểm $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$. Ta có $F_1F_2 = 8$.

Khi đó: (*) $\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10 > F_1F_2$ nên M thuộc elip có hai tiêu điểm là F_1, F_2 .

$$\text{Đặt } 2a = 10 \Rightarrow a = 5; F_1F_2 = 8 = 2c \Rightarrow c = 4; b^2 = a^2 - c^2 = 9.$$

Vậy M thuộc elip có phương trình: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (như hình vẽ).

$$T = |z-1+5i|^2 - 2|z-2-i|^2 - |z-1+7i|^2 = MA^2 - 2MB^2 - MC^2 \text{ với } A(1;-5), B(2;1), C(1;-7).$$

$$\begin{aligned} T &= \overline{MA}^2 - 2\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = (\overline{MI} + \overline{IA})^2 - 2(\overline{MI} + \overline{IB})^2 - (\overline{MI} + \overline{IC})^2 \\ &= -2MI^2 + (IA^2 - 2IB^2 - IC^2) + 2\overline{MI}(\overline{IA} - 2\overline{IB} - \overline{IC}). \end{aligned}$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Chọn điểm I thỏa mãn $\vec{IA} - 2\vec{IB} - \vec{IC} = \vec{0}$

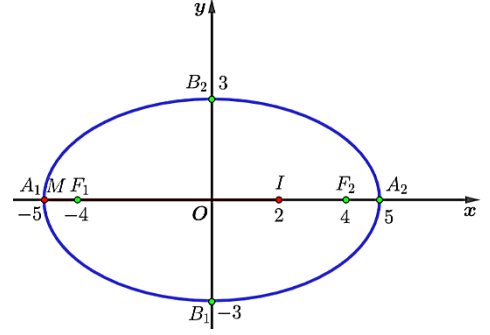
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-x_I) - 2(2-x_I) - (1-x_I) = 0 \\ (-5-y_I) - 2(1-y_I) - (-7-y_I) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 2 \\ y_I = 0 \end{cases} \text{ hay } I(2;0).$$

Khi đó: $T = -2MI^2 + (IA^2 - 2IB^2 - IC^2)$. Vì A, B, C, I cố

định nên $IA^2 - 2IB^2 - IC^2$ không đổi.

Do đó T đạt giá trị nhỏ nhất khi $-2MI^2$ nhỏ nhất, suy ra MI lớn nhất. Khi đó M trùng với đỉnh A_1 của elip.

Vậy $M(-5;0)$ hay $z_0 = -5$; suy ra $|z_0 + 3 - 4i| = |-5 + 3 - 4i| = 2\sqrt{5}$.



Câu 38. Xét hai số phức z_1, z_2 thay đổi thỏa mãn $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2 - 1 - 2i| = 4$. Gọi P_1, P_2 lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1|^2 + |z_2|^2$. Giá trị của biểu thức $P_1 + P_2$ là
A. $8\sqrt{5}$. **B.** -37 . **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** 37 .

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi $A, B, C(1;2)$ lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức: $z_1, z_2, 1+2i$.

Ta có: $|z_1 - z_2| = 4 \Leftrightarrow AB = 4$.

Mặt khác:

$$|z_1 + z_2 - 1 - 2i| = 4 \Leftrightarrow |\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC}| = 4 \Leftrightarrow |2\vec{OM} - 2\vec{OI}| = 4$$

(với M là trung điểm của AB , $I(\frac{1}{2};1)$ là trung điểm của OC).

Ta có: $|\vec{OM} - \vec{OI}| = 2 \Leftrightarrow |\vec{IM}| = 2 \Leftrightarrow IM = 2$. Vì vậy M thuộc đường tròn tâm I , bán kính $R = 2$.

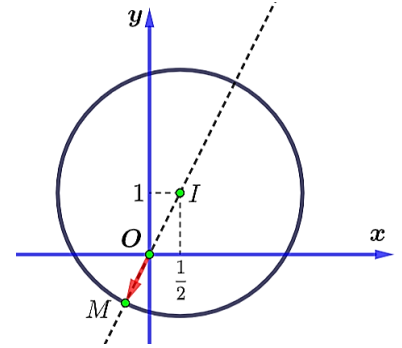
$$\text{Xét } P = |z_1|^2 + |z_2|^2 = OA^2 + OB^2 = 2OM^2 + \frac{AB^2}{2} = 2OM^2 + 8.$$

P đạt giá trị lớn nhất khi OM lớn nhất, ta có: $OM \leq OI + R = \frac{4+\sqrt{5}}{2}$; suy ra

$$P_{\max} = 2\left(\frac{4+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 8 = \frac{37+8\sqrt{5}}{2} = P_1.$$

P đạt giá trị nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất, ta có: $OM \geq R - OI = \frac{4-\sqrt{5}}{2}$; suy ra

$$P_{\min} = 2\left(\frac{4-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 8 = \frac{37-8\sqrt{5}}{2} = P_2. \text{ Suy ra } P_1 + P_2 = 37.$$



Câu 39. Cho z_1, z_2 là nghiệm phương trình $|6-3i+iz| = |2z-6-9i|$ và thỏa mãn $|z_1 - z_2| = \frac{8}{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z_1 + z_2|$ bằng

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

A. $\frac{56}{5}$.

B. $\frac{28}{5}$.

C. 6.

D. 5.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

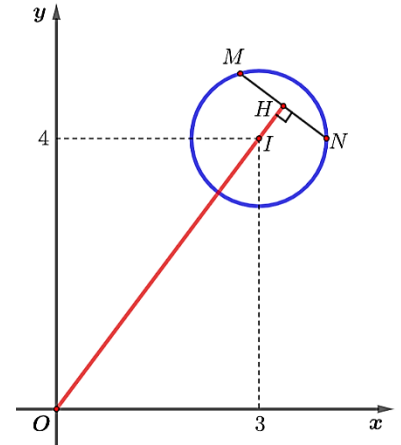
Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i| \Leftrightarrow |6 - 3i + i(x + yi)| = |2(x + yi) - 6 - 9i|$
 $\Leftrightarrow |(6 - y) + (x - 3)i| = |(2x - 6) + (2y - 9)i| \Leftrightarrow (6 - y)^2 + (x - 3)^2 = (2x - 6)^2 + (2y - 9)^2$
 $\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 18x - 24y + 72 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0}$.

Gọi M, N theo thứ tự là điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2 thì M, N cùng thuộc đường tròn tâm $I(3; 4)$, bán kính $R = 1$; đồng

thời $MN = |z_1 - z_2| = \frac{8}{5}$.

Khi đó: $|z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}| = |2\overrightarrow{OH}| = 2OH$ với H là trung điểm MN .

$|z_1 + z_2|$ đạt giá trị lớn nhất khi OH lớn nhất; suy ra O, I, H thẳng hàng theo thứ tự đó (MN vuông góc OI).



Ta có: $|z_1 + z_2| = 2OH_{\max} = 2\left(OI + \sqrt{R^2 - MH^2}\right) = 2\left(5 + \sqrt{1 - \left(\frac{8}{10}\right)^2}\right) = \frac{56}{5}$.

Câu 40. Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $(z - 6)(8 - i\bar{z})$ là số thực. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 6$.

Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 3z_2|$ bằng

A. $-5 + \sqrt{73}$.

B. $5 + \sqrt{21}$.

C. $20 - 2\sqrt{73}$.

D. $20 - 4\sqrt{21}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 . Suy ra $\boxed{AB = |z_1 - z_2| = 6}$.

Ta có: $(z - 6)(8 - i\bar{z}) = (x + yi - 6)[8 - i(x - yi)]$
 $= [(x - 6) + yi][(8 - y) - xi]$.

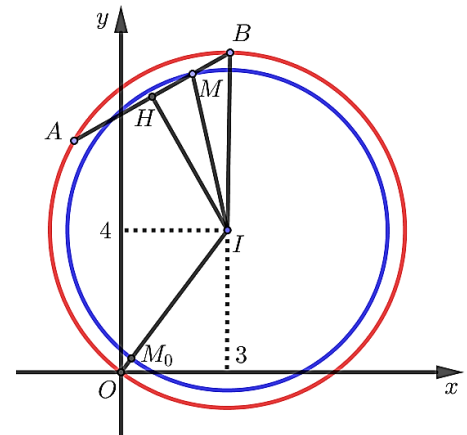
Do $(z - 6)(8 - i\bar{z})$ là số thực nên ta được:

$-(x - 6)x + y(8 - y) = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0}$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường tròn (C) có tâm $I(3; 4)$, bán kính $R = 5$.

Xét $T = |z_1 + 3z_2| = |\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}| = |(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + 3(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB})| = |4\overrightarrow{OM} + (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})|$, M bất kì.

Chọn M thỏa $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ thì $T = \left|4\overrightarrow{OM} + \underbrace{(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})}_{\vec{0}}\right| = 4OM$.



Gọi H là trung điểm AB . Ta có $HA = HB = \frac{AB}{2} = 3$ và $MA = \frac{3}{4}AB = \frac{9}{2} \Rightarrow HM = MA - HA = \frac{3}{2}$.

Từ đó $HI^2 = R^2 - HB^2 = 16$, $IM = \sqrt{HI^2 + HM^2} = \frac{\sqrt{73}}{2}$, suy ra điểm M thuộc đường tròn (C')

tâm $I(3; 4)$, bán kính $R' = \frac{\sqrt{73}}{2}$.

Ta có $T = 4OM$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất, suy ra O, M, I thẳng hàng theo thứ tự đó (hay M trung với M_0 như hình vẽ).

Ta có $OM_{\min} = OM_0 = OI - R' = 5 - \frac{\sqrt{73}}{2}$. Vậy $T_{\min} = |z_1 + 3z_2|_{\min} = 4OM_0 = 20 - 2\sqrt{73}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Kỹ thuật 7: Tạo tam giác đồng dạng, tam giác bằng nhau và dùng tỉ số khoảng cách

Bài toán mẫu:

Xét đường tròn (C) có tâm I và bán kính R . Cho hai điểm A, B nằm ngoài đường tròn (C) , đồng thời $|IA| = k.R$ ($k > 1$). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = MA + k.MB$.

Phương pháp:

- Chọn C thuộc đoạn IA sao cho $IC = \frac{1}{k}R = \frac{1}{k^2}IA$ hay $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{k^2}\overrightarrow{IA}$.

- Ta chứng minh được hai tam giác MIC, AIM đồng dạng

$$\left(\frac{IC}{IM} = \frac{IM}{IA} = \frac{R}{IA} = \frac{1}{k} \text{ và góc } I \text{ chung}\right).$$

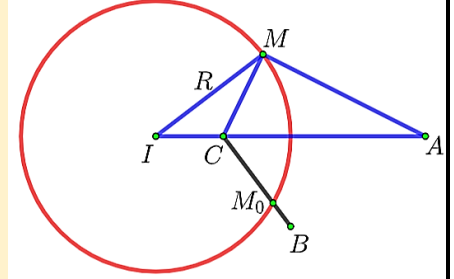
$$\text{Suy ra } \frac{MC}{MA} = \frac{1}{k} \Rightarrow MA = k.MC.$$

- Khi đó:

$$T = MA + k.MB = k.MC + k.MB = k(MB + MC) \geq k.BC$$

(B, C nằm khác phía đường tròn).

- Vậy $T_{\min} = k.BC$. Dấu đẳng thức xảy ra khi B, M, C thẳng hàng theo thứ tự đó (M trùng M_0 như hình vẽ).



Lưu ý: Nếu đề cho A, B nằm trong đường tròn, khi đó $|IA| = k.R$ ($0 < k < 1$), ta làm tương tự.

Câu 41. Xét các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = 3$. Khi biểu thức $P = |z + 5 - 3i| + 3|z - 3 - 7i|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. 6. B. 9. C. 10. D. 12.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi M là điểm biểu diễn của z thì M thuộc đường tròn tâm $I(4;3)$, bán kính $R = 3$.

Xét $P = |z + 5 - 3i| + 3|z - 3 - 7i| = MA + 3MB$ với $A(-5;3)$, $B(3;7)$.

Ta có $AI = 9 = 3R = 3MI$. Lấy điểm C thuộc đoạn IA thỏa mãn $CI = \frac{1}{3}R$.

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{IC} = \frac{1}{9}\overrightarrow{IA} \Rightarrow \begin{cases} x_C - 4 = \frac{1}{9}(-5 - 4) \\ y_C - 3 = \frac{1}{9}(3 - 3) \end{cases} \Rightarrow C(3;3).$$

Ta có hai tam giác MIC, AIM đồng dạng do

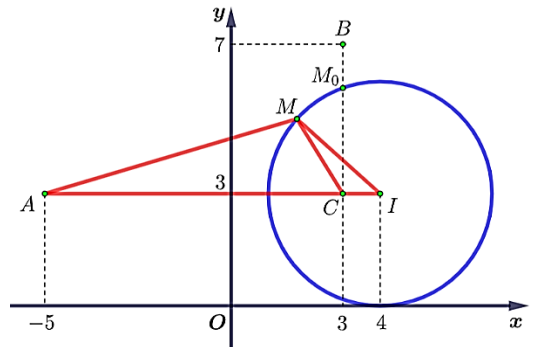
$$\frac{MI}{AI} = \frac{IC}{MI} = \frac{1}{3} \text{ và góc } I \text{ chung}.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{MC}{AM} = \frac{1}{3} \text{ hay } AM = 3MC.$$

Khi đó $P = MA + 3MB = 3(MC + MB) \geq 3BC$ (do B, C nằm khác phía so với đường tròn).

Ta có: $P_{\min} = 3BC = 3.4 = 12$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi B, M, C thẳng hàng theo thứ tự đó (M trùng với M_0 như hình).



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Câu 42. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 3 - 2i| = 2$. Tính $a + b$ khi $|z + 1 - 2i| + 2|z - 2 - 5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $4 - \sqrt{3}$.

B. $2 + \sqrt{3}$.

C. 3.

D. $4 + \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z , ta có:

$|z - 3 - 2i| = 2$ nên M thuộc đường tròn (C) tâm $I(3; 2)$, bán kính $R = 2$.

Xét $P = |z + 1 - 2i| + 2|z - 2 - 5i| = MA + 2MB$ với $A(-1; 2)$, $B(2; 5)$ và $IA = 4 = 2R$.

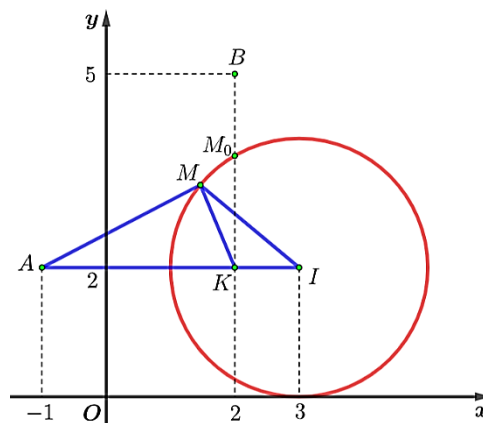
Chọn điểm K thuộc đoạn IA và $IK = \frac{1}{2}IM = \frac{1}{2}R$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA} \Rightarrow \begin{cases} x_K - 3 = \frac{1}{4}(-1 - 3) \\ y_K - 2 = \frac{1}{4}(2 - 2) \end{cases} \Rightarrow \boxed{K(2; 2)}.$$

Khi đó $\triangle IAM$ và $\triangle IMK$ đồng dạng với nhau do có

$$\frac{IK}{IM} = \frac{IM}{IA} = \frac{1}{2} \text{ và góc } I \text{ chung.}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{MK}{AM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{AM = 2MK}.$$



Từ đó: $P = MA + 2MB = 2(MK + MB) \geq 2BK$ (do B, K nằm khác phía của đường tròn).

Dấu đẳng thức xảy ra khi B, M, K thẳng hàng theo thứ tự đó (hay M trùng với M_0 như hình).

Phương trình đường thẳng BK là: $x = 2$; thay vào (C) : $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ suy ra $\begin{cases} y = 2 + \sqrt{3} \\ y = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$.

Ta nhận $y = 2 + \sqrt{3} \in (2; 5) = (y_K; y_B)$.

Vậy $M(2; 2 + \sqrt{3})$ hay $z = 2 + (2 + \sqrt{3})i = a + bi \Rightarrow \boxed{a + b = 4 + \sqrt{3}}$.

Lưu ý: Trong bài toán này, điểm M_0 còn có thể được tìm theo cách sau:

$$\text{Tính: } KM_0 = \sqrt{R^2 - IK^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{KM_0} = \frac{KM_0}{KB} \overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(2 - 2) \\ y_0 - 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(5 - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = \sqrt{3} + 2 \end{cases} \text{ hay } M(2; 2 + \sqrt{3}).$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Câu 43. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 3 - 3i| = 6$. Tìm giá trị biểu thức $a + b$ khi $P = 2|z + 6 - 3i| + 3|z + 1 + 5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $2 - 2\sqrt{5}$. B. $4 - 2\sqrt{5}$. C. $2\sqrt{5} - 2$. D. $2\sqrt{5} - 4$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thì M thuộc đường tròn (C) tâm $I(3; 3)$, bán kính $R = 6$.

Ta có: $P = 2|z + 6 - 3i| + 3|z + 1 + 5i| = 2MA + 3MB$ với $A(-6; 3)$, $B(-1; -5)$.

Suy ra: $\frac{P}{2} = MA + \frac{3}{2}MB$. Ta nhận thấy: $IA = 9 = \frac{3}{2}R$ nên sẽ tạo tam giác đồng dạng.

$$\text{Chọn } C \text{ thuộc đoạn } IA \text{ thỏa } IC = \frac{2}{3}IM. \text{ Ta có: } \overrightarrow{IC} = \frac{4}{9}\overrightarrow{IA} \Rightarrow \begin{cases} x_C - 3 = \frac{4}{9}(-6 - 3) \\ y_C - 3 = \frac{4}{9}(3 - 3) \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(-1; 3)}.$$

Vì $\frac{IC}{IM} = \frac{IM}{IA} = \frac{R}{IA} = \frac{2}{3}$ và góc I chung nên hai tam giác MIC , AIM đồng dạng; suy ra

$$\frac{MC}{MA} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{MA = \frac{3}{2}MC}.$$

Khi đó:

$$\frac{P}{2} = MA + \frac{3}{2}MB = \frac{3}{2}MC + \frac{3}{2}MB \Leftrightarrow P = 3(MB + MC) \geq 3BC.$$

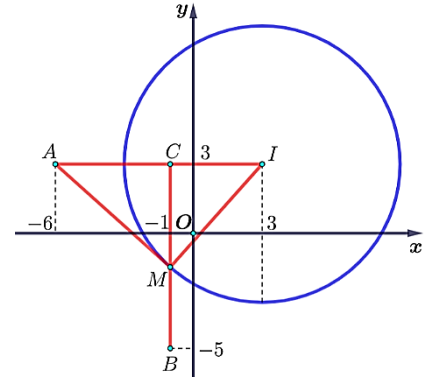
Vậy $P_{\min} = 3BC = 24$; khi đó B, M, C thẳng hàng theo thứ tự đó.

Phương trình BC : $x = -1$. Thay vào (C) :

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 36 \Rightarrow y = 3 \pm 2\sqrt{5}.$$

Ta nhận $y = 3 - 2\sqrt{5} \in (-5; 3) = (y_B; y_C)$. Vậy

$$z = -1 + (3 - 2\sqrt{5})i = a + bi \Rightarrow a + b = 2 - 2\sqrt{5}.$$



Câu 44. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 1 - 2i| = 1$, $|z_2 - 2 - 8i| = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - 5 - 2i| + 2|z_2 - 6 - 8i| + 4|z_1 - z_2|$.

- A. 30. B. 25. C. 35. D. 20.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 và hai điểm $A(5; 2)$, $B(6; 8)$.

Theo giả thiết, M thuộc đường tròn tâm $I_1(1; 2)$, bán kính $R_1 = 1$; N thuộc đường tròn tâm

$I_2(2; 8)$, bán kính $R_2 = 2$.

Ta có: $P = |z_1 - 5 - 2i| + 2|z_2 - 6 - 8i| + 4|z_1 - z_2| = MA + 2NB + 4MN$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

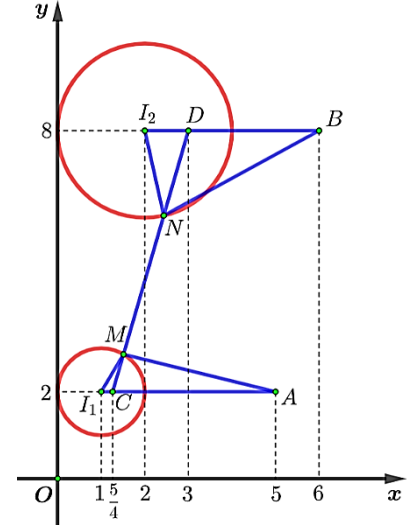
Ngoài ra: $I_1A = 4 = 4R_1$, $I_2B = 4 = 2R_2$.

Chọn C thuộc đoạn I_1A thỏa $I_1C = \frac{1}{4}R_1 = \frac{1}{4}$; suy ra $\overrightarrow{I_1C} = \frac{1}{16}\overrightarrow{I_1A}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C - 1 = \frac{1}{16}(5-1) \\ y_C - 2 = \frac{1}{16}(2-2) \end{cases} \text{ hay } \boxed{C\left(\frac{5}{4}; 2\right)}.$$

Chọn D thuộc đoạn I_2B thỏa $I_2D = \frac{1}{2}R_2 = 1$; suy ra $\overrightarrow{I_2D} = \frac{1}{4}\overrightarrow{I_2B}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_D - 2 = \frac{1}{4}(6-2) \\ y_D - 8 = \frac{1}{4}(8-8) \end{cases} \text{ hay } \boxed{D(3; 8)}.$$



Hai tam giác MI_1A , CI_1M đồng dạng nên $\frac{I_1M}{I_1A} = \frac{I_1C}{I_1M} = \frac{MC}{MA} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{MA = 4MC}$.

Hai tam giác NI_2D , BI_2N đồng dạng nên $\frac{I_2N}{I_2B} = \frac{I_2D}{I_2N} = \frac{DN}{BN} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{BN = 2DN}$.

Do đó $P = MA + 2NB + 4MN = 4MC + 4DN + 4MN = 4(CM + MN + ND) \geq 4CD = 25$.

Vậy min $P = 25$. Dấu đẳng thức xảy ra khi C, M, N, D thẳng hàng theo thứ tự đó.

Câu 45. Xét số phức z có phần thực âm và thỏa mãn $|z-1|=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z+3-i| + |z-\sqrt{3}i| + |z+\sqrt{3}i| \text{ bằng}$$

- A. 6. B. $4+\sqrt{17}$. C. $3+\sqrt{17}$. D. $\sqrt{37}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z , khi đó M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$, bán kính $R=2$.

Xét các điểm $A(-3;1), B(0;\sqrt{3}), C(0;-\sqrt{3})$ thì

$IB=IC=2$ nên hai điểm B, C thuộc đường tròn (C) ;

$IA=\sqrt{17}$ nên A nằm ngoài đường tròn (C) .

Nhận xét: $BC=2\sqrt{3}=R\sqrt{3}$ nên BC là một cạnh của một tam giác đều nội tiếp đường tròn (C) .

Ta chọn D để BCD là tam giác đều $\Rightarrow D(3;0)$; chọn

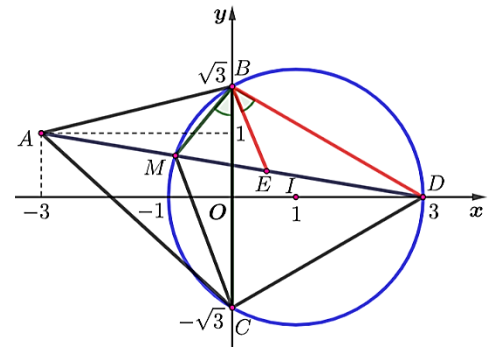
$E \in MD$ sao cho $\boxed{MB=ME}$.

Tứ giác $DBMC$ nội tiếp nên $DCB=DMB=60^\circ$, khi đó ta suy ra $\triangle BME$ đều.

Hơn nữa: $DBE+CBE=60^\circ=CBE+CBM \Rightarrow \boxed{DBE=CBM}$.

Ta có: $DB=BC$, $DBE=CBM$, $BE=BM$, suy ra $\triangle DBE=\triangle CBM \Rightarrow DE=CM$.

Khi đó: $P = |z+3-i| + |z-\sqrt{3}i| + |z+\sqrt{3}i| = MA+MB+MC = MA+ME+DE \geq AD = \sqrt{37}$.



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Dấu đẳng thức xảy ra khi $M = AD \cap (C)$.

Câu 46. Cho z_1, z_2 là các số phức khác 0 thỏa mãn $z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 = 0$ và $|z_1| = 2$. Biết số phức z thỏa mãn

$\left| z - \frac{z_1 + z_2}{3} \right| = \frac{1}{3} \left| (1 + i\sqrt{2}) z_1 \right|$. Giá trị lớn nhất của $S = |z| + |z - z_1| + |z - z_2|$ bằng

- A. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 .

Vì z_1, z_2 là các số phức khác 0 nên $z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 - \left(\frac{z_1}{z_2} \right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

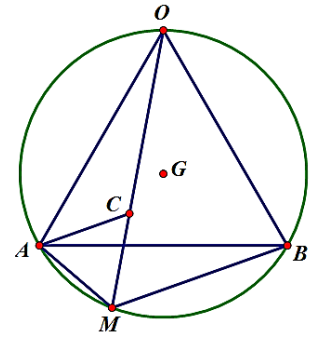
Suy ra $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 1 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \boxed{OA = OB = 2}$.

Mặt khác, ta có: $z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)^2 = -z_1 z_2$

$\Rightarrow |(z_1 - z_2)^2| = |-z_1 z_2| \Rightarrow AB^2 = 4 \Rightarrow \boxed{AB = 2}$. Do đó: $\triangle OAB$ đều.

Gọi G là trọng tâm của $\triangle OAB$ thì G là điểm biểu diễn số phức $\frac{z_1 + z_2}{3}$

và $\triangle OAB$ nội tiếp đường tròn (C) có tâm G , bán kính $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



Gọi M là điểm biểu diễn số phức z , ta có: $\left| z - \frac{z_1 + z_2}{3} \right| = \frac{1}{3} \left| (1 + i\sqrt{2}) z_1 \right| \Rightarrow MG = \frac{2\sqrt{3}}{3} = R$.

Vậy M cũng thuộc đường tròn (C) . Giả sử M thuộc cung nhỏ AB của đường tròn (C) .

Trên đoạn MO , lấy điểm C sao cho $MC = MA$ mà $\angle AMC = \angle ABO = 60^\circ$ nên $\triangle ACM$ đều

Ta có: $\angle OAC + \angle CAB = 60^\circ = \angle CAB + \angle BAM \Rightarrow \boxed{\angle OAC = \angle BAM}$, mà $OA = AB, AC = AM$

$\Rightarrow \triangle OAC = \triangle BAM \Rightarrow \boxed{OC = BM}$.

Khi đó: $S = |z| + |z - z_1| + |z - z_2| = MO + MA + MB = MO + MC + CO = 2MO$.

Ta có: $MO \leq 2R$ hay $MO \leq \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S = 2MO \leq \frac{8\sqrt{3}}{3}$. Vậy $S_{\max} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi M, G, O thẳng hàng theo thứ tự đó.

Kỹ thuật 8: Biện luận sự tương giao của đường thẳng và đường tròn có chứa tham số

Vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn.

Xét đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$ và đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$, bán kính R .

Khoảng cách từ tâm I đến Δ là: $d(I, \Delta) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

- Nếu $d(I, \Delta) > R$ thì đường thẳng và đường tròn không có điểm chung.
- Nếu $d(I, \Delta) = R$ thì đường thẳng tiếp xúc với đường tròn.
- Nếu $d(I, \Delta) < R$ thì đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm tạo thành dây cung (dây cung này sẽ lớn nhất khi đường thẳng Δ đi qua tâm I của đường tròn).

Câu 47. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau $|z-1| = \sqrt{34}$, $|z+1+mi| = |z+m+2i|$ và sao cho $|z_1 - z_2|$ là lớn nhất. Khi đó giá trị $|z_1 + z_2|$ bằng

A. $\sqrt{2}$. B. 10. C. 2. D. $\sqrt{130}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2 .

Vì $|z-1| = \sqrt{34}$ nên M, N cùng thuộc đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $R = \sqrt{34}$.

Gọi $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có: $|z+1+mi| = |z+m+2i|$

$$\Leftrightarrow |x+yi+1+mi| = |x+yi+m+2i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y+m)^2} = \sqrt{(x+m)^2 + (y+2)^2}$$

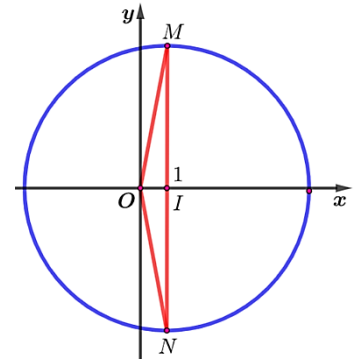
$$\Leftrightarrow 2(1-m)x + 2(m-2)y - 3 = 0.$$

Suy ra M, N thuộc đường thẳng $\Delta: 2(1-m)x + 2(m-2)y - 3 = 0$

Do đó M, N là giao điểm của đường thẳng Δ và đường tròn (C) .

Ta có $|z_1 - z_2| = MN$ nên $|z_1 - z_2|$ lớn nhất khi MN lớn nhất, suy ra

MN đường kính của (C) . Khi đó $|z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}| = |2\overrightarrow{OI}| = 2OI = 2$.



Câu 48. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+3-3i| = 2\sqrt{2}$ và $|z_2-m-(m-4)i| = \sqrt{2}$, $m \in \mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $3\sqrt{2}$. D. 3.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

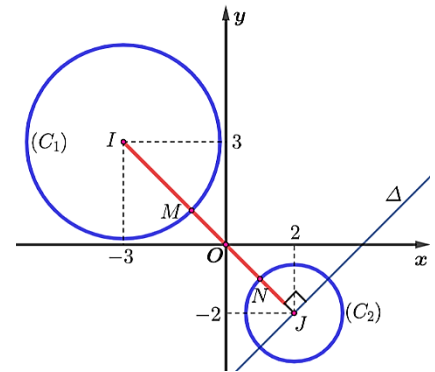
Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 .

Vì $|z_1+3-3i| = 2\sqrt{2}$ nên M thuộc đường tròn (C_1) có tâm $I(-3;3)$, bán kính $R_1 = 2\sqrt{2}$.

Vì $|z_2-m-(m-4)i| = \sqrt{2}$ nên N thuộc đường tròn (C_2) có tâm $J(m; m-4)$, bán kính $R_2 = \sqrt{2}$.

Xét điểm J với $\begin{cases} x_J = m \\ y_J = m-4 \end{cases} \Rightarrow x_J - y_J = 4$ nên J thuộc đường

thẳng $\Delta: x - y - 4 = 0$, đường thẳng này luôn vuông góc OI (do $\overrightarrow{u_\Delta} \cdot \overrightarrow{OI} = 0$ với $\begin{cases} \overrightarrow{u_\Delta} = (1;1) \\ \overrightarrow{OI} = (-3;3) \end{cases}$).



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Xét $T = |z_1| + |z_2| = OM + ON$; $T_{\min}$ khi I, M, O, N, J thẳng hàng theo thứ tự đó.

Ta có: $T_{\min} = (OM + ON)_{\min} = d(I, \Delta) - (R_1 + R_2) = \frac{|-3-3-4|}{\sqrt{2}} - (2\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

Câu 49. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-1-i| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $|z-2-mi| = |z+m|$ với m là số thực tùy ý. Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn hình học của z_1, z_2 . Gọi S là tập các giá trị của m để diện tích tam giác IAB là lớn nhất với $I(1;1)$. Tổng bình phương các phần tử S bằng

- A. $\frac{17}{4}$. B. 65. C. $\frac{5}{4}$. D. 80.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) có điểm biểu diễn là M .

Do $|z-1-i| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ nên M thuộc đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Mặt khác: $|z-2-mi| = |z+m| \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-m)^2 = (x+m)^2 + y^2 \Leftrightarrow (m+2)x + my - 2 = 0$ (Δ).

Để z tồn tại thì Δ và (C) có điểm chung, ta có: $d(I, \Delta) < R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2m|}{\sqrt{(m+2)^2 + m^2}} < \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow 25.4m^2 < 20(2m^2 + 4m + 4) \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m < 2.$$

Khi đó: A, B là các giao điểm của Δ và (C) ; $IA = IB = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ta có $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} \cdot IA \cdot IB \cdot \sin AIB \leq \frac{1}{2} \cdot IA \cdot IB = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{2}{5}$.

Suy ra $(S_{IAB})_{\max} = \frac{2}{5}$, khi đó $AIB = 90^\circ$.

Xét tam giác IAB có $BIA = 90^\circ$, có $AB = IA\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \Rightarrow d(I, \Delta) = d(I, AB) = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Do đó $\frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{|2m|}{\sqrt{(m+2)^2 + m^2}} \Leftrightarrow 10(2m^2 + 4m + 4) = 25.4m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-\frac{1}{2} \end{cases}$ (nhận).

Vậy tổng bình phương các phần tử S : $1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

Câu 50. Cho 2 số phức z, w thỏa mãn $|z+w| = 2\sqrt{5}$; $w = (1+i)z - 3 - 4i$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z-2i|^2 - |z-2+i|^2$. Tính $T = M + m$.

- A. $8\sqrt{13}$. B. $2 + 4\sqrt{13}$. C. $3 + 4\sqrt{13}$. D. 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), có điểm biểu diễn là $M(x; y)$.

Thay $w = (1+i)z - 3 - 4i$ vào $|z + w| = 2\sqrt{5}$, ta được:

$$|(2+i)z - 3 - 4i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |2+i| \cdot |z - 2 - i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |z - 2 - i| = 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4.$$

Suy ra M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ và có bán kính $R=2$.

$$\begin{aligned} \text{Xét } P &= |z - 2i|^2 - |z - 2 + i|^2 = |x + (y-2)i|^2 - |x - 2 + (y+1)i|^2 \\ &= x^2 + (y-2)^2 - (x-2)^2 - (y+1)^2 = 4x - 6y - 1. \text{ Suy ra: } 4x - 6y - 1 - P = 0. \end{aligned}$$

Do đó M thuộc đường thẳng $d: 4x - 6y - 1 - P = 0$ (xem P là tham số).

Điều kiện để điểm M tồn tại là d và (C) có điểm chung $\Leftrightarrow d(I, d) \leq R$

$$\Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 2 - 6 \cdot 1 - 1 - P|}{\sqrt{4^2 + 6^2}} \leq 2 \Leftrightarrow |1 - P| \leq 4\sqrt{13} \Leftrightarrow -4\sqrt{13} \leq 1 - P \leq 4\sqrt{13} \Leftrightarrow 1 - 4\sqrt{13} \leq P \leq 1 + 4\sqrt{13}.$$

$$\text{Suy ra: } M = 1 + 4\sqrt{13}, m = 1 - 4\sqrt{13} \Rightarrow T = M + m = 2.$$

Kỹ thuật 9: Bất đẳng thức tam giác

Xét hai số phức bất kỳ z_1, z_2 , ta luôn có:

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow z_1 = kz_2$ ($k \geq 0$).
- $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow z_1 = kz_2$ ($k \leq 0$).
- $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$; dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow z_1 = kz_2$ ($k \geq 0$).
- $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$; dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow z_1 = kz_2$ ($k \leq 0$).

Câu 51. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1 - i| = 2$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1 - z_2|$?

A. $m = \sqrt{2} - 1$.

B. $m = 2\sqrt{2}$.

C. $m = 2$.

D. $m = 2\sqrt{2} - 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$\text{Ta có: } |z_1 - z_2| = |z_1 - iz_1| = |1 - i| \cdot |z_1| = \sqrt{2} \cdot |z_1|.$$

$$\text{Khi đó: } 2 = |z_1 + 1 - i| \leq |z_1| + |1 - i| = |z_1| + \sqrt{2} \Rightarrow |z_1| \geq 2 - \sqrt{2}.$$

$$\text{Suy ra } |z_1 - z_2| = \sqrt{2} \cdot |z_1| \geq 2\sqrt{2} - 2. \text{ Vậy } m = |z_1 - z_2|_{\min} = 2\sqrt{2} - 2.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } z_1 = k(1 - i) = k - ki \text{ (} k > 0 \text{)}.$$

Câu 52. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \left| \frac{2z + i}{z} \right|$ với z là số phức khác

0 và thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tính tỉ số $\frac{M}{m}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

A. $\frac{M}{m} = 3.$

B. $\frac{M}{m} = \frac{4}{3}.$

C. $\frac{M}{m} = \frac{5}{3}.$

D. $\frac{M}{m} = 2.$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\text{Ta có } P = \left| \frac{2z+i}{z} \right| = \frac{|2z+i|}{|z|} \Rightarrow \frac{|2z|-|i|}{|z|} \leq P \leq \frac{|2z|+|i|}{|z|} \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{|z|} \leq P \leq 2 + \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq P \leq \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{M}{m} = \frac{5}{3}. \text{ Dấu các đẳng thức xảy ra khi } 2z = ki \ (k \in \mathbb{R}).$$

Câu 53. Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2+1|=2|z|$, gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có mô-đun nhỏ nhất và lớn nhất. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

A. 6.

B. $2\sqrt{2}.$

C. $4\sqrt{2}.$

D. 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức tam giác: } 2|z| = |z^2+1| \geq ||z^2|-1| \Leftrightarrow -2|z| \leq |z^2|-1 \leq 2|z|.$$

$$\text{Với } |z^2|-1 \leq 2|z| \text{ thì } |z^2|-2|z|-1 \leq 0 \Rightarrow |z| \leq 1+\sqrt{2}. \text{ Suy ra: } |z|_{\max} = 1+\sqrt{2} = |z_2|.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi: } \begin{cases} |z|=1+\sqrt{2} \\ z^2=k \ (k<0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{-k}=1+\sqrt{2} \\ z=\pm\sqrt{-k}.i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-3-2\sqrt{2} \\ z=\pm(1+\sqrt{2}).i \end{cases}$$

$$\text{Với } |z^2|-1 \geq -2|z| \text{ thì } |z^2|+2|z|-1 \geq 0 \Rightarrow |z| \geq -1+\sqrt{2}. \text{ Suy ra: } |z|_{\min} = -1+\sqrt{2} = |z_1|.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi: } \begin{cases} |z|=\sqrt{2}-1 \\ z^2=m \ (m<0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{-m}=\sqrt{2}-1 \\ z=\pm\sqrt{-m}.i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-3+2\sqrt{2} \\ z=\pm(\sqrt{2}-1).i \end{cases}$$

$$\text{Vậy } |z_1|^2 + |z_2|^2 = (\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}+1)^2 = 6.$$

Câu 54. Cho số phức z thỏa mãn $|z+1| \geq 1$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left| \frac{(1+i)z+i+2}{z+1} \right| \text{ lần lượt là } M \text{ và } m. \text{ Khi đó giá trị của } (M^2+m^2) \text{ bằng:}$$

A. 4.

B. $8+4\sqrt{3}.$

C. 6.

D. 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\text{Ta có: } P = \left| \frac{(1+i)z+i+2}{z+1} \right| = \left| \frac{(z+1)(1+i)+1}{z+1} \right| = \frac{|(z+1)(1+i)+1|}{|z+1|}$$

$$\text{Theo bất đẳng thức tam giác: } \frac{|(z+1)(1+i)|-|1|}{|z+1|} \leq P \leq \frac{|(z+1)(1+i)|+|1|}{|z+1|}$$

$$\Leftrightarrow |1+i| - \frac{1}{|z+1|} \leq P \leq |1+i| + \frac{1}{|z+1|} \Leftrightarrow \sqrt{2} - \frac{1}{|z+1|} \leq P \leq \sqrt{2} + \frac{1}{|z+1|} \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{2}-1 \leq P \leq \sqrt{2}+1}.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \sqrt{2}-1 = m, P_{\max} = \sqrt{2}+1 = M. \text{ Do vậy } M^2+m^2 = (\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}+1)^2 = 6.$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

$$\text{Khi } P = P_{\min} \text{ thì } \begin{cases} |z+1|=1 \\ (z+1)(1+i)=k, k < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z+1|=1 \\ |(z+1)(1+i)|=|k|, k < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z+1|=1 \\ \sqrt{2}|z+1|=-k \end{cases} \Rightarrow \boxed{k=-\sqrt{2}}.$$

$$\text{Khi } P = P_{\max} \text{ thì } \begin{cases} |z+1|=1 \\ (z+1)(1+i)=t, t > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z+1|=1 \\ |(z+1)(1+i)|=|t|, t > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z+1|=1 \\ \sqrt{2}|z+1|=t \end{cases} \Rightarrow \boxed{t=\sqrt{2}}.$$

Câu 55. Cho hai số phức z và w thỏa mãn $|z|=4$, $|w|=2$. Khi $|z+\bar{w}+5+12i|$ đạt giá trị lớn nhất, phần thực của $z+iw$ bằng

- A. $\frac{30}{13}$. B. $-\frac{4}{13}$. C. $\frac{44}{13}$. D. $\frac{58}{13}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $|w|=2 \Rightarrow |\bar{w}|=2$.

Theo bất đẳng thức tam giác: $|z+\bar{w}+5+12i| \leq |z+\bar{w}|+|5+12i| \leq |z|+|\bar{w}|+13=4+2+13=19$.

Xét $T=|z+\bar{w}+5+12i| \leq 19$ nên $T_{\min}=19$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} z=k\bar{w} \\ z+\bar{w}=h(5+12i) \end{cases} (k > 0, h > 0)$.

Vì $z=k\bar{w}$ nên $|z|=|k\bar{w}|=k|\bar{w}|$, $k > 0 \Rightarrow 4=k.2 \Rightarrow k=2$.

Ta có: $z+\bar{w}=h(5+12i) \Rightarrow 3\bar{w}=5h+12hi \Rightarrow |3\bar{w}|=\sqrt{25h^2+144h^2} \Rightarrow 169h^2=36 \Rightarrow h=\frac{6}{13}$.

Khi đó: $3\bar{w}=\frac{30}{13}+\frac{72}{13}i \Rightarrow \bar{w}=\frac{10}{13}+\frac{24}{13}i$; $z=2\bar{w}=\frac{20}{13}+\frac{48}{13}i \Rightarrow z+iw=\frac{44}{13}+\frac{58}{13}i$.

Chú ý: Đối với bài toán trên, ta còn một cách giải vô cùng tiện lợi, đó là sử dụng **Kỹ thuật 4: Ép điểm theo quỹ đạo đường tròn**; kỹ thuật đó là **thuần hình học** nên việc xác định điểm rơi bài toán khá dễ dàng so với việc sử dụng bất đẳng thức tam giác.

Câu 56. Xét các số phức z , w thỏa mãn $|z|=2$ và $|i\bar{w}|=1$. Khi $|iz+w+3-4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng

- A. $\sqrt{5}$. B. $\frac{\sqrt{29}}{5}$. C. 3. D. $\frac{\sqrt{221}}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Theo giả thiết: $|z|=2 \Rightarrow |iz|=2$; $|i\bar{w}|=1 \Rightarrow |w|=1$.

Ta có $|iz+w+3-4i| \geq |3-4i|-|iz+w| \geq 5-(|iz|+|w|) \geq 5-(2+1)=2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} w=k_1(3-4i), k_1 < 0 \\ i.z=k_2(3-4i), k_2 < 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} |w|=1 \\ |iz|=2 \end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases} \sqrt{9k_1^2+16k_1^2}=1, k_1 < 0 \\ \sqrt{9k_2^2+16k_2^2}=2, k_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k_1=-\frac{1}{5}, k_2=-\frac{2}{5}}$. Khi đó: $\begin{cases} w=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i \\ iz=\frac{-2}{5}(3-4i) \end{cases}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Suy ra: $z = \frac{8}{5} + \frac{6}{5}i$. Vậy $|z - w| = \left| \frac{8}{5} + \frac{6}{5}i - \left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \right) \right| = \sqrt{5}$.

Câu 57. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z - i| = 2$ và $|w - 2| = 1$. Khi $P = |z + \bar{w} + 1 + 3i|$ đạt giá trị lớn nhất,

$\left| z - w + 1 - \frac{12}{5}i \right|$ bằng

A. $\frac{11}{5}$.

B. $\frac{5}{11}$.

C. $\frac{\sqrt{29}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{13}}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $|w - 2| = 1 \Rightarrow |\overline{w - 2}| = 1 \Rightarrow |\bar{w} - 1| = 1$.

Khi đó: $P = |(z - i) + (\bar{w} - 2) + (3 + 4i)| \leq |z - i| + |\bar{w} - 2| + |3 + 4i| = 8$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi:
$$\begin{cases} z - i = k(3 + 4i), k > 0 \\ \bar{w} - 2 = t(3 + 4i), t > 0 \\ |z - i| = 2, |\bar{w} - 2| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{9k^2 + 16k^2} = 2, k > 0 \\ \sqrt{9t^2 + 16t^2} = 1, t > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{5} \\ t = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Suy ra:
$$\begin{cases} z - i = \frac{2}{5}(3 + 4i) \\ \bar{w} - 2 = \frac{1}{5}(3 + 4i) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{6}{5} + \frac{13}{5}i \\ \bar{w} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{6}{5} + \frac{13}{5}i \\ w = \frac{13}{5} - \frac{4}{5}i \end{cases}$$
. Vậy: $\left| z - w + 1 - \frac{12}{5}i \right| = \frac{\sqrt{29}}{5}$.

Câu 58. Xét các số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 - 5i| = |z_2 - 1| = 1$ và $|\bar{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$. Tính $M = |z_1 + z_2|$ khi biểu thức $P = |z - z_1| + |z - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M = 2\sqrt{13}$.

B. $M = 2\sqrt{5}$.

C. $M = 6$.

D. $M = \sqrt{41}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đặt $z = x + iy$ khi đó $|\bar{z} + 4i| = |z - 8 + 4i| \Leftrightarrow x - y - 4 = 0 \Leftrightarrow x = y + 4$.

Ta có $P = |(z - 4 - 5i) - (z_1 - 4 - 5i)| + |(z - 1) - (z_2 - 1)| \geq |z - 4 - 5i| - |z_1 - 4 - 5i| + |z - 1| - |z_2 - 1|$

$$= \sqrt{y^2 + (y - 5)^2} + \sqrt{y^2 + (y + 3)^2} - 2 \geq (5 - y) + (y + 3) - 2 = 6$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x; y) = (4; 0)$ hay $z = 4 \Rightarrow z_1 = 4 + 4i; z_2 = 2$, vậy

$$M = |z_1 + z_2| = 2\sqrt{13}.$$

Câu 59. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \frac{2z}{z - 2}$ và $T = 2|z - 4 + 3i| - |z - 2 - 4i|$ đạt giá trị lớn nhất. Biết giá trị lớn nhất của T bằng $a\sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ và b là số nguyên tố. Tính $a^2 + b^2$.

A. 41.

B. 40.

C. 34.

D. 52.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Điều kiện: $z - 2 \neq 0 \Rightarrow (x; y) \neq (2; 0)$.

Ta có: $\bar{z} = \frac{2z}{z-2} \Leftrightarrow \bar{z} \cdot (z-2) = 2z \Leftrightarrow \bar{z} \cdot z - 2(z+\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z . Khi đó M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(2; 0)$, bán kính $R = 2$.

$$\begin{aligned} T &= 2|z-4+3i| - |z-2-4i| = 2\sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} \\ &= 2\sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2 + 3[(x-2)^2 + y^2 - 4]} \quad (???) \\ &= 2\sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2} - 2\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 2(MA - MB), \text{ với } A(4; -3), B(2; 1). \end{aligned}$$

Ta có $MA - MB \leq AB = 2\sqrt{5}$.

Suy ra: $T = 2(MA - MB) \leq 4\sqrt{5}$ hay $T_{\max} = 4\sqrt{5} = a\sqrt{b} \Rightarrow a^2 + b^2 = 41$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi A, B, M thẳng hàng theo thứ tự đó (M thuộc đường tròn (C)).

Giải đáp (???) : Trong lời giải trên, ta đặc biệt lưu ý cách thêm vào biểu thức trong dấu căn thứ hai một lượng có giá trị bằng 0 là $k[(x-2)^2 + y^2 - 4]$. Việc xác định được $k = 3$ là nhờ ta đồng nhất hệ số của cả x^2 lẫn y^2 trong cả hai dấu căn đó. Quá trình này được thực hiện chi tiết trong kỹ thuật tiếp theo (**kỹ thuật số 10**).

✎ Kỹ thuật 10: Bất đẳng thức Minkowski và Kỹ thuật Cân bằng hệ số tìm điểm rơi

Nhận xét: Về bản chất, **bất đẳng thức Minkowski** cũng giống với **bất đẳng thức tam giác (Kỹ thuật 9)**, hay **bất đẳng thức giá trị tuyệt đối**, tuy vậy nó có hình thức biểu hiện ở dạng đại số, còn bất đẳng thức tam giác được biểu hiện ở dạng hình học.

1. Bất đẳng thức Minkowski:

- Xét hai cặp số thực $(a; b)$ và $(c; d)$:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (hay $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} > 0$).

Quy ước: Nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng 0.

- Xét ba cặp số thực $(a; b)$, $(c; d)$ và $(e; f)$:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} + \sqrt{e^2 + f^2} \geq \sqrt{(a+c+e)^2 + (b+d+f)^2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$.

Quy ước: Nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng 0.

2. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối:

- $|a| + |b| \geq |a+b|$; dấu đẳng thức xảy ra khi $ab \geq 0$.
- $|a| + |b| \geq |a-b|$; dấu đẳng thức xảy ra khi $ab \leq 0$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

- $|a-b| \geq ||a|-|b||$; dấu đẳng thức xảy ra khi $ab \geq 0$.
- $|a|+|b| \geq |a-b|$; dấu đẳng thức xảy ra khi $ab \leq 0$.

Câu 60. Cho z là số phức thỏa mãn $|\bar{z}| = |z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-1+2i|+|z+1+3i|$ là

- A. $5\sqrt{2}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{29}$. D. $\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Đặt $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có: $|\bar{z}| = |z+2i| \Leftrightarrow |a-bi| = |a+(b+2)i|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(b+2)^2} \Leftrightarrow 4b+4=0 \Leftrightarrow \boxed{b=-1}. \text{ Khi đó: } z = a-i.$$

$$\text{Xét: } T = |z-1+2i| + |z+1+3i| = |a-1+i| + |a+1+2i| = \sqrt{(1-a)^2+1^2} + \sqrt{(1+a)^2+2^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Mincowski, ta được:

$$T = \sqrt{(1-a)^2+1^2} + \sqrt{(1+a)^2+2^2} \geq \sqrt{(1-a+1+a)^2+(1+2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}. \text{ Suy ra: } \boxed{T_{\min} = \sqrt{13}}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } \frac{1-a}{1+a} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow 2-2a=1+a \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{3}}.$$

Câu 61. Xét các số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z-3-2i| = 2$. Tính $a+b$ khi $|z+1-2i|+2|z-2-5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $4-\sqrt{3}$. B. $2+\sqrt{3}$. C. 3. D. $4+\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$\text{Ta có: } |z-3-2i| = 2 \Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \boxed{(a-3)^2 + (b-2)^2 - 4 = 0}.$$

$$\begin{aligned} \text{Xét: } T &= |z+1-2i| + 2|z-2-5i| = \sqrt{(a+1)^2 + (b-2)^2} + 2\sqrt{(a-2)^2 + (b-5)^2} \\ &= \sqrt{(a+1)^2 + (b-2)^2} + \sqrt{4(a-2)^2 + 4(b-5)^2} \\ &= \sqrt{(a+1)^2 + (b-2)^2 + k \underbrace{[(a-3)^2 + (b-2)^2 - 4]}_0} + \sqrt{4(a-2)^2 + 4(b-5)^2}, \text{ với số thực } k \text{ tùy ý.} \end{aligned}$$

Ta cần **chọn k để đồng nhất hệ số của bậc hai a, b** trong hai dấu căn, tức là

$$\begin{cases} a^2 + ka^2 = 4a^2, \forall a \in \mathbb{R} \\ b^2 + kb^2 = 4b^2, \forall b \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \boxed{k=3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } T &= \sqrt{(a+1)^2 + (b-2)^2 + 3[(a-3)^2 + (b-2)^2 - 4]} + \sqrt{4(a-2)^2 + 4(b-5)^2} \\ &= \sqrt{4a^2 - 16a + 4b^2 - 16b + 32} + \sqrt{4(a-2)^2 + 4(b-5)^2} = \sqrt{4(a-2)^2 + 4(b-2)^2} + \sqrt{4(a-2)^2 + 4(b-5)^2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{T = 2 \left[\sqrt{(a-2)^2 + (b-2)^2} + \sqrt{(2-a)^2 + (5-b)^2} \right]} \geq 2 \left[\sqrt{(a-2+2-a)^2 + (b-2+5-b)^2} \right] \geq 6.$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Ta có: $T_{\min} = 6$. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{a-2}{b-2} = \frac{2-a}{5-b} \quad (1), \quad (b-2)(5-b) \geq 0 \quad (2), \quad (a-3)^2 + (b-2)^2 - 4 = 0 \quad (3)$$

$$\text{Xét (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2=0 \\ \frac{1}{b-2} = -\frac{1}{5-b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b-2=b-5 \end{cases} \Leftrightarrow a=2.$$

Thay $a=2$ vào (3): $b=2 \pm \sqrt{3}$. Từ điều kiện (2) suy ra $2 \leq b \leq 5$, do vậy ta nhận $b=2+\sqrt{3}$.
 Vậy $a=2, b=2+\sqrt{3} \Rightarrow a+b=4+\sqrt{3}$.

Lưu ý: Với biểu thức hai biến $T = 2 \left[\sqrt{(a-2)^2 + (b-2)^2} + \sqrt{(2-a)^2 + (5-b)^2} \right]$, ta nhận thấy điều đặc biệt là trong hai dấu căn đều có chứa $(a-2)^2$, vì vậy dễ dàng đoán được điểm rơi của a , tức là $a=2$. Nhờ vậy ta có thể giải theo kỹ thuật **bất đẳng thức giá trị tuyệt đối** như sau:

☺ **Làm theo kỹ thuật bất đẳng thức giá trị tuyệt đối:**

$$T = 2 \left[\sqrt{(a-2)^2 + (b-2)^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (5-b)^2} \right] \geq 2 \left[\sqrt{(b-2)^2} + \sqrt{(5-b)^2} \right] = 2(|b-2| + |5-b|).$$

Suy ra: $T \geq 2(|b-2| + |5-b|) \geq 2|b-2+5-b| = 6$ hay $T_{\min} = 6$.

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} a=2 \\ (a-3)^2 + (b-2)^2 = 4 \\ (b-2)(5-b) > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=2, b=2+\sqrt{3}}.$$

Nhận xét: Ngoài phương pháp giải như trên, ta còn có cách giải khác khá gọn là dùng đến **Kỹ thuật 7: Tạo tam giác đồng dạng**. Và cả hai cách giải này đều có thể áp dụng để giải các bài toán tương tự, chẳng hạn như các câu trắc nghiệm bên dưới.

Câu 62. Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z+1-i|=3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$A = 2|z-4+5i| + |z+1-7i|$ bằng $a\sqrt{b}$. Tính $S = a+b$?

A. 20.

B. 18.

C. 24.

D. 17.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z+1-i|=3 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \boxed{(x+1)^2 + (y-1)^2 - 9 = 0}$.

Ta có: $A = 2|z-4+5i| + |z+1-7i| = 2\sqrt{(x-4)^2 + (y+5)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2}$.

$$A = \sqrt{4(x-4)^2 + 4(y+5)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2 + k \left[\underbrace{(x+1)^2 + (y-1)^2 - 9}_0 \right]}$$

Ta cần **chọn k để đồng nhất hệ số của bậc hai a, b trong hai dấu căn**, tức là

$$\begin{cases} x^2 + kx^2 = 4x^2, \forall x \in \mathbb{R} \\ y^2 + ky^2 = 4y^2, \forall y \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \boxed{k=3}.$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

$$\text{Vậy } A = \sqrt{4(x-4)^2 + 4(y+5)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2 + 3[(x+1)^2 + (y-1)^2 - 9]}$$

$$A = \sqrt{4(x-4)^2 + 4(y+5)^2} + \sqrt{4x^2 + 8x + 4y^2 - 20y + 29} = 2\sqrt{(x-4)^2 + (y+5)^2} + 2\sqrt{(x+1)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2}.$$

Theo bất đẳng thức Mincowski, ta có:

$$A = 2 \left[\sqrt{(4-x)^2 + (y+5)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + \left(\frac{5}{2} - y\right)^2} \right] \geq 2\sqrt{(4-x+x+1)^2 + \left(y+5+\frac{5}{2}-y\right)^2} = 5\sqrt{13}$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = 5\sqrt{13} = a\sqrt{b} \Rightarrow a = 5, b = 13 \Rightarrow a + b = 18.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } \frac{4-x}{y+5} = \frac{x+1}{\frac{5}{2}-y} \text{ và } (4-x)(x+1) \geq 0, (x+1)^2 + (y-1)^2 = 9.$$

Câu 63. Xét các số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = 3$. Khi biểu thức

$P = |z + 5 - 3i| + 3|z - 3 - 7i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, tổng $x + y$ bằng

A. $3 + 2\sqrt{2}$.

B. $6 - 2\sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $6 + 2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$\text{Ta có } |z - 4 - 3i| = 3 \Leftrightarrow |(x-4) + (y-3)i| = 3 \Leftrightarrow \boxed{(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9} \quad (*).$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } P &= |z + 5 - 3i| + 3|z - 3 - 7i| = \sqrt{(x+5)^2 + (y-3)^2} + 3\sqrt{(x-3)^2 + (y-7)^2} \\ &= \sqrt{(x+5)^2 + (y-3)^2 + k \underbrace{[(x-4)^2 + (y-3)^2 - 9]}_0} + \sqrt{9(x-3)^2 + 9(y-7)^2}. \end{aligned}$$

Để đồng nhất hệ số của của x^2 , y^2 trong biểu thức hai dấu căn, ta chọn $k = 8$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } P &= \sqrt{9x^2 - 54x + 9y^2 - 54y + 162} + \sqrt{9(x-3)^2 + 9(y-7)^2} \\ &= 3\sqrt{x^2 - 6x + y^2 - 6y + 18} + 3\sqrt{(x-3)^2 + (y-7)^2} = 3 \left[\sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(3-x)^2 + (7-y)^2} \right] \\ &\geq 3\sqrt{(x-3+3-x)^2 + (y-3+7-y)^2} = 12. \text{ Do vậy } P_{\min} = 12. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } \frac{x-3}{y-3} = \frac{3-x}{7-y}, (y-3)(7-y) \geq 0 \text{ và } (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9 \quad (*).$$

$$\text{Xét } \frac{x-3}{y-3} = \frac{3-x}{7-y} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=3-x \\ \frac{1}{y-3} = \frac{-1}{7-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y-3=y-7 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

$$\text{Thay vào } (*): (y-3)^2 = 8 \Leftrightarrow y = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Từ điều kiện } (y-3)(7-y) \geq 0 \Rightarrow y \in [3; 7]. \text{ Ta nhận } x=3, y=3+2\sqrt{2} \Rightarrow x+y=6+2\sqrt{2}.$$

Kỹ thuật 11: Bất đẳng thức Cauchy Schwarz

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

▪ Cho các cặp số $(a; x), (b; y)$, ta có: $|ax + by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ ($x, y \neq 0$) hay $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ ($b, y \neq 0$).

▪ Cho các cặp số $(a; x), (b; y), (c; z)$, ta có: $|ax + by + cz| \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ ($x, y, z \neq 0$).

Câu 64. Giả sử z_1, z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $|iz + \sqrt{2} - i| = 1$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

- A. 4. B. $2\sqrt{3}$. C. $3\sqrt{2}$. D. 3.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $|iz + \sqrt{2} - i| = 1 \Leftrightarrow |i[z - (1 + i\sqrt{2})]| = 1 \Leftrightarrow |i||z - (1 + i\sqrt{2})| = 1 \Leftrightarrow |z - (1 + i\sqrt{2})| = 1$ (1).

Gọi $z_0 = 1 + i\sqrt{2}$ là số phức có điểm biểu diễn là $I(1; \sqrt{2})$; A, B là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 . Từ (1) suy ra $IA = IB = 1$; $|z_1 - z_2| = 2 \Rightarrow AB = 2$ nên I là trung điểm của AB .

(Nói cách khác: AB là đường kính của đường tròn tâm I , bán kính bằng 1).

Ta có: $|z_1| + |z_2| = \underbrace{1.OA + 1.OB}_{\text{Cauchy Schwarz}} \leq \sqrt{2(OA^2 + OB^2)} = \sqrt{2\left(2OI^2 + \frac{AB^2}{2}\right)} = \sqrt{4OI^2 + AB^2} = \sqrt{16} = 4$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow OA = OB = 2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| = 2$. Vậy giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng 4.

Câu 65. Cho số phức z thỏa $|z - 1 + i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 2 - i|^2 + |z - 2 - 3i|^2$.

- A. 18. B. $38 + 8\sqrt{10}$. C. $18 + 2\sqrt{10}$. D. $16 + 2\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z .

Từ giả thiết: $|z - 1 + i| = 2$, suy ra $M \in (C_1)$ có tâm $I_1(1; -1)$ và bán kính $R_1 = 2$.

Khi đó: $|z - 1 + i| = 2 \Leftrightarrow \boxed{(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x - 2y + 2}$ (1).

Ta có: $P = |z + 2 - i|^2 + |z - 2 - 3i|^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (x - 2)^2 + (y - 3)^2$.

Suy ra $P = 2x^2 + 2y^2 - 8y + 18 \stackrel{(1)}{=} 2(2x - 2y + 2) - 8y + 18 = 4x - 12y + 22 = \boxed{4(x - 1) - 12(y + 1) + 38}$.

Theo bất đẳng thức **Cauchy-Schwarz**:

$$|4(x-1)-12(y+1)| \leq \sqrt{[4^2+(-12)^2] \underbrace{[(x-1)^2+(y+1)^2]_{=4}}_{=4}} = 8\sqrt{10}.$$

$$\Leftrightarrow -8\sqrt{10} \leq 4(x-1)-12(y+1) \leq 8\sqrt{10} \Leftrightarrow -8\sqrt{10}+38 \leq P \leq 8\sqrt{10}+38. \text{ Do đó } P_{\max} = 38+8\sqrt{10}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{x-1}{y+1} = \frac{-4}{12} \\ 4x-12y+22 = 38+8\sqrt{10} \end{cases}.$$

Câu 66. Cho số phức z thỏa mãn $5|z-i| = |z+1-3i| + 3|z-1+i|$. Tìm giá trị lớn nhất T của $|z-2+3i|$?

A. $T = \frac{10}{3}$.

B. $T = 1 + \sqrt{13}$.

C. $T = 4\sqrt{5}$.

D. $T = 9$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi M là điểm biểu diễn của z ; gọi $A(0;1)$, $B(-1;3)$, $C(1;-1)$. Ta thấy A là trung điểm của BC .

$$\text{Ta có: } MB^2 + MC^2 = 2MA^2 + \frac{BC^2}{2} = 2MA^2 + 10.$$

$$\text{Theo giả thiết: } 5|z-i| = |z+1-3i| + 3|z-1+i| \Leftrightarrow 5MA = MB + 3MC \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{10} \cdot \sqrt{\underbrace{MB^2 + MC^2}_{=2MA^2+10}}$$

$$\Leftrightarrow 25MA^2 \leq 10(2MA^2 + 10) \Leftrightarrow 5MA^2 \leq 100 \Rightarrow \boxed{MA \leq 2\sqrt{5}} \quad (1).$$

$$\text{Xét } |z-2+3i| = |(z-i) + (-2+4i)| \leq |z-i| + |-2+4i| \leq MA + 2\sqrt{5} \leq 4\sqrt{5} \quad (\text{do (1)}).$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \begin{cases} |z-i| = 2\sqrt{5} \\ \frac{a}{-2} = \frac{b-1}{4} > 0 \end{cases}, \text{ với } z = a+bi; a, b \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra } \begin{cases} z = 2-3i \\ z = -2+5i \end{cases} \quad (\text{loại}).$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } |z-2+3i| \text{ là } T = 4\sqrt{5}.$$

Câu 67. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z+i|$.

A. $5\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{41}$.

C. $\sqrt{61}$.

D. $3\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\text{Giả sử } z = x+yi, (x, y \in \mathbb{R}). \text{ Ta có: } |z-3-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \boxed{(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5} \quad (1).$$

$$\text{Xét } P = |z+2|^2 - |z-i|^2 = [(x+2)^2 + y^2] - [x^2 + (y-1)^2] = 4x + 2y + 3$$

$$= 4(x-3) + 2(y-4) + 23 \leq \sqrt{(4^2 + 2^2)} \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} + 23 = 33. \text{ Suy ra } P_{\max} = 33.$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

$$\text{Điều kiện xảy ra khi } \begin{cases} \frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{2} \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 2(y-4) \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 5 \\ (2y-8)^2 + (y-4)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 5 \\ y = 5 \vee y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow P = 33 \text{ (nhận); với } \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow P = 13 \text{ (loại).}$$

$$\text{Vậy khi } P \text{ lớn nhất thì } z = 5 + 5i \Rightarrow |z + i| = \sqrt{61}.$$

Câu 68. Cho số phức z thỏa $\left| \frac{z-1}{z+3i} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z+i| + 2|\bar{z}-4+7i|$.

A. 8.

B. 20.

C. $2\sqrt{5}$.D. $4\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

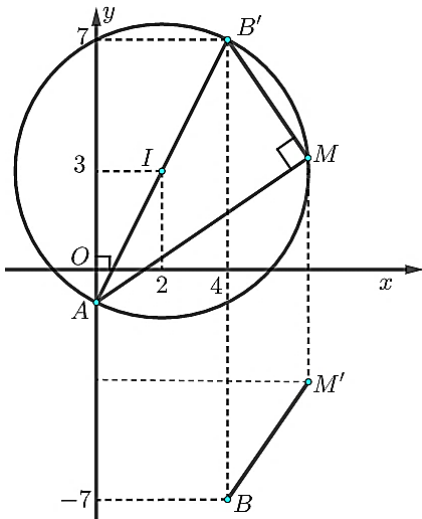
Chọn B.

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$; $M(x; y)$, $M'(x; -y)$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z, \bar{z}$.

$$\text{Ta có: } \left| \frac{z-1}{z+3i} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}|z-1| = |z+3i| \Leftrightarrow \sqrt{2}|(x-1)+yi| = |x+(y+3)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+3)^2} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 + 2y^2 = x^2 + y^2 + 6y + 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 20.$$



Như vậy, tập hợp điểm M là đường tròn (C) tâm $I(2; 3)$ và bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

$$P = |z+i| + 2|\bar{z}-4+7i| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}| + 2|\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OB}| \text{ với } A(0; -1), B(4; -7). \text{ Suy ra } \boxed{P = AM + 2BM'}.$$

Vì M' đối xứng với M qua Ox nên ta cần gọi điểm $B'(4; 7)$ đối xứng với B qua Ox , khi đó $M'B = MB'$. Do đó:

$$\boxed{P = AM + 2MB'}.$$

Ta lại có $A(0; -1)$, $B'(4; 7)$ thuộc đường tròn (C) và $AB' = 4\sqrt{5} = 2R$, vì vậy AB' là đường kính của đường tròn $(C) \Rightarrow MA^2 + MB'^2 = AB'^2 = 80$.

$$\text{Do đó: } P = MA + 2MB' \leq \underbrace{\sqrt{(1^2 + 2^2)} \left(\underbrace{MA^2 + MB'^2}_{=80} \right)}_{\text{Cauchy-Shwarz}} = 20.$$

$$\text{Điều "=" xảy ra khi } \begin{cases} MB' = 2MA \\ MA^2 + MB'^2 = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MA = 4 \\ MB' = 8 \end{cases}. \text{ Vậy } \max P = 20.$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Câu 69. Cho các số phức w, z thỏa mãn $|w+i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2+i)(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu

thức $P = |z-1-2i| + |z-5-2i|$ bằng

- A. $6\sqrt{7}$. B. $4+2\sqrt{13}$. C. $2\sqrt{53}$. D. $4\sqrt{13}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $5w = (2+i)(z-4) \Rightarrow w = \frac{(2+i)(z-4)}{5}$. Thay vào $|w+i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, ta được:

$$\left| \frac{(2+i)(z-4)}{5} + i \right| = \frac{3\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow |(2+i)(z-4) + 5i| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow |(2+i)z - 8 + i| = 3\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |2+i| \cdot |z-3+2i| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow |z-3+2i| = 3.$$

Gọi M là điểm biểu diễn của z thì M thuộc đường tròn (C) tâm $I(3; -2)$, bán kính $R=3$.

Xét $P = |z-1-2i| + |z-5-2i| = MA + MB$, với $A(1; 2)$ và $B(5; 2)$.

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$P = MA + MB \leq \sqrt{2(MA^2 + MB^2)} \text{ hay } P \leq \sqrt{4MH^2 + AB^2} \text{ với}$$

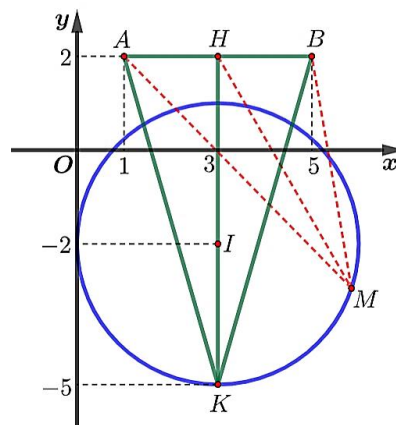
$H(3; 2)$ là trung điểm AB .

Mặt khác: $MH \leq KH$ với mọi $M \in (C)$ nên

$$P \leq \sqrt{4KH^2 + AB^2} = \sqrt{4(IH + R)^2 + AB^2} = 2\sqrt{53}.$$

Vậy $P_{\max} = 2\sqrt{53}$ khi $\begin{cases} M \equiv K \\ MA = MB \end{cases}$ hay $z = 3-5i$ và

$$w = \frac{3}{5} - \frac{11}{5}i.$$



Kỹ thuật 12: Khảo sát hàm số và kỹ thuật đổi biến

Học sinh cần nắm vững:

- Công thức đạo hàm của hàm sơ cấp và hàm hợp.
- Cách xét dấu các biểu thức đạo hàm.
- Cách phá giá trị tuyệt đối theo định nghĩa, tức là $|A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$.
- Vận dụng một cách linh hoạt công thức $z\bar{z} = |z|^2$ với mọi $z \in \mathbb{C}$.

Câu 70. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+1| + |z^2 - z + 1|$. Giá trị của $M.m$ bằng

- A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{13\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đặt $t = |z+1| \leq |z|+1 = 2$ nên $t \in [0; 2]$. Vì $|z|=1$ nên $z\bar{z}=1$.

Khi đó: $P = |z+1| + |z^2 - z + 1| = |z+1| + |z^2 - z + z\bar{z}| = |z+1| + |z| \cdot |z-1-\bar{z}| = |z+1| + |z-1+\bar{z}|$.

Mặt khác: $t^2 = |z+1|^2 = (z+1)(\bar{z}+1) = (z+1)(\bar{z}+1) = 2 + z + \bar{z}$. Suy ra $z + \bar{z} = t^2 - 2$.

Vậy $P = t + |t^2 - 3| = f(t)$, với $t \in [0; 2]$. Dễ thấy $f(t)$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $f(t) = \begin{cases} t+t^2-3 & \text{khi } \sqrt{3} \leq t \leq 2 \\ t-t^2+3 & \text{khi } 0 \leq t < \sqrt{3} \end{cases}$; $f'(t) = \begin{cases} 2t+1 & \text{khi } \sqrt{3} \leq t \leq 2 \\ -2t+1 & \text{khi } 0 \leq t < \sqrt{3} \end{cases}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Ta có: $f(0) = 3$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}$, $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, $f(2) = 3$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $M = \frac{13}{4}$; giá trị nhỏ nhất của P là $m = \sqrt{3}$. Suy ra $M.m = \frac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 71. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z| + 2|1-z|$ bằng

- A. $6\sqrt{5}$. B. $4\sqrt{5}$. C. $2\sqrt{5}$. D. $\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z|=1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=1 \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1; 1]$.

Xét $P = |1+z| + 2|1-z| = \sqrt{(1+x)^2+y^2} + 2\sqrt{(1-x)^2+y^2} = \sqrt{2(1+x)} + 2\sqrt{2(1-x)}$.

Đặt $f(x) = \sqrt{2(1+x)} + 2\sqrt{2(1-x)}$, $x \in [-1; 1]$; hàm số này liên tục trên $[-1; 1]$.

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1+x)}} - \frac{2}{\sqrt{2(1-x)}}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2(1+x)} = \sqrt{2(1-x)} \Rightarrow x = -\frac{3}{5} \in (-1; 1)$.

Ta có: $f(1) = 2$; $f(-1) = 4$; $f\left(-\frac{3}{5}\right) = 2\sqrt{5}$. Suy ra $\max_{x \in [-1; 1]} f(x) = 2\sqrt{5}$.

Vậy $P_{\max} = 2\sqrt{5}$, khi đó $x = -\frac{3}{5}$, $y = \pm \frac{4}{5}$.

Câu 72. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của

$P = |z^5 + \bar{z}^3 + 6z| - 2|z^4 + 1|$. Tính $M - m$.

- A. $M - m = 1$. B. $M - m = 7$. C. $M - m = 6$. D. $M - m = 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $z\bar{z} = |z|^2 = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$.

Suy ra $P = \left| z^5 + \frac{1}{z^3} + 6z \right| - 2|z^4 + 1| = \frac{1}{|z|^3} |z^8 + 1 + 6z^4| - 2|z^4 + 1| = |z^8 + 6z^4 + 1| - 2|z^4 + 1|$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Đặt $w = z^4 \Rightarrow |w| = 1$, ta được $P = |w^2 + 6w + 1| - |2w + 2|$.

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$); vì $|w| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases}$.

$$P = |x^2 + 6x + 1 - y^2 + 2y(x+3)i| - 2|x+1+yi| = |2x^2 + 6x + 2y(x+3)i| - 2|x+1+yi|$$

$$= 2|(x+3)(x+yi)| - 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2|(x+3)||x+yi| - 2\sqrt{2x+2} = 2(x+3) - 2\sqrt{2x+2}.$$

Đặt $f(x) = 2(x+3) - 2\sqrt{2x+2}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

$$f'(x) = 2 - 2 \frac{1}{\sqrt{2x+2}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2 \frac{1}{\sqrt{2x+2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+2} = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Ta có: $f(-1) = 4$; $f(-\frac{1}{2}) = 3$; $f(1) = 4$. Vậy $M = 4, m = 3 \Rightarrow M - m = 1$.

Câu 73. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = |w| = |z - 2w|$. Hỏi giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \frac{|\bar{z}|}{1 + |z + w|^2}$

thuộc tập nào trong các tập dưới đây?

A. $[0; 1]$.

B. $(1; 2]$.

C. $(2; 3]$.

D. $(3; 5]$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

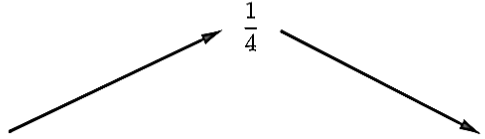
Trường hợp 1: Xét $w = 0 \Rightarrow |z| = |w| = |z - 2w| = 0$. Khi đó: $T = \frac{|\bar{z}|}{1 + |z + w|^2} = \frac{|z|}{1 + |z + w|^2} = 0$.

Trường hợp 2: Xét $w \neq 0$, ta có: $|z| = |w| = |z - 2w| \Leftrightarrow \left| \frac{z}{w} \right| = 1 = \left| \frac{z}{w} - 2 \right|$.

Đặt $t = \frac{z}{w} = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thì $\begin{cases} |t| = 1 \\ |t - 2| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (a - 2)^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ hay $t = 1$.

Khi đó: $\frac{z}{w} = 1 \Rightarrow z = w$. Ta có: $T = \frac{|\bar{z}|}{1 + |z + w|^2} = \frac{|z|}{1 + |2z|^2} = \frac{|z|}{1 + 4|z|^2}$.

Đặt $u = |z| > 0$, suy ra $T = \frac{u}{1 + 4u^2} = f(u)$; $f'(u) = \frac{1 - 4u^2}{(1 + 4u^2)^2} = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$.

u	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(u)$	+	0	-
$f(u)$			

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Vậy $T_{\max} = \frac{1}{4}$; khi đó $u = |z| = \frac{1}{2}$.

Câu 74. Xét tất cả các số phức z thỏa mãn $|z - 3i + 4| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2 + 7 - 24i|$ nằm trong khoảng nào?

A. $(0; 1009)$.

B. $(1009; 2018)$.

C. $(2018; 4036)$.

D. $(4036; +\infty)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Nhận xét: $(4 - 3i)^2 = 7 - 24i$, ta có định hướng đổi biến $z_0 = 4 - 3i \Rightarrow z_0^2 = 7 - 24i$.

Ta có $1 = |z - 3i + 4| \geq ||z| - |3i - 4|| = ||z| - 5| \Rightarrow -1 \leq |z| - 5 \leq 1 \Rightarrow 4 \leq |z| \leq 6$.

Đặt $z_0 = 4 - 3i$, $|z_0| = 5 \Rightarrow z_0^2 = 7 - 24i$.

Ta có $A = |z^2 + 7 - 24i|^2 = |z^2 + z_0^2|^2 = (z^2 + z_0^2)(\bar{z}^2 + \bar{z}_0^2) = |z|^4 + |z_0|^4 + (z\bar{z}_0 + z_0\bar{z})^2 - 2|z \cdot z_0|^2$

Ta lại có: $(z + z_0)(\bar{z} + \bar{z}_0) = (z + z_0)(\overline{z + z_0}) = |z + z_0|^2 = 1 \Rightarrow z\bar{z}_0 + z_0\bar{z} = 1 - |z|^2 - |z_0|^2$

Suy ra $A = |z|^4 + |z_0|^4 + (1 - |z|^2 - |z_0|^2)^2 - 2|z \cdot z_0|^2 = |z|^4 + 5^4 + (1 - |z|^2 - 25)^2 - 2 \cdot 25 \cdot |z| = 2|z|^4 - 2|z|^2 + 1201$.

Đặt $t = |z| \in [4; 6]$; khi đó $A = 2t^4 - 2t^2 + 1201 = f(t)$; $f'(t) = 8t^3 - 4t = 0 > 0, \forall t \in [4; 6]$.

Vì vậy $A_{\min} = f(4) = 1681 \in (1009; 2018)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |z| = 4 \\ |z + 4 - 3i| = 1 \end{cases}$.

Kỹ thuật 13: Phương pháp lượng giác hóa số phức

1. Dạng lượng giác của số phức:

Xét $z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right)$ với a, b không đồng thời bằng 0.

Đặt $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ($\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$), khi đó:

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r > 0$ là dạng lượng giác của số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Lưu ý: φ được gọi là một **argumen** của số phức z , $\varphi = (Ox, OM)$ với $M(a; b)$.

2. Nhân, chia số phức dạng lượng giác:

Cho $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ và $z' = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi')$, khi đó:

- $zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi')]$.

- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i \sin(\varphi - \varphi')]$, $z' \neq 0$.

3. Nâng lũy thừa số phức dạng lượng giác (công thức Moa-vơ):

Cho $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, khi đó: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ với mọi n nguyên dương.

4. Căn bậc hai số phức dạng lượng giác:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Cho $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, khi đó có hai **căn bậc hai** của z là $\sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$ và $-\sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$.

Câu 75. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 1 - i| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |a + b - 5|$ là

A. $3 - \sqrt{2}$. B. $2 - \sqrt{2}$. C. $3 - 2\sqrt{2}$. D. $2 + \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Theo giả thiết ta có $|z - 1 - i| = 1 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 1$ (*).

Đặt $a - 1 = \sin t$, $b - 1 = \cos t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) thỏa mãn (*).

Khi đó $P = |a + b - 5| = |\sin t + \cos t - 3| = \left| \sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) - 3 \right| = 3 - \sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right)$.

Ta có: $-1 \leq \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq -\sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 3 - \sqrt{2} \leq P \leq 3 + \sqrt{2}$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của P là $3 - \sqrt{2}$.

Câu 76. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z + 1 + i|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. B. $5\sqrt{2}$. C. 20. D. $2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(x - 1) + (y + 2)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

Đặt $\begin{cases} x - 1 = \sqrt{5} \sin t \\ y + 2 = \sqrt{5} \cos t \end{cases}$ với $0 \leq t \leq 2\pi$. Ta có $|z + 1 + i| = |(x + 1) + (y + 1)i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2}$

$$= \sqrt{(\sqrt{5} \sin t + 2)^2 + (\sqrt{5} \cos t - 1)^2} = \sqrt{10 + 4\sqrt{5} \sin t - 2\sqrt{5} \cos t}$$

$$= \sqrt{10 + 10 \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \sin t - \frac{\sqrt{5}}{5} \cos t \right)} = \sqrt{10 + 10 \sin(t - \varphi)} \text{ với } \begin{cases} \cos \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}.$$

Vì $-1 \leq \sin(t - \varphi) \leq 1$ với mọi t , $\varphi \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{10 - 10} \leq |z + 1 + i| \leq \sqrt{10 + 10} \Leftrightarrow 0 \leq |z + 1 + i| \leq 2\sqrt{5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $|z + 1 + i|$ là $2\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\sin(t - \varphi) = 1 \Leftrightarrow t - \varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Câu 77. Xét các số phức z và w thỏa mãn $|z|=|w|=1, |z+w|=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |zw + 2i(z+w) - 4| \text{ bằng}$$

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{1+5\sqrt{2}}{4}$.

C. $5-2\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Do $|z|=|w|=1 \Rightarrow z = \cos \alpha + i \sin \alpha, w = \cos \beta + i \sin \beta \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } z+w &= \cos \alpha + \cos \beta + i(\sin \alpha + \sin \beta) \Rightarrow |z+w| = \sqrt{(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2} \\ &= \sqrt{2 + 2\cos \alpha \cos \beta + 2\sin \alpha \sin \beta} = \sqrt{2 + 2\cos(\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

$$\text{Do } |z+w| = \sqrt{2} \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Chọn } k=0 \Rightarrow \beta = \alpha - \frac{\pi}{2} \Rightarrow w = \sin \alpha - i \cos \alpha.$$

$$P = |zw + 2i(z+w) - 4| = |zw + 2iz + 2iw + 4i^2| = |z(w+2i) + 2i(w+2i)| = |z+2i| \cdot |w+2i|$$

$$\begin{aligned} P &= |\cos \alpha + i \sin \alpha + 2i| \cdot |\sin \alpha - i \cos \alpha + 2i| = \sqrt{\cos^2 \alpha + (\sin \alpha + 2)^2} \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha + (2 - \cos \alpha)^2} \\ &= \sqrt{5 + 4\sin \alpha} \cdot \sqrt{5 - 4\cos \alpha} = \sqrt{25 + 20(\sin \alpha - \cos \alpha) - 16\sin \alpha \cos \alpha}. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Rightarrow t^2 = 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1-t^2}{2}.$$

$$\text{Khi đó: } P = \sqrt{25 + 20t - 16 \cdot \frac{1-t^2}{2}} = \sqrt{8t^2 + 20t + 17} = f(t).$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{8t+10}{\sqrt{8t^2+20t+17}} = 0 \Rightarrow t = -\frac{5}{4} \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$$

$$\text{Dễ dàng lập bảng xét dấu và có được } P_{\min} = f\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}; \text{ khi đó } t = -\frac{5}{4}.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } P \text{ bằng } \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM THỰC HÀNH CHỦ ĐỀ 3

- Câu 1.** Cho số phức z thỏa mãn $|z + i + 1| = |\bar{z} - 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng
- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. C. 2. D. 1.
- Câu 2.** Cho số phức z thỏa mãn $|z + 3 - 4i| = 3$ và $w = 2z + 3 - 2i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất bằng
- A. $6 - 3\sqrt{5}$. B. $6 + 3\sqrt{5}$. C. 7. D. $3\sqrt{5}$.
- Câu 3.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\frac{z+2}{z+2i}$ là một số thuần ảo. Khi số phức z có môđun nhỏ nhất, hãy tính $a + b$.
- A. $a + b = 0$. B. $a + b = 2\sqrt{2} - 1$. C. $a + b = 4$. D. $a + b = 2\sqrt{2}$.
- Câu 4.** Cho số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1 - 1 - 2i| = 2$ và $|z_2 + 2 + 3i| = |z_2 - 1 - i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ bằng
- A. $\frac{33}{10}$. B. $\frac{29}{10}$. C. $\frac{9}{10}$. D. $\frac{13}{10}$.
- Câu 5.** Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 2\sqrt{5}$ và số phức w thỏa $(5 + 10i)\bar{w} = (3 - 4i)z - 25i$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |w|$ bằng
- A. 4. B. $2\sqrt{10}$. C. $4\sqrt{5}$. D. 6.
- Câu 6.** Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z + 2w = 8 - 6i$ và $|z - w| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z| + |w|$ bằng
- A. $4\sqrt{6}$. B. $2\sqrt{26}$. C. $\sqrt{66}$. D. $3\sqrt{6}$.
- Câu 7.** Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z - w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0, w = w_0$. Tính $|3z_0 - w_0|$.
- A. $2\sqrt{2}$. B. $4\sqrt{2}$. C. 1. D. $6\sqrt{2}$.
- Câu 8.** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|z_1 = 4|z_2|z_2$. Biết rằng M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z_1, \bar{z}_2$ trên mặt phẳng tọa độ thỏa mãn tam giác MON có diện tích bằng 32, khi đó giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + z_2|$ bằng
- A. $8\sqrt{2}$. B. $12\sqrt{2}$. C. 12. D. 16.
- Câu 9.** Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z_1 = a + (a^2 - 2a + 2)i$ và N là điểm biểu diễn cho số phức z_2 biết $|z_2 - 2 - i| = |\bar{z}_2 - 6 - i|$. Tìm khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm M, N .
- A. $2\sqrt{5}$. B. 5. C. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. D. 1.
- Câu 10.** Cho hai số phức z và $\omega = a + bi$ thỏa mãn $|z + \sqrt{5}| + |z - \sqrt{5}| = 6$; $5a - 4b - 20 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - \omega|$ là

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

A. $\frac{3}{\sqrt{41}}$.

B. $\frac{5}{\sqrt{41}}$.

C. $\frac{4}{\sqrt{41}}$.

D. $\frac{3}{41}$.

Câu 11. Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn điều kiện $|z - 1 - 2i| + |z + 2 - 3i| = \sqrt{10}$ và có mô đun nhỏ nhất. Tính $S = 7a + b$?

A. 7.

B. 0.

C. 5.

D. -12.

Câu 12. Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn $|iz - 1 + i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1 + z_2 + 1 + 2i|$ có dạng $a + \sqrt{b}$. Khi đó $a^2 + b$ có giá trị là

A. 18.

B. 15.

C. 19.

D. 17.

Câu 13. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w = \frac{z + 3i - 1}{z + 3 + i}$ là thuần ảo. Xét các số phức

$z_1, z_2 \in S$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1 - 3i|^2 - |z_2 - 3i|^2$ bằng

A. $2\sqrt{26}$.

B. $4\sqrt{26}$.

C. 20.

D. 10.

Câu 14. Cho biểu thức $P = |z - 1 - 2i| + |z - 3 - 4i| + |z - 5 - 6i|$ và xét các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2| = |1 + 2i|$. Biết giá nhỏ nhất của P là $P_{\min} = a\sqrt{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $P = a + b$ bằng

A. $P = 10$.

B. $P = 11$.

C. $P = 12$.

D. $P = 13$.

Câu 15. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $5|z_1 - i| = |z_1 + 1 + i| + 3|z_1 - 1 - 3i|$ và $|z_2 + i| = 5$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1 + z_2 - 2 - 4i|$ bằng

A. $5 + 3\sqrt{5}$.

B. $2 + \sqrt{13}$.

C. 9.

D. $5 + 4\sqrt{5}$.

Câu 16. Cho số phức z có $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1|$.

A. $\frac{13}{4}$.

B. 3.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{11}{4}$.

Câu 17. Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = 2$ có hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2 - |z_2|^2$ bằng

A. -10.

B. $-4 - 3\sqrt{5}$.

C. -5.

D. $-6 - 2\sqrt{5}$.

Câu 18. Cho z là số phức thỏa mãn $|\bar{z}| = |z + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 1 + 2i| + |z + 1 + 3i|$ là

A. $5\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{29}$.

D. $\sqrt{5}$.

Câu 19. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Môđun của số phức $w = M + mi$ là

A. $|w| = 3\sqrt{137}$.

B. $|w| = \sqrt{1258}$.

C. $|w| = 2\sqrt{309}$.

D. $|w| = 2\sqrt{314}$.

Câu 20. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1 - i| = 2$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1 - z_2|$?

A. $m = \sqrt{2} - 1$.

B. $m = 2\sqrt{2}$.

C. $m = 2$.

D. $m = 2\sqrt{2} - 2$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

- Câu 21.** Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = 1$ và $|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a - 2b = 12$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_1| + |z - 2z_2| + 2$ bằng:
- A. $P_{\min} = \frac{\sqrt{9945}}{11}$. B. $P_{\min} = 5 - 2\sqrt{3}$. C. $P_{\min} = \frac{\sqrt{9945}}{13}$. D. $P_{\min} = 5 + 2\sqrt{5}$.
- Câu 22.** Cho các số phức z, z_1, z_2 thay đổi thỏa mãn các điều kiện sau: $|iz + 2i + 4| = 3$, phần thực của z_1 bằng 2, phần ảo của z_2 bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z - z_1|^2 + |z - z_2|^2$.
- A. 9. B. 2. C. 5. D. 4.
- Câu 23.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = |z + 2| + 2|z - 2|$.
- A. 10. B. $5\sqrt{2}$. C. $10\sqrt{2}$. D. 7.
- Câu 24.** Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z - 3 + \sqrt{3}i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng
- A. 8. B. $4\sqrt{3}$. C. 4. D. $2 + 2\sqrt{3}$.
- Câu 25.** Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 2 - 3i| = 2\sqrt{2}$. Tính $P = 2a + b$ khi $|z + 1 + 6i| + |z - 7 - 2i|$ đạt giá trị lớn nhất.
- A. $P = 3$. B. $P = -3$. C. $P = 1$. D. $P = 7$.
- Câu 26.** Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 2 + i| + \sqrt{6}|z - 2 - 3i|$ bằng
- A. $5\sqrt{6}$. B. $\sqrt{15}(1 + \sqrt{6})$. C. $6\sqrt{5}$. D. $\sqrt{10} + 3\sqrt{15}$.
- Câu 27.** Cho các số phức z và w thỏa mãn $(3-i)|z| = \frac{z}{w-1} + 1 - i$. Tìm giá trị lớn nhất $T = |w + i|$
- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. 2. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 28.** Cho các số phức z thỏa mãn $|z - \sqrt{2}| + |z + \sqrt{2}| = 2\sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2\sqrt{3} + i| + |z - 3\sqrt{3} + 2i| + |z - 3i|$.
- A. 12. B. 6. C. 8. D. 10.
- Câu 29.** Cho các số phức z và w thỏa mãn $|z - 4| = 1$ và $|iw - 2| = 1$. Khi $|z + 2w|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|iz + w|$ bằng
- A. $2\sqrt{5}$. B. $4\sqrt{2} - 3$. C. $\sqrt{6}$. D. $4\sqrt{2} + 3$.
- Câu 30.** Xét số phức z, w thỏa mãn $|z| = 1$ và $|w| = 2$. Khi $|z + iw - 3 + 4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z + w|$ bằng
- A. 3. B. $\frac{\sqrt{29}}{5}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\frac{\sqrt{221}}{5}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHỦ ĐỀ 3

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $|z + i + 1| = |\bar{z} - 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng

A. $\sqrt{2}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

C. 2.

D. 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thì điểm $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z .

Ta có: $|z + i + 1| = |\bar{z} - 2i| \Leftrightarrow |(x+1) + (y+1)i| = |x - (y+2)i|$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y+2)^2 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0.$$

Vậy M thuộc đường thẳng $\Delta: x - y - 1 = 0$.

Ta có $|z| = OM$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của O trên Δ .

$$\text{Vì vậy } |z|_{\min} = d(O, \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 3 - 4i| = 3$ và $w = 2z + 3 - 2i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $6 - 3\sqrt{5}$.

B. $6 + 3\sqrt{5}$.

C. 7.

D. $3\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

☺ Cách giải 1:

Ta có $|w| = |2z + 3 - 2i| = |2(z + 3 - 4i) - 3 + 6i| \leq |2(z + 3 - 4i)| + |-3 + 6i|$

$$= 6 + \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = 6 + 3\sqrt{5}. \text{ Do đó } |w|_{\max} = 6 + 3\sqrt{5}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} z + 3 - 4i = k(-3 + 6i), k > 0 \\ |z + 3 - 4i| = 3 \end{cases}$; suy ra $\begin{cases} \sqrt{9k^2 + 36k^2} = 3 \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{5}}{5}.$

☺ Cách giải 2:

$$\text{Ta có: } w = 2z + 3 - 2i \Rightarrow z = \frac{w - 3 + 2i}{2} (*).$$

Thay (*) vào $|z + 3 - 4i| = 3$, ta được:

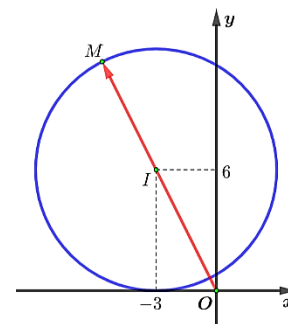
$$\left| \frac{w - 3 + 2i}{2} + 3 - 4i \right| = 3 \Leftrightarrow |w + 3 - 6i| = 6.$$

Gọi M là điểm biểu diễn của w thì M thuộc đường tròn tâm $I(-3; 6)$, bán kính $R = 6$.

$$\text{Do vậy } |w|_{\max} = OM_{\max} = OI + R = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} + 6 = 3\sqrt{5} + 6.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ba điểm O, I, M thẳng hàng theo thứ tự đó.

Câu 3. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\frac{z+2}{z+2i}$ là một số thuần ảo. Khi số phức z có môđun nhỏ nhất, hãy tính $a + b$.



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

A. $a+b=0$.

B. $a+b=2\sqrt{2}-1$.

C. $a+b=4$.

D. $a+b=2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn cho số phức z . Điều kiện: $z \neq -2i$.

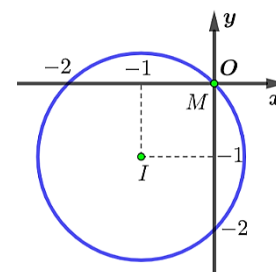
$$\text{Xét } w = \frac{z+2}{z+2i} = \frac{a+2+bi}{a+(b+2)i} = \frac{(a+2+bi)[a-(b+2)i]}{a^2+(b+2)^2}.$$

Vì w thuần ảo nên

$$(a+2)a + b(b+2) = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2a + 2b = 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b+1)^2 = 2.$$

Suy ra M thuộc đường tròn tâm $I(-1; -1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Ta có $|z| = OM$ nhỏ nhất khi M và O trùng nhau. Vậy $z = 0 \Rightarrow a+b=0$.



Câu 4. Cho số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1 - 1 - 2i| = 2$ và $|z_2 + 2 + 3i| = |z_2 - 1 - i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ bằng

A. $\frac{33}{10}$.

B. $\frac{29}{10}$.

C. $\frac{9}{10}$.

D. $\frac{13}{10}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi M là điểm biểu diễn của z_1 thì M thuộc đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 2$.

Gọi $z_2 = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó: $|z_2 + 2 + 3i| = |z_2 - 1 - i|$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+3)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow 6x + 8y + 11 = 0.$$

Gọi N là điểm biểu diễn của z_2 thì N thuộc đường thẳng

$$d: 6x + 8y + 11 = 0.$$

$$\text{Ta có: } |z_1 - z_2| = NM \geq d(I, d) - R = \frac{33}{10} - 2 = \frac{13}{10} \text{ hay } |z_1 - z_2|_{\min} = \frac{13}{10}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi I, M, N thẳng hàng theo thứ tự đó và N là hình chiếu của I trên d .

Câu 5. Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 2\sqrt{5}$ và số phức w thỏa $(5+10i)\bar{w} = (3-4i)z - 25i$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |w|$ bằng

A. 4.

B. $2\sqrt{10}$.

C. $4\sqrt{5}$.

D. 6.

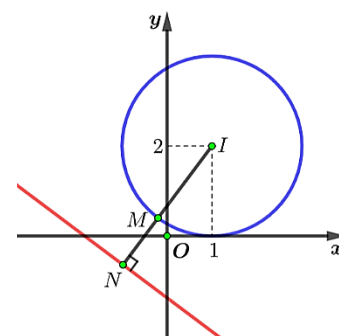
Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$\text{Ta có } (5+10i)\bar{w} = (3-4i)z - 25i \Leftrightarrow z = \frac{(5+10i)\bar{w} + 25i}{3-4i} \Leftrightarrow z = (-1+2i)\bar{w} - 4 + 3i.$$

$$\text{Khi đó: } |z - 1 + 2i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |(-1+2i)\bar{w} - 5 + 5i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |(-1+2i)\bar{w} - 5 + 5i| = 2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |-1+2i| \cdot \left| \bar{w} + \frac{-5+5i}{-1+2i} \right| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |\bar{w} + 3 + i| = 2 \Leftrightarrow \left| \overline{(\bar{w} + 3 + i)} \right| = 2 \Leftrightarrow |w + 3 - i| = 2.$$

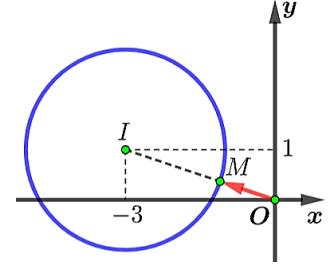


PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Gọi M là điểm biểu diễn của w thì M thuộc đường tròn tâm $I(-3;1)$, bán kính $R=2$.

Khi đó: $P = |w| = OM \geq OI - R = \sqrt{10} - 2$ hay $P_{\min} = \sqrt{10} - 2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi O, M, I thẳng hàng theo thứ tự đó.



Câu 6. Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z + 2w = 8 - 6i$ và $|z - w| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z| + |w|$ bằng

A. $4\sqrt{6}$.

B. $2\sqrt{26}$.

C. $\sqrt{66}$.

D. $3\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Giả sử M, N lần lượt là các điểm biểu diễn cho z và w .

Lấy E đối xứng O qua N , vẽ hình bình hành $OMFE$.

Suy ra $\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OI} = (8; -6)$

$\Rightarrow OF = 10, OI = 5; |z - w| = MN = 4$.

Đặt $|z| = OM = a, |w| = ON = \frac{b}{2}$.

Theo tính chất trung tuyến trong tam giác, ta có:

$$\begin{cases} OI^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{ME^2}{4} = 25 \\ MN^2 = \frac{a^2 + ME^2}{2} - \frac{b^2}{4} = 16 \end{cases} \Rightarrow \frac{3a^2}{2} + \frac{3b^2}{4} = 66 \Rightarrow 2a^2 + b^2 = 88.$$

Ta có: $(|z| + |w|)^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}a + \frac{1}{2}b\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)(2a^2 + b^2) = \frac{3}{4}.88 = 66$.

Suy ra $|z| + |w| \leq \sqrt{66}$ hay $(|z| + |w|)_{\max} = \sqrt{66}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2a^2 + b^2 = 88 \\ \frac{a\sqrt{2}}{b} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 3a^2 = 88 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ hay } OM = \frac{2\sqrt{6}}{3}, ON = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 7. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}, |w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z - w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0, w = w_0$. Tính $|3z_0 - w_0|$.

A. $2\sqrt{2}$.

B. $4\sqrt{2}$.

C. 1.

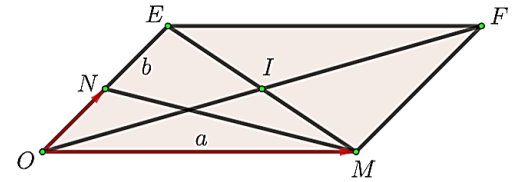
D. $6\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi M, N theo thứ tự là các điểm biểu diễn của các số phức z, w .

Vì $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ nên M thuộc đường tròn tâm $I(3\sqrt{2}; 0)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Vì $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$ nên N thuộc đường tròn tâm $J(0; 4\sqrt{2})$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có: $|z - w| = MN \geq IJ - r - R = 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ hay $|z - w|_{\min} = 2\sqrt{2}$.

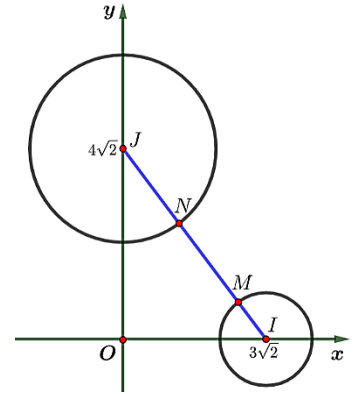
Dấu đẳng thức xảy ra khi I, M, N, J thẳng hàng theo thứ tự đó.

Ta có:

$$\overrightarrow{IM} = \frac{IM}{IJ} \overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{1}{5} \overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{12\sqrt{2}}{5} \\ y_M = \frac{4\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow z_0 = \frac{12\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{5}i$$

$$\overrightarrow{IN} = \frac{IN}{IJ} \overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IN} = \frac{3}{5} \overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \frac{6\sqrt{2}}{5} \\ y_N = \frac{12\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow w_0 = \frac{6\sqrt{2}}{5} + \frac{12\sqrt{2}}{5}i.$$

Suy ra $|3z_0 - w_0| = |6\sqrt{2}| = 6\sqrt{2}$.



Câu 8. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|z_1 = 4|z_2|z_2$. Biết rằng M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z_1, \bar{z}_2$ trên mặt phẳng tọa độ thỏa mãn tam giác MON có diện tích bằng 32, khi đó giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + z_2|$ bằng

A. $8\sqrt{2}$.

B. $12\sqrt{2}$.

C. 12.

D. 16.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $|z_1|z_1 = 4|z_2|z_2 \Rightarrow |z_1| \cdot |z_1| = |4z_2| \cdot |z_2| \Rightarrow |z_1|^2 = 4|z_2|^2 \Rightarrow |z_1| = 2|z_2|$

Thay $|z_1| = 2|z_2|$ vào $|z_1|z_1 = 4|z_2|z_2$, ta có: $2|z_2|z_1 = 4|z_2|z_2 \Rightarrow z_1 = 2z_2 \Rightarrow |z_1 + z_2| = |3z_2| = 3|z_2|$.

Gọi $z_1 = 2a + 2bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z_2 = a + bi \Rightarrow \bar{z}_2 = a - bi$.

Vì M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z_1, \bar{z}_2$ nên $M(2a; 2b), N(a; -b)$.

Suy ra $\overrightarrow{OM} = (2a; 2b), \overrightarrow{ON} = (a; -b); S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2}|2a(-b) - 2b \cdot a| = 2|ab| = 32 \Rightarrow |ab| = 16$.

Khi đó: $|z_1 + z_2| = 3|z_2| = 3\sqrt{a^2 + b^2} \geq 3\sqrt{2|ab|} = 12\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |a| = |b| \\ |ab| = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 4 \\ b = \pm 4 \end{cases}$.

Câu 9. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z_1 = a + (a^2 - 2a + 2)i$ và N là điểm biểu diễn cho số phức z_2 biết $|z_2 - 2 - i| = |\bar{z}_2 - 6 - i|$. Tìm khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm M, N .

A. $2\sqrt{5}$.

B. 5.

C. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

D. 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Ta có $z_1 = a + (a^2 - 2a + 2)i \Rightarrow M(a; a^2 - 2a + 2)$. Gọi $z_2 = x + yi, (x; y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z_2 - 2 - i| = |\bar{z}_2 - 6 - i| \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (x - 6)^2 + (y + 1)^2 \Leftrightarrow 2x - y - 8 = 0$.

Suy ra N thuộc đường thẳng $d: 2x - y - 8 = 0$.

$$\text{Khi đó } MN_{\min} = d(M, d) = \frac{|2a - a^2 + 2a - 2 - 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|(a-2)^2 + 6|}{\sqrt{5}} \geq \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Vậy $\min MN = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2$ hay $z_1 = 2 + 2i$.

Câu 10. Cho hai số phức z và $\omega = a + bi$ thỏa mãn $|z + \sqrt{5}| + |z - \sqrt{5}| = 6$; $5a - 4b - 20 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - \omega|$ là

A. $\frac{3}{\sqrt{41}}$.

B. $\frac{5}{\sqrt{41}}$.

C. $\frac{4}{\sqrt{41}}$.

D. $\frac{3}{41}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đặt $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0) \Rightarrow F_1F_2 = 2\sqrt{5}$; M là điểm biểu diễn của z .

Ta có $|z + \sqrt{5}| + |z - \sqrt{5}| = 6 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 6 > 2\sqrt{5}$ nên M thuộc elip với
$$\begin{cases} 2a = 6 \\ 2c = 2\sqrt{5} \\ b^2 = a^2 - c^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = \sqrt{5} \\ b = 2 \end{cases}; \text{ suy ra } (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Tập hợp các điểm N biểu diễn số phức ω là đường thẳng $\Delta: 5x - 4y - 20 = 0$.

Ta có $|z - \omega| = MN$. Yêu cầu bài toán là tìm điểm $M \in (E)$

và $N \in \Delta$ sao cho MN nhỏ nhất.

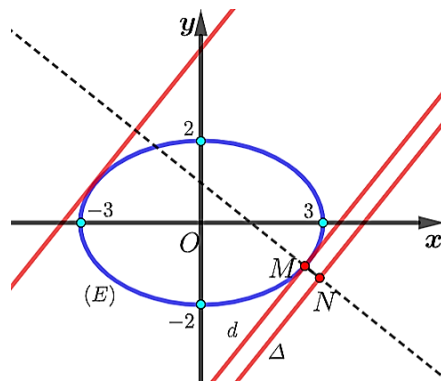
Xét đường thẳng d song song với Δ , d có dạng

$$5x - 4y + C = 0 \quad (C \neq -20).$$

$$d \text{ tiếp xúc với } (E) \text{ khi và chỉ khi } C^2 = (5.3)^2 + (-4.2)^2 = 289 \Rightarrow \begin{cases} C = 17 \\ C = -17 \end{cases}.$$

$$\text{Với } C = 17 \Rightarrow d(d, \Delta) = \frac{|-20 - 17|}{\sqrt{5^2 + (-4)^2}} = \frac{37}{\sqrt{41}}. \text{ Với } C = -17 \Rightarrow d(d, \Delta) = \frac{|-20 + 17|}{\sqrt{5^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{\sqrt{41}}.$$

$$\text{Vậy } MN_{\min} = \frac{3}{\sqrt{41}}.$$



Nhắc lại:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Điều kiện để đường thẳng $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với elip

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0, c^2 = a^2 - b^2) \text{ là: } (Aa)^2 + (Bb)^2 = C^2.$$

Câu 11. Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn điều kiện $|z - 1 - 2i| + |z + 2 - 3i| = \sqrt{10}$ và có mô đun nhỏ nhất. Tính $S = 7a + b$?

A. 7.

B. 0.

C. 5.

D. -12.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi $A(1; 2)$, $B(-2; 3)$ và $M(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$.

Ta có $|z - 1 - 2i| + |z + 2 - 3i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow MA + MB = AB \Leftrightarrow A, M, B$ thẳng hàng theo thứ tự đó.

Ta cần tìm điểm M thuộc đoạn AB để $|z| = OM$ bé nhất.

Phương trình đường thẳng AB : $\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-2}{3-2} \Leftrightarrow x + 3y - 7 = 0$.

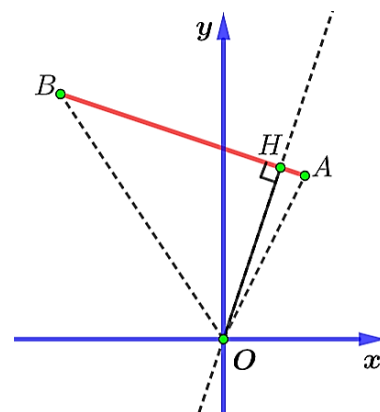
Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng AB .

Đường thẳng OH qua O và vuông góc AB nên có phương trình $OH: 3x - y = 0$.

Suy ra tọa độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 3y - 7 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$ hay $H\left(\frac{7}{10}; \frac{21}{10}\right)$.

Ta thấy H thuộc đoạn AB vì $x_B < x_H < x_A$. Vậy $|z| = OM$ bé nhất khi $M \equiv H$.

Ta có: $z = \frac{7}{10} + \frac{21}{10}i \Rightarrow a = \frac{7}{10}, b = \frac{21}{10} \Rightarrow 7a + b = 7$.



Câu 12. Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn $|iz - 1 + i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = |z_1 + z_2 + 1 + 2i|$ có dạng $a + \sqrt{b}$. Khi đó $a^2 + b$ có giá trị là

A. 18.

B. 15.

C. 19.

D. 17.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

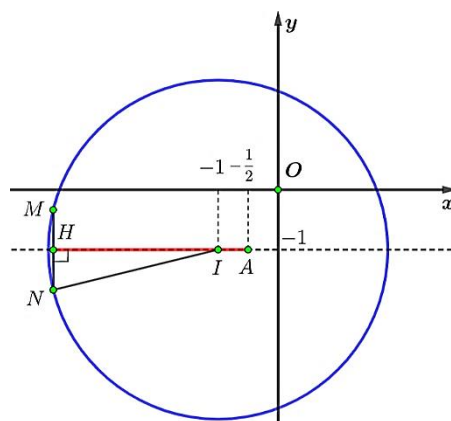
Ta có: $|iz - 1 + i| = 2 \Leftrightarrow |i| \cdot \left|z + \frac{-1+i}{i}\right| = 2 \Leftrightarrow |z + 1 + i| = 2$.

Gọi M, N theo thứ tự là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 thì M, N thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-1; -1)$, bán kính $R = 2$.

Mặt khác $|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Rightarrow MN = \sqrt{2}$.

$P = |z_1 + z_2 + 1 + 2i| = 2 \left| \frac{z_1 + z_2}{2} - \left(-\frac{1}{2} - i\right) \right| = 2HA$ với H là

trung điểm MN và $A\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$.



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

P đạt giá trị lớn nhất khi AH lớn nhất; suy ra A, I, H thẳng hàng theo thứ tự đó.

$$\text{Ta có: } AH_{\max} = IA + \sqrt{IN^2 - NH^2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1 + \sqrt{14}}{2}.$$

$$\text{Khi đó: } P_{\max} = 2HA_{\max} = 1 + \sqrt{14} = a + \sqrt{b} \Rightarrow a = 1, b = 14 \Rightarrow a^2 + b = 15.$$

Câu 13. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w = \frac{z+3i-1}{z+3+i}$ là thuần ảo. Xét các số phức

$z_1, z_2 \in S$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1 - 3i|^2 - |z_2 - 3i|^2$ bằng

- A. $2\sqrt{26}$. **B. $4\sqrt{26}$.** C. 20. D. 10.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), $z \neq -3 - i$.

$$\text{Khi đó ta có: } w = \frac{x + yi + 3i - 1}{x + yi + 3 + i} = \frac{[(x-1) + (y+3)i][(x+3) - (y+1)i]}{(x+3)^2 + (y+1)^2}$$

Vì w là số thuần ảo nên $(x-1)(x+3) + (y+1)(y+3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$.

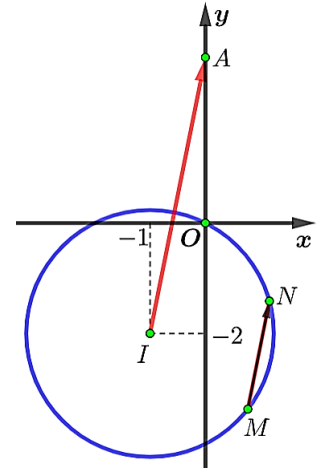
Suy ra tập hợp điểm biểu diễn của w là đường tròn (C) tâm $I(-1; -2)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Gọi M, N là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 thì MN là dây cung của đường tròn (C) và $MN = 2$.

Gọi $A(0; 3)$ là điểm biểu diễn của $3i$, ta có $IA = \sqrt{26}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= |z_1 - 3i|^2 - |z_2 - 3i|^2 = MA^2 - NA^2 = \overline{MA}^2 - \overline{NA}^2 \\ &= (\overline{MI} + \overline{IA})^2 - (\overline{NI} + \overline{IA})^2 \\ &= \overline{MI}^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IA} + \overline{IA}^2 - (\overline{NI}^2 + 2\overline{NI} \cdot \overline{IA} + \overline{IA}^2) \\ &= 2\overline{IA}(\overline{MI} - \overline{NI}) = 2\overline{IA} \cdot \overline{MN} = 2IA \cdot MN \cdot \cos(\overline{IA}, \overline{MN}) \\ &= 4\sqrt{26} \cdot \cos(\overline{IA}, \overline{MN}) \leq 4\sqrt{26}. \end{aligned}$$

Vậy $P_{\max} = 4\sqrt{26}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai vector $\overline{IA}, \overline{MN}$ cùng hướng.



Câu 14. Cho biểu thức $P = |z - 1 - 2i| + |z - 3 - 4i| + |z - 5 - 6i|$ và xét các số phức z thỏa mãn điều kiện

$|z + 2| = |1 + 2i|$. Biết giá nhỏ nhất của P là $P_{\min} = a\sqrt{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của

- $P = a + b$ bằng
 A. $P = 10$. **B. $P = 11$.** C. $P = 12$. D. $P = 13$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Đặt $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z và $A(1; 2), B(3; 4), C(5; 6)$.

$$\text{Ta có } P = |z - 1 - 2i| + |z - 3 - 4i| + |z - 5 - 6i| = MA + MB + MC$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12

20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Nhận thấy các điểm A, B, C cùng thuộc đường thẳng

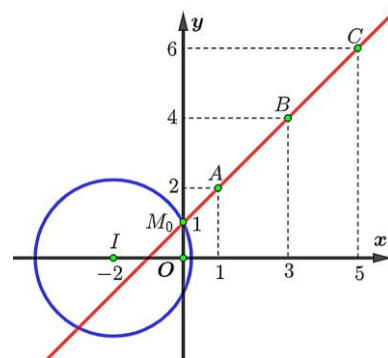
$$\Delta: x - y + 1 = 0.$$

Ta có: $|z + 2| = |1 + 2i| \Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 5$, suy ra M thuộc đường

tròn tâm $I(-2; 0)$ bán kính $R = \sqrt{5}$.

Từ hình vẽ có nhận định: $P = MA + MB + MC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv M_0$ với $M_0(0; 1)$.

Khi đó: $P_{\min} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \Rightarrow a + b = 11$.



Câu 15. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $5|z_1 - i| = |z_1 + 1 + i| + 3|z_1 - 1 - 3i|$ và $|z_2 + i| = 5$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1 + z_2 - 2 - 4i|$ bằng

A. $5 + 3\sqrt{5}$.

B. $2 + \sqrt{13}$.

C. 9.

D. $5 + 4\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi $A(0; 1), B(-1; -1), C(1; 3); M$ và N là hai điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 .

Ta thấy A là trung điểm đoạn BC . Ta có: $5MA = MB + 3MC$.

Theo công thức đường trung tuyến, ta có:

$$MA^2 = \frac{MB^2 + MC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \Leftrightarrow MB^2 + MC^2 = 2MA^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\text{Ta có: } 5MA = MB + 3MC \leq \sqrt{1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{MB^2 + MC^2} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{2MA^2 + \frac{BC^2}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 25MA^2 \leq 10 \left(2MA^2 + \frac{BC^2}{2} \right) \Leftrightarrow MA^2 \leq BC^2 \Leftrightarrow MA \leq 2\sqrt{5} \text{ hay } |z_1 - i| \leq 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Xét } P = |z_1 + z_2 - 2 - 4i| = |(z_1 - i) + (z_2 + i) + (-2 - 4i)| \leq |z_1 - i| + |z_2 + i| + |-2 - 4i|.$$

$$P \leq 2\sqrt{5} + 5 + 2\sqrt{5} \text{ hay } P_{\max} = 4\sqrt{5} + 5.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} z_1 - i = k(-2 - 4i), k > 0 \\ |z_1 - i| = 2\sqrt{5} \\ z_2 + i = l(-2 - 4i), l > 0 \\ |z_2 + i| = 5 \end{cases}.$$

Câu 16. Cho số phức z có $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1|$.

A. $\frac{13}{4}$.

B. 3.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{11}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$$\text{Ta có: } P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1| = |z| \cdot |z - 1| + |z^2 + z + z\bar{z}| = 1 \cdot |z - 1| + |z| \cdot |z + 1 + \bar{z}| = |z - 1| + |z + \bar{z} + 1|.$$

$$\text{Đặt } z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}). \text{ Suy ra } P = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + |2x+1| = \sqrt{2-2x} + |2x+1| \text{ vì } x^2 + y^2 = 1.$$

$$\text{Xét } f(x) = \sqrt{2-2x} + |2x+1| = \begin{cases} \sqrt{2-2x} + 2x+1, & \text{khi } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \sqrt{2-2x} - 2x-1, & \text{khi } -1 \leq x < -\frac{1}{2} \end{cases};$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2-2x}} + 2 & \text{khi } -\frac{1}{2} < x < 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2-2x}} - 2 & \text{khi } -1 \leq x < -\frac{1}{2} \end{cases}; f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2-2x}} + 2 = 0 \left(-\frac{1}{2} < x < 1 \right) \Rightarrow x = \frac{7}{8}.$$

Ta có: $f(-1) = 3$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$, $f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{13}{4}$, $f(1) = 3$. Vậy $P_{\max} = f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{13}{4}$.

Câu 17. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=2$ có hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-z_2|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2 - |z_2|^2$ bằng

A. -10.

B. $-4-3\sqrt{5}$.

C. -5.

D. $-6-2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi M, N theo thứ tự là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 . Vì z_1, z_2 cùng thỏa $|z-3-4i|=2$ nên M, N cùng thuộc đường tròn tâm $I(3;3)$, bán kính $R=2$. Mặt khác $|z_1-z_2|=1 \Rightarrow \boxed{MN=1}$.

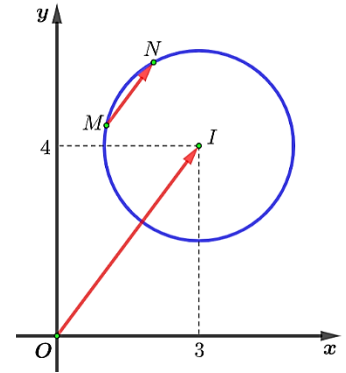
Gọi K là trung điểm của đoạn MN .

$$\begin{aligned} \text{Xét } P &= |z_1|^2 - |z_2|^2 = \overline{OM}^2 - \overline{ON}^2 = (\overline{OM} - \overline{ON})(\overline{OM} + \overline{ON}) \\ &= \overline{NM} \cdot 2\overline{OK} = 2\overline{NM} \cdot (\overline{OI} + \overline{IK}) = 2\overline{NM} \cdot \overline{OI} + 2\overline{NM} \cdot \overline{IK} = 2\overline{NM} \cdot \overline{OI} \end{aligned}$$

(vì NM và IK vuông góc nhau, tức $\overline{NM} \cdot \overline{IK} = 0$).

$$P = 2\overline{NM} \cdot \overline{OI} \cdot \cos(\overline{NM}, \overline{OI}) = 2 \cdot 1 \cdot 5 \cos(\overline{NM}, \overline{OI}) \geq -10 \quad (\text{do } \cos(\overline{NM}, \overline{OI}) \geq -1).$$

Vậy $P_{\min} = -10$; khi đó hai vectơ $\overline{NM}, \overline{OI}$ ngược hướng (hay $\cos(\overline{NM}, \overline{OI}) = -1$).



Câu 18. Cho z là số phức thỏa mãn $|\bar{z}| = |z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-1+2i| + |z+1+3i|$ là

A. $5\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{29}$.

D. $\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có: } |\bar{z}| = |z+2i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y+2)^2} \Leftrightarrow x^2+y^2 = x^2+y^2+4y+4 \Leftrightarrow y = -1.$$

Suy ra $z = x - i$.

$$\text{Xét: } T = |z-1+2i| + |z+1+3i| = |x-1+i| + |x+1+2i| = \sqrt{(1-x)^2+1^2} + \sqrt{(1+x)^2+2^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Mincowski:

$$\sqrt{(1-x)^2+1^2} + \sqrt{(1+x)^2+2^2} \geq \sqrt{(1-x+1+x)^2+(1+2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}. \text{ Vậy } T_{\min} = \sqrt{13}.$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1-x}{1} = \frac{1+x}{2} \Leftrightarrow 2-2x=1+x \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

Câu 19. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Môđun của số phức $w=M+mi$ là

A. $|w|=3\sqrt{137}$.

B. $|w|=\sqrt{1258}$.

C. $|w|=2\sqrt{309}$.

D. $|w|=2\sqrt{314}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi $z=x+yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z-3-4i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow |(x-3)+(y-4)i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=5$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Khi đó: $P=|z+2|^2-|z-i|^2=(x+2)^2+y^2-x^2-(y-1)^2=4x+2y+3$.

☺ Cách giải 1:

Ta thấy M thuộc đường tròn (C) và đường thẳng $\Delta: 4x+2y+3-P=0$.

Điều kiện để tồn tại điểm M là Δ và (C) có điểm chung $\Leftrightarrow d(I, \Delta) \leq R \Leftrightarrow \frac{|23-P|}{2\sqrt{5}} \leq \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow |P-23| \leq 10 \Leftrightarrow -10 \leq P-23 \leq 10 \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33$.

Vậy $M=33$ và $m=13 \Rightarrow w=33+13i$. Suy ra $|w|=\sqrt{1258}$.

☺ Cách giải 2:

$P=4x+2y+3=4(x-3)+2(y-4)+23$.

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$|4(x-3)+2(y-4)| \leq \sqrt{4^2+2^2} \cdot \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} = \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = 10$.

Suy ra $-10 \leq 4(x-3)+2(y-4) \leq 10 \Rightarrow 23-10 \leq 4(x-3)+2(y-4)+23 \leq 10+23$.

Ta có: $13 \leq P \leq 33$ nên $M=33$ và $m=13 \Rightarrow w=33+13i$. Suy ra $|w|=\sqrt{1258}$.

Câu 20. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+1-i|=2$ và $z_2=iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1-z_2|$?

A. $m=\sqrt{2}-1$.

B. $m=2\sqrt{2}$.

C. $m=2$.

D. $m=2\sqrt{2}-2$.

Hướng dẫn giải:

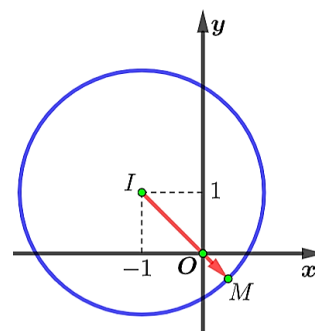
Chọn D.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z_1 , vì $|z_1+1-i|=2$ nên M thuộc đường tròn tâm $I(-1;1)$, bán kính $R=2$.

Xét $P=|z_1-z_2|=|z_1-iz_1|=|z_1(1-i)|=\sqrt{2}|z_1|=\sqrt{2}OM$.

Ta có: $P=\sqrt{2}OM \leq \sqrt{2}(R-OI)=\sqrt{2}(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2$.

Vậy $P_{\max}=2\sqrt{2}-2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi I, O, M thẳng hàng theo thứ tự đó.



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Câu 21. Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = 1$ và $|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a - 2b = 12$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_1| + |z - 2z_2| + 2$ bằng:

A. $P_{\min} = \frac{\sqrt{9945}}{11}$.

B. $P_{\min} = 5 - 2\sqrt{3}$.

C. $P_{\min} = \frac{\sqrt{9945}}{13}$.

D. $P_{\min} = 5 + 2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

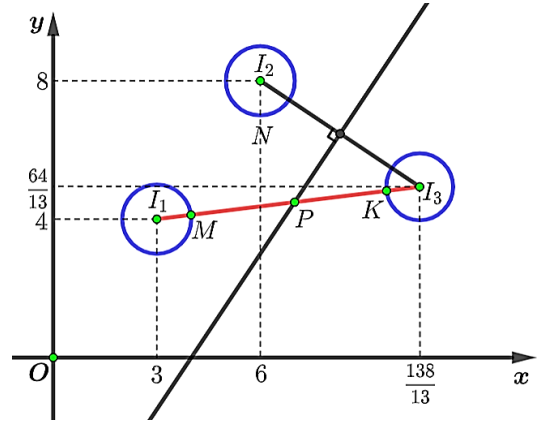
Gọi M, N, P lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức $z_1, 2z_2, z$ trên hệ trục tọa độ Oxy .

Vì $|z_1 - 3 - 4i| = 1$ nên M thuộc đường tròn (C_1) có tâm $I_1(3; 4)$, bán kính $R_1 = 1$;

$|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |2z_2 - 6 - 8i| = 1$ nên N thuộc đường

tròn (C_2) tâm $I_2(6; 8)$, bán kính $R_2 = 1$.

Mặt khác P thuộc đường thẳng $\Delta: 3x - 2y - 12 = 0$. Ta thấy $(C_1), (C_2)$ cùng phía so với Δ .



Lấy đường tròn (C_3) đối xứng (C_2) qua Δ , suy ra (C_3) có tâm $I_3\left(\frac{138}{13}; \frac{64}{13}\right)$, bán kính $R_3 = 1$.

Lấy điểm K đối xứng với N qua Δ thì K thuộc đường tròn (C_3) . Suy ra $PN = PK$.

Ta có: $P = |z - z_1| + |z - 2z_2| + 2 = PM + PN + 2 = PM + PK + 2 \geq MK + 2$.

Suy ra $P_{\min} = MK + 2 = I_1I_3 - R_1 - R_3 + 2 = \frac{\sqrt{9945}}{13}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi I_1, M, P, K, I_3 thẳng hàng theo thứ tự đó.

Câu 22. Cho các số phức z, z_1, z_2 thay đổi thỏa mãn các điều kiện sau: $|iz + 2i + 4| = 3$, phần thực của z_1 bằng 2, phần ảo của z_2 bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z - z_1|^2 + |z - z_2|^2$.

A. 9.

B. 2.

C. 5.

D. 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi M là điểm biểu diễn của z . Ta có:

$$|iz + 2i + 4| = 3 \Leftrightarrow |i| \cdot |z + 2 - 4i| = 3 \Leftrightarrow |z + 2 - 4i| = 3.$$

Vì vậy M thuộc đường tròn tâm $I(-2; 4)$, bán kính $R = 3$.

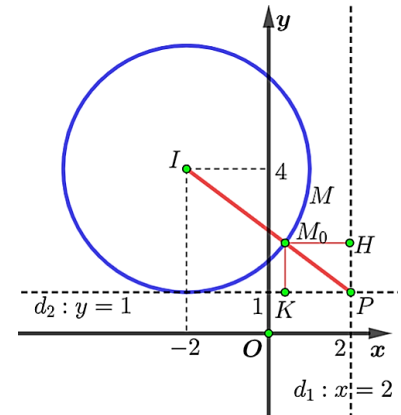
Gọi A là điểm biểu diễn của z_1 thì A thuộc đường thẳng $d_1: x = 2$.

Gọi B là điểm biểu diễn của z_2 thì B thuộc đường thẳng $d_2: y = 1$.

Giao điểm của d_1 và d_2 là $P(2; 1)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên d_1 và d_2 .

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên d_1 và d_2 .

Ta có: $T = |z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = MA^2 + MB^2 \geq MH^2 + MK^2 = MP^2$;



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

$$T \geq M_0 P^2 = (IP - R)^2 = (5 - 3)^2 = 4.$$

Suy ra $T_{\min} = 4$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi I, M, P thẳng hàng theo thứ tự đó.

Câu 23. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = |z + 2| + 2|z - 2|$.

A. 10.

B. $5\sqrt{2}$.

C. $10\sqrt{2}$.

D. 7.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

☺ Cách giải 1:

Ta có: $|z| = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$.

$$\text{Xét } |z + 2|^2 + |z - 2|^2 = (a + 2)^2 + b^2 + (a - 2)^2 + b^2 = 2(a^2 + b^2) + 8 = 10.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$A^2 = (|z + 2| + 2|z - 2|)^2 \leq (1^2 + 2^2)(|z + 2|^2 + |z - 2|^2) = 50 \Rightarrow A \leq 5\sqrt{2} \text{ hay } A_{\max} = 5\sqrt{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{|z + 2|}{1} = \frac{|z - 2|}{2}$ và $|z| = 1$.

☺ Cách giải 2:

Ta có: $|z| = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$.

$$A = |z + 2| + 2|z - 2| = \sqrt{(a + 2)^2 + b^2} + 2\sqrt{(a - 2)^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + 4a + 4} + 2\sqrt{a^2 + b^2 - 4a + 4} = \sqrt{4a + 5} + 2\sqrt{-4a + 5}.$$

Đặt $f(a) = \sqrt{4a + 5} + 2\sqrt{-4a + 5}$ với $-1 \leq a \leq 1$ (do $a^2 + b^2 = 1$);

$$f'(a) = \frac{2}{\sqrt{4a + 5}} - \frac{4}{\sqrt{-4a + 5}} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{4a + 5} = \sqrt{-4a + 5} \Rightarrow 16a + 20 = -4a + 5 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}.$$

Ta có $f(-1) = 7$, $f(1) = 5$, $f\left(-\frac{3}{4}\right) = 5\sqrt{2}$. Vậy $\max_{[-1;1]} f(a) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = 5\sqrt{2}$ hay $A_{\max} = 5\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = -\frac{3}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$ hay $z = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}i$.

Câu 24. Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z - 3 + \sqrt{3}i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. 8.

B. $4\sqrt{3}$.

C. 4.

D. $2 + 2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

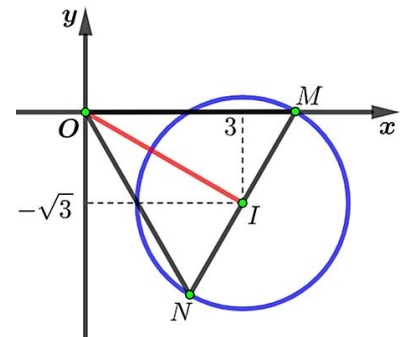
Chọn A.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2 .

Vì z_1, z_2 cùng thỏa $|z - 3 + \sqrt{3}i| = 2$ nên M, N cùng thuộc đường

tròn (C) có tâm $I(3; -\sqrt{3})$, bán kính $R = 2$.

Mặt khác $|z_1 - z_2| = 4 \Rightarrow MN = 4 = 2R$; suy ra MN là đường kính của đường tròn (C) .



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Ta có: $T = |z_1| + |z_2| = 1.OM + 1.ON \leq \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{OM^2 + ON^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2OI^2 + \frac{MN^2}{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2.12 + \frac{4^2}{2}} = 8$.

Vậy $T \leq 8$ nên $T_{\min} = 8$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{OM}{1} = \frac{ON}{1} \\ OM + ON = 8 \end{cases} \Leftrightarrow OM = ON = 4$.

Câu 25. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 2 - 3i| = 2\sqrt{2}$. Tính $P = 2a + b$ khi $|z + 1 + 6i| + |z - 7 - 2i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 3$.

B. $P = -3$.

C. $P = 1$.

D. $P = 7$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi M là điểm biểu diễn của z ; vì $|z + 2 - 3i| = 2\sqrt{2}$ nên M thuộc đường tròn tâm $I(-2; 3)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Gọi $A(-1; -6)$, $B(7; 2) \Rightarrow AB = 8\sqrt{2}$. Gọi $K(3; -2)$ là trung điểm của AB .

Xét $P = |z + 1 + 6i| + |z - 7 - 2i| = 1.MA + 1.MB$

$$T \leq \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{MA^2 + MB^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2MK^2 + \frac{AB^2}{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2MK^2 + 64}$$

Trong đó: $MK \leq MI + IK = R + IK = 2 + 5\sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } T \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2(2 + 5\sqrt{2})^2 + 64}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M, I, K thẳng hàng theo thứ tự đó.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MI} = MI \cdot \frac{\overrightarrow{IK}}{IK} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - a = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \cdot 5 \\ 3 - b = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \cdot (-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } P = 2a + b = -8 + 5 = -3.$$

Câu 26. Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = |z + 2 + i| + \sqrt{6}|z - 2 - 3i| \text{ bằng}$$

A. $5\sqrt{6}$.

B. $\sqrt{15}(1 + \sqrt{6})$.

C. $6\sqrt{5}$.

D. $\sqrt{10} + 3\sqrt{15}$.

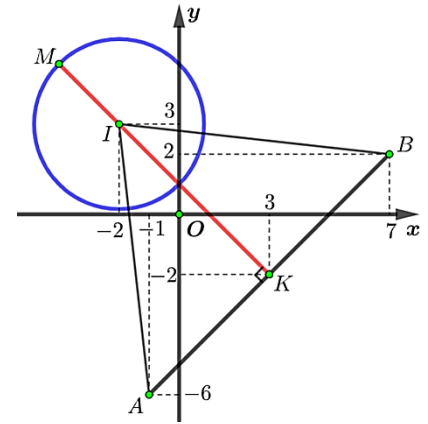
Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Giả sử $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z khi đó

$$|(1+i)z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \left| (1+i) \left(z + \frac{1-3i}{1+i} \right) \right| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |z - 1 - 2i| = 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9.$$

Do đó M thuộc đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 3$.



PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Đặt $\begin{cases} a = x-1 \\ b = y-2 \end{cases}$ Ta có $a^2 + b^2 = 9$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= |z+2+i| + \sqrt{6}|z-2-3i| = \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{6[(x-2)^2 + (y-3)^2]} \\ &= \sqrt{(a+3)^2 + (b+3)^2} + \sqrt{6[(a-1)^2 + (b-1)^2]} = \sqrt{6(a+b)+27} + \sqrt{6[(-2)(a+b)+11]} \\ &= \sqrt{6(a+b)+27} + \sqrt{2}\sqrt{(-6)(a+b)+33} \leq \sqrt{(1+2)(27+33)} = 6\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6(a+b)+27}}{\sqrt{(-6)(a+b)+33}} \end{cases}$.

Câu 27. Cho các số phức z và w thỏa mãn $(3-i)|z| = \frac{z}{w-1} + 1-i$. Tìm giá trị lớn nhất $T = |w+i|$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Xét $(3-i)|z| = \frac{z}{w-1} + 1-i \Leftrightarrow \frac{z}{w-1} = 3|z|-1+(1-|z|)i \Rightarrow \left| \frac{z}{w-1} \right| = \sqrt{(3|z|-1)^2 + (1-|z|)^2}$. (*)

Đặt $t = |z|$, $t > 0$. Khi đó (*) trở thành: $\frac{t}{|w-1|} = \sqrt{(3t-1)^2 + (1-t)^2} \Leftrightarrow |w-1| = \frac{t}{\sqrt{10t^2 - 8t + 2}}$.

$$\Leftrightarrow |w-1| = \frac{1}{\sqrt{10 - \frac{8}{t} + \frac{2}{t^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{t} - 2\right)^2 + 2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}; \forall t > 0.$$

Ta lại có: $|w+i| = |(w-1) + (1+i)| \leq |w-1| + |1+i| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \Rightarrow |w+i| \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} t = |z| = \frac{1}{2} \\ w-1 = k(1+i) \quad (k > 0) \\ |w+i| = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}i \\ w = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức T là $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Câu 28. Cho các số phức z thỏa mãn $|z - \sqrt{2}| + |z + \sqrt{2}| = 2\sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z + 2\sqrt{3} + i| + |z - 3\sqrt{3} + 2i| + |z - 3i|.$$

A. 12.

B. 6.

C. 8.

D. 10.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi $M(x; y)$, $F_1(-\sqrt{2}; 0)$, $F_2(\sqrt{2}; 0)$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z , $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$.

Ta có $|z - \sqrt{2}| + |z + \sqrt{2}| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2\sqrt{3} > F_1F_2$.

Suy ra M thuộc elip (E) có tiêu cự $2c = 2\sqrt{2} \Rightarrow c = \sqrt{2}$, độ dài trục lớn $2a = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{3}$.

Ta có: $b^2 = a^2 - c^2 = 1$. Phương trình chính tắc của (E) : $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Ta có $M(x; y) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$ và $P = |z + 2\sqrt{3} + i| + |z - 3\sqrt{3} + 2i| + |z - 3i|$.

$$= \sqrt{(x + 2\sqrt{3})^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{(x - 3\sqrt{3})^2 + (y + 2)^2} + \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}.$$

$$\geq \sqrt{(x + 2\sqrt{3})^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{(3\sqrt{3} - x)^2 + (y + 2)^2} + \sqrt{(y - 3)^2} \quad (\text{do } x^2 \geq 0).$$

$$\geq \sqrt{(x + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - x)^2 + (2y + 3)^2} + |y - 3| \quad (\text{bất đẳng thức Mincowski}).$$

$$= \sqrt{4y^2 + 12y + 84 + 3 - y} \quad (\text{do } -1 \leq y \leq 1).$$

Đặt $f(y) = 2\sqrt{y^2 + 3y + 21} + 3 - y$, với $-1 \leq y \leq 1$. Ta có: $f'(y) = \frac{2y + 3}{\sqrt{y^2 + 3y + 21}} - 1$;

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 3y + 21} = 2y + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -\frac{3}{2} \\ y^2 + 3y + 21 = 4y^2 + 12y + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -\frac{3}{2} \\ y = 1 \vee y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1.$$

Ta có: $f(-1) = 4 + 2\sqrt{19}$, $f(1) = 12$. Suy ra $\text{Min} P = \min_{y \in [-1; 1]} f(y) = 12$.

$$\text{Đấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = 0, y = 1 \\ \frac{x + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - x} = \frac{y + 1}{y + 2} > 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 1.$$

Câu 29. Cho các số phức z và w thỏa mãn $|z - 4| = 1$ và $|iw - 2| = 1$. Khi $|z + 2w|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|iz + w|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$.

B. $4\sqrt{2} - 3$.

C. $\sqrt{6}$.

D. $4\sqrt{2} + 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi A là điểm biểu diễn số phức z và B là điểm biểu diễn số phức $-2w$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM TOÁN 12
20 KỸ THUẬT VDC SỐ PHỨC

Ta có: $|z-4|=1$ nên A thuộc đường tròn (C_1) có tâm $I(4;0)$, bán kính $R=1$.

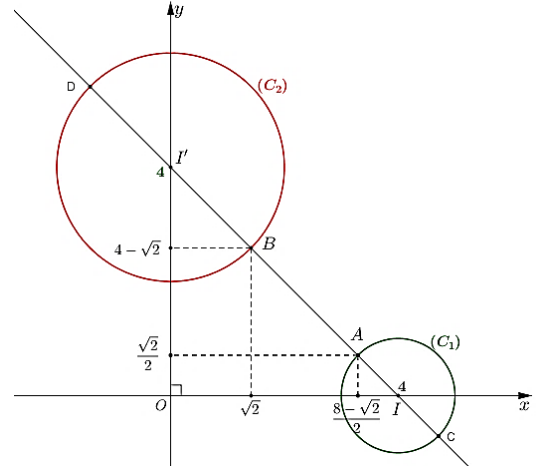
$$|iw-2|=1 \Leftrightarrow \left| i \left(w - \frac{2}{i} \right) \right| = 1 \Leftrightarrow |w+2i|=1$$

$\Leftrightarrow |(-2w)-4i|=2$ nên B thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I'(0;4)$, bán kính $R'=2$.

(Tham khảo hình vẽ).

$$\text{Xét } |z+2w| = |z-(-2w)| = AB.$$

$$\text{Ta có: } AB_{\min} = II' - R_1 - R_2 = 4\sqrt{2} - 1 - 2 = 4\sqrt{2} - 3.$$



$$\text{Khi đó: } \frac{\overrightarrow{IA}}{\overrightarrow{IA}} = \frac{\overrightarrow{II'}}{\overrightarrow{II'}} \Leftrightarrow 4\sqrt{2} \cdot \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{II'} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{2}(x_A - 4) = -4 \\ 4\sqrt{2}y_A = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = \frac{8-\sqrt{2}}{2} \\ y_A = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ hay } \boxed{z = \frac{8-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i};$$

$$\frac{\overrightarrow{IB}}{\overrightarrow{IB}} = \frac{\overrightarrow{II'}}{\overrightarrow{II'}} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{II'} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2}x_B = 4 \\ 2\sqrt{2}(y_B - 4) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = \sqrt{2} \\ y_B = 4 - \sqrt{2} \end{cases} \text{ hay } -2w = \sqrt{2} + (4 - \sqrt{2})i.$$

$$\text{Suy ra } \boxed{w = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4-\sqrt{2}}{2}i}. \text{ Vậy } |iz+w| = \sqrt{6}.$$

Câu 30. Xét số phức z, w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+iw-3+4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z+w|$ bằng

- A. 3. B. $\frac{\sqrt{29}}{5}$. **C. $\sqrt{5}$.** D. $\frac{\sqrt{221}}{5}$.

Chọn C.

Do $|z|=1$ nên điểm biểu diễn số phức z sẽ thuộc đường tròn $(O;1)$.

Do $|w|=2$ nên điểm biểu diễn số phức iw thuộc đường tròn $(O;2)$.

$$\text{Ta có: } |z+iw-3+4i| = |z+iw-(3-4i)| = |(3-4i)-(z+iw)| \geq |3-4i| - |z+iw| = 5 - |z+iw|.$$

$$\text{Mặt khác: } |z+iw| \leq |z| + |iw| = |z| + |i| \cdot |w| = 1 + 2 = 3. \text{ Suy ra } 5 - |z+iw| \geq 5 - 3 = 2.$$

$$\text{Vậy } |z+iw-3+4i| \geq 2.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} z+iw = k(3-4i), & k > 0 & (1) \\ |z+iw| = 3 & & (2) \\ z = miw, & m > 0 & (3) \\ |z|=1, |w|=2 & & (4) \end{cases}.$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 9k^2 + 16k^2 = 9 \ (k > 0) \Rightarrow k = \frac{3}{5}. \text{ Suy ra: } z+iw = \frac{9}{5} - \frac{12}{5}i \ (5).$$

$$\text{Thay (3) vào (5) ta có: } miw + iw = \frac{9}{5} - \frac{12}{5}i \Rightarrow (m+1)iw = \frac{9}{5} - \frac{12}{5}i$$

$$\Rightarrow |m+1| \cdot |i| \cdot |w| = \left| \frac{9}{5} - \frac{12}{5}i \right| \Rightarrow 2(m+1) = 3 \Rightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Ta có : $\frac{3}{2}iw = \frac{9}{5} - \frac{12}{5}i \Rightarrow \boxed{w = -\frac{8}{5} - \frac{6}{5}i}$. Suy ra: $\boxed{z = \frac{1}{2}iw = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i}$.

Vậy $z + w = -1 - 2i \Rightarrow |z + w| = |-1 - 2i| = \sqrt{5}$.

20 KỸ THUẬT VẬN DỤNG CAO SỐ PHỨC

MỤC LỤC

TÓM TẮT KIẾN THỨC TRỌNG YẾU	Trang 01
CHỦ ĐỀ 01. SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN.....	Trang 09
Dạng 1. Tính toán, rút gọn số phức dựa vào qui luật dãy số	Trang 09
Dạng 2. Lập phương trình, hệ phương trình xác định số phức	Trang 12
Dạng 3. Phương pháp lấy mô-đun hai vế đẳng thức.....	Trang 15
Dạng 4. Phương pháp tạo số phức liên hợp	Trang 17
Dạng 5. Phương pháp chuẩn hóa số phức	Trang 21
Bài tập trắc nghiệm thực hành chủ đề 1	Trang 24
Hướng dẫn giải bài tập trắc nghiệm chủ đề 1	Trang 28
CHỦ ĐỀ 02. PHƯƠNG TRÌNH SỐ PHỨC.....	Trang 42
Tóm tắt lí thuyết	Trang 42
Dạng 1. Giải phương trình số phức bậc hai, bậc ba, bậc bốn	Trang 45
Dạng 2. Phương trình số phức có chứa tham số.....	Trang 51
Bài tập trắc nghiệm thực hành chủ đề 2	Trang 57
Hướng dẫn giải bài tập trắc nghiệm chủ đề 2	Trang 60
CHỦ ĐỀ 03. MAX-MIN MÔ ĐUN SỐ PHỨC	Trang 72
Tóm tắt lí thuyết	Trang 72
Dạng 1. Số phức có điểm biểu diễn thuộc đường cơ bản	Trang 76
Dạng 2. Điều kiện ba điểm thẳng hàng và kĩ thuật đối xứng	Trang 83
Dạng 3. Dùng miền nghiệm tìm Max-min mô-đun số phức.....	Trang 90
Dạng 4. Ép điểm theo quỹ đạo đường tròn	Trang 92
Dạng 5. Tạo cụm liên hợp chéo	Trang 96
Dạng 6. Sử dụng tam tỉ cự.....	Trang 98
Dạng 7. Tạo tam giác đồng dạng và tam giác bằng nhau.....	Trang 105
Dạng 8. Biện luận sự tương giao đường thẳng và đường tròn	Trang 109
Dạng 9. Bất đẳng thức tam giác.....	Trang 112
Dạng 10. Bất đẳng thức Mincowski và kĩ thuật cân bằng hệ số.....	Trang 116
Dạng 11. Bất đẳng thức Cauchy Schwarz	Trang 120
Dạng 12. Kĩ thuật đổi biến và khảo sát hàm số	Trang 123
Dạng 13. Phương pháp lượng giác hóa số phức	Trang 126
Bài tập trắc nghiệm thực hành chủ đề 3	Trang 129
Hướng dẫn giải bài tập trắc nghiệm chủ đề 3	Trang 132