

CHỦ ĐỀ HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1) Hoán vị

☒ Hoán vị không lặp

- Một tập hợp gồm n phần tử (với $n \geq 1$). Mỗi cách sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của n phần tử.

- Số các hoán vị của n phần tử là $P_n = n!$

☒ Hoán vị lặp

- Cho k phần tử khác nhau: $a_1, a_2, \dots, a_k$. Một cách sắp xếp n phần tử trong đó gồm n_1 phần tử a_1 , n_2 phần tử a_2 , ..., n_k phần tử a_k ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$) theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị lặp cấp n và kiểu $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ của k phần tử.

- Số các hoán vị lặp cấp n , kiểu $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ của k phần tử là $P_n(n_1; n_2; n_3 \dots) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$

☒ Hoán vị vòng quanh

- Cho tập A gồm n phần tử. Một cách sắp xếp n phần tử của tập A thành một dãy kín được gọi là một hoán vị vòng quanh của n phần tử.

- Số các hoán vị vòng quanh của n phần tử là $Q_n = (n-1)!$

2) Chỉnh hợp

☒ Chỉnh hợp không lặp

- Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của A ($1 \leq k \leq n$) theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của tập A .

- Số chỉnh hợp chập k của n phần tử $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Chú ý:

- Công thức trên cũng đúng cho trường hợp $k=0$ hoặc $k=n$.

- Khi $k=n$ thì $A_n^n = P_n = n!$

☒ Chỉnh hợp lặp

- Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi dãy gồm k phần tử của A , trong đó mỗi phần tử có thể được lặp lại nhiều lần, được sắp xếp theo một thứ tự nhất định được gọi là một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử của tập A .

- Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử: $\overline{A_n^k} = n^k$

3) Tổ hợp

- Giả sử tập A có n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi tập con gồm k ($1 \leq k \leq n$) phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.

- Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử là $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

- Hai công thức quan trọng:
$$\begin{cases} C_n^k = C_n^{n-k} & (0 \leq k \leq n) \\ C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k & (1 \leq k \leq n) \end{cases}$$

Chú ý (Phân biệt Chính hợp và Tổ hợp):

● Chính hợp và tổ hợp liên hệ nhau bởi công thức: $A_n^k = k!C_n^k$

● Chính hợp: có thứ tự.

Tổ hợp: không có thứ tự.

$\Rightarrow$ Những bài toán mà kết quả phụ thuộc vào vị trí các phần tử $\rightarrow$ chính hợp

Ngược lại, là tổ hợp.

● Cách lấy k phần tử từ tập n phần tử ($k \leq n$):

+) Không thứ tự, không hoàn lại: C_n^k

+) Có thứ tự, không hoàn lại: A_n^k

II. HỆ THỐNG VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1. Hoán vị

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{(n-1)!} = 3$

b) $\frac{n!}{20n} = (n-3)!$

c) $n^3 + \frac{n!}{(n-2)!} = 10$

Lời giải:

a) Điều kiện: $n \geq 2$.

Ta có $\frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{(n-1)!} = 3 \Leftrightarrow n(n-1) - n = 3 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (n-3)(n+1) = 0 \Leftrightarrow n = 3$$

b) Điều kiện: $n \geq 3$.

Ta có $\frac{n!}{20n} = (n-3)! \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 20n \Leftrightarrow n^2 - 3n + 2 = 20$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 18 = 0 \Leftrightarrow (n+3)(n-6) = 0 \Leftrightarrow n = 6$$

c) Điều kiện: $n \geq 2$.

Ta có $n^3 + \frac{n!}{(n-2)!} = 10 \Leftrightarrow n^3 + n(n-1) = 10 \Leftrightarrow n^3 + n^2 - n - 10 = 0$

$$\Leftrightarrow (n-2)(n^2 + 3n + 5) = 0 \Leftrightarrow n = 2$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng

a) $P_n - P_{n-1} = (n-1)P_{n-1}$

b) $P_n = (n-1)P_{n-1} + (n-2)P_{n-2} + \dots + 2P_2 + P_1 + 1$

c) $\frac{n^2}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!}$

Lời giải:

a) Ta có $P_n - P_{n-1} = n! - (n-1)! = (n-1)! \cdot (n-1) = (n-1)P_{n-1}$

$\Leftrightarrow P_n - P_{n-1} = (n-1)P_{n-1}$

b) Từ câu a, ta có: $P_i - P_{i-1} = (i-1)P_{i-1} \Rightarrow P_i = P_{i-1} + (i-1)P_{i-1} (*)$

Áp dụng cho $i = \overline{1, n}$:

$$\begin{cases} P_n = P_{n-1} + (n-1)P_{n-1} \\ P_{n-1} = P_{n-2} + (n-2)P_{n-2} \\ P_{n-2} = P_{n-3} + (n-3)P_{n-3} \\ \dots \\ P_2 = P_1 + 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow P_n = (n-1)P_{n-1} + (n-2)P_{n-2} + \dots + 2P_2 + P_1 + 1$

c) Ta có $\frac{n^2}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} \Leftrightarrow \frac{n^2}{n!} = \frac{1+n-1}{(n-1)!} \Leftrightarrow n^2 \cdot (n-1)! = n \cdot n! \Leftrightarrow n \cdot n! = n \cdot n!$

Ví dụ 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{1}{n-2} \left(\frac{5}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-3)!4!} - \frac{n \cdot (n-1)!}{12(n-3) \cdot (n-4)!2!} \right) \leq 5$

b) $n^3 + \frac{n!}{(n-2)!} \leq 10$

Lời giải:

a) Điều kiện: $n \geq 4$

Ta có $\frac{1}{n-2} \left(\frac{5}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-3)!4!} - \frac{n \cdot (n-1)!}{12(n-3) \cdot (n-4)!2!} \right) \leq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{n-2} \cdot \frac{4n!}{24 \cdot (n-3)!} \leq 5$

$\Leftrightarrow \frac{n!}{6 \cdot (n-2)!} \leq 5 \Leftrightarrow n \cdot (n-1) \leq 30 \Leftrightarrow (n+5)(n-6) \leq 0 \Leftrightarrow n \leq 6$

Đối chiếu với điều kiện ta được $n = 4, n = 5, n = 6$

b) Điều kiện: $n \geq 2$

Ta có $n^3 + \frac{n!}{(n-2)!} \leq 10 \Leftrightarrow n^3 + n(n-1) \leq 10 \Leftrightarrow n^3 + n^2 - n - 10 \leq 0$

$\Leftrightarrow n^3 - 2n^2 + 3n^2 - 6n + 5n - 10 \leq 0 \Leftrightarrow (n-2)(n^2 + 3n + 5) \leq 0 \Leftrightarrow n \leq 2$

Đối chiếu với điều kiện $\Rightarrow n = 1; n = 2$

Ví dụ 4. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bạn học sinh A, B, C, D, E ngồi vào một chiếc ghế dài sao cho:

- a) Bạn C ngồi chính giữa?
- b) Hai bạn A và E ngồi ở hai đầu ghế?

Lời giải:

- a) Cho bạn C ngồi ngay vào giữa. Hoán vị 4 bạn còn lại suy ra $4!$, tức là 24 cách xếp.
- b) Hai bạn A và E ngồi ngay đầu ghế, hoán vị 3 bạn còn lại thì có $3!$ Tức là 6 cách. Đổi vị trí hai bạn A và E có 2.6 tức là 12 cách.

Ví dụ 5. Có 3 viên bi đen (khác nhau), 4 viên bi đỏ (khác nhau), 5 viên bi vàng (khác nhau), 6 viên bi xanh (khác nhau). Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các viên bi trên thành một dãy sao cho các viên bi cùng màu ở cạnh nhau?

Lời giải:

Coi các bi cùng màu là một tập hợp thì có 4 tập hợp tất cả $\Rightarrow$ có $4!$ cách sắp xếp 4 tập hợp này

- Có $3!$ cách để sắp xếp 3 bi đen
- Có $4!$ cách để sắp xếp 4 bi đỏ
- Có $5!$ cách để sắp xếp 5 bi vàng
- Có $6!$ cách để sắp xếp 6 bi đen

Vậy có $4!3!4!5!6!$ cách sắp xếp

Ví dụ 6. Có 2 đề kiểm tra toán để chọn đội học sinh giỏi được phát cho 10 học sinh khối 11 và 10 học sinh khối 12. Có bao nhiêu cách sắp xếp 20 học sinh trên vào 1 phòng thi có 5 dãy ghế sao cho hai em ngồi cạnh nhau có đề khác nhau, còn các em ngồi nối đuôi nhau có cùng một đề?

Lời giải:

Có 5 dãy ghế mà có 20 học sinh tức là có 4 cột học sinh.

Do các em nối đuôi nhau chung 1 đề nên mỗi cột học sinh này là học sinh một đề và các em ngồi cạnh nhau đề khác nhau nên các cột cạnh nhau đề khác nhau (ta có thể coi cột cùng đề nhau so le)

Từ đó có 10 học sinh đề 1 và được sắp xếp vào 2 cột và tương tự với 10 học sinh còn lại nên:

- Có $10!$ cách sắp xếp 10 học sinh vào 2 cột cùng đề
- Có 2 cách chọn đề cho 10 học sinh trên
- Còn 10 học sinh còn lại nên có $10!$ cách sắp xếp

Như vậy có $10!.2.10!$ cách sắp xếp

Ví dụ 7. Trên một kệ sách có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Lí, 3 quyển sách Văn. Các quyển sách đều khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các quyển sách trên:

- a) Một cách tùy ý?
- b) Theo từng môn?
- c) Theo từng môn và sách Toán nằm giữa?

Lời giải:

- a) Tổng số quyển sách có trên kệ đó là $5 + 4 + 3 = 12$

Sắp xếp các quyển 1 cách tùy ý từ 12 quyển sách, tức là ta được một hoán vị của 12 quyển sách.

$\Rightarrow$ có $P_{12} = 12!$ cách xếp

b) Xếp các quyển sách theo từng môn:

• 5 quyển sách Toán, ta được một hoán vị của 5 quyển sách $\Rightarrow P_5 = 5!$ cách xếp

• 4 quyển sách Lý, ta được một hoán vị của 4 quyển sách $\Rightarrow P_4 = 4!$ cách xếp

• 3 quyển sách Văn, ta được một hoán vị của 3 quyển sách $\Rightarrow P_3 = 3!$ cách xếp

Do đó, xếp tất cả các quyển sách trên theo từng môn sẽ có $3! \cdot (3! \cdot 4! \cdot 5!) = 103680$ cách xếp

c) Cố định sách Toán ở giữa nên ta được 1 hoán vị 2 môn Lý và Văn

$\Rightarrow$ có: $2! \cdot (3! \cdot 4! \cdot 5!) = 34560$ cách xếp.

Ví dụ 8. Với mỗi hoán vị của các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ta được một số tự nhiên. Tìm tổng tất cả các số tự nhiên có được từ các hoán vị của 7 phần tử trên?

Lời giải:

Mỗi số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau là 1 hoán vị 7 phần tử nên có 7! số

Vì các chữ số đều bình đẳng như nhau nên có $\frac{7!}{7} = 6!$ số có chữ số 1 ở hàng đơn vị, 6! số có chữ số

2, ... 6! số có chữ số 7.

Tổng hàng đơn vị là $(1 + 2 + \dots + 7) \cdot 6! = 28 \cdot 6!$

Tương tự với các hàng khác, nên ta sẽ có tổng cần tìm là

$$S = 28 \cdot 6! (1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^6) = 31111108 \cdot 6!$$

Ví dụ 9. Tìm tổng S của tất cả các số tự nhiên, mỗi số được tạo thành bởi hoán vị của 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Lời giải:

Nhận thấy: $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 7$

S là tổng của $6! = 720$ số

Mỗi số trong tổng S tương ứng 1 và chỉ 1 số trong tổng đó sao cho tổng của chúng bằng 777777.

Vậy, các số trong tổng S tạo thành $\frac{120}{2} = 60$ cặp và tổng mỗi cặp là 777777.

$$\Rightarrow S = 60 \cdot 777777 = 279999720$$

Ví dụ 10. Xét các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ các số 1, 3, 5, 7, 9. Hỏi các số đó có bao nhiêu số:

a) Bắt đầu bởi chữ số 9?

b) Không bắt đầu bởi chữ số 1?

c) Bắt đầu bởi 19?

d) Không bắt đầu bởi 135?

Lời giải:

a) Gọi số cần tìm $\overline{9abcd}$

Từ 4 chữ số: 1, 3, 5, 7. Ta sẽ lập được $4!$ số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau bắt đầu bởi chữ số 9

$\Rightarrow$ có $4! = 24$ cách chọn để được số có 5 chữ số bắt đầu bởi chữ số 9

b) Từ 5 chữ số đã cho, ta sẽ lập được $5!$ số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

Tương tự với câu a, số các số bắt đầu bởi chữ số 1 sẽ là $4!$

$\Rightarrow$ có $5! - 4! = 96$ số có 5 chữ số khác nhau không bắt đầu bởi chữ số 1

c) Gọi số cần tìm $\overline{19abc}$

Từ 3 chữ số còn lại: 3, 5, 7. Ta sẽ lập được $3!$ Số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau bắt đầu bởi 19

$\Rightarrow$ có $3! = 6$ cách chọn để được số có 5 chữ số bắt đầu bởi 19

d) Số các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau bắt đầu bởi 135 (từ 5 chữ số khác nhau của đề bài) là 13579 và 13597

$\Rightarrow$ có $5! - 2 = 118$ số có 5 chữ số khác nhau không bắt đầu bởi 135

Ví dụ 11. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 thiết lập tất cả các số có 6 chữ số khác nhau. Hỏi trong các số đã thiết lập được, có bao nhiêu số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau?

Lời giải:

Xét số mà 2 số 1 và 6 cạnh nhau.

Chọn cố định vị trí cho hai số 1 và 6 đứng cạnh nhau, theo chiều xuôi có 5 cách.

Đổi lại có 5.2 tức là 10 cách. Hoán vị 4 số còn lại, vậy có $4! \cdot 10 = 240$ số như vậy.

Hoán vị 6 chữ số bất kỳ được $6!$ Số. Phù định, có $6! - 240 = 480$ số cần lập.

Ví dụ 12 [Hoán vị vòng tròn]. Có 5 học sinh nam là A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 và 3 học sinh nữ B_1, B_2, B_3 được xếp ngồi xung quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu:

a) Một cách tùy ý?

b) A_1 không ngồi cạnh B_1 ?

c) Các học sinh nữ không ngồi cạnh nhau?

Lời giải:

a) Có tổng cộng 8 học sinh. Lấy một học sinh làm mốc, hoán vị 7 bạn còn lại, vậy có $7!$ cách sắp xếp.

b) Cố định hai A_1 và B_1 ngồi cạnh nhau, khi đó có $6!$ cách xếp các bạn còn lại.

Như vậy có $7! - 6!$ cách xếp để A_1 không ngồi cạnh B_1 .

c) Cố định hai bạn nữ ngồi cạnh nhau, suy ra có 3 cách xếp.

Hoán vị 6 bạn còn lại, suy ra có $6!$ cách sắp xếp.

Do bàn tròn nên sẽ có $\frac{7! - 3 \cdot 6!}{2} = 1440$ cách xếp.

Dạng 2. Chinh hợp

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{P_{n+2}}{A_{n-1}^{n-4} \cdot P_3} = 210$

b) $2(A_n^3 + 3A_n^2) = P_{n+1}$

c) $2P_n + 6A_n^2 - P_n A_n^2 = 12$

Lời giải:

a) Điều kiện: $n \geq 4, n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có } \frac{P_{n+2}}{A_{n-1}^{n-4} \cdot P_3} = 210 \Leftrightarrow \frac{(n-2)!}{\frac{(n-1)!}{3!} \cdot 3!} = 210 \Leftrightarrow \frac{(n+2)!}{(n-1)!} = 210$$

$$\Leftrightarrow A_{n+2}^3 = A_7^3 \Leftrightarrow n+2=7 \Leftrightarrow n=5 \text{ (thỏa mãn).}$$

b) Điều kiện: $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$

$$\text{Ta có: } 2(A_n^3 + 3A_n^2) = P_{n+1} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{n!}{(n-3)!} + 6 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} = (n+1)n! \Leftrightarrow \frac{2}{(n-3)!} + \frac{6}{(n-2)!} = n+1$$

$$\bullet \text{ Với } n > 4 \text{ thì } \begin{cases} VT = \frac{2}{(n-3)!} + \frac{6}{(n-2)!} < \frac{2}{1!} + \frac{6}{2!} = 2+3=5 \\ VP = n+1 > 5 \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm}$$

$$\bullet \text{ Với } n < 4 \text{ thì } \begin{cases} VT = \frac{2}{(n-3)!} + \frac{6}{(n-2)!} > \frac{2}{1!} + \frac{6}{2!} = 2+3=5 \\ VP = n+1 < 5 \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm}$$

$$\bullet \text{ Với } n = 4 \text{ thì } \begin{cases} VT = \frac{2}{(n-3)!} + \frac{6}{(n-2)!} = \frac{2}{1!} + \frac{6}{2!} = 2+3=5 \\ VP = n+1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{PT có nghiệm } x = 4$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 4$

c) Điều kiện: $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

$$2P_n + 6A_n^2 - P_n A_n^2 = 12 \Leftrightarrow 2.n! + 6n(n-1) - n!.n(n-1) = 12 \Leftrightarrow n!(n^2 - n - 2) - 6(n^2 - n - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (n! - 6)(n^2 - n - 2) = 0 \Leftrightarrow n! = 6 = 3! \Leftrightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = 2 \\ n = -1 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta nhận hai giá trị thỏa mãn là $n = 2; n = 3$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a) $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8$

b) $P_x A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$

c) $2A_x^2 + 50 = A_{2x}^2$

Lời giải:

a) Điều kiện: $x \geq 10, x \in \mathbb{N}$.

$$A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8 \Leftrightarrow A_x^{10} + \frac{x!}{(x-9)!} = 9 \cdot \frac{x!}{(x-8)!} \Leftrightarrow A_x^{10} + \frac{x!}{(x-10)!} \cdot (x-10) = 9 \cdot \frac{x!}{(x-10)!} \cdot (x-10)(x-9)$$

$$\Leftrightarrow A_x^{10} + (x-10)A_x^{10} = 9(x-10)(x-9)A_x^{10} \Leftrightarrow A_x^{10} [9(x-10)(x-9) - 1 - x + 10] = 0$$

$$\Leftrightarrow 9(x-9)(9x-91)A_x^{10} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-9=0 \\ 9x-91=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=\frac{91}{9} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện: $x \geq 2, x \in N$.

$$P_x A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x) \Leftrightarrow A_x^2(P_x - 6) - 2(P_x - 6) = 0 \Leftrightarrow (A_x^2 - 2)(P_x - 6) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_x^2 = 2 = A_2^2 \\ P_x = 6 = P_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \text{ (đều thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$ và $x = 3$

c) Điều kiện: $x \geq 2, x \in N$.

$$\text{Ta có } 2A_x^2 + 50 = A_{2x}^2 \Leftrightarrow 2x(x-1) + 50 = 2x(2x-1) \Leftrightarrow 2x^2 - 50 = 0 \xrightarrow{DK} x = 5.$$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{A_{x+1}^{y+1} \cdot P_{x-y}}{P_{x-1}} = 72$

b) $P_{n+3} = 720 A_n^5 \cdot P_{n-5}$

c) $A_n^6 + A_n^5 = A_n^4$

Lời giải:

a) Điều kiện: $x \geq y; x \geq 1; x, y \in N$

$$\text{Ta có } \frac{A_{x+1}^{y+1} \cdot P_{x-y}}{P_{x-1}} = 72 \Leftrightarrow \frac{\frac{(x+1)!}{(x-y)!} \cdot (x-y)!}{(x-1)!} = 72 \Leftrightarrow \frac{(x+1)x(x-1)!}{(x-1)!} = 72$$
$$\Leftrightarrow x^2 + x - 72 = 0 \xrightarrow{DK} x = 8.$$

b) Điều kiện: $n \geq 5, n \in N$.

$$\text{Ta có } P_{n+3} = 720 A_n^5 \cdot P_{n-5} \Leftrightarrow (n+3)! = 720 \cdot \frac{n!}{(n-5)!} \cdot (n-5)! \Leftrightarrow \frac{(n+3)!}{n!} = 720 \Leftrightarrow A_{n+3}^3 = A_{10}^3$$
$$\Leftrightarrow n+3 = 10 \Leftrightarrow n = 7 \text{ (thỏa mãn)}$$

c) Điều kiện: $n \geq 6, n \in N$.

$$A_n^6 + A_n^5 = A_n^4 \Leftrightarrow A_n^6 + (n-6)A_n^6 = (n-6)(n-5)A_n^6 \Leftrightarrow A_n^6(n-5)(n-7) = 0 \xrightarrow{DK} n = 7.$$

Ví dụ 4. Giải các bất phương trình:

a) $A_n^3 + 15 < 15n$

b) $A_n^3 < A_n^2 + 12$

c) $\frac{A_{n+1}^1}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_{n-1}} < 0$

Lời giải:

a) Điều kiện: $n \geq 3, n \in N$.

$$\text{Ta có } A_n^3 + 15 < 15n \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) - 15(n-1) < 0 \Leftrightarrow (n-1)(n^2 - 2n - 15) < 0$$
$$\Leftrightarrow (n-1)(n+3)(n-5) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n < -3 \\ 1 < n < 5 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow n = 3$ và $n = 4$ là giá trị cần tìm

b) Điều kiện: $n \geq 3, n \in N$.

$$\text{Ta có } A_n^3 < A_n^2 + 12 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) < n(n-1) + 12 \Leftrightarrow n^3 - 3n^2 + 2n < n^2 - n + 12$$

$$\Leftrightarrow n^3 - 4n^2 + 3n - 12 = 0 \Leftrightarrow (n-4)(n^2+3) = 0 \Leftrightarrow n = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

c) Điều kiện: $n \geq 1, n \in N$.

$$\text{Ta có } \frac{A_{n+1}^1}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_{n-1}} < 0 \Leftrightarrow \frac{n+1}{(n+2)(n+1)n(n-1)!} - \frac{143}{4(n-1)!} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(n+2)n} < \frac{143}{4}$$

Do $n \geq 1, n \in N$ nên $\frac{1}{n(n+2)} \leq \frac{1}{1.2} < \frac{143}{4} \Rightarrow$ bất PT có nghiệm với mọi $n \geq 1, n \in N$.

Ví dụ 5. Tìm các số âm trong dãy số $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ với: $x_n = \frac{A_{n+4}^n}{P_{n+2}} - \frac{143}{4.P_n} \text{ (} n=1, 2, 3, \dots \text{)}$

Lời giải:

$$\text{Ta có } x_n = \frac{A_{n+4}^n}{P_{n+2}} - \frac{143}{4.P_n} < 0 \Leftrightarrow \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{(n+2)(n+1)n!} - \frac{143}{4n!} < 0 \Leftrightarrow (n+4)(n+3) - \frac{143}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 7n - \frac{95}{4} < 0 \Leftrightarrow -\frac{19}{2} < n < \frac{5}{2}$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $n = 1$ và $n = 2$ là giá trị cần tìm.

- Với $n = 1$ thì $x_1 = -\frac{63}{4}$
- Với $n = 2$ thì $x_2 = -\frac{23}{8}$

Ví dụ 6. Một cuộc khiêu vũ có 10 nam và 6 nữ. Người ta chọn có thứ tự 3 nam và 3 nữ để ghép thành 3 cặp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải:

–Chọn có thứ tự 3 nam trong tổng số 10 nam, ta sẽ có A_{10}^3 cách chọn

–Chọn có thứ tự 3 nữ trong tổng số 6 nữ, ta sẽ có A_6^3 cách chọn

$\Rightarrow$ có $A_{10}^3.A_6^3$ cách chọn có thứ tự 3 nam và 3 nữ để ghép thành 3 cặp.

Ví dụ 7. Trong không gian cho 4 điểm A, B, C, D. Từ các điểm trên ta lập các vectơ khác vectơ-không. Hỏi có thể có bao nhiêu vectơ?

Lời giải:

Vì vectơ có chiều và khác không, nên từ 4 điểm A, B, C, D đã cho ta lập các vectơ khác vectơ không cũng tương đương với việc chọn có thứ tự 2 điểm trong 4 điểm đã cho.

$\Rightarrow$ có $A_4^2 = 12$ vectơ

Ví dụ 8. Một lớp học chỉ có các bàn đôi (2 chỗ ngồi). Hỏi lớp này có bao nhiêu học sinh, biết rằng chỉ có thể sắp xếp chỗ ngồi cho học sinh của lớp này theo 132 sơ đồ khác nhau? (Số chỗ ngồi vừa đủ số học sinh)

Lời giải:

Gọi số học sinh của lớp là n ($n \geq 1$)

Sắp xếp chỗ ngồi cho học sinh của lớp, và lớp chỉ có các bàn đôi tức là sắp xếp có thứ tự 2 học sinh của n học sinh.

$$\Rightarrow A_n^2 = 132 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 132 \Leftrightarrow n(n-1) = 132 \Rightarrow n^2 - n - 132 = 0 \Rightarrow n = 12$$

Vậy lớp học có 12 học sinh.

Ví dụ 9. Huấn luyện viên một đội bóng muốn chọn 5 cầu thủ để đá quả luân lưu 11 mét. Có bao nhiêu cách chọn nếu:

- a) Cả 11 cầu thủ có khả năng như nhau? (kể cả thủ môn).
- b) Có 3 cầu thủ bị chấn thương và nhất thiết phải bố trí cầu thủ A đá quả số 1 và cầu thủ B đá quả số 4.

Lời giải:

- a) Chọn 5 cầu thủ để đá quả luân lưu, phải bố trí người từ quả số 1 đến quả số 5

Chọn có thứ tự 5 cầu thủ trong số 11 cầu thủ: $A_{11}^5 = 55440$

- b) Có 3 cầu thủ bị thương $\Rightarrow$ Còn lại: $11 - 3 = 8$ cầu thủ

Bố trí cầu thủ A đá quả số 1, cầu thủ B đá quả số 4 nên còn lại 6 cầu thủ cho 3 vị trí. Chọn có thứ tự 3 cầu thủ trong 6 cầu thủ, ta có: $A_6^3 = 120$ cách chọn.

Ví dụ 10. Một người muốn xếp đặt một số pho tượng vào một dãy 6 chỗ trống trên một kệ trang trí. Có bao nhiêu cách sắp xếp nếu:

- a) Người đó có 6 pho tượng khác nhau?
- b) Người đó có 4 pho tượng khác nhau?
- c) Người đó có 8 pho tượng khác nhau?

Lời giải:

- a) Sắp xếp 6 pho tượng khác nhau vào 1 dãy có 6 chỗ trống

$\Rightarrow$ Có: $A_6^6 = 6! = 720$ cách xếp

- b) Chọn có thứ tự 4 pho tượng xếp vào 6 dãy chỗ trống:

$\Rightarrow$ Có: $A_6^4 = 360$ cách xếp

- c) Chọn có thứ tự 6 pho tượng trong 8 pho tượng khác nhau:

$\Rightarrow$ Có: $A_8^6 = 20160$ cách xếp.

Ví dụ 11. Với 6 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau thỏa:

- a) Số chẵn.
- b) Bắt đầu bằng số 24.
- c) Bắt đầu bằng số 345.
- d) Bắt đầu bằng số 1? Từ đó suy ra các số không bắt đầu bằng số 1?

Lời giải:

- a) Chọn bất kỳ ta có 3 cách chọn chữ số cuối chẵn, chọn 4 số trong 5 số còn lại có A_5^4 , như vậy có $3A_5^4$ số. Xét trường hợp chữ số 0 đứng đầu, chọn chữ số cuối cùng chẵn có 2 cách, chọn 3 chữ số trong 4 số còn lại có A_4^3 . Loại trường hợp chữ số 0 đứng đầu có $3A_5^4 - 2A_4^3 = 312$.
- b) Chọn số 24 đứng đầu, chọn 3 số trong 4 số còn lại, vậy có $A_4^3 = 24$ số còn lại.
- c) Chọn số 345 đứng đầu, chọn 2 số trong 3 số còn lại có 6 cách.
- d) Chọn chữ số 1 đứng đầu, chọn 4 số từ 5 số còn lại có A_5^4 số tức 120 số. Chọn bất kỳ thì ta có $A_6^5 - A_5^4$ số. Như vậy ta thu được $A_6^5 - A_5^4 - A_5^4 = 480$

Ví dụ 12. Cho tập hợp $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Có thể lập được bao nhiêu số n gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lấy từ X trong mỗi trường hợp sau:

- a) n là số chẵn?
- b) Một trong ba chữ số đầu tiên phải bằng 1?

Lời giải:

- a) Chọn bất kỳ để là số chẵn ta có 4 cách chọn chữ số cuối. Chọn 4 chữ số còn lại có A_7^4 cách. Chọn chữ số 0 đứng đầu, chọn chữ số cuối chẵn có 3 cách. Vậy có A_6^3 cách. Tóm lại chúng ta có $4A_7^4 - 3A_6^3 = 3000$ số.
- b) Xét bất kỳ, ta chọn vị trí cho số 1 có 3 cách. Chọn 4 chữ số còn lại, suy ra $3A_7^4$ cách. Xét trường hợp chữ số 0 đứng đầu, chọn vị trí cho số 1 có 2 cách. Vậy $2A_6^3$ cách. Tóm lại thu được $3A_7^4 - 2A_6^3 = 2280$ số cần lập.

Ví dụ 13.

- a) Từ 5 chữ số 0, 1, 3, 6, 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 3.
- b) Từ 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số khác nhau sao cho trong các chữ số đó có mặt số 0 và số 1.
- c) Từ 8 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau trong đó nhất thiết phải có mặt số 4.

Lời giải:

- a) Rõ ràng bộ (1;3;6;9) bị loại vì không chia hết cho 3. Số 1 không xuất hiện trong số cần lập. Vậy hoán vị 4 chữ số 0, 3, 6, 9 bỏ đi trường hợp số 0 (hoán vị 3 số 3, 6, 9) chúng ta có $4! - 3! = 18$ số.

c) Chọn bất kỳ cho chữ số 4 ta có 6 vị trí, chọn 5 chữ số trong 7 chữ số còn lại có A_7^5 cách. Xét trường hợp chữ số 0 đứng đầu, chọn chỗ cho chữ số 4 có 5 vị trí, chọn 4 chữ số trong 6 chữ số còn lại có A_6^4 cách. Vậy có $6A_7^5 - 5A_6^4 = 13320$ số cần lập.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a) $C_{8+x}^{x+3} = 5A_{x+6}^3$

b) $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$

c) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$

d) $\frac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336$

Lời giải:

a) Điều kiện: $x \geq -3$

$$\text{Ta có } C_{8+x}^{x+3} = 5A_{x+6}^3 \Leftrightarrow \frac{(x+8)!}{5! \cdot (x+3)!} = 5 \cdot \frac{(x+6)!}{(x+3)!} \Leftrightarrow (x+8)(x+7) = 5 \cdot 5!$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 15x - 554 = 0 \Leftrightarrow (x+32)(x-17) = 0 \Leftrightarrow x = 17$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x = 17$

b) Điều kiện: $x \geq 2$

$$\text{Ta có } C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1) \Leftrightarrow \frac{(x+1)!}{3! \cdot (x-2)!} + 2 \cdot \frac{(x-1)!}{3! \cdot (x-4)!} = 7(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) + 2 \cdot (x-2)(x-3) = 42 \Leftrightarrow 3x^2 - 9x - 30 = 0 \xrightarrow{DK} x = 5$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x = 5$

c) Điều kiện: $x \geq 2$

$$\text{Ta có } A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-3)!} + \frac{x!}{2! \cdot (x-2)!} = 14x \Leftrightarrow x \cdot (x-1)(x-2) + x(x-1) = 28x$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 + 4x + x^2 - x - 28x = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 - 25x = 0 \Rightarrow x = 5$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x = 5$

d) Điều kiện: $x \geq 2$

$$\text{Ta có } \frac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336 \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-5)!} = 336 \cdot \frac{(x-2)!}{3! \cdot (x-5)!} \Leftrightarrow x \cdot (x-1) = 56$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 56 = 0 \Leftrightarrow (x+7)(x-8) = 0 \Leftrightarrow x = 8$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x = 8$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{C_{28}^{2x}}{C_{24}^{2x-4}} = \frac{225}{52}$

b) $C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x$

Lời giải:

a) Điều kiện: $x \geq 2$

$$\frac{C_{28}^{2x}}{C_{24}^{2x-4}} = \frac{225}{52} \Leftrightarrow 52 \cdot \frac{28!}{(2x)!(28-2x)!} = 225 \cdot \frac{24!}{(2x-4)!(28-2x)!}$$

$$\Leftrightarrow 24024 = t(t-1)(t-2)(t-3)(t=2x) \Leftrightarrow 24024 = (t^2-3t)(t^2-3t+2)$$

$$\Leftrightarrow 24024 = y^2 + 2y, (y = t^2 - 3t)$$

$$\Leftrightarrow (y - 154)(y + 156) = 0 \rightarrow y = 154 \Leftrightarrow (2x)^2 - 6x = 154$$

$$\Leftrightarrow (x - 7)(2x + 11) = 0 \Leftrightarrow x = 7$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x = 7$

b) Điều kiện: $x \geq 1$

$$C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-1)!} + \frac{x!}{2!(x-2)!} + \frac{x!}{3!(x-3)!} = \frac{7}{2}x$$

$$\Leftrightarrow 6x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) = 21x \Leftrightarrow 6x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x - 21x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm $x = 4$

Ví dụ 4. Giải các bất phương trình sau:

$$a) C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \frac{5}{4}A_{n-2}^2 < 0$$

$$b) 2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 < 30$$

$$c) \frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}C_x^3 + 10$$

$$d) C_{n+1}^{n-2} - C_{n+1}^{n-1} \leq 110$$

Lời giải:

a) Điều kiện: $n \geq 3$

$$C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \frac{5}{4}A_{n-2}^2 < 0 \Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{4!(n-5)!} - \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} - \frac{5}{4} \cdot \frac{(n-2)!}{(n-4)!} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{12} - \frac{n-1}{3(n-4)} - \frac{5}{2(n-4)} < 0 \Leftrightarrow (n-1)(n-4) - 4(n-1) - 30 < 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 5n + 4 - 4n + 4 - 30 < 0 \Leftrightarrow n^2 - 9n - 22 < 0$$

$$\Leftrightarrow (n+2)(n-11) < 0 \Leftrightarrow -2 \leq n \leq 11 \Rightarrow 3 \leq n \leq 11$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $n = \{3; 4; 5; \dots; 11\}$

b) Điều kiện: $x \geq 1$

$$2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 < 30 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{(x+1)!}{2!(x-1)!} + 3 \cdot \frac{x!}{(x-2)!} < 30$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) + 3x(x-1) < 30 \Leftrightarrow x^2 + x + 3x^2 - 3x < 30 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 30 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2x+5) < 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x < 3 \Rightarrow 1 \leq x < 3$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $x = \{1; 2; 3\}$

c) Điều kiện: $x \geq 1$

$$\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}C_x^3 + 10 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{(2x)!}{(2x-2)!} - \frac{x!}{(x-2)!} \leq \frac{x!}{x \cdot (x-3)!} + 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2x)(2x-1) - x.(x-1) < (x-1)(x-2) + 10$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - x^2 + x < x^2 - 3x + 12 \Leftrightarrow 0 < -3x + 12 \Rightarrow x < 4$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $x = \{1; 2; 3\}$

d) Điều kiện: $n \geq 2$

$$C_{n+1}^{n-2} - C_{n+1}^{n-1} \leq 110 \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} - \frac{(n+1)!}{2(n-1)!} \leq 110$$

$$\Leftrightarrow (n+1)n(n-1) - 3.(n+1)n \leq 660 \Leftrightarrow n^3 - n - 3n^2 - 3n \leq 660$$

$$\Leftrightarrow n^3 - 3n^2 - 4n - 660 \leq 0 \Leftrightarrow (n-10)(n^2 + 7n + 66) \leq 0 \Rightarrow 2 \leq n \leq 10$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $n = \{2; 3; 4; 9; 10\}$

Ví dụ 5. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{A_x^x}{P_x} + C_y^{y-x} = 126 \\ P_{x+1} = 720 \end{cases}$$

$$\text{b) } \frac{C_{x+1}^y}{6} = \frac{C_x^{y+1}}{5} = \frac{C_x^{y-1}}{2}$$

$$\text{c) } \begin{cases} C_x^y - C_x^{y+1} = 0 \\ 4C_x^y - 5C_x^{y-1} = 0 \end{cases}$$

Lời giải:

a) Ta có: $P_{x+1} = (x+1)! = 720 = 6! \Rightarrow x+1 = 6 \Leftrightarrow x = 5$

Thay vào PT đầu ta có: $\frac{5!C_y^5}{4!} + C_y^5 = 126 \Leftrightarrow C_y^5 = 21 \Rightarrow y = 7$

Vậy hệ có nghiệm $x = 5; y = 7$

$$\text{b) } \frac{C_{x+1}^y}{6} = \frac{C_x^{y+1}}{5} = \frac{C_x^{y-1}}{2}$$

$$\text{Xét: } \frac{C_{x+1}^y}{6} = \frac{C_x^{y+1}}{5} \Leftrightarrow \frac{(x+1)!}{6y!(x-y+1)!} = \frac{x!}{5(y+1)!(x-y-1)!} \Leftrightarrow 5(y+1)(x+1) = 6(x-y+1)(x-y)$$

$$\text{Xét: } \frac{C_{x+1}^y}{6} = \frac{C_x^{y-1}}{2} \Leftrightarrow \frac{(x+1)!}{6y!(x-y+1)!} = \frac{x!}{2(y-1)!(x-y+1)!} \Leftrightarrow x+1 = 3y$$

Thay phương trình dưới lên trên và giải ta được: $x = 8; y = 3$

$$\text{c) } C_x^y = C_x^{y+1} \Leftrightarrow \frac{x!}{y!(x-y)!} = \frac{x!}{(y+1)!(x-y-1)!} \Leftrightarrow x = 2y+1$$

$$4C_x^y = 5C_x^{y-1} \Leftrightarrow 4 \frac{x!}{y!(x-y)!} = 5 \frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} \Leftrightarrow 4(x-y+1) = 5y \Leftrightarrow 4x - 9y + 4 = 0$$

Giải ra ta được: $x = 17; y = 8$

Ví dụ 6. Một túi chứa 6 viên bi trắng và 5 viên bi xanh. Lấy ra 4 viên bi từ túi đó, có bao nhiêu cách lấy được:

a) 4 viên bi cùng màu?

b) 2 viên bi trắng, 2 viên bi xanh?

Lời giải:

a) Để lấy được 4 viên bi cùng màu thì có 2 khả năng chúng cùng màu trắng hoặc cùng màu xanh.

Nếu cùng màu trắng thì có: C_6^4 cách chọn.

Nếu cùng màu xanh thì có: C_5^4 cách chọn.

Vậy nên sẽ có: $C_6^4 + C_5^4 = 20$

b) Có C_6^2 cách chọn 2 viên bi trắng, có C_5^2 cách chọn 2 viên bi xanh, vậy sẽ có: $C_6^2.C_5^2 = 150$ cách chọn 2 viên bi trắng, 2 viên bi xanh.

Ví dụ 7. Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa xem như đôi một khác nhau), người ta muốn chọn ra một bó hoa gồm 7 bông, hỏi có bao nhiêu cách chọn bó hoa trong đó:

a) Có đúng 1 bông hồng đỏ?

b) Có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ?

Lời giải:

a) Số cách chọn ra 1 bông hồng đỏ là: C_4^1

Số cách chọn 6 bông hồng để chọn ra 1 bó từ 5 bông hồng vàng và 3 bông hồng trắng là: C_8^6

Vậy theo quy tắc nhân có $C_4^1.C_8^6 = 112$ cách

b) Ta có các trường hợp sau:

TH1: Bó hoa có 3 bông hồng vàng, 1 bông hồng trắng và 3 bông hồng đỏ có $C_5^3.C_3^1.C_4^3 = 120$ cách chọn.

TH2: Bó hoa có 3 bông hồng vàng và 4 bông hồng trắng có: $C_5^3.C_4^4 = 10$ cách chọn.

TH3: Bó hoa có 4 bông hồng vàng và 3 bông hồng trắng có: $C_5^4.C_4^3 = 20$ cách chọn.

Vậy theo quy tắc cộng có 150 cách chọn.

Ví dụ 8. Từ một tập thể 14 người gồm 6 nam và 8 nữ trong đó có An và Bình, người ta muốn chọn một tổ công tác gồm có 6 người. Tìm số cách chọn trong mỗi trường hợp sau:

a) Trong tổ phải có cả nam lẫn nữ?

b) Trong tổ có 1 tổ trưởng, 5 tổ viên hơn nữa An và Bình không đồng thời có mặt trong tổ.

Lời giải:

a) Số cách chọn ra 1 tổ công tác 6 người là: C_{14}^6 cách chọn

Số cách chọn ra 1 tổ công tác chỉ gồm nam là: C_6^6 cách chọn

Số cách chọn ra 1 tổ công tác chỉ gồm nữ là: C_8^6 cách chọn

Số cách chọn ra 1 tổ công tác gồm cả nam và nữ là: $C_{14}^5 - C_8^6 - C_6^6 = 2974$ cách chọn

b) Số cách chọn ra 1 trưởng trong 6 người là: $C_6^1 = 6$

Vậy có $C_{14}^6.C_6^1 = 18018$ cách chọn ra 1 tổ có 1 tổ trưởng.

Số cách chọn mà trong tổ đó đồng thời có mặt An và Bình là: $C_{12}^4 \cdot C_6^1 = 2879$

Vậy có $18018 - 2879 = 15048$ cách chọn thỏa mãn.

Ví dụ 9. Một đoàn tàu có 3 toa chở khách. Toa I, II, III. Trên sân ga có 4 khách chuẩn bị đi tàu. Biết mỗi toa có ít nhất 4 chỗ trống. Hỏi:

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 4 vị khách lên 3 toa.

b) Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 4 vị khách lên tàu có 1 toa có 3 trong 4 vị khách nói trên.

Lời giải:

a) Vị 1 có 3 cách chọn toa, tương tự như vậy cách vị 2, 3, 4 cũng đều có 3 cách chọn toa

Vậy theo quy tắc nhân có $3^4 = 81$ cách

b) Chọn 3 trong 4 vị có $C_4^3 = 4$ cách chọn, chọn 1 toa cho 3 vị đó có 3 cách chọn

Sau đó vị khách còn lại 1 trong 2 toa còn lại có 2 cách chọn

Vậy có $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ cách chọn.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Cho $A = \{a; b; c\}$. Số hoán vị của ba phần tử của A là:

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

Câu 2. Số hoán vị của n phần tử là:

A. n^2

B. n^n

C. $2n$

D. $n!$

Câu 3. Có bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau được tạo thành từ các số 1, 2, 3, 4, 5?

A. P_4

B. P_5

C. A_5^4

D. C_5^4

Câu 4. Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Từ 5 chữ số này ta lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau?

A. 120

B. 60

C. 30

D. 40

Câu 5. Một tổ học sinh có 5 nam và 5 nữ xếp thành một hàng dọc thì số các cách xếp khác nhau là:

A. 25

B. 10

C. $10!$

D. 40

Câu 6. Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Từ 5 chữ số này, ta lập các số chẵn có 5 chữ số khác nhau. Số các số có thể lập được là:

A. 120

B. 48

C. 32

D. 40

Câu 7. Có bao nhiêu số lẻ có 4 chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5?

A. 15

B. 120

C. 72

D. 12

Câu 8. Cho $n, k \in \mathbb{N}$ với $0 < k \leq n$. Mệnh đề nào có giá trị sai?

A. $P_0 = 1$

B. $P_n = C_n^n$

C. $C_n^k = C_n^{n-k}$

D. $A_n^k = k! C_n^k$

Câu 9. Từ 6 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau?

A. 120

B. 192

C. 312

D. 216

Câu 10. Trong một trường có 4 học sinh giỏi lớp 12, 3 học sinh giỏi lớp 11 và 5 học sinh giỏi lớp 10. Cần chọn 5 học sinh giỏi để tham gia một cuộc thi với các trường khác sao cho khối 12 có 3 em và mỗi khối 10, 11 có đúng 1 em. Vậy số tất cả các cách chọn là:

- A. 60 B. 180 C. 330 D. 90

Câu 11. Trong một bình đựng 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên ra 2 viên. Có bao nhiêu cách lấy được 2 viên cùng màu?

- A. 18 B. 9 C. 22 D. 4

Câu 12. Một tổ học sinh có 5 nam và 5 nữ xếp thành 1 hàng dọc sao cho không có học sinh cùng giới tính đứng kề nhau. Số cách xếp là:

- A. $5! \cdot 5!$ B. $2 \cdot (5!)^2$ C. $10!$ D. $2 \cdot 5!$

Câu 13. Cho 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau được tạo thành từ 5 chữ số trên?

- A. 120 B. 96 C. 24 D. 28

Câu 14. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 9?

- A. 16 B. 18 C. 20 D. 14

Câu 15. Dũng có 8 người bạn. Dũng muốn mời 4 trong 8 người bạn đó về quê chơi vào cuối tuần. Nhưng trong 8 người bạn đó, có 2 bạn là Hùng và Tuấn không thích đi chơi với nhau. Như vậy số cách chọn nhóm 4 người để về quê của Dũng là?

- A. C_8^4 B. $C_6^4 + C_6^3$ C. $C_6^4 + 2C_6^3$ D. $C_6^4 + C_7^3$

Câu 16. Một tổ có 6 học sinh, trong đó có 3 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các học sinh trong tổ thành một hàng dọc sao cho nam, nữ đứng xen kẽ nhau?

- A. 36 B. 42 C. 102 D. 72

Câu 17. Hai đơn vị thi đấu cờ tướng A và B lần lượt có 5 người và 6 người. Cần chọn ra mỗi đơn vị 3 người để ghép cặp thi đấu với nhau. Hỏi có bao nhiêu cách thực hiện như thế?

- A. 1200 B. $C_5^3 \cdot C_6^3$ C. $A_5^3 + C_6^3$ D. $C_5^3 + A_6^3$

Câu 18. Một hội đồng gồm 5 nam và 4 nữ được tuyển vào một ban quản trị gồm 4 người. Hỏi có bao nhiêu cách tuyển chọn?

- A. 240 B. 260 C. 126 D. Kết quả khác

Câu 19. Có bao nhiêu cách chọn và sắp thứ tự 5 cầu thủ để đá bóng luân lưu 11m. Biết rằng cả 11 cầu thủ đều có khả năng như nhau.

- A. 55440 B. 20680 C. 32456 D. 41380

Câu 20. Một hội đồng gồm 5 nam và 4 nữ được tuyển vào một ban quản trị gồm 4 người. Biết rằng ban quản trị có ít nhất một nam và một nữ. Hỏi có bao nhiêu cách tuyển chọn?

- A. 240 B. 260 C. 126 D. Kết quả khác.

- Câu 21.** Một lớp có 50 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách phân công 3 học sinh để làm vệ sinh lớp học trong một ngày?
- A. 117600 B. 128500 C. 376 D. 436
- Câu 22.** Có 3 tem thư khác nhau và 6 bì thư khác nhau. Người ta muốn chọn từ đó ra 3 tem thư, 3 bì thư dán 3 tem thư đó lên 3 bì thư đã chọn, mỗi bì thư chỉ dán 1 tem thư. Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy?
- A. 200 B. 30 C. 300 D. 120
- Câu 23.** Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có 7 chữ số khác nhau mà hai chữ số chẵn đứng liền kề nhau?
- A. 6! B. 2.6! C. 7! D. 2.7!
- Câu 24.** Có 3 môn thi Toán, Lí, Hóa cần xếp vào 3 buổi thi, mỗi buổi 1 môn sao cho môn Toán không thi buổi đầu thì số cách xếp là:
- A. 3! B. 2! C. 3!–2! D. 5
- Câu 25.** Có 12 tay đua xe đạp cùng xuất phát trong một cuộc đua để chọn ra 3 người về đích đầu tiên. Số kết quả có thể xảy ra là:
- A. 1250 B. 1320 C. 220 D. 240
- Câu 26.** Từ 12 người, người ta thành lập một ban kiểm tra gồm 2 người lãnh đạo và 3 ủy viên. Hỏi có bao nhiêu cách thành lập ban kiểm tra?
- A. $C_{12}^2 C_{10}^3$ B. $C_{10}^2 C_{12}^5$ C. $C_{12}^2 C_{12}^5$ D. Kết quả khác
- Câu 27.** Có 4 cuốn sách toán khác nhau, 3 sách lý khác nhau, 2 sách hóa khác nhau. Muốn sắp vào một kệ dài các cuốn sách cùng môn kề nhau, 2 loại toán và lý phải kề nhau thì số cách sắp là:
- A. 4!.3!.2! B. 2.4!.3!.2! C. 3.4!.3!.2! D. 4.4!.3!.2!
- Câu 28.** Có 18 đội bóng đá tham gia thi đấu. Mỗi đội chỉ có thể nhận nhiều nhất là một huy chương và đội nào cũng có thể đoạt huy chương. Khi đó, số cách trao 3 loại huy chương vàng, bạc, đồng cho ba đội nhất nhì ba là:
- A. 51 B. 4896 C. 125 D. 12070
- Câu 29.** Cho số $M = 2^5.3^3.5^4$. M có tất cả bao nhiêu ước số dương?
- A. 60 B. 13 C. 140 D. 120
- Câu 30.** Có bao nhiêu số là ước dương của $2^{10}.3^6.5^8$ và chia hết cho $2^5.3^2.5^4$?
- A. 30 B. 150 C. 60 D. 120
- Câu 31.** Một lớp học có 30 học sinh, trong đó có 18 em giỏi toán, 14 em giỏi văn và 10 em không giỏi môn nào. Số tất cả các em giỏi cả văn lẫn toán là:
- A. 20 B. 12 C. 24 D. 48
- Câu 32.** Tìm tất cả các giá trị $x \in N$ thỏa mãn $6(P_x - P_{x-1}) = P_{x+1}$
- A. $x = 2$ B. $x = 3$ C. $x = 2; x = 3$ D. $x = 5$
- Câu 33.** Tính tổng S của tất cả các giá trị của x thỏa mãn $P_2 x^2 - P_3 x = 8$

- A. $S = -4$ B. $S = -1$ C. $S = 4$ D. $S = 3$

Câu 34. Có bao nhiêu số tự nhiên x thỏa mãn $3A_x^2 - A_{2x}^2 + 42 = 0$?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 6

Câu 35. Cho số tự nhiên x thỏa mãn $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. x là số chính phương. B. x là số nguyên tố.
C. x là số chẵn. D. x là số chia hết cho 3.

Câu 36. Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $A_n^3 + 5A_n^2 = 2(n+15)$?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 37. Tìm giá trị $n \in N$ thỏa mãn $C_{n+1}^1 + 3C_{n+2}^2 = C_{n+1}^3$

- A. $n = 12$ B. $n = 9$ C. $n = 16$ D. $n = 2$

Câu 38. Tính tích P của tất cả các giá trị của x thỏa mãn $C_{14}^x + C_{14}^{x+2} = 2C_{14}^{x+1}$

- A. $P = 4$ B. $P = 32$ C. $P = -32$ D. $P = 12$

Câu 39. Tính tổng S của tất cả các giá trị của n thỏa mãn $\frac{1}{C_n^1} - \frac{1}{C_{n+1}^2} = \frac{7}{6C_{n+4}^1}$

- A. $S = 8$ B. $S = 11$ C. $S = 12$ D. $S = 15$

Câu 40. Tìm giá trị $x \in N$ thỏa mãn $C_x^0 + C_x^{x-1} + C_x^{x-2} = 79$

- A. $x = 13$ B. $x = 17$ C. $x = 16$ D. $x = 12$

Câu 41. Tìm giá trị $n \in N$ thỏa mãn $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$

- A. $n = 15$ B. $n = 18$ C. $n = 16$ D. $n = 12$

Câu 42. Tìm giá trị $n \in N$ thỏa mãn $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{7n}{2}$

- A. $n = 3$ B. $n = 4$ C. $n = 6$ D. $n = 8$

Câu 43. Tính tổng S của tất cả các giá trị của x thỏa $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$

- A. $S = 2$ B. $S = 7$ C. $S = 9$ D. $S = 14$

Câu 44. Tìm giá trị $n \in N$ thỏa mãn $C_n^6 + 3C_n^7 + 3C_n^8 + C_n^9 = 2C_{n+2}^8$

- A. $n = 18$ B. $n = 16$ C. $n = 15$ D. $n = 14$

Câu 45. Đẳng thức nào sau đây là sai?

- A. $C_{2007}^7 = C_{2006}^7 + C_{2006}^6$ B. $C_{2007}^7 = C_{2006}^{2000} + C_{2006}^6$
C. $C_{2007}^7 = C_{2006}^{2000} + C_{2006}^{1999}$ D. $C_{2007}^7 = C_{2006}^7 + C_{2006}^{2000}$

Câu 46. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A. $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = C_{n+1}^2$
B. $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = A_{n+1}^2$

$$C. 1+2+3+4+\dots+n = C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$$

$$D. 1+2+3+4+\dots+n = A_n^1 + A_n^2 + \dots + A_n^n$$

Câu 47. Tính tích P của tất cả các giá trị của n thỏa mãn $P_n A_n^2 + 72 = 6(A_n^2 + 2P_n)$

A. $P = 12$ B. $P = 5$ C. $P = 10$ D. $P = 6$

Câu 48. Tính tích P của tất cả các giá trị của n thỏa mãn $7(A_{x+1}^{x-1} + 2P_{x-1}) = 30P_x$

A. $P = 7$ B. $P = 4$ C. $P = 28$ D. $P = 14$

Câu 49. Tìm giá trị $n \in N$ thỏa mãn $C_{n+8}^{n+3} = 5A_{n+6}^3$

A. $n = 15$ B. $n = 17$ C. $n = 6$ D. $n = 14$

Câu 50. Tìm giá trị $x \in N$ thỏa mãn $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$

A. $x = 4$ B. $x = 3$ C. $x = 7$ D. $x = 12$

Câu 51. Tìm giá trị $n \in N$ thỏa mãn $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5$

A. $n = 3$ B. $n = 5$ C. $n = 4$ D. $n = 6$

Câu 52. Tính tích P của tất cả các giá trị của n thỏa mãn $A_n^2 - 3C_n^2 = 15 - 5n$

A. $P = 5$ B. $P = 6$ C. $P = 30$ D. $P = 360$

Câu 53. Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!}$?

A. 1 B. 2 C. 3 D. Vô số

Câu 54. Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 - 20 < 0$?

A. 1 B. 2 C. 3 D. Vô số

Câu 55. Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 < 30$?

A. 1 B. 2 C. 3 D. Vô số

Câu 56. Tìm giá trị $x \in N$ thỏa mãn $3A_x^4 = 24(A_{x+1}^3 - C_x^{x-4})$

A. $x = 3$ B. $x = 1$ C. $x = 5$ D. $x = 1; x = 5$

Câu 57. Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $14P_3 C_{n-1}^{n-3} < A_{n+1}^4$

A. 1 B. 2 C. 3 D. Vô số

Câu 58. Để chào mừng kỉ niệm ngày thành lập Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, nhà trường tổ chức cho học sinh cắm trại. Lớp 10A có 19 học sinh nam và 16 học sinh nữ. Giáo viên cần chọn 5 học sinh để trang trí trại. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 5 học sinh sao cho có ít nhất 1 học sinh nữ? Biết rằng học sinh nào trong lớp cũng có khả năng trang trí trại.

A. C_{19}^5 B. $C_{35}^5 - C_{19}^5$ C. $C_{35}^5 - C_{16}^5$ D. C_{16}^5

Câu 59. Một lớp học sinh có 40 học sinh, trong đó có 25 nam và 15 nữ. Giáo viên cần chọn 3 học sinh tham gia vệ sinh công cộng toàn trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh trong đó có nhiều nhất 1 học sinh nam?

- A. 2625 B. 455 C. 2300 D. 3080

Câu 60. Một nhóm đoàn viên thanh niên tình nguyện về sinh hoạt tại một xã nông thôn gồm có 21 đoàn viên nam và 15 đoàn viên nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân chia 3 nhóm về 3 ấp để hoạt động sao cho mỗi ấp có 7 đoàn viên nam và 5 đoàn viên nữ?

- A. $3C_{36}^{12}$ B. C_{36}^{12} C. $3C_{21}^7 C_{15}^5$ D. $C_{21}^7 C_{15}^5 C_{14}^7 C_{10}^5$

Câu 61. Một hộp có 6 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi sao cho có đủ cả ba màu. Số cách chọn là:

- A. 2163 B. 3843 C. 3003 D. 840

Câu 62. Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12C. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ bế giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn?

- A. 126 B. 102 C. 98 D. 100

Câu 63. Đội học sinh giỏi cấp trường môn Tiếng Anh của trường THPT X theo từng khối như sau: khối 10 có 5 học sinh, khối 11 có 5 học sinh và khối 12 có 5 học sinh. Nhà trường cần chọn một đội tuyển gồm 10 học sinh tham gia IOE cấp tỉnh. Tính số cách lập đội tuyển sao cho có học sinh cả ba khối và có nhiều nhất 2 học sinh khối 10.

- A. 50 B. 500 C. 502 D. 501

Câu 64. Một hộp bi có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 4 viên bi trong đó số viên bi đỏ lớn hơn số viên bi vàng.

- A. 654 B. 275 C. 462 D. 357

Câu 65. Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư khác nhau. Từ đó người ta muốn chọn ra 3 tem thư, 3 bì thư và dán 3 tem thư ấy lên 3 bì đã chọn. Hỏi có bao nhiêu cách làm như thế?

- A. 1000 B. 1200 C. 2000 D. 2200

Câu 66. Cho 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lý thuyết và 6 câu bài tập, người ta cấu hình tạo thành các đề thi. Biết rằng trong đề thi phải gồm 3 câu hỏi trong đó có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 câu hỏi bài tập. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu đề như trên?

- A. 69 B. 88 C. 96 D. 100

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1-C	2-D	3-C	4-A	5-C	6-B	7-C	8-A	9-C	10-A
11-B	12-B	13-B	14-A	15-C	16-D	17-A	18-C	19-A	20-D
21-A	22-D	23-B	24-C	25-C	26-A	27-D	28-B	29-D	30-B

31-B	32-C	33-D	34-B	35-B	36-B	37-A	38-B	39-B	40-D
41-D	42-B	43-B	44-C	45-B	46-A	47-A	48-A	49-B	50-A
51-B	52-C	53-C	54-A	55-A	56-C	57-D	58-B	59-D	60-D
61-A	62-C	63-B	64-B	65-B	66-C				

Câu 1: Số hoán vị của A là $3! = 6$. **Chọn C.**

Câu 2: Số hoán vị của n phần tử là $n!$. **Chọn D.**

Câu 3: Số có 4 chữ số khác nhau tạo thành từ tập trên là A_5^4 . **Chọn C.**

Câu 4: Số có 5 chữ số khác nhau được tạo thành từ tập trên là $5! = 120$. **Chọn A.**

Câu 5: Số cách xếp là $10!$. **Chọn C.**

Câu 6: Giả sử số đó là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$. Chọn a_5 có 2 cách, chọn $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ có $4!$ cách

Do đó có $2.4! = 48$ số thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 7: Giả sử số đó là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$. Chọn a_4 có 3 cách chọn, chọn $\overline{a_1a_2a_3}$ có A_4^3 cách

Do đó có $3.A_4^3 = 72$ số thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 8: Ta có $P_0 = 0$ nên A sai. **Chọn A.**

Câu 9: Giả sử số đó là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.

Trường hợp 1: $a_5 = 0$ chọn $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ có A_5^4 cách $\Rightarrow$ có A_5^4 số thỏa mãn

Trường hợp 2: $a_5 \in \{2; 4\}$ chọn a_1 có 4 cách chọn, chọn $\overline{a_2a_3a_4}$ có A_4^3 cách $\Rightarrow$ có $2.4.A_4^3$ cách

Do đó có $A_5^4 + 2.4.A_4^3 = 312$ số thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 10: Chọn 3 học sinh lớp 12 có C_4^3 cách, chọn 1 học sinh lớp 11 có C_3^1 cách, chọn 1 học sinh lớp 10 có C_5^1 cách. Do đó có $C_4^3.C_3^1.C_5^1 = 60$ cách chọn. **Chọn A.**

Câu 11: Số cách lấy hai viên bi cùng màu đỏ là C_4^2

Số cách lấy hai viên bi cùng màu xanh là C_3^2

Như vậy số cách lấy được hai viên bi cùng màu là $C_4^2 + C_3^2 = 9$ cách. **Chọn B.**

Câu 12: Theo bài ra, ta thấy cách sắp xếp chính là việc nam nữ đứng xen kẽ nhau. Như vậy sẽ có hai trường hợp, hoặc là bạn nam đứng đầu hàng hoặc là bạn nữ đứng đầu hàng.

Và 5 bạn nam thay đổi vị trí cho nhau tương ứng với $5!$ cách.

Tương tự với 5 bạn nữ thay đổi vị trí tương ứng với $5!$ cách.

Vậy số cách sắp xếp cần tìm $2.(5!)^2$. **Chọn B.**

Câu 13: Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcde}$, khi đó

+) Có 4 cách chọn chữ số a (trừ chữ số 0).

+) Có 4 cách chọn chữ số b .

+) Có 3 cách chọn chữ số c .

+) Có 2 cách chọn chữ số d .

+) Có 1 cách chọn chữ số e .

Vậy có tất cả $4.4.3.2.1 = 96$ số cần tìm. **Chọn B.**

Câu 14: Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abc}$ với $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vì $\overline{abc} : 9$ nên suy ra tổng các chữ số $a + b + c : 9$. Khi đó $a, b, c \in \{(0; 4; 5), (2; 3; 4), (1; 3; 5)\}$.

TH1. Với $a, b, c \in \{0; 4; 5\}$ suy ra có $2.2 = 4$ số thỏa mãn yêu cầu.

TH2. Với $a, b, c \in \{2; 3; 4\}$ suy ra có $3! = 6$ số thỏa mãn yêu cầu.

TH3. Với $a, b, c \in \{1; 3; 5\}$ suy ra có $3! = 6$ số thỏa mãn yêu cầu.

Vậy có thể lập được 16 số tự nhiên thỏa mãn bài toán. **Chọn A.**

Câu 15:

TH1. Trong 4 bạn được mời, có Hùng nhưng không có Tuấn.

→ Số cách chọn nhóm 4 người trong trường hợp này là C_6^3 cách.

TH2. Tương tự **TH1**, có Tuấn nhưng không có Hùng nên số cách chọn là C_6^3 cách.

TH3. Trong 4 bạn được mời, không có cả Hùng và Tuấn.

→ Số cách chọn nhóm 4 người trong trường hợp này là C_6^4 cách.

Vậy số cách chọn cần tìm là $C_6^4 + 2C_6^3$ cách. **Chọn C.**

Câu 16: Ta xét hai trường hợp:

TH1. Bạn nam đứng đầu hàng, khi đó số cách sắp xếp là $3.2.3! = 36$ cách.

TH2. Bạn nữ đứng đầu hàng, tương tự **TH1**, suy ra có 36 cách sắp xếp.

Vậy có 72 cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn D.**

Câu 17: Số cách chọn 3 người từ đơn vị A là C_5^3 cách.

Số cách chọn 3 người từ đơn vị B là C_6^3 cách.

Lấy 1 người trong đơn vị A đi ghép cặp đầu với 1 trong 3 người ở đơn vị B, ta được 3 cách.

Lấy 1 người trong 2 người còn lại ở đơn vị A đi ghép cặp đầu với 1 trong 2 người còn lại ở đơn vị B, ta được 2 cách.

Vậy có $C_5^3.C_6^3.3.2 = 1200$ cách thực hiện việc ghép cặp thi đấu. **Chọn A.**

Câu 18: Số cách chọn ban quản trị gồm 1 nam và 3 nữ là $C_5^1.C_4^3$ cách.

Số cách chọn ban quản trị gồm 2 nam và 2 nữ là $C_5^2.C_4^2$ cách.

Số cách chọn ban quản trị gồm 3 nam và 1 nữ là $C_5^3.C_4^1$ cách.

Số cách chọn ban quản trị gồm 4 nam là C_5^4 cách.

Số cách chọn ban quản trị gồm 4 nữ là C_4^4 cách.

Vậy tổng số cách chọn cần tìm là $C_5^1.C_4^3 + C_5^2.C_4^2 + C_5^3.C_4^1 + C_5^4 + C_4^4 = 126$. **Chọn C.**

Câu 19: Số cách chọn 5 cầu thủ trong 11 cầu thủ và sắp xếp có thứ tự là $A_{11}^5 = 55440$. **Chọn A.**

Câu 20: Số cách chọn ban quản trị gồm 1 nam và 3 nữ là $C_5^1.C_4^3$ cách.

Số cách chọn ban quản trị gồm 2 nam và 2 nữ là $C_5^2.C_4^2$ cách.

Số cách chọn ban quản trị gồm 3 nam và 1 nữ là $C_5^3.C_4^1$ cách.

Vậy tổng số cách chọn cần tìm là $C_5^1.C_4^3 + C_5^2.C_4^2 + C_5^3.C_4^1 = 120$ cách. **Chọn D.**

Câu 21: Số cách phân công 3 học sinh để làm vệ sinh lớp học là $A_{50}^3 = 117600$. **Chọn A.**

Câu 22: Có định 3 tem thư xếp theo hàng ngang từ trái sang phải là các vị trí 1, 2, 3. Rõ ràng nếu có 3 bì thư thì mỗi thứ tự xếp 3 bì thư này từ trái sang phải cũng chính là cách dán. Số cách làm cần tìm là: $A_6^3 = 120$. **Chọn D.**

Câu 23: Số số có 7 chữ số khác nhau lập từ các chữ số đã cho: 7!

Xếp 4 chữ số lẻ trên 1 hàng ngang với vị trí bất kỳ: 4! cách.

Ở đây giữa sẽ tạo thành 5 khoảng trống (bao gồm 3 khoảng trống giữa hai chữ số lẻ và 2 khoảng trống tại vị trí đầu và cuối). Ở mỗi khoảng trống, ta sẽ điền các chữ số chẵn 2, 4, 6 vào không kể thứ tự sao cho mỗi khoảng trống chỉ có 1 chữ số chẵn: A_5^3

Cách xếp này cũng chính là số số thỏa mãn yêu cầu đề: $A_5^3.4! = 2.6!$. **Chọn B.**

Câu 24: Số cách xếp bất kỳ 3 môn vào 3 buổi thi bất kỳ là 3!.

Giả sử môn Toán thi buổi đầu, thì số cách xếp 2 môn còn lại vào bất kỳ 2 buổi còn lại là 2!.

Vậy số cách xếp cần tìm: 3!–2!. **Chọn C.**

Câu 25: Ở đây yêu cầu 3 người về đích đầu tiên, nên giữa 3 người này không cần phải phân định thứ tự nhất nhì ba. Số kết quả xảy ra là: $C_{12}^3 = 220$. **Chọn C.**

Câu 26: Số cách chọn 2 lãnh đạo từ 12 người đã cho: C_{12}^2

Số cách chọn 3 ủy viên từ 10 người còn lại: C_{10}^3

Tổng số cách thành lập ban kiểm tra: $C_{12}^2.C_{10}^3$. **Chọn A.**

Câu 27: Đối với 3 vị trí của 3 loại sách thì sách hóa chỉ có thể đứng đầu hoặc cuối: 2 cách chọn.

Tương ứng mỗi vị trí của loại sách hóa thì số cách xếp các cuốn sách hóa là: 2!

Tương tự, số cách xếp toán và lý là: 2.4!.3!

Vậy tổng số cách xếp cần tìm: $2.4!.3!. (2!.2) = 4.4!.3!.2!$. **Chọn D.**

Câu 28: Ta có 3 đội bất kỳ trong 18 đội đều có khả năng đạt huy chương, và thứ tự của 3 đội này sẽ cho biết loại huy chương mà mỗi đội nhận, do đó số cách trao cần tìm: $A_{18}^3 = 4896$. **Chọn B.**

Câu 29: Số ước dương là: $(5+1)(3+1)(4+1) = 120$. **Chọn D.**

Câu 30: Đề ý rằng $2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^8 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot (2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^4)$.

Với mỗi ước dương của $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^4$ khi nhân với $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^4$ đều là ước dương của $2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^8$ thỏa mãn yêu cầu đề.

Số ước dương cần tìm là $(5+1)(4+1)(4+1) = 150$. **Chọn B.**

Câu 31: Số học sinh giỏi ít nhất một môn là: $30 - 10 = 20$

Số học sinh giỏi cả văn lẫn toán là: $18 + 14 - 20 = 12$. **Chọn B.**

Câu 32: Điều kiện: $x \geq 1$ và $x \in N$

$$6(P_x - P_{x-1}) = P_{x+1} \Leftrightarrow 6[x! - (x-1)!] = (x+1)! \Leftrightarrow 6(x-1)! \cdot (x-1) = (x-1)! \cdot x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot (x-1) = x(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn). } \mathbf{Chọn C.}$$

$$\mathbf{Câu 33:} P_2 \cdot x^2 - P_3 \cdot x = 8 \Leftrightarrow 2! \cdot x^2 - 3! \cdot x = 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow S=3. \mathbf{Chọn D.}$$

Câu 34: Điều kiện: $x \geq 2$ và $x \in N$

$$3A_x^2 - A_{2x}^2 + 42 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{x!}{(x-2)!} - \frac{(2x)!}{(2x-2)!} + 42 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot (x-1) \cdot x - (2x-1) \cdot 2x + 42 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 42 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7 \text{ (loại)} \\ x=6 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}. \mathbf{Chọn B.}$$

Câu 35: Điều kiện: $x \geq 10$ và $x \in N$

$$A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8 \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-10)!} + \frac{x!}{(x-9)!} = 9 \frac{x!}{(x-8)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{x-9} = \frac{9}{(x-9)(x-8)} \Leftrightarrow x^2 - 16x + 55 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=11 \text{ (thỏa mãn)} \\ x=5 \text{ (loại)} \end{cases}. \mathbf{Chọn B.}$$

Câu 36: Điều kiện $n \geq 3$ và $n \in N$

$$\text{Ta có } A_n^3 + 5A_n^2 = 2(n+15) \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 5 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} - 2n - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \cdot (n-1) \cdot n + 5 \cdot (n-1) \cdot n - 2n - 30 = 0 \Leftrightarrow n^3 + 2n^2 - 5n - 30 = 0 \Leftrightarrow n=3. \mathbf{Chọn B.}$$

Câu 37: Điều kiện $n \geq 2$ và $n \in N$

$$\begin{aligned}
C_{n+1}^1 + 3C_{n+2}^2 = C_{n+1}^3 &\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{1!.n!} + 3 \cdot \frac{(n+2)!}{2!.n!} = \frac{(n+1)!}{3!.(n-2)!} \\
&\Leftrightarrow n+1 + 3 \cdot \frac{(n+1).(n+2)}{2} = \frac{(n-1).n.(n+1)}{6} \Leftrightarrow 1 + 3 \cdot \frac{(n+2)}{2} = \frac{(n-1).n}{6} \\
&\Leftrightarrow 6 + 9n + 18 = n^2 - n \Leftrightarrow n^2 - 10n - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \text{ (loại)} \\ n = 12 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases} \cdot \text{Chọn A.}
\end{aligned}$$

Câu 38: Điều kiện: $0 \leq x \leq 12$ và $x \in N$

$$\begin{aligned}
C_{14}^x + C_{14}^{x+2} = 2C_{14}^{x+1} &\Leftrightarrow \frac{14!}{x!(14-x)!} + \frac{14!}{(x+2)!(12-x)!} = 2 \frac{14!}{(x+1)!(13-x)!} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{(14-x)(13-x)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} = 2 \cdot \frac{1}{(x+1)(13-x)} \\
&\Leftrightarrow (x+1)(x+2) + (14-x)(13-x) = 2(x+2)(14-x) \\
&\Leftrightarrow x^2 - 12x + 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 8 \end{cases} \longrightarrow P = 4.8 = 32. \text{ Chọn B.}
\end{aligned}$$

Câu 39: Điều kiện: $n \geq 1$ và $n \in N$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C_n^1} - \frac{1}{C_{n+1}^2} = \frac{7}{6C_{n+4}^1} &\Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{2!.(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{7(n+3)!}{6(n+4)!} \Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{2}{n(n+1)} = \frac{7}{6(n+4)} \\
&\Leftrightarrow n^2 - 11n + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \text{ (thỏa mãn)} \\ n = 8 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases} \longrightarrow S = 3 + 8 = 11. \text{ Chọn B.}
\end{aligned}$$

Câu 40: Điều kiện: $x \in N$

$$\begin{aligned}
C_x^0 + C_x^{x-1} + C_x^{x-2} = 79 &\Leftrightarrow C_x^0 + C_x^1 + C_x^2 = 79 \\
&\Leftrightarrow 1 + x + \frac{x(x-1)}{2} = 79 \Leftrightarrow x^2 + x - 156 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -13 \text{ (loại)} \end{cases} \cdot \text{Chọn D.}
\end{aligned}$$

Câu 41: Điều kiện: $n \in N$

$$\begin{aligned}
C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3) &\Leftrightarrow C_{n+4}^3 - C_{n+3}^3 = 7(n+3) \\
&\Leftrightarrow \frac{(n+4)(n+2)}{3!} - \frac{(n+2)(n+1)}{3!} = 7 \Leftrightarrow 3n - 36 = 0 \Leftrightarrow n = 12 \text{ (thỏa mãn). Chọn D.}
\end{aligned}$$

$$\text{Câu 42: } C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{7n}{2} \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{2!.(n-2)!} + \frac{n!}{3!.(n-3)!} = \frac{7n}{2}$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 16 = 0 \longrightarrow n = 4. \text{ Chọn B.}$$

Câu 43: Điều kiện: $x \geq 3$ và $x \in N$

$$C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x \Leftrightarrow \frac{x!}{1! \cdot (x-1)!} + 6 \cdot \frac{x!}{2! \cdot (x-2)!} + 6 \cdot \frac{x!}{3! \cdot (x-3)!} = 9x^2 - 14x$$

$$\Leftrightarrow x + 3x(x-1) + (x-2)(x-1)x = 9x^2 - 14x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 2 \text{ (loại)} \\ x = 7 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases} . \text{ Chọn B.}$$

Câu 44: Điều kiện: $n \geq 9$ và $n \in N$

Áp dụng công thức $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, ta có $C_n^6 + 3C_n^7 + 3C_n^8 + C_n^9 = 2C_{n+2}^8$

$$\Leftrightarrow C_n^6 + C_n^7 + 2(C_n^7 + C_n^8) + C_n^8 + C_n^9 = 2C_{n+2}^8 \Leftrightarrow C_{n+1}^7 + 2C_{n+1}^8 + C_{n+1}^9 = 2C_{n+2}^8$$

$$\Leftrightarrow (C_{n+1}^7 + C_{n+1}^8) + (C_{n+1}^8 + C_{n+1}^9) = 2C_{n+2}^8 \Leftrightarrow C_{n+2}^8 + C_{n+2}^9 = 2C_{n+2}^8$$

$$\Leftrightarrow C_{n+2}^9 = C_{n+2}^8 \longrightarrow n+2 = 9+8 \Leftrightarrow n = 15. \text{ Chọn C.}$$

Câu 45: Áp dụng công thức $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, ta có $C_{2006}^6 + C_{2006}^7 = C_{2007}^7$. Do đó A đúng.

$$\text{Áp dụng công thức } C_n^k = C_n^{n-k} \longrightarrow \begin{cases} C_{2006}^6 = C_{2006}^{2000} \\ C_{2006}^7 = C_{2006}^{1999} \end{cases}$$

Suy ra $C_{2007}^7 = C_{2006}^6 + C_{2006}^7 = C_{2006}^{2000} + C_{2006}^{1999} = C_{2006}^{2000} + C_{2006}^7$. Do đó C, D đúng; B sai. **Chọn B.**

$$\text{Câu 46: Ta có } 1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ và } C_{n+1}^2 = \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Do đó A đúng. **Chọn A.**

Câu 47: Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in N$

$$\text{Ta có } P_n A_n^2 + 72 = 6(A_n^2 + 2P_n) \Leftrightarrow n! \cdot \frac{n!}{(n-2)!} + 72 = 6 \left[\frac{n!}{(n-2)!} + 2.n! \right]$$

$$\Leftrightarrow n! \cdot (n-1).n + 72 = 6[(n-1)n + 2.n!] \Leftrightarrow (n!-6)(n^2-n-12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n^2-n-12=0 \\ n!-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=4 \text{ (thỏa mãn)} \\ n=-3 \text{ (loại)} \\ n=3 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases} \longrightarrow P = 4.3 = 12. \text{ Chọn A.}$$

Câu 48: Điều kiện: $x \geq 1$ và $x \in N$

$$\text{Ta có } 7(A_{x+1}^{x-1} + 2P_{x-1}) = 30P_x \Leftrightarrow 7 \left[\frac{(x+1)!}{2!} + 2 \cdot (x-1)! \right] = 30.x!$$

$$\Leftrightarrow 7 \left[\frac{x(x-1)}{2} + 2 \right] = 30x \Leftrightarrow 7x^2 - 53x + 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \text{ (thỏa mãn)} \\ x=\frac{4}{7} \text{ (loại)} \end{cases} \longrightarrow P = 7. \text{ Chọn A.}$$

Câu 49: Áp dụng công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có $C_{n+8}^{n+3} = 5A_{n+6}^3 \Leftrightarrow C_{n+8}^5 = 5.A_{n+6}^3$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+8)(n+7)}{5!} = 5 \Leftrightarrow n^2 + 15n - 544 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 17 \text{ (thỏa mãn)} \\ n = -32 \text{ (loại)} \end{cases}. \text{Chọn B.}$$

Câu 50: Điều kiện: $x \geq 2$ và $x \in N$

$$\text{Ta có } A_x^2.C_x^{x-1} = 48 \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-2)!} \cdot \frac{x!}{(x-1)! \cdot 1!} = 48$$

$$\Leftrightarrow (x-1)x.x = 48 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn)}. \text{Chọn A.}$$

Câu 51: Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in N$

$$\text{Ta có } A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{(n-1)!}{(n-1)! \cdot 2!} = 5 \Leftrightarrow (n-1)n - \frac{n(n+1)}{2} - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \text{ (loại)} \\ n = 5 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}. \text{Chọn B.}$$

Câu 52: Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in N$

$$\text{Ta có } A_n^2 - 3C_n^2 = 15 - 5n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - 3 \cdot \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 15 - 5n$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) - 3 \frac{n(n-1)}{2} = 15 - 5n \Leftrightarrow -n^2 + 11n - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 6 \text{ (thỏa mãn)} \\ n = 5 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

$$\longrightarrow P = 5.6 = 30. \text{Chọn C.}$$

Câu 53: Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in N$

$$\text{Ta có } \frac{A_{n+4}^n}{(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!} \Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{(n+2)! \cdot n!} < \frac{15}{(n-1)!} \Leftrightarrow \frac{(n+3)(n+4)}{n} < 15$$

$$\Leftrightarrow (n+3)(n+4) < 15n \Leftrightarrow n^2 - 8n + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < n < 6 \xrightarrow{n \in N} n \in \{3, 4, 5\}. \text{Chọn C.}$$

Câu 54: Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in N$

$$\text{Ta có } 2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 - 20 < 0 \Leftrightarrow 2 \frac{(n+1)!}{2! \cdot (n-1)!} + 3 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} - 20 < 0$$

$$\Leftrightarrow n(n+1) + 3(n-1)n - 20 < 0 \Leftrightarrow 2n^2 - n - 10 < 0 \Leftrightarrow -2 < n < \frac{5}{2} \xrightarrow[n \in N]{n \geq 2} n = 2. \text{Chọn A.}$$

Câu 55: Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in N$

$$\text{Ta có } 2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 < 30 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{(n+1)!}{2! \cdot (n-1)!} + 3 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} < 30$$

$$\Leftrightarrow n(n+1)+3(n-1)x < 30 \Leftrightarrow 2n^2 - n - 15 < 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < n < 3 \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{n \geq 2} n = 2. \text{ Chọn A.}$$

Câu 56: Điều kiện: $x \geq 4$ và $x \in \mathbb{N}$

$$\text{Ta có } 3A_x^4 = 24(A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}) \Leftrightarrow 23 \cdot \frac{x!}{(x-4)!} = 24 \cdot \left[\frac{(x+1)!}{(x-2)!} - \frac{x!}{(x-4)!4!} \right]$$

$$\Leftrightarrow 23 \cdot \frac{1}{(x-4)!} = 24 \cdot \left[\frac{x+1}{(x-2)!} - \frac{1}{(x-4)!4!} \right] \Leftrightarrow 23 \cdot \frac{1}{1} = 24 \cdot \left[\frac{x+1}{(x-2)(x-3)} - \frac{1}{1 \cdot 24} \right]$$

$$\Leftrightarrow 23 = 24 \cdot \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} - 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 5 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 57: Điều kiện: $n \geq 3$ và $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Ta có } 14 \cdot P_3 C_{n-1}^{n-3} < A_{n+1}^4 \Leftrightarrow 14 \cdot 3! \cdot \frac{(n-1)!}{(n-3)! \cdot 2!} < \frac{(n+1)!}{(n-3)!}$$

$$\Leftrightarrow 42(n-2)(n-1) < (n-2)(n-1)n(n+1) \Leftrightarrow 42 < n(n+1) \Leftrightarrow n^2 + n - 42 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n < -7 \\ n > 6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{n \geq 3} \begin{cases} n \geq 7 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 58: Tổng số học sinh lớp 10A là 35.

Có C_{35}^5 cách chọn 5 học sinh từ 35 học sinh lớp 10A.

Có C_{19}^5 cách chọn 5 học sinh từ 19 học sinh nam của lớp 10A.

Do đó có $C_{35}^5 - C_{19}^5$ cách chọn 5 học sinh sao cho có ít nhất một học sinh nữ. **Chọn B.**

Câu 59: Do trong 3 học sinh được chọn có nhiều nhất 1 học sinh nam nên ta có các trường hợp sau:

Số học sinh nam	Số học sinh nữ	Số cách chọn
1	2	$C_{25}^1 \times C_{15}^2$
0	3	$C_{25}^0 \times C_{15}^3$

Vậy có $C_{25}^1 \times C_{15}^2 + C_{25}^0 \times C_{15}^3 = 3080$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn D.**

Cách khác. Số cách chọn 3 học sinh bất kỳ trong lớp là: C_{40}^3 cách.

Số cách chọn 3 học sinh trong đó có 2 học sinh nam, 1 học sinh nữ là: $C_{25}^2 \times C_{15}^1$ cách.

Số cách chọn 3 học sinh nam là: $C_{25}^3 \times C_{15}^0$ cách.

Vậy có $C_{40}^3 - (C_{25}^2 \times C_{15}^1 + C_{25}^3 \times C_{15}^0) = 3080$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 60: Số cách chọn nhóm thứ nhất là: $C_{21}^7 \times C_{15}^5$ cách.

Số cách chọn nhóm thứ hai là: $C_{14}^7 \times C_{10}^5$ cách.

Số cách chọn nhóm thứ ba là: $C_7^7 \times C_5^5$ cách.

Vậy có $(C_{21}^7 \times C_{15}^5) \times (C_{14}^7 \times C_{10}^5) \times (C_7^7 \times C_5^5) = C_{21}^7 C_{15}^5 C_{14}^7 C_{10}^5$ cách chia nhóm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn D.

Câu 61: Số cách chọn 5 viên bi bất kỳ trong hộp là: C_{15}^5 cách.

Số cách chọn 5 viên bi mà trong đó không có viên bi nào màu vàng là: C_{11}^5 cách.

Số cách chọn 5 viên bi mà trong đó không có viên bi nào màu đỏ là: C_{10}^5 cách.

Số cách chọn 5 viên bi mà trong đó không có viên bi nào màu xanh là: C_9^5 cách.

Vậy có $C_{15}^5 - (C_{11}^5 + C_{10}^5 + C_9^5) = 2163$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A.**

Câu 62: Do trong 5 học sinh có đủ học sinh ở các lớp 12A, 12B, 12C nên ta có các trường hợp sau:

Số học sinh lớp	Số học sinh lớp	Số học sinh lớp	Số cách chọn
12A	12B	12C	
2	1	2	$C_4^2 \times C_3^1 \times C_2^2$
1	2	2	$C_4^1 \times C_3^2 \times C_2^2$
2	2	1	$C_4^2 \times C_3^2 \times C_2^1$
3	1	1	$C_4^3 \times C_3^1 \times C_2^1$
1	3	1	$C_4^1 \times C_3^3 \times C_2^1$

Vậy có $C_4^2 \times C_3^1 \times C_2^2 + C_4^1 \times C_3^2 \times C_2^2 + C_4^2 \times C_3^2 \times C_2^1 + C_4^3 \times C_3^1 \times C_2^1 + C_4^1 \times C_3^3 \times C_2^1 = 98$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C.**

Cách khác. Tổng số học sinh trong đội văn nghệ của nhà trường là 9 học sinh.

Số cách chọn 5 học sinh bất kỳ trong 9 học sinh là: C_9^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh mà trong đó không có học sinh lớp 12A là: C_5^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh mà trong đó không có học sinh lớp 12B là: C_6^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh mà trong đó không có học sinh lớp 12C là: C_7^5 cách.

Vậy có $C_9^5 - (C_5^5 + C_6^5 + C_7^5) = 98$ cách thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 63: Từ giả thiết suy ra có 2 khả năng xảy ra như sau:

•**TH1:** Có đúng 1 học sinh khối 10.

Số cách chọn 1 học sinh khối 10 là: C_5^1 cách.

Số cách chọn 9 học sinh còn lại từ khối 11 và 12 là: C_{10}^9 cách.

●**TH2:** Có đúng 2 học sinh khối 10.

Số cách chọn 2 học sinh khối 10 là: C_5^2 cách.

Số cách chọn 8 học sinh còn lại từ khối 11 và 12 là: C_{10}^8 cách.

Vậy có $C_5^1 \times C_{10}^9 + C_5^2 \times C_{10}^8 = 500$ cách lập đội thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn B.**

Câu 64: Tổng số bi lấy ra có 4 viên mà bi đỏ nhiều hơn bi vàng nên có 2 trường hợp xảy ra:

●**TH1:** Không có bi vàng, khi đó số bi đỏ phải từ 1 viên trở lên.

Số cách lấy 4 viên bi bất kỳ trong tổng số 9 viên bi (gồm 5 đỏ và 4 xanh) là: C_9^4 cách.

Số cách lấy 4 viên bi xanh là: C_4^4 cách.

$\Rightarrow$ Số cách lấy thỏa mãn trong trường hợp này là: $C_9^4 - C_4^4 = 125$ cách.

●**TH2:** Có 1 viên bi vàng, khi đó số bi đỏ phải từ 2 viên trở lên. Số cách lấy 1 viên bi vàng: C_3^1 cách.

Số cách lấy 3 viên bi còn lại trong đó có 2 bi đỏ và 1 bi xanh là: $C_5^2 \times C_4^1$ cách.

Số cách lấy 3 viên bi còn lại đều là bi đỏ là: $C_5^3 \times C_4^0$ cách.

$\Rightarrow$ Số cách lấy thỏa mãn trong trường hợp này là: $C_3^1 \times (C_5^2 \times C_4^1 + C_5^3 \times C_4^0) = 150$ cách.

Vậy có $125 + 150 = 275$ cách lấy thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn B.**

Câu 65: Số cách chọn 3 tem thư trong 5 tem thư khác nhau là: C_5^3 cách.

Số cách chọn 3 bì thư trong 6 bì thư khác nhau là: C_6^3 cách.

Số cách dán tem thư thứ nhất vào 3 bì thư là: C_3^1 cách.

Số cách dán tem thư thứ nhất vào 2 bì thư còn lại là: C_2^1 cách.

Số cách dán tem thư thứ nhất vào bì thư cuối cùng là: C_1^1 cách.

Vậy có $(C_5^3 \times C_6^3) \times (C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1) = 1200$ cách làm thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn B.**

Câu 66: Theo bài ra, một đề thi gồm 3 câu hỏi vừa có câu hỏi lý thuyết vừa có câu hỏi bài tập nên ta xét:

●**TH1:** Đề thi gồm 1 câu lý thuyết, 2 câu bài tập. Lấy 1 câu lý thuyết trong 4 câu lý thuyết có C_4^1 cách,

tương ứng lấy 2 câu bài tập trong 6 câu bài tập có C_6^2 cách. Vậy có $C_4^1 \cdot C_6^2$ đề.

●**TH2:** Đề thi gồm 2 câu lý thuyết, 1 câu bài tập.

Lập luận tương tự **TH1**, ta sẽ tạo được $C_4^2 \cdot C_6^1$ đề.

Vậy có thể tạo được $C_4^1 \times C_6^2 + C_4^2 \times C_6^1 = 96$ đề thi thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C.**