

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: Toán 10

Thời gian làm bài: 150 phút

(Đề thi gồm 01 trang)

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Câu 1 (6 điểm)

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$.

b) Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} = 5x - 3$.

Câu 2 (3 điểm) Cho bất phương trình $(m-1)x^2 + 2mx + m - 3 \geq 0$.

a) Giải bất phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 3 (3 điểm)

a) Cho tam giác ABC có các cạnh $AB = c, BC = a, CA = b$ thỏa mãn hệ thức

$$\frac{1 + \cos C}{1 - \cos C} = \frac{2b + a}{2b - a}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

b) Cho tam giác ABC có $AB = a, AC = 2a, \angle BAC = 60^\circ$, trọng tâm G . Tính diện tích tam giác ABG .

Câu 4 (6 điểm)

a) Cho tam giác ABC . Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $5\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BC}$ và một điểm E thỏa mãn $4\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng ba điểm E, A, D thẳng hàng.

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Biết trung điểm của cạnh BC là điểm $N(1; 2)$, đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác ADN có phương trình $5x - y + 1 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết đỉnh A có hoành độ dương.

Câu 5 (2 điểm)

Cho tam giác ABC , biết $AB = 3, BC = 4, CA = 5$. Điểm M thay đổi thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = MB^2 + MC^2 - MA^2$.

-----Hết-----

(Lưu ý: Học sinh không được sử dụng máy tính. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm)

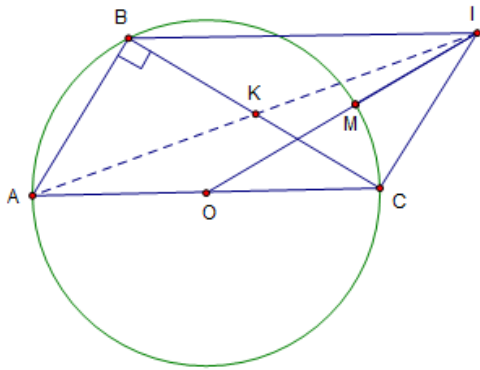
Chữ kí cán bộ coi thi số 1:.....Chữ kí cán bộ coi thi số 2:.....

ĐÁP ÁN – MÔN TOÁN – LỚP 10-NĂM HỌC 2023-2024

Câu	Nội dung	Điểm							
1a 3đ	Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$								
	- Lập đúng bảng biến thiên	1.5							
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr></table>		x	$-\infty$	2	$+\infty$	y	$+\infty$	-1
	x	$-\infty$	2	$+\infty$					
y	$+\infty$	-1	$+\infty$						
Vẽ đúng đồ thị (Vẽ được hình dáng của đồ thị nhưng còn một số sai sót nhỏ được 0.5 điểm)	1.5								
1b 3đ	Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} = 5x - 3$ (1)								
	$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3 \geq 0 \\ 3x + 1 = (5x - 3)^2 \end{cases}$	1.0							
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{5} \\ 25x^2 - 33x + 8 = 0 \end{cases}$	1.0							
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{5} \\ 25x^2 - 33x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{5} \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{8}{25} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \text{ PT đã cho có nghiệm } x = 1.$	1.0							
2a 1.5đ	Giải bất phương trình khi $m = 2$.								
	$m = 2 \Rightarrow x^2 + 4x - 1 \geq 0$	0.5							
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 + \sqrt{5} \\ x \leq -2 - \sqrt{5} \end{cases}$.	0.5							
	BPT đã cho có tập nghiệm là $(-\infty; -2 - \sqrt{5}) \cup (-2 + \sqrt{5}; +\infty)$	0.5							
2b 1.5đ	Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình đã cho có nghiệm.								
	$m = 1 \Rightarrow 2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ suy ra BPT có nghiệm, m = 1 thỏa mãn.	0.5							

	Với $m \neq 1$ BPT đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow (m-1)x^2 + 2mx + m-3 < 0 \forall x$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ \Delta' = m^2 - (m-1)(m-3) < 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 4m-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m < \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{3}{4}$ KL: Với $m \geq \frac{3}{4}$ thì BPT có nghiệm	0.5 0.5
3a 1.5đ	Cho tam giác ABC có các cạnh $AB = c, BC = a, CA = b$ thỏa mãn hệ thức: $\frac{1 + \cos C}{1 - \cos C} = \frac{2b + a}{2b - a}$ Chứng minh rằng tam giác ABC cân.	
	Ta có $\frac{1 + \cos C}{1 - \cos C} = \frac{2b + a}{2b - a} \Leftrightarrow 1 + \frac{1 + \cos C}{1 - \cos C} = 1 + \frac{2b + a}{2b - a} \Leftrightarrow \frac{2}{1 - \cos C} = \frac{4b}{2b - a}$	0,5
	$\Leftrightarrow 2b - a = 2b - 2b \cos C$ $\Leftrightarrow a = 2b \cos C$	0.5
	$\Leftrightarrow a = 2b \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ $\Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2$ $\Leftrightarrow b = c$ $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC cân tại A (đ.p.c.m)	0,5
3b 1.5đ	Cho tam giác ABC có $AB = a, AC = 2a, \angle BAC = 60^\circ$, trọng tâm G. Tính diện tích tam giác ABG.	
	Ta có $AB = a, AC = 2a, \angle BAC = 60^\circ$ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$	0,5
	Gọi M là trung điểm của BC $\Rightarrow \begin{cases} S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} \\ S_{\triangle ABG} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABM} \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle ABG} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$	0,5

	$\Rightarrow S_{\triangle ABG} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$ Vậy diện tích của tam giác ABM là $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$	0,5
4a 3đ	Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $5\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BC}$ và một điểm E thỏa mãn $4\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng ba điểm E, A, D thẳng hàng.	
	Ta có $5\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BC}$ $\Leftrightarrow 5\overrightarrow{BD} = 3(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC})$ $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{DC}$ $\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED}) = 3(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC})$ $\Leftrightarrow 5\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{BE} + 3\overrightarrow{CE} \quad (*)$	1.0
	Từ (*) và từ giả thiết ta có $\begin{cases} 4\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0} \\ 5\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{BE} + 3\overrightarrow{CE} \end{cases}$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\overrightarrow{EA} = 2\overrightarrow{BE} + 3\overrightarrow{CE} \\ 5\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{BE} + 3\overrightarrow{CE} \end{cases}$	0.5
	$\Rightarrow 5\overrightarrow{DE} = 4\overrightarrow{EA} \Leftrightarrow \overrightarrow{DE} = \frac{4}{5}\overrightarrow{EA}$	0.5
	Suy ra 3 điểm E, A, D thẳng hàng.	0.5
4b 3đ	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Biết trung điểm của cạnh BC là điểm N(1; 2), đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác AND có phương trình $5x - y + 1 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết đỉnh A có hoành độ dương.	
	Gọi M là trung điểm của DN, E là giao của đường thẳng AM và đường thẳng BC. Ta có ADEN là hình bình hành do NE//AD và M là trung điểm của DN, suy ra NE=AD $\Rightarrow NC = CE = BN \Rightarrow BE = \frac{3}{2}BC, NE = BC$ Đặt $AB = a$, ta có $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}, NE = a$	0.5
	Ta có	

	$S_{ANE} = \frac{1}{2} AB \cdot NE = \frac{1}{2} AE \cdot d(N; AE)$ $\Rightarrow d(N; AE) = \frac{2a}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{26}} = \frac{2a}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow a = \sqrt{2}$ $\Rightarrow AN = \frac{\sqrt{10}}{2}$	0.5
	Ta có $A \in AE : 5x - y + 1 = 0 \Rightarrow A = (t; 5t + 1) \quad (t > 0)$ $\Rightarrow \overrightarrow{NA} = (t - 1; 5t - 1)$ $\Rightarrow AN = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow 52t^2 - 24t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} & (t / m) \\ t = -\frac{1}{26} & (\text{không } t / m) \end{cases}$ Suy ra $A = \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$.	0.5
	Ta có $AE = \frac{\sqrt{26}}{2}$, $E(m; 5m + 1)$, lập luận tương tự ta có $m = 1$ hoặc $m = 0$. - Với $m = 1$ suy ra $E = (1; 7) \Rightarrow C = \left(1; \frac{9}{2}\right) \Rightarrow B = \left(1; -\frac{1}{2}\right), D = \left(2; \frac{17}{2}\right)$ Ta có $(5x_D - y_D + 1)(5x_N - y_N + 1) > 0$ suy ra D và N nằm cùng phía so với đường thẳng AM, suy ra $m = 1$ không thỏa mãn	0.5
	- Với $m = 0 \Rightarrow E = (0; 1) \Rightarrow C = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow B = \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right), D = \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ (thỏa mãn)	0.5
	KL: $A = \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right), B = \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right), C = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right), D = \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$	0.5
5 2đ	Cho tam giác ABC, biết $AB = 3, BC = 4, CA = 5$. Điểm M thay đổi thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = MB^2 + MC^2 - MA^2$ 	

	Ta thấy ΔABC vuông tại B. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì O là trung điểm AC. Gọi I là điểm thỏa mãn $\vec{IB} + \vec{IC} - \vec{IA} = \vec{0}$. Khi đó: $\vec{IB} + \vec{IC} - \vec{IA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{IB} + \vec{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{BI} = \vec{AC}$. Do đó CABI là hình bình hành, hay I là đỉnh thứ tư của hình bình hành CABI. Vậy điểm I cố định và I nằm ngoài đường tròn ngoại tiếp A tam giác ABC.	0.5
	Ta có $ \begin{aligned} T &= MB^2 + MC^2 - MA^2 = \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 - \vec{MA}^2 \\ &= (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2 - (\vec{MI} + \vec{IA})^2 \\ &= \vec{MI}^2 + \vec{IB}^2 + \vec{IC}^2 - \vec{IA}^2 + 2\vec{MI}(\vec{IB} + \vec{IC} + \vec{IA}) \\ &= MI^2 + IB^2 + IC^2 - IA^2. \end{aligned} $ Do đó T nhỏ nhất khi và chỉ khi IM nhỏ nhất. Vì M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên IM nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của tia OI và đường tròn (O).	0.5
	Khi đó $IM = OI - OM = OI - R$. Ta có: $ \begin{aligned} OI^2 &= \vec{OI}^2 = (\vec{OC} + \vec{CI})^2 = OC^2 + CI^2 + 2\vec{OC} \cdot \vec{CI} \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 3 \cdot \cos(\vec{OC}, \vec{CI}) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 3 \cdot \cos \widehat{BAC} \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{97}{4} \Rightarrow OI = \frac{\sqrt{97}}{2} \end{aligned} $ Do đó $IM = \frac{\sqrt{97} - 5}{2}$.	0.5
	Ta có $IB = AC = 5, IC = AB = 3$ Gọi K là tâm của hình bình hành BACI.	0.5

	$IA = 2AK = 2\sqrt{3^2 + 2^2} = 2\sqrt{13}.$ Vậy T nhỏ nhất bằng $T = MI^2 + IB^2 + IC^2 - IA^2 = \left(\frac{\sqrt{97} - 5}{2}\right)^2 + 5^2 + 3^2 - (2\sqrt{13})^2 = \frac{25 - 5\sqrt{97}}{2}$ khi M là giao điểm của tia OI và đường tròn (O).	
--	---	--

Chú ý: Lời giải đúng theo cách khác vẫn chấm điểm tối đa.