

**HƯỚNG DẪN TƯ DUY GIẢI NHANH CÁC CÂU HỎI KHÓ
TRONG ĐỀ CHÍNH THỨC THPTQG 2018 MÔN TOÁN**

Nhận xét chung: Trong 16 câu hỏi vận dụng (từ câu 35 đến câu 50) được trình bày dưới đây, chúng ta không cần phải tính toán nhiều. Các câu hỏi chỉ trải qua nhiều nhất là khoảng 3 bước tính toán đơn giản (cộng - trừ - nhân - chia). Chủ yếu trong 16 câu này là kiểm tra về tư duy toán học, việc nắm kiến thức của học sinh có chắc chắn, sâu sắc và đủ rộng không. So với đề thi năm 2017, mức độ tính toán ở 16 câu cuối giảm đi 50% nhưng mức độ tư duy thì nặng gấp đôi. Điều này có lợi cho các học sinh nắm kiến thức sâu sắc và tư duy tốt, nhưng lại gây khó khăn cho các học sinh học theo hình thức thuộc bài và thiên về tính toán.

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên $(-\infty; -10)$?

LG. Ta có $y' = \frac{5m-2}{(x+5m)^2}$. Từ dấu hiệu hàm phân thức ta thấy

$$y_{cbt} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m-2 > 0 \\ -10 \leq -5m \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < m \leq 2 \Leftrightarrow m = 1; 2.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Nhận xét. Đây là câu ở mức vận dụng thấp, được cho nhẹ nhàng và đẹp, nhưng học sinh không vững kiến thức về nhận biết đồ thị vẫn không làm được.

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

LG. Ta có $y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3$. Vậy

$$y_{cbt} \Leftrightarrow \begin{cases} -4(m^2-4) > 0 \\ -4(m^2-4) = m-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1; \dots; 2.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Nhận xét. Ở đây phải nhận thấy hàm đạt cực tiểu tại $x = 0$ thì tương đương với $y'(0) = 0$ và $y'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x chạy qua điểm 0 (từ âm sang dương), điều này lại tương đương với số hạng chứa lũy thừa thấp nhất của x có hệ số khác không trong biểu thức y' phải là lũy thừa bậc lẻ và hệ số dương. Đây là bước tư duy không tầm thường, học sinh phải hiểu thật sâu sắc kiến thức

Câu 37. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn OI sao cho $MO = 2MI$. Khi đó cosin góc tạo bởi 2 mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng ?

LG. Ta coi cạnh hình vuông bằng 6. Lấy P, Q là trung điểm AB và $C'D'$. Góc cần tính là góc tạo bởi 2 vectơ $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{MQ}$. Xét mặt phẳng tọa độ gốc I , 2 trục là IQ, IO . Khi đó

$$\overline{MQ} = (3; -1), \overline{MP} = (-3; 5); \cos \alpha = \frac{|-9-5|}{\sqrt{3^2+1}\sqrt{3^2+5^2}} = \frac{14}{\sqrt{10}\sqrt{34}} = \frac{7\sqrt{85}}{85}.$$

Nhận xét: Đây là bài hình không gian cơ bản, tuy nhiên: học sinh có tư duy tốt thì sẽ làm rất ngắn gọn và không mất nhiều thời gian, ngược lại, sẽ phải tính toán nhiều hơn.

Câu 38. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-4-i)+2i=(5-i)z$?

LG. Để thấy phương trình đã cho tương đương với $z = \frac{4|z|+(|z|-2)i}{|z|-5+i}$ (*). Lấy môđun 2 vế ta được

$$|z|^2 = \frac{16|z|^2 + (|z|-2)^2}{(|z|-5)^2 + 1} \Leftrightarrow |z|^4 - 10|z|^3 + 9|z|^2 + 4|z| - 4 = 0.$$

Học sinh có thể bấm máy để thấy phương trình cuối cùng có đúng 3 nghiệm dương, hoặc tách một nhân tử $(|z|-1)$ và khảo sát nhân tử bậc 3 còn lại có hai nghiệm dương khác nữa. Thay vào (*) thì được 3 số phức.

Nhận xét: Bài toán này học sinh nắm chắc kiến thức mới nhận thấy mỗi nghiệm $|z| > 0$ của phương trình cuối sẽ cho ra đúng 1 và chỉ 1 nghiệm z của phương trình đầu thông qua mối liên hệ (*). Ngược lại nếu học sinh đặt $z = x + yi$ sẽ rất khó khăn để làm.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9$ và điểm $A(2; 3; -1)$. Xét các điểm M trên (S) sao cho AM tiếp xúc với (S) . Khi đó M luôn thuộc mặt phẳng?

LG. Tâm mặt cầu $I(-1; -1; -1)$. $AI^2 = 25, AM^2 = AI^2 - 9 = 16$. Vậy M thuộc vào mặt cầu

$$(S'): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16.$$

Lấy phương trình của (S) trừ đi phương trình của (S') (tương ứng vế với vế) ta được phương trình của mặt phẳng luôn chứa M là

$$6x + 8y - 11 = -7 \Leftrightarrow 3x + 4y - 2 = 0.$$

Nhận xét. Tọa độ không gian luôn là phần dễ nhất, nhưng yêu cầu đối với học sinh bài này chỉ là tư duy tưởng tượng hình, việc tính toán gần như không đáng kể.

Câu 40. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$. Có bao nhiêu điểm A thuộc đồ thị hàm số sao cho tiếp tuyến

tại A cắt lại đồ thị tại hai điểm khác A là $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$.

LG. Chú ý $y' = x^3 - 7x = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{7}; 0; \sqrt{7}$; và $y'' = 3x^2 - 7$. Ta thấy hàm số đã cho là hàm trùng phương bậc 4 hướng lên trên, vậy 1 điểm $A(x_0; y_0)$ mà tiếp tuyến tại đó có đúng 3 điểm chung với đồ thị khi và chỉ khi $x_{CT1} < x_0 < x_{CT2}$ và x_0 không là nghiệm kép của phương trình tương giao, hay $y''(x_0) \neq 0$. Còn điều kiện còn lại tương đương với hệ số góc của tiếp tuyến $y'(x_0) = 6$. Vậy

$$ycbt \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{7} < x_0 < \sqrt{7} \\ 3x_0^2 - 7 \neq 0 \\ x_0^3 - 7x_0 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{7} < x_0 < \sqrt{7} \\ x_0 = -1; -2; 3 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 1; 2.$$

Vậy có 2 điểm A.

Nhận xét. Thực tế điều kiện $y''(x_0) \neq 0$ trong bài này không cần kiểm tra vì phương trình hệ số góc bằng 6 không có nghiệm $\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$. Do vậy ngay cả khi học sinh quên điều kiện này thì vẫn làm được. Bài toán sẽ trở lên rất khó và nhiều em làm sai nếu nghiệm của phương trình $y' = 6$ thỏa mãn phương trình $y'' = 0$.

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x); y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ $-3; -1; 1$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số bằng ?

LG. Ta có $f(x) - g(x) = m(x+3)(x+1)(x-1)$, với $-3m = f(0) - g(0) = -\frac{3}{2}$. Vậy

$$dtich = \left| \int_{-3}^{-1} \frac{1}{2}(x+3)(x^2-1)dx - \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(x+3)(x^2-1)dx \right| = 4.$$

Nhận xét. Bài này nếu học sinh sử dụng cách thay từng nghiệm vào để tìm các hệ số của $f - g$ thì vẫn được. Tuy nhiên sẽ mất nhiều thời gian. Học sinh khá giỏi sẽ tư duy như trên và không mất công tính toán (bước tích phân học sinh có thể bấm máy). Việc cho hình minh họa trong bài này là một điểm không hay, vì sẽ hướng học sinh đến việc dựng lại hàm f và g .

Câu 42. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$, $A'M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng ?

LG. Mặt phẳng qua M vuông góc với cạnh bên khối lăng trụ cắt AA', BB', CC' tại A_1, B_1, C_1 . Khi đó tam giác $A_1B_1C_1$ là thiết diện ngang của khối lăng trụ và là tam giác vuông có hai cạnh bên $1; \sqrt{3}$ và cạnh đáy 2, đường trung tuyến là $A_1M = 1$ (một nửa cạnh đáy). Do đó

$$AA' = \frac{A'M^2}{A_1A'} = \frac{A'M^2}{\sqrt{A'M^2 - A_1M^2}} = \frac{4/3}{\sqrt{4/3 - 1}} = \frac{4}{\sqrt{3}}; V = AA' \cdot S_{A_1B_1C_1} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = 2.$$

Nhận xét. Đây là bài tính thể tích dựa trên ý tưởng nguyên thủy: số đo thể tích bằng số đo diện tích thiết diện ngang nhân với độ dài đường sinh. Tuy nhiên nếu học sinh không nhìn ra ý tưởng này (từ việc cho khoảng cách giữa các đường sinh) mà dựng hình, tính chiều cao thì sẽ rất phức tạp.

Câu 43. Ba bạn A; B; C viết ngẫu nhiên 1 số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 17]$. Xác suất để tổng 3 số viết ra chia hết cho 3 là

LG. Chia tập hợp các số tự nhiên $[1;17]$ thành 3 nhóm đồng dư theo modun 3. Có 2 nhóm 6 phần tử, 1 nhóm 5 phần tử. Ba số được viết ra có tổng chia hết cho 17 khi và chỉ khi cùng thuộc 1 nhóm hoặc thuộc 3 nhóm khác nhau. Vậy xác suất bằng

$$\frac{2.6^3 + 5^3 + 3!.6.6.5}{17^3} = \frac{1637}{4913}.$$

Nhận xét. Đây là bài xác suất nhẹ nhàng đơn giản, không phải tính toán. Tuy nhiên kết hợp với 1 chút số học nên sẽ gây ra lúng túng cho không ít học sinh. Học sinh có tư duy tốt mới nhận ra được. Việc chia lớp đồng dư mang hơi hướng của toán cao cấp.

Câu 44. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng ?

LG. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số ta dễ thấy

$$VP \geq \log_{3a+2b+1}(6ab+1) + \log_{6ab}(3a+2b+1) \geq 2\sqrt{\log_{3a+2b+1}(6ab+1) \cdot \log_{6ab}(3a+2b+1)} = 2.$$

Dấu bằng xảy ra tương đương với $\begin{cases} 3a = b \\ 3a + 2b = 6ab \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}; b = \frac{3}{2} \Rightarrow a + 2b = \frac{7}{2}.$

Nhận xét. Mặc dù ở câu số 44, nhưng đây là câu dễ nhất trong mức vận dụng cao vì bất đẳng thức Cauchy bị lộ ngay từ đầu khi xuất hiện $(3a + 2b + 1)$ trong cả hai số hạng. Nhưng phần lớn học sinh không nghĩ đến việc dùng bất đẳng thức Cauchy vì nó nằm trong chương trình lớp 10 THPT.

Câu 45. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) .

Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh thuộc (C) . Đoạn thẳng AB có độ dài bằng ?

LG. Ta thấy $(C): y = 1 - \frac{3}{x+2} \Leftrightarrow Y = -\frac{3}{X}, (Y = y-1; X = x+2)$. Trong tọa độ mới (tính tiền tọa độ không làm thay đổi độ dài vectơ) $I(0;0)$. Do (C) là hyperbol thuộc góc 2 và 4, nên hai đỉnh A, B không thể thuộc về hai nhánh khác nhau của (C) mà phải cùng thuộc về 1 nhánh và đối xứng qua đường phân giác của góc tọa độ thứ 2 (trong hệ IXY). Vậy nếu $A(X;Y)$ thì $B(-Y;-X)$ và

$$IA^2 = AB^2 \Rightarrow X^2 + Y^2 = 2(X+Y)^2 = 2X^2 + 2Y^2 - 12 \Rightarrow AB^2 = X^2 + Y^2 = 12 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}.$$

Nhận xét. Tương tự bài 35 (thuộc mức vận dụng thấp), bài này kiểm tra về dáng điệu của hàm bậc nhất trên bậc nhất nhưng ở mức cao hơn là tính đối xứng của đồ thị. Học sinh không nắm chắc kiến thức vẫn có thể làm được bằng phương pháp tính toán cồng kềnh. Khi nắm được bản chất thì sẽ đưa ra lời giải ngắn gọn như trên.

Câu 46. Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x-m)$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $(-20;20)$ để phương trình có nghiệm ?

LG. Đặt $u = 5^x + m$, ta được hệ $\begin{cases} u = 5^x + m \\ x = 5^u + m \end{cases} \Leftrightarrow u = x$ (do hàm $5^x + m$ đơn điệu tăng). Vậy phương

trình đã cho tương đương với $m = x - 5^x = f(x)$. Ta có $f'(x) = 1 - (\ln 5) \cdot 5^x = 0 \Leftrightarrow x = \log_5(1/\ln 5)$.

Từ đó dễ thấy $f_{\max} = f(\log_5(1/\ln 5)) \in (-1; 0)$; ycbt $\Leftrightarrow m \leq f_{\max}$. Vậy $m = -19; \dots; -1$.

Do đó có 19 giá trị của m .

Nhận xét. Đây là dạng bài sử dụng tính đơn điệu của hàm số kết hợp với tính toán hàm logarit. Nói chung đây là kiểu bài quen thuộc. Sau bài 47 thì đây là bài dễ nhất vì mức độ đòi hỏi tư duy ít.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 1; 2)$ và đi qua điểm $A(1; -2; -1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng ?

LG. Đặt $a = AB, b = AC, c = AD$. Khi đó $AI^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 27$.

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2R)^2 = 4AI^2 = 108; V = \frac{abc}{6} \leq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^{3/2}}{\sqrt{3} \cdot 6} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 6^3}{3\sqrt{3} \cdot 6} = 36.$$

Vậy $V_{\max} = 36$.

Nhận xét. Đối với bài này, học sinh chỉ cần hình dung được mặt cầu đã cho phải ngoại tiếp hình hộp chữ nhật dựng trên các tia AB, AC, AD . Việc tính toán gần như không có.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$; $f'(x) = 2x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $f(1) = ?$

LG. Dễ thấy $\frac{f'}{f^2} = 2x \Rightarrow -\frac{1}{f} = x^2 + C$; $C = -\frac{1}{f(2)} - 4 = \frac{1}{2} \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{1^2 + 1/2} = -\frac{2}{3}$.

Nhận xét. Đây là một bài nguyên hàm đơn giản, việc cho f' và f^2 ở hai vế gần như gợi ý luôn hướng giải. Có thể băn khoăn rằng việc chia 2 vế cho f^2 có hợp lệ không. Câu trả lời là có. Vì nếu giả sử tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) = 0$. Không mất tổng quát ta xem $x_0 > 2$ là số nhỏ nhất có tính chất

này, như vậy trên một khoảng dạng $(b; x_0), b < 2$, thì $f(x) = -\frac{1}{x^2 + C}$ với 1 hằng số C nào đó. Lấy

giới hạn của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ thì $-\frac{1}{x_0^2 + C} = 0$. Đây là điều vô lý. Tất nhiên là với câu hỏi trắc

nghiệm thì học sinh sẽ không phải băn khoăn về bước này vì khi đã tìm được hàm $f(x) = -\frac{1}{x^2 + C}$ thì đó chắc chắn phải là hàm đầu bài đã cho.

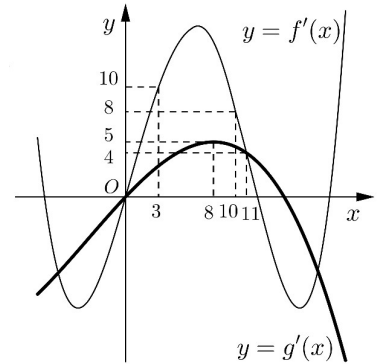
Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \{x = 1 + 3t; y = 1 + 4t; z = 1\}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(1; 1; 1)$ có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là ?

LG. Ta có $\vec{u}_d = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 0\right)$. Vì $\vec{u}_d \cdot \vec{u} = -1 < 0$ nên chọn $\vec{u}_\Delta = -\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$;

$\vec{u}_{pg} = \vec{u}_d + \vec{u}_\Delta = \left(\frac{4}{15}; \frac{22}{15}; -\frac{10}{15}\right)$. Vậy đường phân giác là $d': \{x = -1 + 2t; y = -10 + 11t; z = 6 - 5t\}$.

Nhận xét. Bài này có thể gây khó khăn cho thí sinh khi phải lựa chọn giữa phân giác trong và phân giác ngoài của góc. Còn phương pháp chuẩn hóa vector để tìm vector chỉ phương của đường phân giác là khá quen thuộc.

Câu 50: Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong **đậm hơn** là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x + 4) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?



LG. Đây là câu duy nhất trong đề thi mà việc sử dụng phương pháp loại trừ đáp án sẽ tìm ra kết quả nhanh nhất. Ta thấy $f'(x+4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right)$. Như vậy sẽ đưa đến việc so sánh giá trị của f' và 2 lần giá trị của g' . Nếu để ý sẽ thấy các số $10 = 5 \cdot 2; 8 = 4 \cdot 2$. Như vậy nhiều khả năng để h nghịch biến thì miền giá trị của bên f' nằm dưới 8, còn miền giá trị của bên g' nằm trên 4. Từ duy luận đó và xét các điểm đặc biệt trên trục hoành ta thấy $h'(6) = f'(10) - 2g'(10, 5) < 8 - 2 \cdot 4 = 0$. Vậy phương án A, C, D đều chứa 1 khoảng xung quanh giá trị 6 mà trên đó h nghịch biến. Vậy đáp án đúng là B. Thực tế trên khoảng này, giá trị bên f' lớn hơn 10, giá trị bên g' nhỏ hơn 5.

Nhận xét. Đây là bài tuy phát biểu tương phức tạp nhưng lời giải khá đơn giản. Hầu hết các yếu tố cần thiết đã xoay quanh các cột mốc trên trục hoành. Hai giá trị 5 và 10 trên trục tung chỉ để đảm bảo B là phương án đúng, còn 2 giá trị 4 và 8 sẽ giúp loại cả 3 phương án sau.